Etude approfondie de la Loi de Lorentz-Einstein sous l'angle des décompositions des produits tensoriels déformés

©Thierry PERIAT, ISBN 978-2-36923-112-7, v4-4

14 novembre - 07 décembre 2016

Les explorations respectives des produits tensoriels déformés, des produits extérieurs déformés et des produits de Lie déformés ont permis de mettre en évidence deux méthodes de décomposition de ces produits. La méthode intrinsèque ne fonctionne pour l'heure que dans les espaces mathématiques de dimension trois et uniquement pour les produits de Lie déformés. La méthode extrinsèque revêt un aspect beaucoup plus universel mais s'accompagne d'insuffisances. Ce document complète l'analyse des résultats obtenus par cette méthode au travers d'une étude intensive de la loi de Lorentz-Einstein.

Contents

French

1 L'exemple physique du terme gravitationnel apparu dans la loi de Lorentz-Einstein

1.1 Rappel du contexte de la discussion physique

Le terme gravitationnel apparu dans la loi de Lorentz-Einstein, ses dérivations ordinaires successives par rapport à une abcisse curviligne et ses décompositions triviales ont été examinés attentivement dans [[a]]. L'objectif était de découvrir un lien mathématique plausible entre les variations spontanées de ce terme et une équation différentielle d'ordre trois caractérisant le comportement d'une corde élastique. Pour parvenir à ce but, l'étude des décompositions non-triviales de ce terme est apparue être une nécessité logique.

Remarque 1.1. ***Rappels concernant la méthode extrinsèque***

C'est la raison pour laquelle ce cas a été effleuré à la fin de [[a]] sur la base des premiers éléments connus sur la méthode extrinsèque par ailleurs déjà exposée dans son essence à travers le document anglophone [[b]]. La méthode de décomposition extrinsèque implique :

1. l'existence implicite d'une métrique locale -ce que les physiciens admettent aujourd'hui dans leur grande majorité. Cette métrique, représentée par la matrice (4-4) [G], est supposée être inversible ;
2. l'existence d'un produit scalaire construit sur cette métrique et dont il est supposé qu'il s'annule en même temps que la décomposition tend à être exacte.

Remarque 1.2. ***L'essence de la méthode extrinsèque***

L'adéquation avec l'exactitude de la décomposition extrinsèque proposée pour un produit tensoriel déformé donné constitue en fait l'essence de cette méthode et sa faiblesse. Son essence en ce sens que la décomposition envisagée devient par construction de plus en plus exacte au fur et à mesure que le scalaire associé avec elle tend vers zéro. Sa faiblesse : parce que la nullité du scalaire associé peut aussi signifier l'orthogonalité entre le défaut de réalisation de la décomposition présumée et l'argument du produit utilisé pour calculer ce scalaire associé (voir l'exposé dans [b]).

Exemple 1.1. ***Le terme gravitationnel***

Lorsqu'une des décompositions possibles d'un produit tensoriel déformé n'est pas triviale, elle comporte un reste (ou résidu) qui est noté conventionnellement $\mathbf{z}$. La méthode extrinsèque livre par exemple la décomposition non-triviale suivante pour le terme gravitationnel [[b] ; p.4, (6.03)] :

$$|\mathbf{G}> = \rho\,.\,\{\Phi_{\Gamma(2)}(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\,.\,[G]^{-1}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, [G]\,.\,|\mathbf{z}>)\}\,.\,|\mathbf{u}> + \rho\,.\,|\mathbf{z}>$$

S'il est "physiquement" envisageable de passer de manière continue d'une décomposition triviale à une qui ne l'est pas, elle introduit donc un ensemble de termes nuls qui permettent de définir une classe d'équivalence entre des décompositions non-triviales et une décomposition triviale donnée ; à savoir puisque dans ce cas précis (la continuité est réalisée) :

$$|\mathbf{G}> - \rho\,.\,\Phi_{\Gamma(2)}(\mathbf{u})\,.\,|\mathbf{u}> = |\mathbf{0}> = \rho\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,[G]^{-1}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, [G]\,.\,|\mathbf{z}>)\,.\,|\mathbf{u}> + |\mathbf{z}>\}$$

$$\downarrow$$

$$|\mathbf{0}> = \frac{1}{2}\,.\,[G]^{-1}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, [G]\,.\,|\mathbf{z}>)\,.\,|\mathbf{u}> + |\mathbf{z}>$$

Il sera pertinent de considérer la :

1.2 Classe d'équivalence attachée à une décomposition triviale

Definition 1.1. ***Classe d'équivalence attachée à une décomposition triviale***

$$C\{\Phi_{\Gamma(2)}(\mathbf{u})\} \;=\; \{([G],\mathbf{z})\,|\,\frac{1}{2}\,.\,[G]^{-1}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}},[G]\,.\,|\mathbf{z}>)\,.\,|\mathbf{u}> \,+|\mathbf{z}>= \,|\mathbf{0}>\}$$

Remarque 1.3. ***Sur la définition des classes d'équivalence***

Cette définition appelle plusieurs précisions :

1. Dans le cadre de la méthode extrinsèque, il existe une liberté totale de choix concernant la forme bilinéaire impliquée dans le calcul du scalaire associé.

2. Il faut également remarquer ici que la version la plus générale de la méthode extrinsèque fait intervenir une table de Pythagore dans laquelle les dérivations partielles s'effectuent par rapport aux diverses composantes du vecteur "cible" (le second argument dans un produit tensoriel déformé). Ici et exceptionnellement, il se trouve que le "projectile" (le premier argument impliqué dans le produit) coincide avec la cible : la vélocité. C'est la réalité technique qui rend possible la correspondance proposée parce qu'elle évite de devoir introduire un acteur supplémentaire dans la caractérisation des diverses décompositions.

3. Telle que la définition vient d'en être proposée, une classe d'équivalence fait correspondre un cube de Christoffel (une connexion de Levi-Civita) et une vélocité, **u** à une métrique, [G], et un résidu, **z** ; ce qui peut s'écrire symboliquement :
$$(\Gamma(2),\mathbf{u}),\rightarrow\;([G],\mathbf{z})$$
Par ailleurs, comme au sein de la théorie proposée par A. Einstein, il y a une correspondance bi-univoque entre la connexion de levi-Civita et la métrique (la connexion est dite "métrique compatible" et il n'y a qu'une connexion ayant cette propriété), la définition qui vient d'être proposée fait en réalité correspondre un résidu à une vélocité.
$$\Gamma(2)\;\Longleftrightarrow\;[G]\,;\,\mathbf{u}\,\rightarrow\,\mathbf{z}$$

4. Quand il n'est pas possible de "passer" de façon continue de la décomposition triviale à celle qui ne l'est pas, alors toutes les décompositions mathématiquement autorisées ne peuvent plus être équivalentes dans la réalité physique et il existe fort probablement un critère d'ordre physique justifiant cette non-équivalence ; par exemple : un niveau d'énergie à franchir entre deux décompositions. Cette intuition trouve sa source dans la formulation même de la loi de Lorentz-Einstein. En effet, les décompositions naturelles du terme gravitationnel, **G**, ne sont rien d'autre que les représentations matricielles du tenseur champ électromagnétique (EM) : [F] ; et il est connu que (a) ces représentations suffisent à calculer le Lagrangien du champ ; (b) l'énergie est quantifiée.

Pour l'heure, la définition proposée dit qu'une décomposition extrinsèque non-triviale est équivalente à une décomposition triviale donnée si la relation ci-dessus est vérifiée. Plusieurs cas peuvent en principe se présenter :

1.3 Les éléments d'une classe d'équivalence lorsque la géométrie ne varie pas avec la vélocité

Proposition 1.1. *L'invariance d'une métrique vis à vis de la vélocité a pour conséquence de faire disparaitre cette métrique de la relation caractérisant la classe d'équivalence considérée.*

Preuve 1.1.

$$\frac{1}{2} \, . \, [G]^{-1} \, . \, T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, [G] \, . \, |\mathbf{z}>) \, . \, |\mathbf{u}> \, + |\mathbf{z}> = \, |\mathbf{0}>$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2} \, . \, g^{\alpha\chi} \, . \, \partial_{u^\beta}(g_{\chi\psi} \, . \, z^\psi) \, . \, u^\beta \, + \, z^\alpha \, = \, 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2} \, . \, g^{\alpha\chi} \, . \, g_{\chi\psi} \, . \, \partial_{u^\beta} z^\psi \, . \, u^\beta \, + \, z^\alpha \, = \, 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2} \, . \, \delta^\alpha_\psi \, . \, \partial_{u^\beta} z^\psi \, . \, u^\beta \, + \, z^\alpha \, = \, 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2} \, . \, \partial_{u^\beta} z^\alpha \, . \, u^\beta \, + \, z^\alpha \, = \, 0$$

L'appartenance à une classe d'équivalence, telle qu'elle vient d'être définie dans cette théorie, pose alors la question de l'analyse de la relation :

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, \, \mathbf{z}) \, . \, |\mathbf{u}> \, + 2.|\mathbf{z}> = \, |\mathbf{0}>$$

Definition 1.2. ***Table de Pythagore - principe***

Le symbole T2(o)(...,...) désignant ce que j'ai nommé une "table de Pythagore" pour l'opération binaire (d'où le "2") de composition des fonctions. Je vais cependant en rappeler le principe brièvement avec la définition suivante :

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, \, \mathbf{z}) \, = \, \begin{pmatrix} \partial_{u^0} z^0 & \partial_{u^1} z^0 & \partial_{u^2} z^0 & \partial_{u^3} z^0 \\ \partial_{u^0} z^1 & \partial_{u^1} z^1 & \partial_{u^2} z^1 & \partial_{u^3} z^1 \\ \partial_{u^0} z^2 & \partial_{u^1} z^2 & \partial_{u^2} z^2 & \partial_{u^3} z^2 \\ \partial_{u^0} z^3 & \partial_{u^1} z^3 & \partial_{u^2} z^3 & \partial_{u^3} z^3 \end{pmatrix}$$

L'objectif est évidemment de découvrir comment exprimer $\mathbf{z}$ en fonction de $\mathbf{u}$ et, éventuellement de ses dérivées partielles successives. Dans ce contexte, il faut remarquer que le résidu semble dépendre de la cible $\mathbf{u}$; grossièrement : $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{u})$.

Proposition 1.2. *Il n'existe pas de solution triviale du genre :*

$$\mathbf{z} \, = \, k.\mathbf{u}$$

Preuve 1.2.

Cette solution triviale reviendrait en effet à écrire dans le language des composantes :

$$z^\alpha = k.u^\alpha$$

Par conséquent, la solution proposée -si elle était vraie- permettrait d'écrire :

$$k.\partial_{u^\beta} u^\alpha \,.\, u^\beta + 2.k.u^\alpha = 0 \to k.\delta^\alpha_\beta \,.\, u^\beta + 2.k.u^\alpha = 0 \to 3.k.u^\alpha = 0$$

Ce qui n'est possible que dans deux cas logiques : (a) si k = 0 quelle que soit la vitesse **u** et (b) si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ quelle que soit la valeur de k. Le premier cas correspond tout simplement à la décomposition triviale (le résidu **z** est nul) qui a généré la classe d'équivalence. La seconde éventualité n'a aucun sens ici puisque personne ne sait dériver par rapport au vecteur nul - c.q.f.d.

Theorem 1.1. ***de non-linéarité*** *Le résidu, s'il n'est pas nul, ne peut pas être colinéaire à l'argument "cible".*

Proposition 1.3. *La solution suivante est acceptable :*

$$z^\alpha = \sum_\gamma m^\alpha_\gamma \,.\, u^\gamma$$

Preuve 1.3. *En effet, en l'injectant dans la relation définissant la relation d'équivalence, il vient obligatoirement :*

$$\partial_{u^\beta}(\sum_\gamma m^\alpha_\gamma \,.\, u^\gamma) \,.\, u^\beta + 2.\sum_\gamma m^\alpha_\gamma \,.\, u^\gamma = 0 \to m^\alpha_\beta \,.\, u^\beta + 2.\sum_\gamma m^\alpha_\gamma \,.\, u^\gamma = 0$$

$$\downarrow$$

$$3.\sum_\gamma m^\alpha_\gamma \,.\, u^\gamma = 0 \iff [M] \,.\, |\mathbf{u}> = |\mathbf{0}>$$

Par suite la solution proposée ici impose d'avoir et ne vaut donc que pour un résidu nul. Or une décomposition à résidu nul est bien un élément évident/naturel de la classe d'équivalence - donc c.q.f.d. Si la solution proposée correspond à une système non dégénéré (le déterminant de la matrice [M] n'est pas nul), la vitesse **u** est forcément nulle. Dans tous les autres cas, le système est dégénéré et les composantes de la vitesse **u** sont forcément liées entre elles (ce qui est le cas si par exemple la norme est nulle).

