Dérivations et intégrales matricielles sur les espaces munis de produits tensoriels déformés.

Collection : “La Théorie de la Question (E)”

©Thierry PERIAT.

19 juin 2022

Dérivations et intégrales matricielles sur les espaces munis de produits tensoriels déformés. ©Thierry PERIAT, ISBN 978-2-36923-066-3, EAN 9782369230663, collection "La Théorie de la Question (E)".

Première partie

Dérivations et intégrales sur les espaces munis de produits tensoriels déformés.

Chapitre 1

Introduction à la notion de dérivation matricielle.

1.1 Données élémentaires.

Ce document n'est pas une n-ième collection de formules explicitant les dérivées d'expressions contenant des matrices. Il se donne au contraire comme objectif de définir les circonstances mathématiques pour lesquelles une matrice peut jouer le rôle habituellement dévolu à une dérivation.

1.1.1 Produit tensoriel déformé.

Définition 1.1.1. ***Espace vectoriel*** *(rappel).*

Soit un corps K de caractéristique différente de deux et soit un ensemble E muni de deux opérations binaires internes [1] :

1. L'addition, notée "+" ;
2. le produit à gauche par un élément appartenant à K, noté : ".".

Cet ensemble E est dit être doté d'une structure d'espace vectoriel sur K lorsque le cahier des charges suivants est réalisé : (E, +) est un groupe additif, etc... (voir abondante littérature académique sur le sujet).

Définition 1.1.2. ***Produit tensoriel déformé.***

Soit E(D, K) un espace vectoriel de dimension entière D supérieure ou égale à deux rapporté a sa base canonique Ω : $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_\alpha, ..., \mathbf{e}_{D-1})$; soit deux vecteurs quelconques de cet espace et enfin soit un cube d'éléments de K, noté A, je dis que le produit tensoriel habituel de ces deux vecteurs a été déformé par les éléments du cube A chaque fois que je peux calculer le nouveau vecteur :

$$\forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in E(D,\, K) \times E(D,\, K) \xrightarrow{\otimes_A} \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = A^k_{ij} \cdot q^i_1 \cdot q^j_2 \cdot \mathbf{e}_k \in E(D,\, K)$$

1. i.e. : deux opérations impliquant deux arguments dont le résultat est dans cet ensemble E.

Définition 1.1.3. ***Cube réduit.***

Un cube réduit est un cube dont les composantes satisfont :

$$A_{ij}^{k} = A_{ik}^{j}$$

Définition 1.1.4. ***Cube anti-réduit.***

Un cube anti-réduit est un cube dont les composantes satisfont :

$$A_{ij}^{k} + A_{ik}^{j} = 0$$

Proposition 1.1.1. ***Cube symétrique réduit***

Un cube symétrique peut être réduit ; preuve :

$$A_{ij}^{k} = A_{ji}^{k} = A_{jk}^{i} = A_{kj}^{i} = A_{ki}^{j} = A_{ik}^{j} = A_{ij}^{k}$$

□

Proposition 1.1.2. ***Cube anti-symetrique anti-reduit***

Un cube anti-symétrique peut être anti-réduit ; preuve :

$$A_{ij}^{k} = -A_{ji}^{k} = A_{jk}^{i} = -A_{kj}^{i} = A_{ki}^{j} = -A_{ik}^{j} = A_{ij}^{k}$$

□

Définition 1.1.5. ***Produit extérieur déformé.***

Dans les mêmes conditions que celles qui viennent d'être exposées, le produit dit extérieur [2] des deux vecteurs précédents est, par dévfinition le nouveau vecteur :

$$\forall\,(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in E^2(D, K) :$$

$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) - \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) = A_{ij}^{k} \cdot (q_1^i \cdot q_2^j - q_2^i \cdot q_1^j) \cdot \mathbf{e}_k$$

Les composantes de ce produit extérieur se laissent toujours répartir dans trois sous-ensembles :

$$\{\sum_{i<j} A_{ij}^{k} \cdot (q_1^i \cdot q_2^j - q_2^i \cdot q_1^j)\} + \{\sum_{i=j} A_{ij}^{k} \cdot (q_1^i \cdot q_2^j - q_2^i \cdot q_1^j)\} + \{\sum_{i>j} A_{ij}^{k} \cdot (q_1^i \cdot q_2^j - q_2^i \cdot q_1^j)\}$$

De sorte que, si K est supposé être un corps commutatif : (i) le second terme de la somme précédente s'annule et (ii) puisque la série des termes suivants apparait :

$$A_{12}^{k} \cdot (q_1^1 \cdot q_2^2 - q_2^1 \cdot q_1^2) \,;\; A_{21}^{k} \cdot (q_1^2 \cdot q_2^1 - q_2^2 \cdot q_1^1)$$

$$A_{1j}^{k} \cdot (q_1^1 \cdot q_2^j - q_2^1 \cdot q_1^j) \,;\; A_{j1}^{k} \cdot (q_1^j \cdot q_2^1 - q_2^j \cdot q_1^1)$$

$$A_{1D}^{k} \cdot (q_1^1 \cdot q_2^D - q_2^1 \cdot q_1^D) \,;\; A_{D1}^{k} \cdot (q_1^D \cdot q_2^1 - q_2^D \cdot q_1^1)$$

2. Cette appellation est trompeuse puisque contrairement au produit extérieur classique, le résultat d'un produit extérieur déformé est toujours dans l'ensemble de départ.

etc.

Finalement :

$$\forall\, A,\, \forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, E^2(D,\, K) \;:\; \wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \sum_{i<j} (A^k_{ij} - A^k_{ji}) \,.\, (q^i_1 \,.\, q^j_2 - q^i_2 \,.\, q^j_1) \,.\, \mathbf{e}_k$$

Le résultat de ce calcul est toujours un élément de l'espace vectoriel de départ : E(D, K). Chacune de ses D composantes est une somme de 1 + 2 + ... + (D - 1) = D.(D - 1)/2 termes ; au lieu des D^2 termes contenus dans chacune des D composantes du produit tensoriel déformé l'ayant généré.

