Tentative de classification des groupes additifs munis d'une multiplication anticommutative.

Définition. Anticommutativité.

Soit E un ensemble muni d'une addition interne, +, et d'une multiplication interne, ., ainsi que d'un neutre additif qui sera noté 0_E. L'ensemble {E, +, ., 0_E} est dit muni d'une opération multiplicative interne anticommutative si chacun de ses éléments satisfait à la relation :

$$\forall\ a, b \in E : a.\ b + b.\ a = 0_E$$

Remarque. Sur l'existence de deux nombres stratégiques.

Rien ne garantit l'existence des nombres 1_E et 2_E dans E.

Définition. Le neutre multiplicatif.

E est muni d'un neutre multiplicatif s'il contient un nombre symboliquement noté 1_E tel que :

$$\forall\ a \in E : a.\ 1_E = 1_E.\ a = a$$

Définition. Le nombre deux.

E est muni du nombre deux, noté symboliquement 2_E, si l'addition de l'un de ses éléments avec lui-même permet d'écrire :

$$\forall\ a \in E : a + a = 2_E.\ a$$

Définition. Ensemble modulo deux.

E est dit être un ensemble modulo deux si chacun de ses éléments est son propre neutre additif :

$$\forall\ a \in E : a + a = 0_E$$

Définition. Ensemble modulo N, entier naturel non nul et différent de 1_E.

E est dit être un ensemble modulo N, entier naturel non nul et différent de 1_E, lorsque l'addition répétée N fois de chacun de ses éléments vaut son neutre additif :

$$\forall\ a \in E : a + a + \ldots \text{ (au total N fois) } \ldots + a = 0_E$$

Remarque. Classification en rapport avec l'anticommutativité.

Les définitions précédentes autorisent en principe à envisager les types suivants :

1. Ensemble {E, +, ., 0_E} modulo deux et dépourvu de 1_E. Si ce type existe, il se caractérise par la possibilité d'écrire en particulier :

   $$\forall\ a \in E : a.\ a + a.\ a = a^2 + a^2 = 0_E$$

   Comme il n'a ni 1_E, ni 2_E, l'anticommutativité y est définie si chaque carré de ses éléments est son propre neutre. Les ensembles d'éléments dépourvus des nombres 1_E et 2_E mais dont les carrés sont nuls appartiennent de facto à ce type. Certaines représentations matricielles des spineurs définis par E. Cartan peuvent peut-être faire partie de ce type d'ensembles.

2. Ensemble {E, +, ., 0_E} modulo deux et pourvu de 1_E. Si ce type existe, il se caractérise par la possibilité d'écrire pour chacun de ses éléments :

   $$\forall\ a \in E : a.\ 1_E + 1_E.\ a = a + a = 0_E$$

   Cette relation est compatible avec la définition de l'anticommutativité. Elle peut en particulier être écrite pour son neutre multiplicatif ; ce qui conduit à deux constats :

a) La notion de signe « plus » et « moins » n'a pas de sens sur ce type d'ensemble ;
b) Bien que le nombre 2 n'existe pas ici, son « fantôme » est le résultat nul de $1_E + 1_E$.

Je ne connais pas d'exemple concret de ce type d'ensembles.

3. Ensemble $\{E, +, ., 0_E\}$ pourvu des nombres 1_E et 2_E. Si ce type existe, il se caractérise par la possibilité d'écrire pour chacun de ses éléments :

$$\forall\, a \in E : a.\, 1_E + 1_E.\, a = a + a = 2_E.\, a$$

Cette relation n'est compatible avec la définition de l'anticommutativité que pour le cas où a = 0_E. Ce qui semble être sans intérêt, excepté le fait que cette relation ne rend pas compte de la richesse de la définition de l'anticommutativité appliquée aux ensembles de matrices.

4. Ensemble $\{E, +, ., 0_E\}$ dépourvu du nombres 1_E mais pas de 2_E. Si ce type existe, il se caractérise par la possibilité d'écrire pour chacun de ses éléments :

$$\forall\, a \in E: a.\, a + a.\, a = a^2 + a^2 = 2_E.\, a^2$$

Cette relation n'est compatible avec la définition de l'anticommutativité que pour les cas où le carré de chacun de ses éléments est nul. Certaines représentations matricielles des spineurs définis par E. Cartan peuvent peut-être faire partie de ce type d'ensembles [01 ; § 106, p. 93].

Bibliographie :

[01] Cartan, E.: The theory of spinors, 1981, Dover Publications, U.S.A, ISBN 0-486-64070-1, 157 pages.