Lorsque la vitesse **u** peut être considérée comme un spineur (au sens d'E. Cartan) dont les composantes sont déterminées par un système d'équations ad hoc (voir [01] ; §IV], p. 93), les matrices [M] représentant ce système génèrent des résidus nuls. Ces résidus appartiennent forcément à la classe d'équivalence liée à / déterminée par la vitesse **u** dans le sens qui vient d'être spécifié ci-dessus. Par conséquent, dans un espace dont la géométrie ne varie pas,

Théorème 1.1. ***des spineurs*** *lorsque les solutions de la théorie de la relativité générale énoncée par A. Einstein [02] peuvent s'interpréter comme des spineurs d'E. Cartan, toutes les matrices carrées (4-4) symbolisant les systèmes d'équations définissant ces spineurs génèrent des décompositions triviales du terme gravitationnel aparaissant dans la loi de Lorenz-Einstein.*

Exemple 1.2. ***La version bidimensionnelle du problème***

Pour illustrer le théorème précédent, je vais considérer la version tridimensionnelle du problème examiné. Dans un espace des positions de dimension trois, génériquement dénoté $\mathbf{x}$, les spineurs n'ont en réalité que deux composantes [[01] ; §52, p. 41] et se laissent donc représenter par des matrices carrées (2-2) dont le formalisme est bien connu, simple et connecté en physique à la notion de tenseur de polarisation électromagnétique; in extenso :

$$^{(2)}[X] = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i\,.\,x_2 \\ x_1 + i\,.\,x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \in M(2,C)$$

Le système ad hoc représentant le spineur "attaché" à cette position est donné avec la relation :

$$^{(2)}[X]\,.\,|^{(2)}\eta >= |\mathbf{0}>$$

La partie précédente de l'exposé dit que si le spineur "eta" est une solution d'une théorie donnée (par exemple celle de l'électromagnétisme) et qu'il existe une sorte d'isomorphisme entre ce spineur et le système des équations qui le représente (lui-même symbolisé par la matrice carrée [X]), alors la relation ci-dessus pourrait s'interpréter comme étant une relation définissant des décompositions triviales d'un produit tensoriel déformé entre deux vecteurs/spineurs de dimension deux du genre :

$$|\otimes_{cube}(^{(2)}...,^{(2)}\eta)>= {}^{(2)}[P]\,.\,|^{(2)}\eta> + |^{(2)}\mathbf{z}>$$

Ce genre de produits se décompose de manière extrinsèque en fournissant la relation générique :

$$^{(2)}[P] = \Phi_{cube}(^{(2)}...) + \frac{1}{2}\,.\,^{(2)}[G]^{-1}\,.\,T_2(o)(\partial_\eta,^{(2)}[G]\,.\,|^{(2)}\mathbf{z}>)$$

Dans le cas examiné ici (celui des métriques indépendantes de la cible, donc du spineur eta), j'ai montré plus haut que cette relation générique se réduit à:

$$^{(2)}[P] = \Phi_{cube}(^{(2)}...) + \frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_\eta,^{(2)}\mathbf{z})$$

Conformément à l'état d'esprit de ce travail, elle permet de définir la classe d'équivalence attachée à une décomposition triviale comme étant l'ensemble des résidus $\mathbf{z}$ tels que:

$$C\{\Phi_{cube}(...),\eta\} = \{\mathbf{z} \in E(2,C)\,|\,\frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_\eta,^{(2)}\mathbf{z})\,.\,|^{(2)}\eta> + |\mathbf{z}>= |\mathbf{0}>\}$$

Une décomposition dont le résidu est nul est forcément un élément trivial et, par conséquent, un élément de la classe d'équivalence. De sorte que, si d'une manière générale, ce résidu dépend du spineur eta, alors il peut peut-être exister des situations telles que ce résidu est nul alors que ses dérivées partielles secondes ne le sont pas. Ces situations correspondent à :

$$^{(2)}\mathbf{z} = {}^{(2)}\mathbf{0}\,;\, T_2(o)(\partial_\eta,^{(2)}\mathbf{z})\,.\,|^{(2)}\eta>= |\mathbf{0}>$$

La jonction logique avec le début de ce paragraphe est assurée chaque fois qu'il est possible d'écrire :

$$^{(2)}\mathbf{z} = {}^{(2)}\mathbf{0}\,;\, T_2(o)(\partial_\eta,^{(2)}\mathbf{z}) = {}^{(2)}[X]$$

Si je reviens maintenant à l'exemple physique qui sert de fil conducteur, je peux affirmer que le raisonnement précédent aboutit toujours au corollaire suivant :

Corollaire 1.1. *Si d'une manière générale, les résidus d'une classe d'équivalence (a) dépendent de la vitesse* $\mathbf{u}$ *alors que celle-ci se laisse interpréter comme un spineur, (b) peuvent être accidentellement nuls alors que les dérivées partielles de leurs composantes ne le sont pas toutes et toujours, alors il devrait exister des situations caractérisées par une géométrie indépendante de cette vitesse et par la relation matricielle :*

$$^{(4)}\mathbf{z} \,=\, ^{(4)}\mathbf{0}\,;\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}},^{(4)}\mathbf{z}) \,=\, ^{(4)}[M]$$

dans laquelle la matrice carrée (4-4) [M] a cette fois-ci un formalisme entièrement déterminé par le fait qu'elle doit représenter le spineur $\mathbf{u}$ *selon une procédure fixée par E. Cartan dans [01]. De sorte que dans ces cas :*

$$^{(4)}[M]\,.\,|^{(4)}\mathbf{u}>=\,|^{(4)}\mathbf{0}>$$

Remarque 1.4. ***Présence d'une Hessienne***

La relation caractérisant la classe d'équivalence a une étrange propriété. En effet, en injectant la valeur proposée pour $\mathbf{z}$ une première fois, il vient :

$$1/2.\sum_{\beta}\partial_{u^\beta}[\sum_{\gamma}\partial_{u^\gamma}z^\alpha\,.\,u^\gamma]\,.\,u^\beta \,+\, 2.z^\alpha \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$1/2.\sum_{\beta}\sum_{\gamma}\partial^2_{u^\beta u^\gamma}z^\alpha\,.\,u^\gamma\,.\,u^\beta \,+\, 1/2.[\sum_{\gamma}\partial_{u^\gamma}z^\alpha\,.\,\sum_{\beta}\partial_{u^\beta}u^\gamma]\,.\,u^\beta \,+\, z^\beta \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$1/2.\sum_{\beta}\sum_{\gamma}\partial^2_{u^\beta u^\gamma}z^\alpha\,.\,u^\gamma\,.\,u^\beta \,+\, 1/2.[\sum_{\gamma}\partial_{u^\gamma}z^\alpha\,.\,\sum_{\beta}\delta^\gamma_\beta]\,.\,u^\beta \,+\, z^\beta \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$1/2.\sum_{\beta}\sum_{\gamma}\partial^2_{u^\beta u^\gamma}z^\alpha\,.\,u^\gamma\,.\,u^\beta \,+\, 1/2.\sum_{\beta}\partial_{u^\beta}z^\alpha\,.\,u^\beta \,+\, z^\beta \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$1/2.\sum_{\beta}\sum_{\gamma}\partial^2_{u^\beta u^\gamma}z^\alpha\,.\,u^\gamma\,.\,u^\beta \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$<\mathbf{u}|\,.\,\{Hess_{(\mathbf{u},0)}z^\alpha(\mathbf{u})\,.\,|\mathbf{u}>\} \,=\, 0$$

Ce qui revient à avoir démontré que les composantes du résidu, lorsqu'elles existent, définissent autant de Hessiennes classiques (en absence de référence à une courbure locale) relativement aux composantes de la cible (ici la vitesse $\mathbf{u}$) qui chacune satisfait la relation ci-dessus.

Théorème 1.2. ***des Hessiennes*** *Dans un espace dont la géométrie ne varie pas en fonction des vitesses, quelque soit le résidu d'une décomposition triviale, toutes les Hessiennes de ses diverses composantes satisfont obligatoirement à la relation ci-dessus.*

Remarque 1.5. ***Sur les métriques Hessiennes***

Sans qu'il soit possible d'interpréter ce constat ni même de savoir s'il est juste, chaque composante semble se comporter comme une métrique Hessienne. L'idée selon laquelle D telles métriques puissent être définies simultanément pose cependant a priori un problème conceptuel ; sauf si chacune de ces D métriques est localement rapportée à une des D faces d'un objet géométrique circonscrivant un point précis de l'espace des $\mathbf{z}$.

Remarque 1.6. ***Spineurs et Hessiennes des composantes du résidu nul instable***

Quoiqu'il en soit, la relation qui vient d'être mise en évidence contient une famille de situations particulières suffisantes à la valider ; à savoir, il suffit que :

$$\forall \alpha \,,\, Hess_{(\mathbf{u},0)} z^{\alpha}(\mathbf{u}) \,.\, |\mathbf{u}> = \; 0$$

pour que cette relation soit satisfaite. J'en viens donc à faire la

Proposition 1.4. ***Sur les Hessiennes des composantes des résidus nuls instables****: Un résidu* ***z(u)*** *"instable" (équivalent à : ses dérivées partielles successives ne sont pas nécessairement toutes et toujours nulles) mais accidentellement nul pourrait (formellement au moins) générer des Hessiennes classiques constituant un sous-ensemble de l'ensemble des matrices carrées (4-4) symbolisant les systèmes d'équations définissant la vitesse* **u** *comme un spineur à la E. Cartan (voir plus haut le théorème des spineurs).*

Mais qu'en est-il vraiment? Soit la relation générique :

$$^{(4)}[M] \,.\, |^{(4)}\mathbf{u}> = \; |^{(4)}\mathbf{0}>$$

Elle permet d'obtenir les dérivations partielles :

$$\{\partial^{(4)}_{u^{\alpha}}[M]\} \,.\, |^{(4)}\mathbf{u}> \; + {}^{(4)}[M] \,.\, |\partial^{(4)}_{u^{\alpha}}\mathbf{u}> = \; |^{(4)}\mathbf{0}>$$

Le vecteur apparaissant dans le second terme de la somme située à gauche du signe de l'égalité représente un vecteur de base dans l'espace des vitesses ; il ne peut pas être nul.

$$\partial^{(4)}_{u^{\alpha}}\mathbf{u} \; = \; {}^{(4)}\mathbf{e}_{\alpha} \; \neq \; {}^{(4)}\mathbf{0}$$

Il faut remarquer par ailleurs que :

$$\partial^{(4)}_{u^{\alpha}}[M] \; = \; \begin{pmatrix} \partial_{u^{\alpha}} m_{00} & \partial_{u^{\alpha}} m_{01} & \partial_{u^{\alpha}} m_{02} & \partial_{u^{\alpha}} m_{03} \\ \partial_{u^{\alpha}} m_{10} & \partial_{u^{\alpha}} m_{11} & \partial_{u^{\alpha}} m_{12} & \partial_{u^{\alpha}} m_{13} \\ \partial_{u^{\alpha}} m_{20} & \partial_{u^{\alpha}} m_{21} & \partial_{u^{\alpha}} m_{22} & \partial_{u^{\alpha}} m_{23} \\ \partial_{u^{\alpha}} m_{30} & \partial_{u^{\alpha}} m_{31} & \partial_{u^{\alpha}} m_{32} & \partial_{u^{\alpha}} m_{33} \end{pmatrix} \; \in \; M(4, C)$$

Le théorème des spineurs et son corollaire peuvent maintenant servir de point de départ pour examiner la proposition. En effet, dans le cadre de ce théorème supposé validé a priori :

$$^{(4)}\mathbf{z} \; = \; {}^{(4)}\mathbf{0} \,;\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, {}^{(4)}\mathbf{z}) \; = \; {}^{(4)}[M]$$

$$\{\partial_{u^{\alpha}} T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, {}^{(4)}\mathbf{z})\} \,.\, |^{(4)}\mathbf{u}> \; + T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, {}^{(4)}\mathbf{z}) \,.\, |\partial^{(4)}_{u^{\alpha}}\mathbf{u}> = \; |^{(4)}\mathbf{0}>$$

Ce qui veut dire que :

$$^{(4)}[M]$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{u^0} z^0 & \partial_{u^1} z^0 & \partial_{u^2} z^0 & \partial_{u^3} z^0 \\ \partial_{u^0} z^1 & \partial_{u^1} z^1 & \partial_{u^2} z^1 & \partial_{u^3} z^1 \\ \partial_{u^0} z^2 & \partial_{u^1} z^2 & \partial_{u^2} z^2 & \partial_{u^3} z^2 \\ \partial_{u^0} z^3 & \partial_{u^1} z^3 & \partial_{u^2} z^3 & \partial_{u^3} z^3 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, {}^{(4)}\mathbf{z})$$

Il en résulte pour commencer que :

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, \mathbf{z}) \,.\, |\partial_{u^{\lambda}}\mathbf{u}> = \; |\partial_{u^{\lambda}}\mathbf{z}>$$

De sorte que la situation étudiée ici coincide avec la réalisation des relations :

$$^{(4)}\mathbf{z} \,=\, ^{(4)}\mathbf{0}\,;\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, \mathbf{z}) \,=\, ^{(4)}[M]$$

$$\{\partial_{u^\alpha} T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, \mathbf{z})\}\,.\,|\mathbf{u} > \,+ |\partial_{u^\alpha}\mathbf{z} >= \,|^{(4)}\mathbf{0} >$$

Par ailleurs, ici :

$$\partial^{(4)}_{u^\alpha}[M] \,=\, \partial_{u^\alpha} T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, \mathbf{z}) \,=\, \begin{pmatrix} \partial^2_{u^\alpha u^0} z^0 & \partial^2_{u^\alpha u^1} z^0 & \partial^2_{u^\alpha u^2} z^0 & \partial^2_{u^\alpha u^3} z^0 \\ \partial^2_{u^\alpha u^0} z^1 & \partial^2_{u^\alpha u^1} z^1 & \partial^2_{u^\alpha u^2} z^1 & \partial^2_{u^\alpha u^3} z^1 \\ \partial^2_{u^\alpha u^0} z^2 & \partial^2_{u^\alpha u^1} z^2 & \partial^2_{u^\alpha u^2} z^2 & \partial^2_{u^\alpha u^3} z^2 \\ \partial^2_{u^\alpha u^0} z^3 & \partial^2_{u^\alpha u^1} z^3 & \partial^2_{u^\alpha u^2} z^3 & \partial^2_{u^\alpha u^3} z^3 \end{pmatrix}$$

dont il faut remarquer que ce n'est pas la Hessienne d'une des composantes du résidu. Pour autant le vecteur apparaissant dans le premier terme de la somme située à gauche du signe de l'égalité représente un vecteur dont les composantes sont données par :

$$\forall\, \alpha,\, \lambda \;fixes\,et \,=\, 0,1,2\,ou\,3 \,:\, X^\lambda_\alpha \,=\, \sum_\beta \partial^2_{u^\alpha u^\beta} z^\lambda \,.\, u^\beta$$

avec la précision d'écriture suivante pour éviter les confusions liées à la compréhension des indices :

$$\forall\, \alpha \,=\, 0,1,2\,ou\,3$$

$$\mathbf{X}_\alpha \,:\, (\sum_\beta \partial^2_{u^\alpha u^\beta} z^0 \,.\, u^\beta, \sum_\beta \partial^2_{u^\alpha u^\beta} z^1 \,.\, u^\beta, \sum_\beta \partial^2_{u^\alpha u^\beta} z^2 \,.\, u^\beta, \sum_\beta \partial^2_{u^\alpha u^\beta} z^2 \,.\, u^\beta)$$

$$|\mathbf{X}_\alpha >= \,\{\partial_{u^\alpha} T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, \mathbf{z})\}\,.\,|\mathbf{u} >$$

Quoiqu'il en soit (et il n'y a dans la ligne qui suit pas de sommation sur alpha):

$$\forall\, \alpha, \lambda \,=\, 0,1,2\,ou\,3 \,:\, u^\alpha \,.\, X^\lambda_\alpha \,=\, Y^\lambda_\alpha \,=\, u^\alpha \,.\, \sum_\beta \partial^2_{u^\alpha u^\beta} z^\lambda \,.\, u^\beta$$