1.1.2 Les produits tensoriels déformés par des cubes antisymétriques.

Définition 1.1.6. ***Produit de Lie déformé.***

Soit E(D, K) un espace vectoriel de dimension entière D supérieure ou égale à deux rapporté à sa base canonique Ω : ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_\alpha$, ..., $\mathbf{e}_{D-1}$) ; soit deux vecteurs quelconques de cet espace et enfin soit un cube d'éléments de K, antisymétrique sur ses indices bas et noté A ; je dis que le produit de Lie habituel de ces deux vecteurs a été déformé par les éléments du cube A chaque fois que je peux calculer le nouveau vecteur :

$$\forall\, A \,|\, A^k_{ji} \,+\, A^k_{ij} \,=\, 0,\, \forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, E^2(D,\, K) \;:$$

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_A \,=\, \frac{1}{2} \,.\, \wedge_A\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \sum_{i<j} A^k_{ij} \,.\, (q^i_1 \,.\, q^j_2 \,-\, q^i_2 \,.\, q^j_1) \,.\, \mathbf{e}_k$$

Remarque 1.1.1. *Sur l'existence des cubes antisymétriques.*

Tout cube A peut se décomposer en un cube B^+ symétrique sur ses indices bas et un cube B^- antisymétrique sur ses indices bas :

$$\forall\, A \;:$$

$$A^k_{ij} \,=\, \frac{1}{2} \,.\, (A^k_{ij} \,+\, A^k_{ji}) \,+\, \frac{1}{2} \,.\, (A^k_{ij} \,-\, A^k_{ji})$$

$$\exists\, B^- \;:\; B^k_{ij} \,=\, \frac{1}{2} \,.\, (A^k_{ij} \,-\, A^k_{ji})$$

$$B^k_{ji} \,=\, \frac{1}{2} \,.\, (A^k_{ji} \,-\, A^k_{ij}) \,=\, -\frac{1}{2} \,.\, (A^k_{ij} \,-\, A^k_{ji}) \,=\, -B^k_{ij}$$

Je prie les lecteurs de noter que le produit extérieur déformé de cette théorie est construit sur n'importe quel cube alors que le produit de Lie déformé l'est uniquement sur des cubes antisymétriques sur leurs indices bas. En dépit de ce constat, j'énonce la :

Proposition 1.1.3. *Il existe un lien naturel entre le produit extérieur et le produit de Lie car tout produit extérieur déformé bâti sur un quelconque cube A est aussi un produit de Lie déformé construit sur le cube anti-symétrique B implicitement contenu dans le cube A.*

Démonstration. En effet :

$$\forall\, A,\, \forall\,(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, E^2(D,\, K) \,:\, \exists\, B^- \,|\, B^k_{ij} \,+\, B^k_{ji} \,=\, 0;\, B^k_{ij} \,=\, \frac{1}{2}\,.\,(A^k_{ij} \,-\, A^k_{ji})$$

$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

$$=$$

$$\sum_{i<j}(A^k_{ij} \,-\, A^k_{ji})\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2 \,-\, q^i_2\,.\,q^j_1)\,.\,\mathbf{e}_k$$

$$=$$

$$\sum_{i<j} 2\,.\,B^k_{ij}\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2 \,-\, q^i_2\,.\,q^j_1)\,.\,\mathbf{e}_k$$

$$=$$

$$2\,.\,[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{B^-}$$

□

Remarque 1.1.2. *Un lien avec la notion de différentiation extérieure.*

Je remarque la similitude formelle entre le concept de *covariant bilinéaire* introduit par Darboux [[01] ; 1882] et celui de produit extérieur déformé introduit ci-dessus.

Ce concept de covariant bilinéaire a été rebaptisé depuis en : *différentiation extérieure* ; il est lié à l'étude des variations de la forme différentielle $\Theta_d(\mathrm{X})$ définie par :

$$\Theta_d(X) \,=\, \sum_{\alpha} X_\alpha\,.\,dx^\alpha$$

Une différentiation extérieure de cette forme est :

$$\delta\Theta_d(X) \,=\, \sum_{\alpha} \delta(X_\alpha\,.\,dx^\alpha)$$

L'utilité de ce concept tient à ses liens avec un vieux problème d'intégration (volumes dans un espace de dimension quelconque).

Dans [[02] ; 1899], E. Cartan réalise une synthèse des travaux de Pfaff, Grassmann, Natani, Clebsch, Lie, Frobenius et Darboux. En utilisant la règle de Leibnitz :

$$\delta\Theta_d(X) \,=\, \sum_{\alpha} \delta X_\alpha\,.\,dx^\alpha \,+\, X_\alpha\,.\,\delta dx^\alpha$$

Le développement du premier terme a droite du signe de l'égalité ne pose aucun problème. Ce n'est pas le cas pour le second car personne ne sait calculer δd. Darboux propose de contourner cette difficulté en remarquant la chose suivante :

— en intervertissant le rôle de d et δ :

$$d\Theta_\delta(X) \,=\, \sum_{\alpha} dX_\alpha\,.\,\delta x^\alpha \,+\, X_\alpha\,.\,d\delta x^\alpha$$

— et en supposant *sans démonstration* que :

$$\delta d = d\delta,$$

il est possible d'obtenir :

$$\delta\Theta_d(X) \,-\, d\Theta_\delta(X) \,=\, \sum_{\alpha\,<\,\beta} (\frac{\partial X_\alpha}{\partial x^\beta} \,-\, \frac{\partial X_\beta}{\partial x^\alpha})\,.\,(dx^\alpha\,.\,\delta x^\beta \,-\, dx^\beta\,.\,\delta x^\alpha)$$

C'est l'endroit précis pour remarquer qu'en répétant la manoeuvre avec D formes différentielles différentes (formes de Pfaff) :

$$\chi \,=\, 0, 1, ..., D-1 :\, \Theta^\chi_d(X) \,=\, \sum_\alpha X^\chi_\alpha\,.\,dx^\alpha$$

alors :

$$\delta\Theta^\chi_d(X) \,-\, d\Theta^\chi_\delta(X) \,=\, \sum_{\alpha\,<\,\beta} (\frac{\partial X^\chi_\alpha}{\partial x^\beta} \,-\, \frac{\partial X^\chi_\beta}{\partial x^\alpha})\,.\,(dx^\alpha\,.\,\delta x^\beta \,-\, dx^\beta\,.\,\delta x^\alpha)$$