Du coup et ici je somme sur alpha :

$$\forall\, \lambda \,=\, 0,1,2\,ou\,3 \,:\, \sum_\alpha u^\alpha \,.\, X^\lambda_\alpha \,=\, \sum_\alpha Y^\lambda_\alpha \,=\, Y^\lambda \,=\, \sum_\alpha u^\alpha \,.\, \sum_\beta \partial^2_{u^\alpha u^\beta} z^\lambda \,.\, u^\beta$$

Dans les conditions examinées ici (la non-dépendance de la métrique eu égard à la vitesse), le théorème des Hessiennes est toujours vrai. En conséquence de quoi, l'expression ci-dessus s'annule:

$$\forall\, \lambda \,=\, 0,1,2\,ou\,3 \,:\, Y^\lambda \,=\, 0$$

Il en résulte donc que (je réintroduis ici la fonction "oplus" attribuant à un vecteur la somme de ses composantes) :

$$\sum_\lambda Y^\lambda \,=\, \mathbf{Y}^\oplus \,=\, 0$$

Il revient au même d'écrire :

$$\sum_\lambda Y^\lambda \,=\, \sum_\lambda \sum_\alpha u^\alpha \,.\, X^\lambda_\alpha \,=\, \sum_\alpha \sum_\lambda u^\alpha \,.\, X^\lambda_\alpha \,=\, \sum_\alpha u^\alpha \,.\, \sum_\lambda X^\lambda_\alpha \,=\, 0$$

Soit encore :

$$\mathbf{Y}^\oplus \,=\, \sum_\alpha u^\alpha \,.\, \mathbf{X}^\oplus_\alpha \,=\, \sum_\alpha u^\alpha \,.\, \mathbf{X}^\oplus_\alpha \,=\, 0$$

ou plus explicitement :

$$\sum_{\alpha} u^{\alpha} \,.\, [\{\partial_{u^{\alpha}} T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}}, \mathbf{z})\} \,.\, |\mathbf{u}>]^{\oplus} \;=\; 0$$

Ce qui fournit in fine :

$$\sum_{\alpha} u^{\alpha} \,.\, (\partial_{u^{\alpha}} \mathbf{z})^{\oplus} \;=\; 0$$

Remarque 1.7. ***Conclusion intermédiaire***

La proposition concernant les Hessiennes des composantes d'un résidu accidentellement nul mais instable n'est pas démontrée par les calculs précédents. Ceux-ci mettent seulement en exergue un certain nombre de relations liant les acteurs impliqués. Par exemple, la dernière d'entre elle (juste ci-dessus) dit qu'il est possible de calculer un vecteur dont chaque composante est la dérivée partielle des composantes du résidu par rapport à l'une des composantes de la vitesse, de faire la somme de ces dérivées partielles, de répéter cette opération pour chaque composante de la vitesse et de considérer qu'on dispose alors de quatre composantes pour un nouveau vecteur qui lui sera finalement orthogonal (au sens classique de ce terme) par rapport à la vitesse ; mais sommes-nous pour autant plus avancé sachant que la géométrie ne joue ici aucun rôle et que rien ne garantit qu"elle soit Euclidienne?

La question qui a été indirectement posée avec la proposition sur les Hessiennes consiste en fait surtout à se demander si les matrices [M] représentant des spineurs pourraient aussi coincider avec les Hessiennes des composantes des résidus.
Or le théorème sur les spineurs a donné la morphologie générique des matrices [M] au sein de la théorie des produits tensoriels déformés : ce sont ce que j'ai appelé des tables de Pythagore (voir plus haut dans ce document).
Simultanément, lorsque ces matrices représentent une vitesse interprétable comme un spineur, elles ont une morphologie bien connue donnée grâce aux travaux précurseurs d'E. Cartan dans [01]. Ces matrices sont précisées dans [01 ; §93, p. 81] et peuvent être décomposées selon une combinaison linéaire de cinq matrices précisées au [01 ; §93, p. 82] : les matrices [H]. Elles obéissent à :

$$[M] \;=\; x_0 \,.\, [H_0] \;+\; x_1 \,.\, [H_1] \;+\; x_1' \,.\, [H_1'] \;+\; x_2 \,.\, [H_2] \;+\; x_2' \,.\, [H_2']$$

$$[M] \,.\, |\mathbf{u}> = \; |\mathbf{0}>$$

Sur le seul plan de la logique, pour que l'une quelconque des quatre Hessiennes disponibles soit elle-même une table de Pythagore représentant un spineur au sens donné dans [01 ; §93, p. 81], ce qui correspondrait finalement à la validation de la proposition sur les Hessiennes, il faudrait donc a minima que cette table s'exprime de la manière générique rappelée ci-avant, c'est-à-dire qu'elle soit elle-même l'image d'un vecteur selon le schéma :

$$z^{\alpha} \;\in\; C \;\rightarrow\; Hess_{(\mathbf{u},0)} z^{\alpha}(\mathbf{u}) \;\in\; M(4, C) \;\rightarrow\; {}_{\alpha}\mathbf{Z} \;\in\; E(5, C)$$

$$Hess_{(\mathbf{u},0)} z^{\alpha}(\mathbf{u}) \;=\; {}_{\alpha}Z_0 \,.\, [H_0] \;+\; {}_{\alpha}Z_1 \,.\, [H_1] \;+\; {}_{\alpha}Z_1' \,.\, [H_1'] \;+\; {}_{\alpha}Z_2 \,.\, [H_2] \;+\; {}_{\alpha}Z_2' \,.\, [H_2']$$

$$Hess_{(\mathbf{u},0)} z^{\alpha}(\mathbf{u}) \,.\, |\mathbf{u}> = \; |\mathbf{0}>$$

Même si la composante zéro peut être systématiquement annulée pour réduire la discussion à E(4,C) où elle restera encore valable dans le cadre exposé dans [01], la discussion évolue visiblement vers plus de complexité. Je vais pourtant essayer de préciser les contraintes auxquelles il faut faire face. Avec les conventions utilisées dans [01], une Hessienne admissible s'écrit finalement de telle sorte que :

$$\begin{pmatrix} {}_\alpha Z_0 & {}_\alpha Z_1 & {}_\alpha Z_2 & 0 \\ {}_\alpha Z_1' & -{}_\alpha Z_0 & 0 & {}_\alpha Z_2 \\ {}_\alpha Z_2' & 0 & -{}_\alpha Z_0 & -{}_\alpha Z_1 \\ 0 & {}_\alpha Z_2' & -{}_\alpha Z_1' & {}_\alpha Z_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = |\mathbf{0} >$$

Il en résulte que :

$$\begin{pmatrix} {}_\alpha Z_0 \,.\, u^0 \;+\; {}_\alpha Z_1 \,.\, u^1 \;+\; {}_\alpha Z_2 \,.\, u^2 \\ {}_\alpha Z_1' \,.\, u^0 \;-\; {}_\alpha Z_0 \,.\, u^1 \;+\; {}_\alpha Z_2 \,.\, u^3 \\ {}_\alpha Z_2' \,.\, u^0 \;-\; {}_\alpha Z_0 \,.\, u^2 \;-\; {}_\alpha Z_0 \,.\, u^3 \\ {}_\alpha Z_2' \,.\, u^1 \;-\; {}_\alpha Z_1' \,.\, u^2 \;+\; {}_\alpha Z_0 \,.\, u^3 \end{pmatrix} = |\mathbf{0} >$$

Il est facile d'en déduire que la relation suivante est toujours vraie puisque chacune des composantes est supposée être nulle :

$$[\{Hess_{(\mathbf{u},0)} z^\alpha(\mathbf{u})\} \,.\, |\mathbf{u} >]^\oplus \;=\; 0$$

A fortiori il en est de même pour la relation :

$$\sum_\alpha u^\alpha \,.\, [\{Hess_{(\mathbf{u},0)} z^\alpha(\mathbf{u})\} \,.\, |\mathbf{u} >]^\oplus \;=\; 0$$

La même démarche aurait pu être faite pour les matrices [M] admissibles. Tant que le proposition sur les Hessiennes n'est pas démontrée, ce qui est le cas à ce stade, seul le théorème sur les Hessiennes s'applique et il dit seulement que la relation suivante s'applique :

$$< \mathbf{u}| \,.\, \{Hess_{(\mathbf{u},0)} z^\alpha(\mathbf{u}) \,.\, |\mathbf{u} >\} \;=\; 0$$

De sorte que si -et uniquement si la Hessienne est la représentation d'un vecteur **Z** au sens expliqué dans [01], alors :

$$\begin{gathered} u^0 \,.\, ({}_\alpha Z_0 \,.\, u^0 \;+\; {}_\alpha Z_1 \,.\, u^1 \;+\; {}_\alpha Z_2 \,.\, u^2) \\ + \\ u^1 \,.\, ({}_\alpha Z_1' \,.\, u^0 \;-\; {}_\alpha Z_0 \,.\, u^1 \;+\; {}_\alpha Z_2 \,.\, u^3) \\ + \\ u^2 \,.\, ({}_\alpha Z_2' \,.\, u^0 \;-\; {}_\alpha Z_0 \,.\, u^2 \;-\; {}_\alpha Z_0 \,.\, u^3) \\ + \\ u^3 \,.\, ({}_\alpha Z_2' \,.\, u^1 \;-\; {}_\alpha Z_1' \,.\, u^2 \;+\; {}_\alpha Z_0 \,.\, u^3) \\ = \\ 0 \end{gathered}$$

Ce qui a apparemment le mérite de livrer l'équivalent d'une métrique. En fait il vient :

$$\begin{gathered} {}_\alpha Z_0 \,.\, (u^0)^2 \;-\; {}_\alpha Z_0 \,.\, (u^1)^2 \;-\; {}_\alpha Z_0 \,.\, (u^2)^2 \;+\; {}_\alpha Z_0 \,.\, (u^3)^2 \\ + \\ ({}_\alpha Z_1 + {}_\alpha Z_1') \,.\, u^0 \,.\, u^1 + ({}_\alpha Z_2 + {}_\alpha Z_2') \,.\, u^0 \,.\, u^2 + ({}_\alpha Z_2 + {}_\alpha Z_2') \,.\, u^1 \,.\, u^3 - ({}_\alpha Z_0 + {}_\alpha Z_1') \,.\, u^2 \,.\, u^3 \\ = \\ 0 \end{gathered}$$

qui peut à la limite être considérée comme une métrique particulière probablement indirectement reliée aux conventions d'écriture utilisées dans [01] et dans ce travail.

Remarque 1.8. ***Sur les métriques induites***

La proposition sur les Hessiennes n'est toujours pas démontrée - autrement dit la Hessienne de la composante d'un résidu accidentellement nul mais instable n'est pas obligatoirement la représentation d'un spineur- mais si elle est celle d'un vecteur au sens d'E. Cartan dans [01], alors le théorème sur les Hessiennes livre forcément une des métriques de l'espace de dimension quatre. Celles-ci sont donc indirectement générées par un jeu de quatre vecteurs (les **Z**) qui pour le moment n'ont a priori aucun lien avec les vecteurs d'une base locale. Pour autant et à ce stade, la démarche fait à nouveau face au fait qu'il y aurait quatre métriques liées à un seul résidu. Ce qui semble difficilement acceptable (voir ci-dessus proposition d'explication).

Remarque 1.9. ***Sur la continuité des Hessiennes***

La continuité des variations des composantes du résidu nul instable est assurée lorsque :

$$_{\alpha}Z_1 = {}_{\alpha}Z'_1 \,;\, {}_{\alpha}Z_2 = {}_{\alpha}Z'_2$$

Dans le cas contraire elle n'est pas garantie et l'interprétation d'une Hessienne comme étant la représentation d'un vecteur selon la procédure proposée dans [01] n'est pas recevable en l'état.

1.4 Résumé de la première partie

Dans cette première partie, j'ai introduit la notion de classe d'équivalence pour les décompositions a priori non-triviales d'un produit tensoriel déformé, en l'occurence le terme gravitationnel apparu dans la loi de Lorentz-Einstein. J'ai défini la contrainte d'appartenance à cette classe d'équivalence et j'ai ensuite exprimé cette contrainte pour le cas des métriques ne variant pas avec la vélocité des phénomènes physiques étudiés. La recherche du formalisme générique des résidus admissibles a été commencé.

Il s'avère qu'ils ne peuvent être colinéaires à la vélocité et qu'une partie au moins d'entre eux sont vraisemblablement des résidus accidentellement nuls mais instables. Ce premier constat apparaît être cohérent avec l'état d'esprit de la méthode extrinsèque. En effet, celle-ci est par essence une méthode approximative, donc ne livrant que des résultats approchés. Enfin, il s'avère également que si la vélocité peut se laisser interpréter comme un spineur au sens donné à ce mot par E. Cartan dans [01], alors l'instabilité de ces résidus peut être représentée par des matrices au formalisme bien connu et justement donné dans [01].

Bien qu'une contrainte sur les Hessiennes cinétiques de leurs composantes ait été découverte, il n'a pas encore été possible de donner un visage au formalisme générique des résidus admissibles. Cette première section me laisse avec un certain nombre de questions dont une semble revenir de façon récurrente (voir remarque 1.5).

2 Un lien avec les tétraèdres?

2.1 Rappel du contexte

Le terme gravitationnel apparu dans la loi de Lorentz Einstein est un produit tensoriel déformé (voir [[a]]). Il peut se décomposer de manière extrinsèque [[b]] et ce type de décomposition permet de définir une classe d'équivalence englobant l'ensemble des décompositions a priori non-triviales donnant en réalité le même résultat qu'une décomposition triviale. Toutes ces décompositions sont liées entre elles par une contrainte. Une version simplifiée de celle-ci a été étudiée dans la première partie. La simplification a concerné le fait que la métrique a été supposée invariante par rapport aux composantes de la vélocité.

Remarque 2.1. ***Rappels concernant les premiers éléments obtenus grâce à la méthode intrinsèque***

Dans [[c]], j'ai commencé l'étude systématique d'une décomposition intrinsèque en dimension quatre. De manière à réduire la difficulté technique j'ai considéré le cas d'un produit déformé bâti sur un cube doublement réduit, c'est-à-dire dans la pratique : bâti sur un vecteur de E(4,C) ; soit par exemple **A**. J'ai entrepris ensuite le calcul du discriminant du système des quatre combinaisons linéaires apparues avec l'énoncé du problème. De manière à débroussailler un peu l'immensité des cas possibles j'ai cherché à énoncer la condition assurant que ce discriminant se réduise à un polynôme de degré trois.

Les premiers éléments obtenus ont montré que le système des quatre combinaisons linéaires apparues avec l'énoncé du problème introduit automatiquement un produit extérieur impliquant deux vecteurs de E(4,C) : la vélocité, **u**, et le vecteur **A** sur lequel le produit de Lie déformé est construit :

$$\Phi\ :\ \wedge({}^{(4)}\mathbf{u}*,{}^{(4)}\,\mathbf{A}*)$$

que ce bivecteur contient toujours deux branches (en fait deux vecteurs de dimension trois)

$$\Phi\ :\ \wedge({}^{(4)}\mathbf{u}*,{}^{(4)}\,\mathbf{A}*)\ \sim\ ({}^{(3)}\mathbf{b}_1,{}^{(3)}\,\mathbf{b}_2)$$

et que leur orthogonalité est le critère suffisant à réduire le discriminant du système à un polynôme de degré trois.

$$<^{(3)}\,\mathbf{b}_1,^{(3)}\,\mathbf{b}_2>_{Id_3}=\ 0$$

$$\downarrow$$

$$d_{\alpha\beta\chi}\,.\,u^\alpha\,.\,u^\beta\,.\,u^\chi\ +\ d_{\alpha\beta}\,.\,u^\alpha\,.\,u^\beta\ +\ d_\alpha\,.\,u^\alpha\ +\ |P|\ =\ \Delta$$

ou :

$$f_{\alpha\beta\chi}\,.\,A^\alpha\,.\,A^\beta\,.\,A^\chi\ +\ f_{\alpha\beta}\,.\,A^\alpha\,.\,A^\beta\ +\ f_\alpha\,.\,A^\alpha\ +\ |P|\ =\ \Delta$$

Quelle que soit la valeur du discriminant du système étudié, ce polynôme de degré trois est alors toujours une combinaison linéaire de quatre polynômes de degré deux écrits en fonction des quatres composantes, soit de la vélocité, soit de celles du vecteur définissant le produit de Lie déformé qu'on a sous la main :

$$\forall\,|P|\,;<\mathbf{b}_1\,,\,\mathbf{b}_2>_{Id_3}=\ 0$$

$$\sum_\alpha u^\alpha\,.\,\{d_{\alpha\beta\chi}\,.\,u^\beta\,.\,u^\chi\ +\ d_{\alpha\beta}\,.\,u^\beta\ +\ d_\alpha\}\ =\ \sum_\alpha u^\alpha\,.\,\Lambda_\alpha\ =\ \Delta\ -\ |P|$$

or:

$$\forall\,|P|\,;<\mathbf{b}_1\,,\,\mathbf{b}_2>_{Id_3}=\ 0$$

$$\sum_\alpha A^\alpha\,.\,\{f_{\alpha\beta\chi}\,.\,A^\beta\,.\,A^\chi\ +\ f_{\alpha\beta}\,.\,A^\beta\ +\ f_\alpha\}\ =\ \sum_\alpha A^\alpha\,.\,\Upsilon_\alpha\ =\ \Delta\ -\ |P|$$

2.2 Sur les difficultés techniques à affronter

Je recense pour l'heure trois grandes thématiques concernant les difficultés techniques à affronter :

1. Les premiers résultats sont formels et généraux (Ils valent pour tous les produits de Lie déformés en dimension quatre) mais les coefficients du polynome de degré trois n'ont pas encore été explicités en détail à cause de la lourdeur des calculs que cette manoeuvre sous-tend. Cette lourdeur ne devra pourtant pas éternellement détourner de la nécessité de découvrir ces coefficients.

2. Il est impératif de pouvoir connecter logiquement et sans redondance les résultats acquis en dimension trois pour les produits de Lie déformés à ceux qui viennent d'être obtenus pour les produits de Lie déformés en dimension quatre. De même, tôt ou tard, il faudra veiller à relier les résultats issus de la méthode intrinsèque à ceux issus de la méthode extrinsèque.

3. Il faut pouvoir intégrer les résultats concernant les Hessiennes des composantes du résidu dans une solution cohérente du problème de la décomposition des produits tensoriels déformés en dimension quatre. En effet, dans la première section de ce document, une difficulté technique embarassante est apparue ; à savoir : l'impression qu'il faudrait pouvoir être en mesure de définir quatre métriques pour un seul résidu. Pour traiter cette énigme, j'ai évoqué l'idée de l'existence de structures géométriques circonstrivant le résidu (un tétraèdre par exemple). Cette intuition revêt un côté hasardeux et spéculatif puisqu'il n'a pas été possible de démonter la nature discrète de l'espace temps [03]. Ce fait force à envisager une solution plus classique.

Remarque 2.2. ***Constats et idées pêle-mêle***

Les explorations menées précédemment livrent un certain nombre de constats et suggèrent des pistes ; par exemple :

1. La Hessienne de chaque composante du résidu définit une sorte de métrique dans un espace des vitesses de dimension quatre (le **u**-espace) et, à l'instar de ce qui avait été proposé par E. Cartan dans [01] et re-testé à la fin de la première partie, rien n'interdit d'inventer une procédure associant un être mathématique ad hoc à chacune de ces quatre Hessiennes.

2. Toute forme fondamentale d'un espace de dimension quatre peut toujours être décomposée de quatre façons différentes sous la forme d'un polynôme du second degré écrit en fonction de trois des quatre composantes de cette forme fondamentale.

3. Un produit de Lie déformé opérant dans un espace de dimension trois est tout simplement un produit vectoriel déformé agissant dans cet espace de dimension trois. Chacune de ses décompositions intrinsèques, lorsqu'elle existe est obligatoirement associée avec un polynôme du second degré écrit en fonction de trois composantes du projectile (le premier des deux arguments impliqués dans ce produit). Inversement l'existence un polynôme "propre" du second degré écrit en fonction de trois composantes réelles ou complexes (voir le résumé des résultats dans [[d]] et les démonstrations complètes dans [[e]]) signe automatiquement l'existence d'un produit de Lie déformé agissant sur un projectile défini par ces trois composantes dans cet espace de dimension trois.

4. Simultanément,

La première conséquence logique qui semble pouvoir être tirée de cette énumération est la suivante :

Remarque 2.3. ***Polynôme du second degré écrit en fonction de quatre composantes et figure associée***

Soit un polynôme du second degré écrit en fonction de quatre composantes. Il peut, tout comme une forme fondamentale de cet espace de dimension quatre être lui aussi décomposé de quatre façons différentes en fonction de trois des quatres composantes.

$$d_{\beta\chi} \,.\, u^{\beta} \,.\, u^{\chi} \,+\, d_{\beta} \,.\, u^{\beta} \,+\, d \,=\, P(u^0,\, u^1,\, u^2,\, u^3) \,=\, P$$

$$\downarrow$$

$$P \,=\, P^0(u^1,\, u^2,\, u^3) \,=\, P^1(u^0,\, u^2,\, u^3) \,=\, P^2(u^0,\, u^1,\, u^3) \,=\, P^3(u^0,\, u^1,\, u^2)$$

Dans ces conditions, il est possible de dire que quatre vecteurs de dimension trois peuvent toujours être associés avec un seul vecteur de dimension quatre. Parmi ces quatre points, un seul est purement spatial tandis que les trois autres ont deux dimensions spatiales et une dimension temporelle. Le fait de disposer de quatre points peut suggérer l'idée d'un rapprochement mental avec la figure du tétraèdre. Cependant, compte tenu du positionnement mixte de ce tétraèdre -dans l'espace et dans le temps- il conviendra vraisemblablement d'utiliser cette figure avec précaution.

$${}^{(4)}\mathbf{u} :\, (u^0,\, u^1,\, u^2,\, u^3)$$

$$\downarrow$$

$${}^{(3)}\mathbf{u}^0 \,:\, (u^1,\, u^2,\, u^3);\; {}^{(3)}\mathbf{u}^1 \,:\, (u^0,\, u^2,\, u^3);\; {}^{(3)}\mathbf{u}^2 \,:\, (u^0,\, u^1,\, u^3);\; {}^{(3)}\mathbf{u}^3 \,:\, (u^0,\, u^1,\, u^2)$$

Remarque 2.4. ***Polynôme du second degré écrit en fonction de quatre composantes et produits vectoriels déformés associés***

Si chacune de ces quatre façons est un polynôme du second degré propre écrit en fonction des trois composantes choisies, il peut naturellement être associé avec un produit de Lie déformé agissant sur un projectile défini par ces trois composantes dans cet espace de dimension trois (voir [d ; rappel des données de base] ou ici). Soit E(3, C) un espace vectoriel de dimension trois construit sur le corps commutatif des nombres complexes. Cet espace est supposé être équippé d'un ensemble de produits de Lie déformés (PLD). Chacun d'entre eux est caractérisé par un cube réduit, c'est-à-dire en réalité par un élément [A] de M(3, C). Soit un de ces PLD faisant interagir une paire d'éléments (**a**, **b**) de E(3, C) x E(3, C). Soit l'image de ce PLD dans l'espace dual E*(3, C). La question initiale posée par cette approche consiste à savoir si les produits de Lie déformés définis dans les espaces de dimension trois peuvent se décomposer non-trivialement et, si oui, comment ils le font. Les calculs menés à ce jour dans [[e]] permettent de répondre précisément aux questions posées. En bref, si un PLD se décompose non trivialement, alors :

$$\exists\,([P],\, \mathbf{z}) \,\in\, M(3,C) \times E(3,C) \,|\, |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]} >=\, [P] \,.\, |\mathbf{b} > \,+ |\mathbf{z} >$$

Dans la sémantique de ce document, [P] est appelé le diviseur intrinsèque tandis que le vecteur **z** désigne le résidu (ou la partie résiduelle) de la décomposition. La décomposition non-triviale induit l'existence d'une fonction polynomiale de degré deux écrite en fonction des trois composantes du projectile (le premier argument du PLD) [[e] ; §3.2] ; soit précisément :

$$\Lambda(\mathbf{a}) \,=\, \Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3) \,=\, |_{[A(t)]}\Phi(\mathbf{a}(t)) \,-\, P(t)| \,=\, \sum_{ij} d_{ij} \,.\, a^i \,.\, a^j \,+\, \sum_i d_i \,.\, a^i \,+\, d$$

En fait, cette polynomiale satisfait à chaque instant t d'une chronologie locale la relation générique :

$$|_{[A(t)]}\Phi(\mathbf{a}(t)) \,-\, P(t)| \,+\, |P(t)| \\ = \\ \sum_i D_{ii}\,.\,(a^i)^2 \,+\, \sum_{i<j} D_{ij}\,.\,a^i\,.\,a^j \,+\, \sum_i d_i\,.\,a^i$$

à condition de bien préciser que :

$$D_{ii} \,=\, d_{ii}\,pour\,i \,=\, 1,2,3\;;\;D_{ij} \,=\, d_{ij} \,+\, d_{ji}\,pour\,i \neq j$$

et où la matrice phy représente le diviseur trivial du produit qu'on a sous la main. Il est possible d'en calculer la Hessienne [[e] ; proposition 3.8] :

$$[S_0] \,=\, [Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})] \,=\, \begin{pmatrix} 2.D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & 2\,.\,D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & 2\,.\,D_{33} \end{pmatrix} \,=\, [d_{ij}] \,+\, [d_{ij}]^t$$

Si, de plus, cette fonction polynomiale est propre, ce qui se trouve être équivalent à : “si le déterminant de cette hessienne n'est pas nul” :

$$\Delta \,=\, |S_0| \,=\, 8.D_{11}.D_{22}.D_{33}+2.D_{12}.D_{23}.D_{13}-2.D_{11}.(D_{23})^2-2.D_{22}.(D_{13})^2-2.D_{33}.(D_{12})^2 \neq 0$$

alors elle possède un point singulier définissant un vecteur singulier (en l'occurrence unique) ; soit :

$$|_\Lambda\mathbf{s}> = \,-\,[S_0]^{-1}\,.\,|_\Lambda\mathbf{d}*> \;\; avec\,|_\Lambda\mathbf{d}*> = \,|d_1,\,d_2,\,d_3>$$

Dans ce cas, la connaissance de cette fonction polynomiale propre et celle du cube réduit, [A], définissant localement le PLD deviennent les deux outils suffisants à déterminer le diviseur intrinsèque non-trivial recherché.

$$[P]_{|A|} \,=\, |A|\,.\,([A])^t\,.\,[J]\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,[S_0] \,+\, |A|\,.\,{}_{[J]}\Phi([S_0]^{-1}\,.\,|\mathbf{d^*}>)\}\,;\,|A| \,=\, \pm 1$$

avec, par convention d'écriture :

$$[A] \,=\, \begin{pmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{pmatrix}$$

et la présence du générateur du groupe cyclique C6 :

$$[J] \,=\, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 2.5. ***Sur les cubes doublement réduits en dimension trois***

Dans la restriction de la problématique à la dimension trois, il est aisé de constater qu'un cube doublement réduit se résume forcément à un unique scalaire ou, plus exactement à une matrice carrée (3-3) proportionnelle à la matrice [J] qui est effectivement la représentation d'un des deux générateurs du groupe des rotations pour les tétraèdres. Dans ce cas, il faut aussi avoir :

$$|A| \,=\, (A^2_{13})^3 \,=\, -1$$

De sorte que les valeurs admissibles du scalaire coincident avec les racines cubiques complexes de moins une fois l'unité. Les résultats intrinsèques deviennent :

$$[P]_- \,=\, -A^2_{13}\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,[S_0] \,-\, {}_{[J]}\Phi([S_0]^{-1}\,.\,|\mathbf{d^*}>)\}$$

Remarque 2.6. ***Sur les cubes doublement réduits en dimension quatre***

En dimension quatre il est possible de montrer que la double réduction aboutit à ne laisser subsister que quatre scalaires ; à savoir les :

$$A^1_{02}\,,\,A^1_{03}\,,\,A^2_{03}\,,\,A^2_{13}$$

que j'avais choisi de regrouper sous un quadruplet de composantes pour un vecteur **A**.

$$(A^1_{02}\,,\,A^1_{03}\,,\,A^2_{03}\,,\,A^2_{13})\;=\;(a\,,\,b\,,\,c\,,\,d)\;:\;{}^{(4)}\mathbf{A}$$

De sorte que dans ces conditions limitatives, le discriminant calculé précédemment remarque 1.1 s'écrit aussi tout simplement :

$$|_{{}^{(4)}\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{u})\;-\;[P]|\;=\;\Delta.$$

3 Le lien entre produits tensoriels et produits de Lie déformés

3.1 Réflexions générales

La deuxième partie de ce travail s'est en fait essentiellement concentrée sur les produits de Lie déformés alors que la première s'est focalisée sur le terme gravitationnel qui est un produit tensoriel déformé ; en l'espèce bâti sur un cube symétrique. La question logique suivante consiste donc à chercher la ou les transcriptions de la Loi de Lorentz-Einstein (LLE) sous forme de produits de Lie déformés. Dans l'absolu, ceci suppose de pouvoir trouver au moins (a) un cube antisymétrique sur ses indices bas (je l'appelerai "oméga"), (b) une cible **w** et un résidu **y** tels que :

$$|\frac{d\mathbf{u}}{ds}\;+\;\otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u},\mathbf{u})>=\;k.[F]\,.\,|\mathbf{u}>\;\Longleftrightarrow\;\;|\wedge_{cube\,\omega}(\mathbf{u},\mathbf{w})>=\;[P]\,.\,|\mathbf{w}>\;+|\mathbf{y}>$$

Remarque 3.1. ***Sur les dérivations***

Je remarquerai dès cet instant et de manière très grossière que la LLE fait intervenir ce qui s'appelle une dérivation covariante (voir [[06]] pour introduction simple et claire sur le sujet) :

$$|\frac{d...}{ds}\;+\;\otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u},...)>=\;|\frac{D...}{ds}>\sim\;k.[F]$$

alors que sa transcription présumée, si et quand elle existe, peut éventuellement faire intervenir une dérivation intérieure :

$$Lim_{\,\mathbf{y}\to\mathbf{0}}\,|\wedge_{\omega}(\mathbf{u},...)>=\;[P]\,.\,|...>$$

pourvu qu'il soit possible de faire correspondre une connexion oméga et une vélocité au résultat [P].