Autrement dit j'ai le :

Lemme 1.1.1. *Sur les formes de Pfaff et les produits extérieurs déformés.*

L'existence d'un ensemble de D formes différentielles Θ^χ(X) (χ = 0, 1, ..., D - 1) engendre celle d'un produit tensoriel déformé par un cube A qui, dans le référentiel ($\mathbf{x}$, Ω), vaut :

$$A^\chi_{\alpha\beta} \,=\, \frac{\partial X^\chi_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x^\beta}$$

Avec ce cube et avec l'aide de la remarque sur l'existence des cubes antisymétriques, je peux construire un produit extérieur déformé tel que :

$$d\mathbf{x},\, \delta\mathbf{x} \,\in\, E(4,\, R) :\, \wedge_A(d\mathbf{x},\, \delta\mathbf{x}) \,=\, \sum_\chi (\delta\Theta^\chi_d(X) - d\Theta^\chi_\delta(X))\,.\,\mathbf{e}_\chi;\, \forall\, A^\chi_{\alpha\alpha} \,=\, \frac{\partial X^\chi_\alpha}{\partial x^\alpha}$$

Exemple 1.1.1. *Les tétrades.*

Pour éviter les confusions, j'utilise ici les notations introduites et expliquées dans [[03]]. Dans ce cas particulier mais important parce qu'il impacte la compréhension de la théorie de la relativité générale, les $\mathrm{e}_\mu{}^a(\mathbf{x})$ sont seize (16) fonctions définies localement et portant avec elles les informations nécessaires sur la transformation locale entre une métrique quelconque et la métrique de Minkowski [03 ; p. 5, (16) et (17)] :

Supposer que ces fonctions peuvent varier dans le système des coordonnées locales qui coincident par choix arbitraire avec les composantes d'un vecteur $\mathbf{x}$, revient à admettre l'existence d'un cube :

$$A^a_{\mu\nu} \,=\, \frac{\partial e_\mu{}^a(\mathbf{x})}{\partial x^\nu}$$

à partir duquel il est possible de concocter un cube anti-symétrique :

$$B^a_{\mu\nu} \,=\, A^a_{\mu\nu} \,-\, A^a_{\nu\mu} \,=\, \frac{\partial {e_\mu}^a(\mathbf{x})}{\partial x^\nu} \,-\, \frac{\partial {e_\nu}^a(\mathbf{x})}{\partial x^\mu}$$

sur lequel peut se construire le produit extérieur déformé :

$$\sum_a \delta\Theta_d(e^a) - d\Theta_\delta(e^a)\,.\,\mathbf{e}_a \,=\, \sum_a \sum_{\mu<\nu} (\frac{\partial {e_\mu}^a}{\partial x^\nu} - \frac{\partial {e_\nu}^a}{\partial x^\mu})\,.\,(dx^\mu\,.\,\delta x^\nu - dx^\nu\,.\,\delta x^\mu)\,.\,\mathbf{e}_a$$

Ce vecteur est toujours un élément de l'espace vectoriel E(4, R). Chacune de ses D = 4 composantes est une somme de D.(D - 1)/2 = 6 termes ; au lieu des 4^2 = 16 termes contenus dans chacune des 4 composantes du produit tensoriel déformé l'ayant généré. D'une façon générale, l'étude de la représentation de ce vecteur dans l'espace vectoriel dual E*(4, R) peut se révéler instructive.

Remarque 1.1.3. ***Représentation duale du produit extérieur déformé***

Soit le résultat général obtenu à la fin de la définition du produit extérieur déformé. Chacune des D composantes s'écrit :

$$\forall\, A,\, \forall\,(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, E^2(D,\, K) \,:\, (\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2))^k \,=\, \sum_{i<j} (A^k_{ij} - A^k_{ji})\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2 - q^i_2\,.\,q^j_1)$$

C'est une somme de D.(D - 1)/2 termes. Chacun de ces termes est le produit de deux sous-termes. Celui de droite correspond à la composante (i, j) pour i plus petit que j (= 2, ..., D) du produit extérieur classique des vecteurs $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$.

$$q^i_1\,.\,q^j_2 \,-\, q^i_2\,.\,q^j_1 \,\equiv\, (\wedge(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2))^{ij}$$

Celui de gauche correspond à une pondération de celui de droite ; elle est exercée par la composante (i, j) pour i plus petit que j de la k-ième matrice carrée (D-D) anti-symétrique contenue dans le cube anti-symétrique B issu du cube géniteur A. Rien n'interdit de penser que ces composantes pourraient également être celles d'un bivecteur (synonyme : d'un produit extérieur classique de deux vecteurs de E(D, K)).

$$Cube\, B\, antisymetrique \,\equiv\, \{(\wedge({}_k\mathbf{p}_1,\, {}_k\mathbf{p}_2))^{ij},\, k \,=\, 1,\, 2,\, ...\,,\, D\}$$

La difficulté technique tient au fait qu'il n'est pas évident d'identifier les bivecteurs en partant des composantes du cube B. Cette première analyse montre que la représentation duale dans E*(D, K) d'un produit extérieur déformé de deux vecteurs de E(D, K) fait intervenir D + 1 bivecteurs. Chacun d'eux se laisse représenter dans E(D.(D - 1)/2, K).

1.2 Les décompositions triviales.

1.2.1 Décomposition triviale : Définition.

En repartant de la définition du produit tensoriel déformé, le schéma suivant peut toujours être proposé :

$$\begin{array}{ccc} \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in E(D,\, K) & \xrightarrow{=} & A^k_{ij} \,.\, q^i_1 \,.\, q^j_2 \,.\, \mathbf{e}_k \in E(D,\, K) \\ \downarrow & & \uparrow \\ |\otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) >\in M(D,\, 1) & \xrightarrow{=} & {}_A\Phi(\mathbf{q}_1) \,.\, |\mathbf{q}_2 >\in M(D,\, 1) \end{array}$$

Il décrit la représentation du produit tensoriel dans une base duale de l'espace E(D, K) ; elle fait toujours apparaître une matrice carrée (D-D), c'est-à-dire un élément de M(D, K) :

$${}_A\Phi(\mathbf{q}_1) \,=\, [A^k_{ij} \,.\, q^i_1] \,\in\, M(D,\, K)$$

Par convention du langage, il s'agit de la décomposition matricielle triviale du produit tensoriel déformé étudié.