3.2 Sur l'existence des transcriptions

Il existe vraisemblablement un nombre infini de façons de faire correspondre un produit de Lie déformé et décomposé non-trivialement avec une représentation de la LLE. De manière à dégrossir un peu le sujet, je vais proposer d'examiner d'abord le cas simple pour lequel il existe un lien entre la nouvelle cible, **w**, et la vélocité, **u**, tel que :

$$|\mathbf{w}>=\;[T]\,.\,|\mathbf{u}>\;+|\mathbf{a}>\;\Longleftrightarrow\;\;w^{\beta}\;=\;T^{\beta}_{\epsilon}\,.\,u^{\epsilon}\;+\;a^{\beta}$$

Cette hypothèse de travail n'est que partiellement arbitraire. En effet et à dessein, son formalisme évoque celui des transformations de Lorentz lorsque le vecteur **a** s'annule. Sans qu'il puisse être certain que cette interprétation soit la seule recevable, la relation précédente invite à comprendre la nouvelle cible, **w**, comme une transformée de Lorentz de l'ancienne, **u**.
En admettant par avance - a priori- que cette proposition aboutisse positivement du point de vue des mathématiques, elle introduit donc avec elle l'idée que la transcription d'une représentation de la LLE sous forme d'un produit de Lie déformé et éventuellement décomposé de manière non-triviale équivaut à écrire une interaction entre une vélocité donnée et l'une de ses transformées de Lorentz. Est-il légitime de pratiquer de la sorte du point de vue physique? Est-ce cohérent?
Il me semble que le mode de transcription que je propose ici va modifier le sens profond de la LLE. Pour rappel, cette loi décrit l'effet de la présence d'un champ de gravitation sur la manière dont il convient de calculer les dérivées ordinaires premières de la vélocité s'il est souhaité que le principe de covariance s'applique. Ce principe qui est un des piliers de la théorie de la relativité générale dit que les lois de la physique devraient être exprimées partout et en tous temps de manière similaire.
De mon point de vue il dit aussi et surtout que la gravitation modifie la façon dont les calculs mathématiques faits par les humains doivent être modifiés pour que leurs mesures coincident avec leurs prévisions théoriques.
L'exactitude de la LLE a d'ailleurs été courageusement posée, examinée en profondeur et mise en question dans [[05]]. Les auteurs notent par exemple que l'incorporation des effets retardés de la gravitation peut modifier le formalisme académique de la loi.
La transcription de la LLE que je propose ici va décrire les effets de la gravitation d'une manière qui incorpore les effets de causalité qu'elle porte intrinsèquement avec elle et avec sa propagation dans l'espace-temps. Le fait d'incorporer la transformée de Lorentz d'une vélocité dans une formule, c'est forcément intégrer la notion de temps et celle de répartition des vitesses dans l'espace et le temps dans cette formule.
De sorte que je pense qu'il me faudra obligatoirement compléter ma proposition d'une contrainte rendant compte d'une loi de répartition des vitesses appropriée aux conditions que je souhaite décrire, un peu à l'instar de ce qui se passe par exemple lorqu'il est souhaité de décrire un gaz parfait en thermodynamique.

3.3 Les relations validant les transcriptions proposées

Je suppose maintenant que la transcription proposée est a priori recevable. Il suit :

$$\omega^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, u^{\alpha} \,.\, w^{\beta} \,=\, p_{\chi\beta} \,.\, w^{\beta} \,+\, y^{\chi} \,;\, \omega^{\chi}_{\alpha\beta} \,+\, \omega^{\chi}_{\beta\alpha} \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$\omega^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, u^{\alpha} \,.\, (T^{\beta}_{\epsilon} \,.\, u^{\epsilon} \,+\, a^{\beta}) \,=\, p_{\chi\beta} \,.\, (T^{\beta}_{\epsilon} \,.\, u^{\epsilon} \,+\, a^{\beta}) \,+\, y^{\chi}$$

$$\downarrow$$

$$\omega^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, T^{\beta}_{\epsilon} \,.\, u^{\alpha} \,.\, u^{\epsilon} \,+\, \omega^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, u^{\alpha} \,.\, a^{\beta} \,=\, p_{\chi\beta} \,.\, T^{\beta}_{\epsilon} \,.\, u^{\epsilon} \,+\, (p_{\chi\beta} \,.\, a^{\beta} \,+\, y^{\chi})$$

$$\downarrow$$

$$(\omega^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, T^{\beta}_{\epsilon}) \,.\, u^{\alpha} \,.\, u^{\epsilon} \,=\, p_{\chi\beta} \,.\, T^{\beta}_{\epsilon} \,.\, u^{\epsilon} \,-\, \omega^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, a^{\beta} \,.\, u^{\alpha} \,+\, (p_{\chi\beta} \,.\, a^{\beta} \,+\, y^{\chi})$$

$$\downarrow$$

$$\forall\, \chi \,:\, (\omega^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, T^{\beta}_{\epsilon}) \,.\, u^{\alpha} \,.\, u^{\epsilon} \,=\, (p_{\chi\beta} \,.\, T^{\beta}_{\epsilon} \,-\, \omega^{\chi}_{\epsilon\beta} \,.\, a^{\beta}) \,.\, u^{\epsilon} \,+\, (p_{\chi\beta} \,.\, a^{\beta} \,+\, y^{\chi})$$

La transcription proposée peut redonner la loi de Lorentz Einstein chaque fois que les cinq relations suivantes peuvent être simultanément vérifiées :

$$\omega^{\chi}_{\alpha\beta} + \omega^{\chi}_{\beta\alpha} = 0$$
$$\Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon} = \Gamma^{\chi}_{\epsilon\alpha}$$
$$\omega^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, T^{\beta}_{\epsilon} = \Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$
$$p_{\chi\beta} \,.\, T^{\beta}_{\epsilon} - \omega^{\chi}_{\epsilon\beta} \,.\, a^{\beta} = k \,.\, F^{\chi}{}_{\epsilon}$$
$$-\frac{du^{\chi}}{ds} = p_{\chi\beta} \,.\, a^{\beta} + y^{\chi}$$

3.4 Sur la signification des relations validant les transcriptions proposées

Il est possible de commenter ces relations une à une :

1. La première relate de l'antisymétrie sur les indices bas du cube recherché et évoque ainsi un lien éventuel (mais non démontré à ce stade de développement de mon travail) avec la connexion de spin habituellement introduite pour décrire la relativité générale de manière alternative (théorie de Cartan).

2. La deuxième relate la symétrie bien connue des symboles de Christoffel de la seconde espèce.

3. La troisième explique que les symboles de Christoffel de la seconde espèce devraient être reliés au composantes du cube recherché par une combinaison linéaire rapportée aux composantes de la matrice [T]. Son formalisme évoque spontanément au moins deux pistes d'interprétation :

   - La première invite à se demander si le cube oméga introduit ci-dessus représente les symboles de Christoffel de la première espèce (voir [[06] ; §33, p. 92, (6)]); mais, dans ce cas il faut écrire :

     $$\omega_{\alpha\tau}{}^{\epsilon} \sim \Gamma_{\alpha\tau\epsilon} = g_{\tau\pi} \,.\, \Gamma^{\pi}_{\alpha\epsilon} \iff g^{\chi\tau} \,.\, \omega_{\alpha\tau}{}^{\epsilon} = g^{\chi\tau} \,.\, g_{\tau\pi} \,.\, \Gamma^{\pi}_{\alpha\epsilon} = \Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

     Il n'y a en fait qu'une condition qui -par permutation adéquate des indices- permet de retrouver la troisième contrainte. En effet, en supposant que le cube de Levi-Civita est doublement réduit, une fois par la symétrie sur ses indices bas - la deuxième contrainte- et une fois de plus par :

     $$\Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon} = \Gamma^{\epsilon}_{\alpha\chi}$$

     Il vient en inversant alpha et epsilon :

     $$g^{\epsilon\tau} \,.\, \omega_{\alpha\tau}{}^{\chi} = g^{\epsilon\tau} \,.\, g_{\tau\pi} \,.\, \Gamma^{\pi}_{\alpha\chi} = \delta^{\epsilon}_{\pi} \,.\, \Gamma^{\pi}_{\alpha\chi} = \Gamma^{\epsilon}_{\alpha\chi} = \Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

     Dans ces conditions très restrictives, le cube de Levi-Civita se réduit à un ensemble contenant au plus quatre scalaires et la troisième contrainte est satisfaite en posant :

     $$^{(4)}[G]^{-1} = [T] \,;\, \omega_{\alpha\tau}{}^{\epsilon} \sim \Gamma_{\alpha\tau\epsilon} = g_{\tau\pi} \,.\, \Gamma^{\pi}_{\alpha\epsilon}$$

     Lemme 3.1. ***Sur la première interprétation*** *: La troisième relation est satisfaite si, simultanément, (a) la matrice de transcription, [T], se confond avec l'inverse de la métrique locale ; (b) le cube oméga définissant le produit de Lie déformé transcrivant localement la LLE coincide avec le cube des symboles de Christoffel de la première espèce et (c) le cube de Levi-Civita est doublement réduit donc en fait restreint à un quadruplet de scalaires.*

- La seconde invite à penser que le cube oméga introduit ci-dessus est lié à la connexion de spin et à la notion de tétrade dans le respect de la relation habituelle (voir [[07] ; p. 7, (42.b)]) :

  $$e^{\chi}{}_{a} \, . \, (e_{\epsilon}{}^{b} \, . \, spin_{\alpha}{}^{a}{}_{b} \, + \, \delta_{\alpha} e_{\epsilon}{}^{a}) \, = \, \Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

  Toutefois, dans le cadre de cette seconde interprétation et après observation attentive du positionnement des indices, la relation précédente ne se laisse réduire au formalisme imposé par la troisième condition que dans les espaces pour lesquels la tétrade est invariante ;

  $$\delta_{\alpha} e_{\epsilon}{}^{a} \, = \, 0$$

  il vient alors en effet :

  $$e^{\chi}{}_{a} \, . \, e_{\epsilon}{}^{b} \, . \, spin_{\alpha}{}^{a}{}_{b} \, = \, \Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

  Ce qui pour ces circonstances invite à proposer les identifications suivantes :

  $$[e_{\epsilon}{}^{b}] \, = \, [T] \, ; \, e^{\chi}{}_{a} \, . \, spin_{\alpha}{}^{a}{}_{b} \, = \, \omega_{\alpha b}{}^{\chi}$$

  Lemme 3.2. ***Sur la seconde interprétation*** *: Tout se passe ici comme si (a) les composantes du cube oméga nécessaire au développement de la thématique abordée dans cette subsection se devaient d'être chacune une combinaison linéaire des composantes de la connexion de spin habituelle exprimées dans la base des composantes invariantes de la tétrade locale ; (b) la matrice de transcription, [T], se confond avec la matrice des composante d'une tétrade invariante locale.*

  Remarque 3.2. ***Sur la troisième contrainte***

  La troisième contrainte peut être réalisée dans le cadre de deux interprétations au moins. Cependant l'une comme l'autre s'accompagne de contraintes fortes qui réduisent considérablement leur domaine de définition respectif.

4. Si la loi de Lorentz Einstein assure bien que la représentation tensorielle mixte (up,down) du champ électromagnétique est pour le moins toujours le résultat de la décomposition non triviale d'un produit tensoriel déformé, cette quatrième relation révèle clairement que, dans le cadre de l'hypothèse qui vient d'être faite et acceptée a priori, cette représentation peut aussi toujours s'interpréter comme le résultat d'une décomposition extrinsèque d'un produit de Lie déformé. Mais c'est un point sur lequel je reviendrai plus en détail ultérieurement car il y a encore beaucoup à dire à son sujet. Pour l'heure et à cause de l'antisymétrie du cube oméga il vient :

   $$k \, . \, [F^{\chi}{}_{\epsilon}] \, = \, \Phi_{cube\, \omega}(\mathbf{a}) \, + \, [P] \, . \, [T]$$

   En particulier pour un cube doublement réduit (voir deuxième partie de ce document), il viendrait :

   $$k \, . \, [F^{\chi}{}_{\epsilon}] \, = \, \Phi_{\omega}(\mathbf{a}) \, + \, [P] \, . \, [T]$$

   où **omega** serait le vecteur représentant la double réduction du cube oméga. Toujours dans cet exemple particulier, l'hypothèse de travail envisagée ici (la LLE se laisse transcrire sous forme d'un produit de Lie déformé) mène à :

   $$|\frac{d\mathbf{u}}{ds} \, + \, \otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) >= \, k.[F] \, . \, |\mathbf{u}> \, \Longleftrightarrow \, | \wedge_{\omega} (\mathbf{u}, \mathbf{w}) >= \, [P] \, . \, |\mathbf{w}> \, + |\mathbf{y}>$$

et si j'utilise la méthode extrinsèque de décomposition sur cette transcription en impliquant la matrice [T], alors :

$$[P] \,=\, \Phi_\omega(\mathbf{u}) \,+\, \frac{1}{2}\,.\,[T]^{-1}\,.\,T_2(o)(\partial_\mathbf{w}, [T]\,.\,|\mathbf{y}>)$$

Il en résulte que si le vecteur **a** s'annule, alors :

$$k\,.\,[F^\chi{}_\epsilon] \,=\, \Phi_\omega(\mathbf{u})\,.\,[T] \,+\, \frac{1}{2}\,.\,[T]^{-1}\,.\,T_2(o)(\partial_\mathbf{w}, [T]\,.\,|\mathbf{y}>)\,.\,[T]$$

Remarque 3.3. ***Champ électromagnétique comme connexion induite par la matrice [T]***

Ce qui laisse apparaître la possibilité pour le champ EM de se transformer comme dans une connexion induite par l'inverse de la matrice [T] s'il est raisonnable d'écrire :

$$k\,.\,[F^\chi{}_\epsilon]_{initial} \,=\, \frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_\mathbf{w}, [T]\,.\,|\mathbf{y}>)$$

$$\frac{d[T]^{-1}}{d\pi} \,\sim\, \Phi_\omega(\mathbf{u})$$

où le paramètre “pi” est actuellement de signification inconnue mais pourrait être une abcisse curviligne.