1.2.2 Les décompositions triviales surjectives.

Remarque 1.2.1. *Une formule utile.*

Soit un quelconque élément [M] de M(D, C) [3] et **a** un élément de l'ensemble E = {C ⊗ E(D, R), A, [G], ||G|| = g ≠ 0} défini par :

$$a^\delta \,=\, \frac{1}{2} \,.\, \sum_\gamma g^{\delta\gamma} \,.\, \sum_{\lambda\mu} A^\lambda_{\gamma\mu} \,.\, m_{\lambda\mu} \tag{1.1}$$

La matrice obtenue par la décomposition triviale d'un produit tensoriel déformé par le cube A impliquant le vecteur **a** en tant que *projectile* [4] s'écrit génériquement :

$${}_A\Phi(\mathbf{a}) \,=\, [{}_A\Phi_{\lambda\mu}] \,=\, [\sum_\delta A^\alpha_{\delta\beta} \,.\, a^\delta] \tag{1.2}$$

En spécialisant le calcul des composantes de cette matrice sur l'ensemble des éléments définis par l'Equ.(1.1), il vient :

$$A^\alpha_{\delta\beta} \,.\, a^\delta$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \,.\, \sum_\delta A^\alpha_{\delta\beta} \,.\, \sum_\gamma g^{\delta\gamma} \,.\, \sum_{\lambda\mu} A^\lambda_{\gamma\mu} \,.\, m_{\lambda\mu}$$

$$=$$

3. Ensemble des matrices carrées (D-D) dont les coefficients/composantes sont arbitrairement choisies dans C, le corps commutatif des nombres complexes.

4. Dans ma sémantique, il s'agit du premier argument.

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{\delta} \sum_{\gamma} \sum_{\lambda\mu} A^{\alpha}_{\delta\beta} \cdot g^{\delta\gamma} \cdot A^{\lambda}_{\gamma\mu} \cdot m_{\lambda\mu}$$

De sorte que chaque fois que le cube A et la métrique non-dégénérée g sont reliées par l'équation :

$$\sum_{\delta} \sum_{\gamma} A^{\alpha}_{\delta\beta} \cdot g^{\delta\gamma} \cdot A^{\lambda}_{\gamma\mu} = \epsilon_{\alpha\lambda\mu} \cdot \epsilon_{\beta\lambda\mu} \tag{1.3}$$

Le calcul peut se poursuivre avec :

$$A^{\alpha}_{\delta\beta} \cdot a^{\delta} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\lambda\mu} \epsilon_{\alpha\lambda\mu} \cdot \epsilon_{\beta\lambda\mu} \cdot m_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \cdot (\delta_{\alpha\lambda} \cdot \delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu} \cdot \delta_{\beta\lambda}) \cdot m_{\lambda\mu}$$

En dehors des combinaisons annulant systématiquement ces composantes il existe deux familles de situations :

1. $$\lambda = \alpha,\, \mu = \beta \Rightarrow A^{\alpha}_{\delta\beta} \cdot a^{\delta} = \frac{1}{2} \cdot m_{\alpha\beta}$$

2. $$\lambda = \beta,\, \mu = \alpha \Rightarrow A^{\alpha}_{\delta\beta} \cdot a^{\delta} = -\frac{1}{2} \cdot m_{\beta\alpha}$$

Finalement :

$$A^{\alpha}_{\delta\beta} \cdot a^{\delta} = \frac{1}{2} \cdot (m_{\alpha\beta} - m_{\beta\alpha}) = m_{[\alpha,\beta]} \tag{1.4}$$

La décomposition triviale d'un produit tensoriel déformé par un cube A relié à une métrique non dégénérée par l'Equ.(1.3) s'identifie avec la partie antisymétrique de l'élément [M] arbitrairement introduit au début de ce calcul pour définir l'argument **a**. Il en découle que cette décomposition triviale est elle-même antisymétrique ; ce qui induit :

$$A^{\alpha}_{\delta\beta} \cdot a^{\delta} + A^{\beta}_{\delta\alpha} \cdot a^{\delta} = m_{[\alpha,\beta]} + m_{[\beta,\alpha]} = 0$$

Equivalemment :

$$(A^{\alpha}_{\delta\beta} + A^{\beta}_{\delta\alpha}) \cdot a^{\delta} = 0 \tag{1.5}$$

Lemme 1.2.1. *Sur les matrices antisymétriques.*

Pour qu'une décomposition triviale d'un produit tensoriel déformé par un cube A soit une matrice antisymétrique de M(D, C), il suffit que ce cube soit *antiréduit*, c'est-à-dire que ses composantes respectent l'équation :

$$A^{\alpha}_{\delta\beta} + A^{\beta}_{\delta\alpha} = 0 \tag{1.6}$$

Théorème 1.2.1. —

Soit un produit tensoriel générique $\otimes_A(\mathbf{a}, \ldots)$ dans lequel le vecteur **a** de C $\otimes$ E(D, R) est défini par l'équation :

$$a^{\delta} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\gamma} g^{\delta\gamma} \cdot \sum_{\lambda\mu} A^{\lambda}_{\gamma\mu} \cdot {}_{A}\Phi_{\lambda\mu} \tag{1.7}$$

dans laquelle :

— les ${}_A\Phi_{\lambda\mu}$ sont les composantes de la décomposition triviale du produit tensoriel :

$$| \otimes_A (\mathbf{a}, \, ...) >= {}_A\Phi(\mathbf{a}) \, . \, |... >= [{}_A\Phi_{\lambda\mu}] \, . \, |... >$$

— les $\mathrm{A}^{\lambda}{}_{\gamma\mu}$ sont les composantes du cube A déformant le produit tensoriel classique ;
— les $\mathrm{g}^{\delta\gamma}$ sont les composantes de la représentation inverse d'une métrique non-dégénérée ($|[\mathrm{G}]| \neq 0$) ;
— les composantes du cube déformant sont reliées à celle de la métrique inverse via l'Equ.(1.3) ;

Alors cette décomposition triviale doit être un élément antisymétrique de M(D, C).

Corollaire 1.2.1. *Surjection.*

1. Quel que soit le cube A, toute matrice antisymétrique de M(D, C) :
   — est l'image par une application ${}_A\Phi$ d'au moins un élément $\mathbf{a}$ de l'ensemble E lorsque cet élément est défini par l'Equ.(1.1) et que le cube A et la métrique inverse $[\mathrm{G}]^{-1}$ sont liés par l'Equ.(1.3) ; il revient au même de dire que, dans les conditions définies par ces deux équations, cette matrice possède un antécédent (synonyme : une source) dans E et que l'application ${}_A\Phi$ est surjective.
   — est la représentation d'une décomposition triviale du produit tensoriel déformé $\otimes_A(\mathbf{a}, \mathbf{...})$.

2. Dans la restriction de la discussion à un ensemble E n'impliquant que des cubes *antiréduits*, c'est-à-dire des cubes (D-D-D) dont les composantes vérifient l'Equ.(1.6), chaque matrice antisymétrique est la décomposition triviale d'au moins un produit tensoriel déformé par un cube A antiréduit et les composantes de sa source dans E sont données par l'Equ.(1.1).

1.3 La notion de dérivation matricielle.

1.3.1 Dérivation matricielle : concept.

La notion de dérivée, pas plus que celle d'intégrale, ne constitue une nouveauté. La première trouve ses origines en France avec Descartes et en Allemagne avec Leibniz. La seconde a été traitée d'un côté par Lebesgue et de l'autre par Riemann. On pourrait donc croire ces deux sujets clos et vouloir les réduire à l'apprentissage des acquis.

Mes explorations sur les produits tensoriels déformés ainsi que diverses lectures sur les ensembles, les fonctions et les algèbres, en particulier de Lie, me poussent à rouvrir timidement la porte de ces thématiques.

Une autre raison, moins avouable, en est que les calculs d'intégration ont toujours constitué pour moi une sorte d'abomination. J'ai donc cherché, par paresse, à pouvoir en simplifier l'exécution. La manipulation de matrices parait infiniment plus aisée que la mémorisation de formules compliquées.

Je me suis donc demandé dans quelle mesure la multiplication par une matrice agissant sur le côté gauche d'un vecteur pouvait utilement se substituer à une dérivation agissant sur ledit vecteur ? Cette question peut grossièrement se symboliser dans un premier jet par :

$$\exists\, ?\, [D] \in M(D,\, K)?\ :$$

$$\mathbf{x} \in E(D,\, K),\, t \in K\ :\ |\frac{d\mathbf{x}}{dt}> \equiv [D].\, |\mathbf{x}>\ ou\, \frac{d}{dt} \equiv [D]$$

L'interrogation trouve sa source dans une remarque simple : à un produit vectoriel défini sur E(3, R), il peut toujours être substitué une matrice rotation lorsque ce produit est représenté dans l'espace dual E*(3, R) ; les représentations précises des matrices de rotation sont par exemple données dans [[01]].

Pour pouvoir étendre ce constat à d'autres opérations, il semble donc nécessaire de pouvoir d'abord définir une application entre une opération et sa représentations dans M(D = 1, 2, 3, ... ; K = R, C, ...).

Par exemple et pour revenir sur l'exemple pédagogique du produit vectoriel, la série d'applications suivante peut être définie :

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{x} \to |\mathbf{u} \wedge \mathbf{x}> \to\, _{[J]}\Phi(\mathbf{u}).\, |\mathbf{x}>$$

Elle suggère de pouvoir associer l'opération *produit vectoriel agissant par la gauche* avec la matrice *rotation générique* :

$$\mathbf{u} \wedge ... \to\, _{[J]}\Phi(...)$$

Ou encore, de façon plus abstraite :

$$\wedge \to\, _{[J]}\Phi$$

L'objectif du document consiste donc à rationaliser et à généraliser cette démarche intuitive. Le but est de la reconsidérer dans des espaces de dimension supérieure à trois pour d'autres opérations que le produit vectoriel. Notamment je souhaite l'appliquer à la notion de produit tensoriel déformé.

L'idée directrice étant que les parties principales des décompositions des produits tensoriels déformés sont parfois des dérivations d'un certain type (à déterminer). Il se trouve par exemple qu'elles représentent parfois l'équivalent de propagateurs ; un concept fort utile en physique, voir les explorations [[a]] et [[b]].

1.3.2 Dérivation matricielle : exemple pédagogique.

Soit l'élément générique de l'ensemble $P^2{}_D(R)$ qui est celui des formes polynomiales de degré deux dont les coefficients sont constants (par convention) impliquant D variables réelles :

$$f(x_1, \dots x_\alpha, \dots, x_D) = c_{\alpha\beta} \,.\, x_\alpha \,.\, x_\beta + c_\alpha \,.\, x_\alpha + c$$

Il admet les D dérivées partielles d'ordre un :

$$\frac{\partial f(x_1, \dots x_\alpha, \dots, x_D)}{\partial x_1} = c_{\alpha\beta} \,.\, (x_\alpha \,.\, \delta_{\beta 1} + \delta_{\alpha 1} \,.\, x_\beta) + c_\alpha \,.\, \delta_{\alpha 1} = (c_{\alpha 1} + c_{1\alpha}) \,.\, x_\alpha + c_1$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial f(x_1, \dots x_\alpha, \dots, x_D)}{\partial x_\chi} = c_{\alpha\beta} \,.\, (x_\alpha \,.\, \delta_{\beta \chi} + \delta_{\alpha \chi} \,.\, x_\beta) + c_\alpha \,.\, \delta_{\alpha \chi} = (c_{\alpha \chi} + c_{\chi\alpha}) \,.\, x_\alpha + c_\chi$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial f(x_1, \dots x_\alpha, \dots, x_D)}{\partial x_D} = c_{\alpha\beta} \,.\, (x_\alpha \,.\, \delta_{\beta D} + \delta_{\alpha D} \,.\, x_\beta) + c_\alpha \,.\, \delta_{\alpha D} = (c_{\alpha D} + c_{D\alpha}) \,.\, x_\alpha + c_D$$