5. La cinquième contrainte donne une version alternative de l'accélération (dite propre) du phénomène décrit avec l'aide de la loi de Lorentz Einstein.

$$-|\frac{d\mathbf{u}}{ds}> = \,[P]\,.\,|\mathbf{a}> \,+|\mathbf{y}>$$

En particulier si le vecteur **a** s'annule, cette version alternative coincide encore avec le résidu de la transcription.

$$-\frac{d\mathbf{u}}{ds} \,=\, \mathbf{y}$$

Et :

$$k\,.\,[F^\chi{}_\epsilon]_{initial} \,=\, -\frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_{[T]\,.\,|\mathbf{u}>}, [T]\,.\,|\frac{d\mathbf{u}}{ds}>)$$

$$\frac{d[T]^{-1}}{d\pi} \,\sim\, \Phi_\omega(\mathbf{u})$$

3.5 Une difficulté à ne pas négliger

Toute la sous-section précédente est encourageante. La vélocité met toutefois face à une ambiguité technique lorsque sa norme est nulle : ”Doit-elle être interprétée comme un spineur ou comme un 4-vecteur, sachant que le premier ne se transforme pas de la même façon que le second (voir à ce sujet [07 ; p. 17, (173)])?”

3.6 Conclusion de la troisième partie

Dans cette troisième partie j'ai entrepris de réfléchir sur les possibilités de transcrire la loi de Lorentz-Einstein (LLE) sous la forme d'un produit de Lie déformé et décomposé non trivialement.
J'ai compris que le fait même d'envisager ce type de transcription déplaçait légèrement l'interprétation physique donnée initialement à la LLE dans le cadre de la relativité générale. Pour autant cette modification donne potentiellement l'opportunité

de tenir compte des effets différés de la gravitation pour peu que je lui adjoigne ultérieurement une contrainte liée à une loi de répartition des vitesses.
Pour l'heure, ce type de transcription est mathématiquement possible si elle s'accompagne de la réalisation simultanée de cinq contraintes qui toutes ont au moins une interprétation très simple et presqu'immédiate à la seule observation de leur formalisme.
Seule la matrice de transcription [T] reste sujette à une dualité d'interprétation : "Est-elle la métrique inverse ou la tétrade inverse?" A ce stade d'avancement du travail, la question reste ouverte.
Dans le cadre de la première interprétation, le cube de Levi-Civita est contraint/réduit; dans le cadre de la seconde, les tétrades envisagées doivent être invariantes, limitant de facto le domaine de validité de cette interprétation à une série discontinue de tétrades et posant du même coup la question subsidiaire de savoir comment passer de l'une à l'autre.
Les doubles réductions envisagées au cours de la deuxième partie de manière théorique peuvent maintenant être utilisées de façon cohérente. Je trouve que les champs EM peuvent se comprendre comme des objets connectés entre eux via l'inverse de la matrice [T]. Je donne le formalisme initial de ces champs qui apparaissent être des tables de Pythagore d'un genre particulier (en fait des matrices de Jacobi) impliquant uniquement cette matrice [T], la vélocité et sa dérivée ordinaire première.
Enfin, the last but not the least, le fait de retrouver ici une connexion est parfaitement en accord avec l'approche dans laquelle j'ai tenté d'exprimer la loi de Lorentz-Einstein comme un opérateur différentiel d'ordre deux et que je reproduis ci-dessous en la modernisant.

4 La loi de Lorentz-Einstein comme opérateur différentiel d'ordre deux

4.1 L'idée

Je vais maintenant tentér de généraliser à un espace de dimension quatre a priori quelconque les travaux déjà réalisés de longue date sur la notion d'espace homogène de dimension trois ; en particulier dans le cadre de l'analyse de la théorie de la relativité générale (voir [[02]]). L'idée consiste à opérer un changement de variable "non linéaire" permettant d'exprimer la loi de Lorentz Einstein sous la forme d'un opérateur différentiel d'ordre 2 pour en réaliser ensuite un traitement "à la Sturm-Liouville (voir [[04], chapitre X])". Le formalisme self/auto-adjoint de l'opérateur obtenu de la sorte permet alors d'aboutir à une connexion et à des formes invariantes.

La théorie de Sturm-Liouville joue un rôle essentiel dans l'histoire de la physique mathématique. Du côté de la physique, elle intègre en effet une discussion sur l'écoulement des flux thermiques et elle a servi de base aux travaux fondant la mécanique quantique. Du côté des mathématiques, elle s'intègre à l'étude des groupes orthogonaux dont l'importance reste cruciale. En faisant ici le choix de l'intégrer à la discussion sur la loi de Lorentz-Einstein, je tente un pas de plus sur cette terra incognita qu'est le no-man's land joignant la théorie de la relativité générale (la théorie la mieux aboutie à ce jour sur la gravitation) et la théorie de la thermodynamique.

4.2 Proposition et hypothèse de travail

Proposition 4.1. *Il est possible d'écrire la loi de Lorentz-Einstein sous forme d'opérateur différentiel d'ordre deux.*

Hypothèse de travail L'idée consiste à opérer le changement de variable "non linéaire" suivant :

$$\forall \mathbf{x} \in E(4,R) : (x^0, x^1, x^2, x^3) \to \phi \in E(4,C) : (\phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3) \mid$$
$$\forall \lambda, \mu, \theta = 0,1,2,3 : \phi^\theta(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda\mu} q^\theta_{\lambda\mu} . x^\lambda . x^\mu + \sum_\lambda q^\theta_\lambda . x^\lambda$$

et à croire que ceci suffit à pouvoir écrire la loi de Lorentz-Einstein sous la forme suivante :

$$|L(\phi(\mathbf{x})) >= \sum_{k=0,1,2} [_kP] . |\frac{d^k\phi(\mathbf{x})}{d^k\pi} >$$

où trois matrices (4-4) apparaissent, "d" symbolise une dérivation ordinaire (classique - règle de Descartes ou de Leibniz - loi des accroissements finis) par rapport à l'abcisse curviligne "pi" et où le label "k" qui lui est attribué désigne le degré de la dérivation, c'est-à-dire le nombre de fois où cette dérivation ordinaire est réalisée ; avec la convention supplémentaire qu'au cas où k = 0, ceci signifie qu'il n'a été fait aucune dérivation, et donc que l'objet mathématique auquel cette dérivation de degré nul s'applique est laissé égal à lui-même, inchangé.

$$\frac{d^0\phi(\mathbf{x})}{d^0\pi} = \phi(\mathbf{x})$$

L'ypothèse de travail concernant le passage d'un **x**-espace à un **phi**-espace est conçue de telle sorte que les origines des deux espaces coincident mais qu'il n'est plus linéaire.

4.3 Calcul des dérivées ordinaires successives

Il vient de façon générale :

$$\frac{d\phi^\theta(\mathbf{x})}{d\pi}$$
$$=$$
$$\frac{dq^\theta_{\lambda\mu}}{d\pi} . x^\lambda . x^\mu + \sum_{\lambda\mu} q^\theta_{\lambda\mu} . \frac{dx^\lambda}{d\pi} . x^\mu + \sum_{\lambda\mu} q^\theta_{\lambda\mu} . x^\lambda . \frac{dx^\mu}{d\pi} + \sum_\lambda \frac{dq^\theta_\lambda}{d\pi} . x^\lambda + \sum_\lambda q^\theta_\lambda . \frac{dx^\lambda}{d\pi}$$

Et :

$$\frac{d^2\phi^\theta(\mathbf{x})}{d^2\pi}$$
$$=$$
$$\frac{d^2q^\theta_{\lambda\mu}}{d^2\pi} . x^\lambda . x^\mu + q^\theta_{\lambda\mu} . \frac{dx^\lambda}{d\pi} . x^\mu + q^\theta_{\lambda\mu} . x^\lambda . \frac{dx^\mu}{d\pi}$$
$$+$$
$$\sum_{\lambda\mu} \frac{dq^\theta_{\lambda\mu}}{d\pi} . \frac{dx^\lambda}{d\pi} . x^\mu + \sum_{\lambda\mu} q^\theta_{\lambda\mu} . \frac{d^2x^\lambda}{d^2\pi} . x^\mu + \sum_{\lambda\mu} q^\theta_{\lambda\mu} . \frac{dx^\lambda}{d\pi} . \frac{dx^\mu}{d\pi}$$
$$+$$
$$\sum_{\lambda\mu} \frac{dq^\theta_{\lambda\mu}}{d\pi} . x^\lambda . \frac{dx^\mu}{d\pi} + \sum_{\lambda\mu} q^\theta_{\lambda\mu} . \frac{dx^\lambda}{d\pi} . \frac{dx^\mu}{d\pi} + \sum_{\lambda\mu} q^\theta_{\lambda\mu} . x^\lambda . \frac{d^2x^\mu}{d^2\pi}$$
$$+$$
$$\sum_\lambda \frac{d^2q^\theta_\lambda}{d^2\pi} . x^\lambda + \sum_\lambda \frac{dq^\theta_\lambda}{d\pi} . \frac{dx^\lambda}{d\pi}$$
$$+$$
$$\sum_\lambda \frac{dq^\theta_\lambda}{d\pi} . \frac{dx^\lambda}{d\pi} + \sum_\lambda q^\theta_\lambda . \frac{d^2x^\lambda}{d^2\pi}$$

4.4 Calcul des dérivées ordinaires successives à l'origine commune aux deux espaces

Ces relations se simplifient alors de manière drastique :

$$\frac{d\phi^{\theta}(\mathbf{0})}{d\pi} = \sum_{\lambda} q^{\theta}_{\lambda} . \frac{dx^{\lambda}}{d\pi}$$

Et :

$$\frac{d^2\phi^{\theta}(\mathbf{0})}{d^2\pi} = \sum_{\lambda\mu} 2.q^{\theta}_{\lambda\mu} . \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} . \frac{dx^{\mu}}{d\pi} + \sum_{\lambda} 2.\frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} . \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} + \sum_{\lambda} q^{\theta}_{\lambda} . \frac{d^2x^{\lambda}}{d^2\pi}$$

Ceci permet d'en tirer la conclusion pratique qu'à l'origine commune aux deux espaces, les vitesses se transforment linéairement mais les accélérations en général pas ; sauf si la vitesse est nulle dans le **x**-espace.

4.5 Calcul de l'opérateur à l'origine commune aux deux espaces

Munis des calculs précédents, il devient relativement facile d'en déduire que :

$$|L(\phi(\mathbf{x})) >$$

$$=$$

$$\sum_{k=0,1,2} [_kP] . |\frac{d^k\phi(\mathbf{x})}{d^k\pi} >$$

$$\downarrow$$

$$[_0P] . |\phi(\mathbf{x}) > + [_1P] . |\frac{d\phi(\mathbf{x})}{d\pi} > + [_2P] . |\frac{d^2\phi(\mathbf{x})}{d^2\pi} >$$

Soit encore :

$$L^{\epsilon}(\phi(\mathbf{x})) = {}_0P^{\epsilon}_{\theta} . \phi^{\theta}(\mathbf{x}) + {}_1P^{\epsilon}_{\theta} . \frac{d\phi^{\theta}(\mathbf{x})}{d\pi} + {}_2P^{\epsilon}_{\theta} . \frac{d^2\phi^{\theta}(\mathbf{x})}{d^2\pi}$$

A l'origine commune des deux espaces, il s'agit de :

$$L^{\epsilon}(\mathbf{0}) = {}_0P^{\epsilon}_{\theta} . \phi^{\theta}(\mathbf{0}) + {}_1P^{\epsilon}_{\theta} . \frac{d\phi^{\theta}(\mathbf{0})}{d\pi} + {}_2P^{\epsilon}_{\theta} . \frac{d^2\phi^{\theta}(\mathbf{0})}{d^2\pi}$$

Et en injectant les deux relations trouvées précédemment, c'est aussi :

$$L^{\epsilon}(\mathbf{0}) = {}_1P^{\epsilon}_{\theta} . \{\sum_{\lambda} q^{\theta}_{\lambda} . \frac{dx^{\lambda}}{d\pi}\} + {}_2P^{\epsilon}_{\theta} . \{\sum_{\lambda\mu} 2.q^{\theta}_{\lambda\mu} . \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} . \frac{dx^{\mu}}{d\pi} + \sum_{\lambda} 2.\frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} . \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} + \sum_{\lambda} q^{\theta}_{\lambda} . \frac{d^2x^{\lambda}}{d^2\pi}\}$$

De sorte qu'un regroupement fournit :

$$\sum_{\lambda\mu} 2 . {}_2P^{\epsilon}_{\theta} . q^{\theta}_{\lambda\mu} . \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} . \frac{dx^{\mu}}{d\pi} + \sum_{\lambda} {}_2P^{\epsilon}_{\theta} . q^{\theta}_{\lambda} . \frac{d^2x^{\lambda}}{d^2\pi} = -\sum_{\lambda} ({}_1P^{\epsilon}_{\theta} . q^{\theta}_{\lambda} + 2 . {}_2P^{\epsilon}_{\theta} . \frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi}) . \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} + L^{\epsilon}(\mathbf{0})$$

Pour rappel, la loi de Lorentz-Einstein en présence d'une force extérieure supplémentaire **f** s'écrit quant à elle :

$$m . \sum_{\lambda\mu} \Gamma^{\epsilon}_{\lambda\mu} . \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} . \frac{dx^{\mu}}{d\pi} + m . \frac{d^2x^{\epsilon}}{d^2\pi} = q . F^{\epsilon}_{\lambda} . \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} + f^{\epsilon}$$

4.6 Relations de cohérence à l'origine commune aux deux espaces

Il en résulte par conséquent que les relations suivantes devraient être satisfaites pour que la proposition soit démontrée à l'origine commune aux deux espaces :

$$m \,.\, \Gamma^{\epsilon}_{\lambda\mu} \;=\; \sum_{\theta} 2 \,.\, {}_{2}P^{\epsilon}_{\theta} \,.\, q^{\theta}_{\lambda\mu}$$

$$m \,.\, \delta^{\epsilon}_{\lambda} \;=\; \sum_{\theta} {}_{2}P^{\epsilon}_{\theta} \,.\, q^{\theta}_{\lambda}$$

$$q \,.\, F^{\epsilon}{}_{\lambda} \;=\; -\sum_{\theta} (2 \,.\, {}_{2}P^{\epsilon}_{\theta} \,.\, \frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} \;+\; {}_{1}P^{\epsilon}_{\theta} \,.\, q^{\theta}_{\lambda})$$

$$L^{\epsilon}(\mathbf{0}) \;=\; f^{\epsilon}$$

4.7 Analyse des relations de cohérence

Les relations précédentes appellent les commentaires et décodages suivants :

1. **De la nécessité d'approfondir l'étude des symboles de Christoffel de la seconde espèce** qui apparaissent à nouveau sous le forme de factorisations ; voir la littérature universitaire sur le sujet [[08] ; en langue allemande par exemple] et fin du §3.3 dans ce document :

$$m \,.\, \sum_{\theta} \omega^{\epsilon}_{\lambda\theta} \,.\, T^{\theta}_{\mu} \;=\; m \,.\, \Gamma^{\epsilon}_{\lambda\mu} \;=\; \sum_{\theta} 2 \,.\, {}_{2}P^{\epsilon}_{\theta} \,.\, q^{\theta}_{\lambda\mu}$$

L'observation attentive du positionnement des indices permet immédiatement de constater que les deux factorisations obtenues dans ce document ne sont pas identiques. La logique commande alors de ne retenir parmi les deux interprétations proposées précédemment pour la première famille de factorisations que celle pouvant être compatible avec la seconde famille de factorisations. Une fois encore, l'observation attentive du positionnement des indices permet de constater que les deux interprétations donnée ci-dessus remplissent ce critère.