Il apparaît qu'en posant :

$$|\mathbf{x}>= \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_\alpha \\ \dots \\ x_D \end{bmatrix} \; ; \; |\mathbf{c}>= \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_\alpha \\ \dots \\ c_D \end{bmatrix} \; ; \; [C] = [c_{\alpha\beta}] \in M(D, R)$$

le gradient d'un élément de $P^2{}_D(R)$ se laisse représenter dans un langage matricio-vectoriel par :

$$|\mathbf{grad_x} f(\mathbf{x})>= \{[C] + [C]^t\} \,.\, |\mathbf{x}> + |\mathbf{c}>$$

La question examinée dans ce document consiste à se demander s'il existe un cube A et un élément **a** de l'ensemble E introduit dans les sections précédentes tels qu'il soit cohérent de pouvoir remplacer le gradient par le produit tensoriel déformé $\otimes_A(\mathbf{a}, \mathbf{x})$ quand la représentation duale de celui-ci se laisse décomposer en la paire $([C] + [C]^t, \mathbf{c})$?

$$\exists\, A\, ?\, \exists\, \mathbf{a} \in E(D, R)\, ? : \mathbf{grad_x} f(\mathbf{x}) = \otimes_A(\mathbf{a}, \mathbf{x})$$

L'argument **x** étant a priori quelconque, il revient au même de se demander s'il existe une paire (A, **a**) représentant le gradient d'un élément de $P^2{}_D(R)$? Or chaque élément de $P^2{}_D(R)$ se caractérise indépendamment de l'argument **x** auquel il s'applique par une matrice [C] de M(D, R), un vecteur **c** de E(D, R) et un scalaire c de R. La question posée revient donc à se demander s'il existe une paire (A, **a**) représentant le gradient du triplé ([C], **c**, c) ?

Remarque 1.3.1. *Sur les formes quadratiques définies à un scalaire près.*

Dans une restriction de cet exemple pédagogique aux cas des formes quadratiques définies à un scalaire près, la discussion se restreint aux éléments ([C], **0**, c) de $P^2{}_D(R)$ et le gradient de ces éléments s'écrit :

$$|\mathbf{grad_x} f(\mathbf{x})>= \{[C] + [C]^t\} \,.\, |\mathbf{x}>$$

...

La question posée consiste alors à se demander s'il existe au moins un produit tensoriel déformé générique $\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{...})$ se décomposant trivialement selon la paire $([\mathrm{C}] + [\mathrm{C}]^t,\, \mathbf{0})$ et capable de représenter le gradient d'un élément ([C], **0**, c) de $\mathrm{P}^2{}_D(\mathrm{R})$?

Cette question se laisse visualiser au travers des deux schémas suivants ; le premier implique des éléments de l'espace vectoriel E(D, R) - la colonne de gauche- et leurs représentations dans l'espace vectoriel dual du précédent : E*(D, R) - la colonne de droite.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{grad_x} f(\mathbf{x}) & \longrightarrow & \{[C] \,+\, [C]^t\} \,.\, |\mathbf{x} > \\ \downarrow & & \uparrow \\ \exists\,?\ \otimes_A (\mathbf{a},\, \mathbf{x}) & \longrightarrow & {}_A\Phi(\mathbf{a}) \,.\, |\mathbf{x} > \end{array}$$

Le second s'abstrait complètement de l'argument **x** choisi arbitrairement dans E(D, R) pour se placer au niveau de ce qui ressemble fort à des foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{grad}_{...} f(...) & \longrightarrow & \{[C] \,+\, [C]^t\} \,.\, |... > \\ \downarrow & & \uparrow \\ \exists\,?\ \otimes_A (\mathbf{a},\, ...) & \longrightarrow & {}_A\Phi(\mathbf{a}) \,.\, |\mathbf{...} > \end{array}$$

En poussant les dérivations partielles jusqu'au deuxième ordre, il est aisé de montrer que :

$$\frac{\partial^2 f(x_1,\, ...\, x_\alpha,\, ...,\, x_D)}{\partial x_\epsilon \partial x_\chi} \,=\, c_{\epsilon\chi} \,+\, c_{\chi\epsilon}$$

Ce qui, dans le langage matriciel, s'exprime synthétiquement en faisant apparaître la Hessienne classique de la polynomiale f :

$$[C] \,+\, [C]^t \,=\, Hess_{\mathbf{x}} f(x_1,\, ...\, x_\alpha,\, ...,\, x_D) \tag{1.8}$$

Par conséquent, la question posée se laisse également représenter par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{grad}_{...} f(...) & \longrightarrow & Hess_{...} f(...) \,.\, |... > \\ \downarrow & & \uparrow \\ \exists\,?\ \otimes_A (\mathbf{a},\, ...) & \longrightarrow & {}_A\Phi(\mathbf{a}) \,.\, |\mathbf{...} > \end{array}$$

... laissant sous-entendre qu'une réponse positive correspond à une situation telle que la Hessienne de la polynomiale s'identifie avec une décomposition triviale du produit tensoriel déformé associé avec le gradient de la même polynomiale :

$$Hess f \,\equiv\, {}_A\Phi(\mathbf{a})$$

Pour rappel, si f est continue sur son domaine de définition, sa Hessienne est symétrique ; de sorte que si - dans ce cas- cette Hessienne peut s'identifier avec une décomposition triviale d'un produit tensoriel déformé, cette décomposition est elle-même une matrice symétrique.

$$f\, continue \,\Rightarrow\, Hess^t f \,=\, Hess f \,\equiv\, {}_A\Phi(\mathbf{a}) \,=\, {}_A\Phi^t(\mathbf{a})$$

A ce titre, elle n'entre pas dans le domaine de validité du théorème 1.1.1 de surjection énoncé plus haut.

A contrario, s'il existe au moins un point P repéré par le vecteur $\mathbf{x}$ et par lequel f passe en exhibant une discontinuité, il se peut que :

$$lim_{\theta \to \mathbf{0}^+} Hess_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} + \theta) \neq lim_{\theta \to \mathbf{0}^-} Hess_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x} + \theta)$$

... et il se peut également que la question posée recoive deux réponses distinctes selon l'endroit où elle est posée.

Quoiqu'il en soit, c'est-à-dire que f soit ou non continue sur la totalité de son domaine de définition, la question posée n'a encore reçu aucune réponse à ce stade de la discussion !