- Première interprétation ; il est aisé de constater que les relations :

$$\Gamma_{\lambda\theta\mu} \;=\; g_{\theta\pi} \,.\, \Gamma^{\pi}_{\lambda\mu} \;\Longleftrightarrow\; g^{\epsilon\theta} \,.\, \Gamma_{\lambda\theta\mu} \;=\; g^{\epsilon\theta} \,.\, g_{\theta\pi} \,.\, \Gamma^{\pi}_{\lambda\mu} \;=\; \Gamma^{\epsilon}_{\lambda\mu}$$

autorisent à écrire :

$$m \,.\, \sum_{\theta} \omega^{\epsilon}_{\lambda\theta} \,.\, T^{\theta}_{\mu} \;=\; m \,.\, \sum_{\theta} g^{\epsilon\theta} \,.\, \Gamma_{\lambda\theta\mu} \;=\; \sum_{\theta} 2 \,.\, {}_{2}P^{\epsilon}_{\theta} \,.\, q^{\theta}_{\lambda\mu}$$

et à proposer par exemple (plusieurs factorisations sont possibles) les identifications suivantes :

$$g^{\epsilon\theta} \;=\; {}_{2}P^{\epsilon}_{\theta}$$

$$m \,.\, \Gamma_{\lambda\theta\mu} \;=\; 2 \,.\, q^{\theta}_{\lambda\mu}$$

La cohérence pousse ici à écrire le

Lemme 4.1. ***Complément sur la première interprétation*** *: La premième relation est satisfaite si, simultanément, (a) la matrice définissant les coefficients de degré deux de l'opérateur différentiel se confond avec l'inverse de la métrique locale et (b) le cube des coefficients gouvernant la partie non-linéaire des transformations définissant le passage entre les deux espaces coincide avec la moitié du cube des symboles de Christoffel de la première espèce multiplié par la masse du phénomène étudié.*

puis le

Théorème 4.1. ***Sur la première interprétation*** *: La LLE peut se transcrire simultanément sous forme d'un produit de Lie déformé et d'un opérateur différentiel d'ordre deux si, simultanément, (a) la matrice de transcription, [T], se confond avec l'inverse de la métrique locale qui ellemê coincide avec les coefficients de degré deux de l'opérateur différentiel; (b) le cube des coefficients gouvernant la partie non-linéaire des transformations définissant le passage entre les deux espaces coincide avec la moitié du cube des symboles de Christoffel de la première espèce multiplié par la masse du phénomène étudié tandis que le cube oméga définissant le produit de Lie déformé transcrivant localement la LLE coincide avec le cube des symboles de Christoffel de la première espèce et (c) le cube de Levi-Civita est doublement réduit donc en fait est restreint à un quadruplet de scalaires.*

$$[G]^{-1} \,=\, [{}_2P] \,=\, [T]$$
$$m\,.\,\check{\Gamma}(1) \,=\, 2\,.\,\check{q} \,=\, m\,.\,\check{\omega}$$
$$\check{\Gamma}(2) \,:\, (a,b,c,d)$$

- Deuxième interprétation ; puisque (voir [[07] ; p. 7, (42.b)]) :

$$e^{\epsilon}{}_{\theta}\,.\,({e_\mu}^{b}\,.\,{spin_\lambda}^{\theta}{}_{b} + \delta_\lambda {e_\mu}^{\theta}) \,=\, \Gamma^{\epsilon}_{\lambda\mu} \,=\, \sum_{\theta} 2\,.\,{}_2P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,q^{\theta}_{\lambda\mu}$$

Il suffit aussi de poser par exemple :

$$e^{\epsilon}{}_{\theta} \,=\, {}_2P^{\epsilon}_{\theta}$$
$${e_\mu}^{b}\,.\,{spin_\lambda}^{\theta}{}_{b} + \delta_\lambda {e_\mu}^{\theta} \,=\, 2\,.\,q^{\theta}_{\lambda\mu}$$

pour que la cohérence de la première relation nécessaire à démontrer la proposition identifiant la loi de Lorentz Einstein et un opérateur différentiel d'ordre deux soit assurée. Je viens donc de démontrer

Lemme 4.2. ***Complément sur la seconde interprétation*** *: La premième relation est satisfaite si, simultanément, (a) la matrice définissant les coefficients de degré deux de l'opérateur différentiel se confond avec l'inverse de la tétrade locale et (b) le cube des coefficients gouvernant la partie non-linéaire des transformations définissant le passage entre les deux espaces est défini par une relation qui pourrait s'écrire symboliquement (le petit "v" à l'envers placé au dessus d'une lettre signifie qu'il s'agit d'un cube de coefficients) :*

$$[{}_2P]^{-1}\,.\,\check{spin} + \check{\delta e} \,=\, 2\,.\,\check{q}$$

avec :

$$[e^{\epsilon}{}_{\theta}] \,=\, [{}_2P]$$

Théorème 4.2. ***Sur la seconde interprétation*** *: La LLE peut aussi se transcrire simultanément sous forme d'un produit de Lie déformé et d'un opérateur différentiel d'ordre deux si, simultanément, (a) la matrice définissant les coefficients de degré deux de l'opérateur différentiel se confond avec l'inverse de la tétrade locale et donc avec l'inverse de la matrice [T]; (b) le cube des coefficients gouvernant la partie non-linéaire des transformations définissant le passage entre les deux espaces coincide* *avec la moitié d'un cube obtenu par une sorte de produit entre la matrice [T] et le cube des coefficients de la connexion de spin locale tandis que le cube des variations de la tétrade locale est nul.*

Ce sont les situations correspondant aux identifications suivantes :

$$[e^{\epsilon}{}_{\theta}] \,=\, [{}_2P] \,=\, [T]^{-1}\,(\S 3.4.\,point\,3,\ interpr.\,02)$$

et :

$$[T]\,.\,\check{spin} \,=\, 2\,.\,\check{q}\,;\,\check{\partial_{\mathbf{x}}e} \,=\, \check{0}$$

Remarque 4.1. ***Sur la nécessité de bien distinguer les cubes impliqués dans cette discussion entre eux***

In fine, l'observation attentive du positionnement des indices permet de constater qu'il convient de ne pas confondre les cubes impliqués dans la discussion entre eux bien qu'il soit possible de les relier les uns avec les autres:

- les cubes "oméga" définissant les produits de Lie déformés permettant de transcrire la loi de Lorentz-Einstein ;

$$\check{\omega}$$

- les cubes décrivant la connexion de spin ;

$$\check{Spin}$$

- les cubes gouvernant la partie non-linéaire des transformations entre les deux espaces.

$$\check{q}$$

2. **D'un lien présumé avec l'équation de Dirac?** Concernant la deuxième relation de cohérence :

   - En supposant que la deuxième des trois matrices [P] et que la matrice [Q] gouvernant la partie linéaire des transformations reliant les deux espaces soient toutes les deux inversibles, alors -à un facteur près qui est relié à la masse "m" du phénomène étudié, elles sont l'inverse l'une de l'autre. Si l'une est connue, alors l'autre l'est aussi.

   $$[{}_2P]\,.\,[Q] \,=\, m\,.\,Id_4$$

   - Elle évoque vaguement l'équation de Dirac (théorie quantique des champs).

3. **De l'existence plausible d'une connexion** Concernant la troisième relation de cohérence : elle introduit à son tour un formalisme peu évident à décoder de la représentation matricielle du formalisme mixte (up, down) du tenseur champ électromagnétique (EM). La deuxième relation de cohérence fournit une indication discrète qui peut commencer à faire subodorer la présence d'une connexion. L'intuition se précise lorsque la discussion est volontairement réduite au cas d'un opérateur auto-adjoint :

   $$[{}_1P] \,=\, \frac{d[{}_2P]}{d\pi}$$

   Il vient alors :

   $$-q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \,=\, \sum_{\theta}\,(2\,.\,{}_2P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} \,+\, \frac{d_2P^{\epsilon}_{\theta}}{d\pi}\,.\,q^{\theta}_{\lambda})$$

Ce qui se laisse encore réorganiser en :

$$-q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \;=\; \sum_{\theta} {}_2P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} \;+\; \sum_{\theta} \frac{d({}_2P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,q^{\theta}_{\lambda})}{d\pi}$$

La deuxième relation de cohérence fournit maintenant :

$$-q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \;=\; \sum_{\theta} {}_2P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} \;+\; \frac{d(m\,.\,\delta^{\epsilon}_{\lambda})}{d\pi}$$

et contient aussi l'information :

$$[Q] \;=\; m\,.\,[{}_2P]^{-1}$$

qui, lorsqu'elle est injectée ici, fournit :

$$-q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \;=\; \sum_{\theta} {}_2P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{d\{m\,.\,({}_2P^{\theta}_{\lambda})^{-1}\}}{d\pi} \;+\; \frac{d(m\,.\,\delta^{\epsilon}_{\lambda})}{d\pi}$$

Soit encore :

$$-q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \;=\; \sum_{\theta} {}_2P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{d({}_2P^{\theta}_{\lambda})^{-1}}{d\pi} \;+\; 2\,.\,\frac{d(m\,.\,\delta^{\epsilon}_{\lambda})}{d\pi}$$

Ce formalisme laisse donc bien augurer de l'existence d'une connexion liée à la matrice contenant les coefficients de degré deux de l'opérateur L. Il est évident que ce fait s'applique donc aux deux interprétations mises en évidence par les réflexions exposées précédemment. Je vais donc examiner les situations associées aux deux théorèmes.

- **Dans le cadre correspondant au premier théorème** La relation précédente s'écrit alors :

$$-q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \;=\; \sum_{\theta} g^{\epsilon\theta}\,.\,\frac{dg_{\lambda\theta}}{d\pi} \;+\; 2\,.\,\frac{d(m\,.\,\delta^{\epsilon}_{\lambda})}{d\pi}$$

ou encore :

$$-q\,.\,[F^{\chi}{}_{\epsilon}] \;=\; [G]^{-1}\,.\,\frac{d[G]}{d\pi} \;+\; 2\,.\,\frac{dm}{d\pi}\,.\,Id_4$$

Dans la troisième partie de ce document j'ai montré que les cubes oméga réduits deux fois permettent d'aboutir à :

$$k\,.\,[F^{\chi}{}_{\epsilon}] \;=\; \Phi_{\omega}(\mathbf{u})\,.\,[T] \;+\frac{1}{2}\,.\,[T]^{-1}\,.\,T_2(o)(\partial_{[T]\,.\,|\mathbf{u}>},[T]\,.\,|\frac{d\mathbf{u}}{ds}>)\,.\,[T]$$

Et ils deviennent ici :

$$k\,.\,[F^{\chi}{}_{\epsilon}] \;=\; \Phi_{\omega}(\mathbf{u})\,.\,[G]^{-1} +\frac{1}{2}\,.\,[G]\,.\,T_2(o)(\partial_{[G]^{-1}\,.\,|\mathbf{u}>},[G]^{-1}\,.\,|\frac{d\mathbf{u}}{ds}>)\,.\,[G]^{-1}$$

Tout l'intérêt de cette étude est de pouvoir maintenant comparer ces résultats entre eux et de définir les conditions validant leur éventuelle identité. Là encore plusieurs remarques techniques s'imposent :

(a) Dans le cadre correspondant au premier théorème, le cube de Levi-Civita (des symboles de Christoffel de la seconde espèce) est réduit deux fois ; par conséquent, il se résume obligatoirement à un quadruplet de scalaires que j'ai noté plus haut (a, b, c, d). Dans la même veine, les produits de Lie déformés introduits dans cette théorie pour décrire la LLE de façon alternative sont antisymétriques sur leurs indices bas, par définition. Une seconde réduction réalisée de manière ad hoc (en inversant le signe en même temps que l'indice) les résume également à un (a priori) autre quadruplet de scalaires. Il se trouve que dans le cadre de validité de ce premier théorème, le cube antisymétrique oméga et le cube des symboles de Christoffel de la première espèce doivent coincider. Il en résulte donc les questions suivantes :

i. "Est-il techniquement possible de réduire deux fois le cube de Levi-Civita et le cube des symboles de Christoffel de la première espèce, simultanément et de façon cohérente eu égard à leurs propriétés et liens respectifs?"
ii. "Si oui : quelle correspondance existe t-il entre les deux quadruplets obtenus de la sorte? Que signifie t-elle physiquement parlant?"