Le gradient d'une fonction numérique dépendant de D variables réelles est intuitivement interprété comme une sorte de dérivation parce qu'il permet de mesurer les évolutions des valeurs scalaires de la polynomiale f lorsque son argument change :

$$f(\mathbf{x}) \to f(\mathbf{x} + \theta)$$

Ceci tient au fait que la notion de développement (de Taylor) limité au premier ordre autorise à écrire :

$$f(\mathbf{x} + \theta) = f(\mathbf{x}) + \sum_{\chi} \frac{\partial f(x_1, \, ... x_\alpha, \, ..., \, x_D)}{\partial x_\chi} . \theta^\chi + 0(2)$$

De sorte que si l'espace E(D, R) est équipé d'un produit scalaire euclidien classique noté conventionnellement $<\mathbf{...}, \, \mathbf{...}>$:

$$f(\mathbf{x} + \theta) = f(\mathbf{x}) + < \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}), \, \theta > + 0(2)$$

Cette expression met bien en exergue qu'il est un outil permettant de mesurer les variations de f au cours d'une variation θ de son argument.

La question posée consiste à se demander si un produit tensoriel déformé par un cube A peut jouer un rôle identique ? Présentée de cette manière, la réponse est probablement : non. La première raison technique en étant que le gradient n'agit pas de façon isolée mais couplé au vecteur θ des variations de l'argument au sein d'un produit scalaire classique en livrant un scalaire et non pas un vecteur.
Or la notion de dérivation matricielle - telle que je la conçois- veut introduire des matrices dont la fonction est de se substituer à l'effet d'une dérivation agissant sur des vecteurs, non pas sur des fonctions numériques.
Il me semble donc que cette notion ne peut raisonnablement se définir qu'en envisageant les variations de fonctions vectorielles.

1.4 Dérivation matricielle dans les espaces de dimension deux.

1.4.1 Les raisons de la restriction aux espaces de dimension deux.

Soit D fonctions numériques de D variables réelles, $\mathrm{f}_\lambda(\mathrm{x}_1, ..., \mathrm{x}_\alpha, ..., \mathrm{x}_D)$ pour $\lambda = 1, 2, ..., D$, admettant chacune un développement (de Taylor) limité au premier ordre :

$$f_\lambda(\mathbf{x}+\theta) \,=\, f_\lambda(\mathbf{x}) \,+\, \sum_\chi \frac{\partial f_\lambda(x_1, \ldots x_\alpha, \ldots, x_D)}{\partial x_\chi} \,.\, \theta^\chi \,+\, 0(2)$$

Il est alors possible de réécrire ces D expressions :

$$f_\lambda(\mathbf{x}+\theta) \,-\, f_\lambda(\mathbf{x}) \,=\, \sum_\chi \frac{\partial f_\lambda(x_1, \ldots x_\alpha, \ldots, x_D)}{\partial x_\chi} \,.\, \theta^\chi \,+\, 0(2)$$

Ainsi, en posant par convention de l'écriture :

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})> = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \ldots \\ f_\lambda(\mathbf{x}) \\ \ldots \\ f_D(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \; ; \; |\theta> = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \ldots \\ \theta_\chi \\ \ldots \\ \theta_D \end{bmatrix} \; ; \; |\partial_\mathbf{x}> = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \ldots \\ \frac{\partial}{\partial x_\chi} \\ \ldots \\ \frac{\partial}{\partial x_D} \end{bmatrix}$$

et en introduisant la Jacobienne :

$$T_2(o)(\partial_\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \,=\, [\frac{\partial f_\lambda(x_1, \ldots x_\alpha, \ldots, x_D)}{\partial x_\chi}] \,\in\, M(D, R)$$

Il devient possible et raisonable d'écrire :

$$|d\mathbf{f}(\mathbf{x})> = T_2(o)(\partial_\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\,.\,|\theta> + |\mathbf{0}> \tag{1.9}$$

Cet angle d'attaque permet de reformuler la question de savoir s'il existe ou non un produit tensoriel déformé par un cube A capable de s'identifier avec cette différence vectorielle et de se décomposer trivialement au second ordre près de manière à mimer la relation précédente ?

$$\begin{array}{ccc} d\mathbf{f}(\mathbf{x}) & \longrightarrow & T_2(o)(\partial_\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\,.\,|\theta> \\ \downarrow & & \uparrow \\ \exists\,?\; \otimes_A (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & \longrightarrow & {}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{x}> \end{array}$$

Ou, de manière abstraite et indépendante de l'argument $\mathbf{x}$:

$$\begin{array}{ccc} d\mathbf{f}(\ldots) & \longrightarrow & T_2(o)(\partial_{\ldots}, \mathbf{f}(\ldots))\,.\,|\theta> \\ \downarrow & & \uparrow \\ \exists\,?\; \otimes_A (\mathbf{a}, \ldots) & \longrightarrow & {}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{\ldots}> \end{array}$$

Il s'agit alors de se demander dans quelle mesure l'action de l'opérateur $\otimes_A(\mathbf{a}, \ldots)$ peut être substituée à celle de la différence d agissant sur la fonction vectorielle $\mathbf{f}$.

Les investigations précédentes menées (en anglais) dans [c] ont montré qu'il existe des circonstances mathématiques précises autorisant à interpréter l'opérateur $\otimes_A(\mathbf{a}, \ldots)$ comme une dérivation interne agissant sur les éléments de l'ensemble E. Il n'y aurait donc aucun obstacle intellectuel empêchant de tenter de relier d$\mathbf{f}$ à la paire (A, $\mathbf{a}$).