(b) En supposant qu'une réponse raisonnable a pu être apportée aux questions précédentes, il faut noter que le rétablissement de la signification exacte du facteur k fournit plus exactement :

$$q\,.\,[F^{\chi}{}_{\epsilon}] \;=\; \Phi_{\omega}(m\,.\,\mathbf{u})\,.\,[G]^{-1} + \frac{m}{2}\,.\,[G]\,.\,T_2(o)(\partial_{[G]^{-1}\,.\,|\mathbf{u}>}, [G]^{-1}\,.\,|\frac{d\mathbf{u}}{ds} >)\,.\,[G]^{-1}$$

une relation qui doit donc être comparée avec :

$$-q\,.\,[F^{\chi}{}_{\epsilon}] \;=\; [G]^{-1}\,.\,\frac{d[G]}{d\pi} \;+\; 2\,.\,\frac{d(m\,.\,\delta^{\epsilon}_{\lambda})}{d\pi}$$

Je supposerai par simplicité que les abcisses curvilignes "s" et "pi" font bien référence aux mêmes trajectoires et qu'elles sont donc en réalité identiques. Ceci étant dit et clair, les possibilités de confrontation sont pléthores et il me faut faire un peu appel à l'intuition. Je propose donc d'examiner le domaine de validité de la réalisation simultanée des deux relations :

$$\Phi_{\omega}(m\,.\,\mathbf{u})\,.\,[G]^{-1} \;=\; -[G]^{-1}\,.\,\frac{d[G]}{d\pi}$$

$$\frac{m}{2}\,.\,[G]\,.\,T_2(o)(\partial_{[G]^{-1}\,.\,|\mathbf{u}>}, [G]^{-1}\,.\,|\frac{d\mathbf{u}}{ds} >)\,.\,[G]^{-1} \;=\; -2\,.\,\frac{d(m\,.\,\delta^{\epsilon}_{\lambda})}{d\pi}$$

La première des deux peut vaguement évoquer la relation à laquelle doivent obéir les éléments, [M], de l'algèbre de Lie du groupe des transformations de Lorentz, L ; voir [[10] ; chapitre IX, p. 291, (5.10)] :

$$[M]\,.\,[G] \;+\; [G]^t\,.\,[M] \;=\; [0]$$

Pour être vraie, cette proposition suppose que les métriques sont des éléments de O(4) et de poser aussi :

$$[G] \;=\; [G]^{-1} \;=\; [G]^t\,;\; \frac{d[G]}{d\pi} \;=\; \Phi_{\omega}(m\,.\,\mathbf{u}) \;=\; [M] \;\in\; L$$

Bien qu'il ne s'agisse encore à ce stade que d'une hypothèse, le chemin amorcé ici semble prometteur. Il donne au éléments de L une signification physique inattendue, faisant d'eux des dérivées ordinaires de la métrique locale en même temps que des résultats triviaux de la décomposition de la Loi de Lorentz-Einstein exprimée sous forme d'un produit de Lie déformé.

- **Dans le cadre correspondant au second théorème** Il vient :

$$-q \, . \, F^{\epsilon}{}_{\lambda} \; = \; \sum_{\theta} e^{\epsilon}{}_{\theta} \, . \, \frac{d(e^{\theta}{}_{\lambda})^{-1}}{d\pi} \; + \; 2 \, . \, \frac{d(m \, . \, \delta^{\epsilon}_{\lambda})}{d\pi}$$

Toutefois, ici, le second théorème exige de travailler avec des tétrades invariantes (localement et momentanément). De sorte que le terme pouvant justifier de parler d'une connexion disparait car :

$$\delta_{\lambda} e_{\mu}{}^{\theta} \; = \; 0 \; \rightarrow \; \frac{de_{\mu}{}^{\theta}}{d\pi} \; = \; 0$$

Il reste donc :

$$m \; \neq \; 0 \; : \; -q \, . \, F^{\epsilon}{}_{\lambda} \; = \; 2 \, . \, \frac{d(m \, . \, \delta^{\epsilon}_{\lambda})}{d\pi}$$

Conclusion : Au mieux, le champ EM est un objet mathématique jaugé. La difficulté et l'étrangeté liées à la volonté de mettre ici une jauge en évidence résident dans le fait que l'accomplissement de cette volonté aboutit à faire en sorte que la quantité conservée dans le trajet jaugé n'est pas la masse mais sa dérivée ordinaire par rapport à l'abcisse curviligne.

Dans les conditions examinées ici deux options peuvent apparaitre :

(a) le phénomène étudié est de masse quelconque mais invariante le long de son trajet ; dans ce cas la théorie développée dans ces lignes prédit des champs EM tels que tout simplement :

$$q \, . \, [F^{\epsilon}{}_{\lambda}] \; = \; [0]$$

(b) le phénomène étudié est de masse quelconque mais variable le long de son trajet (comme c'est par exemple le cas dans le cadre de la relativité restreinte - la masse varie avec la vitesse)

J'ai évoqué précédemment la similitude entre la deuxième relation de cohérence et l'équation de Dirac dont une formulation peut se trouver par exemple dans [[09] ; p. 14, (34)] :

$$\frac{\hbar}{c} \, . \, \sum_{\gamma} \gamma_{\mu} \, . \, \partial_{\mu} \; + \; m \, . \, Id_4 \; = \; 0$$

et pour laquelle la forme générique des matrices représentant une dérivation partielle peut se trouver dans les travaux d'E. Cartan sur les spineurs [[01]; IV. Dirac equations, §157, pp. 134-136]. Je vais maintenant l'incorporer à l'écriture ci-dessus (le signe moins disparait) :

$$q \, . \, [F^{\epsilon}{}_{\lambda}] \; = \; 2 \, . \, \frac{\hbar}{c} \, . \, \frac{d(\sum_{\gamma} \gamma_{\mu} \, . \, \partial_{\mu})}{d\pi}$$

Les matrices de Dirac sont invariantes parce que constituées de nombres invariants ; par suite :

$$q \, . \, [F^{\epsilon}{}_{\lambda}] \; = \; 2 \, . \, \frac{\hbar}{c} \, . \, \sum_{\gamma} \gamma_{\mu} \, . \, \frac{d\partial_{\mu}}{d\pi}$$

Pour prouver que ce type de champ EM se modifie au sein d'une jauge, il faut donc être en mesure de trouver des matrices [S] inversibles telles que :

$$[S] \, . \, \{\sum_{\gamma} \gamma_{\mu} \, . \, \frac{d\partial_{\mu}}{d\pi}\} \, . \, [S]^{-1} \; = \; \{\sum_{\gamma} \gamma_{\mu} \, . \, \frac{d\partial_{\mu}}{d\pi}\}$$

La cohérence logique avec ce qui vient d'être exposé ci-dessus incite à penser que les matrices [S] recherchées ici devraient absolument s'identifier avec la représentation matricielle de l'inverse de la tétrade.

$$[e^{\epsilon}{}_{\theta}] \, = \, [{}_2P] \, = \, [S]$$

Le challenge consiste donc à prouver que la relation ci-dessous est vraie :

$$[e^{\epsilon}{}_{\theta}] \, . \, \{\sum_{\gamma} \gamma_{\mu} \, . \, \frac{d\partial_{\mu}}{d\pi}\} \, . \, [e^{\epsilon}{}_{\theta}]^{-1} \, = \, \{\sum_{\gamma} \gamma_{\mu} \, . \, \frac{d\partial_{\mu}}{d\pi}\}$$

Résumé des conséquences de la seconde interprétation

- A condition de considérer un ensemble de tétrades invariantes, et de considérer que celles-ci (ou leurs inverses) assurent l'existence d'une jauge pour les représentations tensorielles mixtes (up, down) du champ EM, la loi de Lorentz-Einstein peut s'exprimer simultanément sous la forme d'un opérateur différentiel d'ordre deux et comme un produit de Lie déformé.
- Malheureusement, le fait de considérer des tétrades invariantes est équivalent à ne considérer que des géométries invariantes (voir définition des tétrades) donc des géométries pour lesquelles le cube de Levi-Civita est nul. In fine, ceci revient donc à ne pouvoir intégrer aux solutions du problème posé que les cas pour lesquels la loi de Lorentz-Einstein se réduit à la loi classique de Faraday. Techniquement, la situation suivante est réalisée :

  $$m \, . \, \sum_{\theta} \omega^{\epsilon}_{\lambda\theta} \, . \, T^{\theta}_{\mu} \, = \, 0 \, = \, \sum_{\theta} 2 \, . \, {}_2P^{\epsilon}_{\theta} \, . \, q^{\theta}_{\lambda\mu}$$

  Et, en première analyse, elle n'impose a priori pas nécéssairement la nullité du cube oméga et donc elle n'interdit pas la représentation de la loi de Faraday sous la forme d'un produit de Lie déformé basé sur ce cube.
- Pour autant, l'observation attentive des seules conditions validant la traduction de la loi de Lorentz-Einstein sous la forme d'un opérateur différentiel d'ordre deux n'impose pas l'invariance de la tétrade locale tout en autorisant l'apparition d'une connexion basée sur celle-ci (ou sur son inverse). Il suffit en effet de poser par exemple :

  $$[e^{\epsilon}{}_{\theta}] \, = \, [{}_2P^{\epsilon}_{\theta}] \, = \, [T]^{-1} \, (\S 3.4. \, point \, 3, \, interpr. \, 02)$$

  $$e_{\mu}{}^{b} \, . \, spin_{\lambda}{}^{\theta}{}_{b} \, + \, \delta_{\lambda} e_{\mu}{}^{\theta} \, = \, 2 \, . \, q^{\theta}_{\lambda\mu}$$

  Par conséquent, l'analyse que je viens de développer suggère fortement que la réalisation simultanée de la double traduction de la loi de Lorentz-Einstein, et sous forme d'opérateur, et sous forme de produit de Lie déformé, ne peut se concevoir que si elle est accompagnée d'une contrainte technique supplémentaire. Concrètement, le cube des variations de la tétrade initiale ne doit pas nécessairement être toujours nul mais la transition d'une valeur de la tétrade à une autre se répercute automatiquement sur la valeur du cube oméga via la relation :

  $$m \, . \, \sum_{\theta} \omega^{\epsilon}_{\lambda\theta} \, . \, (e^{\theta}{}_{\mu})^{-1} \, = \, m \, . \, \Gamma^{\epsilon}_{\lambda\mu} \, = \, \sum_{\theta} e^{\epsilon}{}_{\theta} \, . \, q^{\theta}_{\lambda\mu}$$

  qui peut laisser augurer du fait que le cube oméga est simplement la transformée du cube gouvernant la partie non-linéaire des transformations liant les deux espaces dans une jauge déterminée par la tétrade locale.

4. **De la signification physique profonde de l'opérateur** L'interprétation de la quatrième relation de cohérence est simple : "Au niveau de l'origine commune aux deux espaces mathématiques impliqués dans cette discussion théorique, l'opérateur différentiel de degré deux, s'il existe, se confond avec la représentation d'une force extérieure supplémentaire à celle de Lorentz-Einstein. Il équivaut du coup aussi en quelque sorte à un défaut local et momentané de réalisation de la loi de Lorentz-Einstein". J'ai commencé à démontrer dans [[f]] ce qui pouvait être appris de l'existence de tels défauts.

4.8 Discussion sur la quatrième partie

Dans cette longue et difficile section technique, j'ai examiné si, comment et quand la loi de Lorentz-Einstein pouvait s'exprimer simultanément sous la forme d'un opérateur différentiel d'ordre deux et comme un produit de Lie déformé.

Les mathématiques apportent des réponses positives précises à cette investigation ; elles sont consignées dans deux théorèmes.

Elles laissent également de très nombreuses questions en suspens dont les réponses résideront certainement dans une analyse rationnelle encore plus poussée des détails techniques. Par exemple : "Sont-elles mathématiquement plausibles toutes les deux? Si oui : laquelle des deux interprétations faut-il retenir? Faut-il vraiment en chosir une? Ce choix dépend-il uniquement d'une circonstance physique particulière? Laquelle? etc."

Ce sera l'objet d'un prochain document ou d'une nouvelle version de celui-ci.

References

5 Bibliographie

5.1 Oeuvres internationales

[01] Cartan, E. The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966; translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)"; Hermann, 1937.

[02] Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7.

[03] Stefano Liberati and Luca Maccione: Phys. Rev. Lett. 112, 151301 - Published 14 April 2014.

[04] Weber and Arfken: Essential mathematical methods for physicists; international edition, ©2004 by Elsevier Science, ISBN 0-12-059878-7.

[05] Eric Poisson and Adam Pound and Ian Vega: "The Motion of Point Particles in Curved Spacetime"; Living Rev. Relativity 14, (2011), 7. URL: http://www.livingreviews.org/lrr-2011-7.

[06] Delachet, A.: Le calcul tensoriel, presses universitaires de France, collection "Que sais-je?", numéro 1336, édition de 1974, Paris.

[07] Einstein's vierbein field theory of curved space; arXiv:1106.2037v1, [gr-qc], 10 June 2011.

[08] Allgemeine Relativitaetstheorie (A.R.T.): T. Fliessbach, 4. Auflage 2003, Spektrum der Wissenschaft, Spektrum Akademischer Verlag ©, Heidelberg, Berlin, ISBN 3-8274-1356-7.

[09] Dyson, Freeman: Quantenfeld-theorie (Die Weltbekannte Einfuehrung von einem der Vaeter der QED); Springer Spektrum, ISBN 978-3-642-37677-1, ©Springer Verlag Berlin Heidelberg 2014.

[10] Lineare Algebra und Analytische Geometrie : Theodor Broecker, ein Lehrbuch der Physiker und Mathematiker ; zweite korrigierte Auflage, Birkhauser Verlag

5.2 Contributions personnelles

[a] Periat, T.: Vides instables et polarisations gravitationnelles - 1ère partie ; ISBN 978-2-36923-111-0, v1, 24 Octobre 2016.

[b] Periat, T.: Decomposing deformed tensor products; ISBN 978-2-36923-092-2, v2, March, 2016.

[c] Periat, T.: Méthode intrinsèque en dimension quatre ; ISBN 978-2-36923-099-1, v2, 20 avril 2016.

[d] Periat, T.: Représentations des quantités de mouvement et des moments cinétiques ; ISBN 978-2-36923-080-9, v7, 4 Mai 2016.

[e] Periat, T.: Modèle d'Ising simple à trois sites ; 1ère partie : Introduction à un tout autre regard sur le sujet ; ISBN 978-2-36923-063-2, v2, 14 avril 2015.

[f] Periat, T.: Curvatures and deformed Lie products (a new procedure to get it); ISBN 978-2-36923-109-7, v2, 12 October 2016.