En travaillant sur E, le cube A et une métrique [G] inversible sont données a priori. Ainsi, en choisissant n'importe quelle matrice antisymétrique [M] dans M(D, R), l'Equ.(-) permet de trouver un élément $\mathbf{a}$ dans E(D, R) qui en est la source ; voir les réflexions sur la notion de surjection au début de ce document. Le plus judicieux serait donc que cette source coincide avec la différence vectorielle d$\mathbf{f}$; ce qui revient à poser :

$$\mathbf{a} \,=\, d\mathbf{f}$$

Avec :

$$a^{\delta} \,=\, df_{\delta} \,=\, \frac{1}{2} \,.\, \sum_{\gamma} g^{\delta\gamma} \,.\, \sum_{\lambda\mu} A^{\lambda}_{\gamma\mu} \,.\, m_{\lambda\mu}$$

Ceci étant fait, la matrice [M] peut alors s'identifier avec la décomposition triviale matricielle :

$$[M] \,=\, {}_{A}\Phi(d\mathbf{f})$$

Et le problème posé reçoit une réponse favorable chaque fois qu'il est correct d'écrire :

$$_{A}\Phi(d\mathbf{f}) \,.\, |\mathbf{x}> = \, T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \,.\, |\theta>$$

Il est certainement pertinent de remarquer à cet endroit que :

— La Jacobienne agit sur le vecteur θ et non sur l'argument $\mathbf{x}$.
— Le cube A et le vecteur θ sont les deux seuls acteurs de cette discussion n'étant pas directement reliés à l'argument $\mathbf{x}$.

Ce constat peut donner envie de lier le cube A au vecteur θ ; mais comment le faire ?

L'étude de la surjection a montré qu'il suffisait au cube A d'être antiréduit pour que celui-ci fournisse une décomposition triviale antisymétrique. Est-il parfois possible d'imposer une contrainte au cube A pour qu'il se ramène à n'être que la représentation d'un vecteur ?

Avant celà, je noterai aussi que rien ne force le vecteur θ à être proportionnel à une variation de l'argument $\mathbf{x}$; de sorte que l'habitude qui a été prise depuis longtemps de systématiquement écrire :

$$\theta \,=\, d\mathbf{x}$$

me semble n'être qu'un cas très particulier de l'ensemble des possibilités théoriques. En général :

$$\theta \neq d\mathbf{x}$$

Remarque 1.4.1. *Sur les cubes antiréduits et antisymétriques.*

Lorsque la dimension de l'espace vaut deux (D = 2) un cube contient $2^3 = 8$ composantes ; lorsqu'elle vaut trois (D = 3) il en a $3^3 = 27$, lorsqu'elle vaut quatre (D = 4), il en a $4^3 = 64$, etc.

En général, un cube A de type (D-D-D) quelconque a D^3 composantes libellées $\mathrm{A}^{\alpha}{}_{\chi\beta}$. Une antiréduction alliée à une antisymétrisation se traduit par la validation simultanée des deux relations :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\beta}_{\chi\alpha} = 0,\; A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\alpha}_{\beta\chi} = 0$$

Il est possible de vérifier que :

— Lorsque la dimension de l'espace vaut deux (D = 2) un cube antiréduit et antisymétrisé est un cube nul (dont toutes les composantes sont nulles).
— Lorsque la dimension de l'espace vaut trois (D = 3) un cube antiréduit et antisymétrisé est défini par une paire de scalaires correspondant à plus et moins une fois l'unique composante non nulle ; à savoir celle dont tous les indices différent les unes des autres.
— Lorsque la dimension de l'espace vaut quatre (D = 4) un cube antiréduit et antisymétrisé est défini par les seules composantes dont les trois indices choisis dans $\mathrm{I}_4 = \{1, 2, 3, 4\}$ diffèrent les uns des autres ; il y en a $\mathrm{C}^3{}_4 = 4$ correspondant aux combinaisons (1, 2, 3), (1, 3, 4), (2, 3, 4) et (1, 2, 4). Chacune d'elles se décline de six manières, une moitié est affublée du signe plus et l'autre moitié du signe moins.
— ...
— etc.

Quand je dis qu'un cube (D-D-D) est défini par tant de composantes, je n'oublie cependant pas que ces composantes restent situées sur les noeuds d'un empilement de D matrices (D-D). Quoi qu'il en soit, je ne vois pas comment la double contrainte sur les composantes d'un cube peut permettre de systématiquement livrer un D-uplé de réels.

Remarque 1.4.2. *Sur les cubes antiréduits.*

Soit un quelconque cube (D-D-D) noté A sur les composantes duquel s'exerce la seule contrainte :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\beta}_{\chi\alpha} = 0$$

Le nombre de composantes distinctes non automatiquement nulles est forcément inférieur à D^3 puisqu'il faut éliminer toutes les composantes dont les indices latéraux sont égaux :

$$A^{\alpha}_{\chi\alpha} = 0$$

Il y en a D par matrice (D-D) dans l'empilement ; comme il y a D matrices dans l'empilement formant le cube A, celui-ci exhibe alors D^2 composantes nulles et, par conséquent : D^3 - D^2 = D^2.(D - 1) composantes non forcément nulles. La moitié de celles-ci est affublée d'un signe plus et l'autre d'un signe moins ; de sorte qu'en décidant de ne garder que les valeurs absolues des composantes, il y en a au plus D^2.(D - 1)/2 distinctes et non automatiquement nulles. Les seuls ensembles pour lesquels ce nombre entier positif coincide avec la dimension D de l'espace correspond à la valeur deux : D = 2.

Lemme 1.4.1. *Sur les espaces de dimension deux.*

Les espaces de dimension deux sont les seuls autorisant la réalisation concrète de l'idée suggérant d'identifier le cube (2-2-2) A antiréduit avec un vecteur θ de E(2, R) :

$$D = 2,\ A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\beta}_{\chi\alpha} = 0 \Rightarrow A \to \theta : (|A^1_{12}|, |A^1_{22}|)$$

et permettant de donner un début de cohérence au schéma :

$$\begin{array}{ccc} d\mathbf{f}(...) & \longrightarrow & T_2(o)(\partial_{...}, \mathbf{f}(...)) \,.\, |\theta > \\ \downarrow & & \uparrow \\ \exists \otimes_\theta (d\mathbf{f}(...), ...) & \longrightarrow & {}_\theta\Phi(d\mathbf{f}(...)) \,.\, |\mathbf{...} > \end{array}$$

Remarque 1.4.3. *Recherche des identifications cohérentes.*

Maintenant, vouloir écrire l'identité :

$$d\mathbf{f}(...) = \otimes_\theta(d\mathbf{f}(...), ...) \tag{1.10}$$

symbolisant l'action générique :

$$\mathbf{X} \in E(2, R) \overbrace{\to}^{\otimes_\theta(..., ...)} \otimes_\theta(\mathbf{X}, ...), \forall ... \tag{1.11}$$

oblige à vérifier la plausibilité de l'égalité :

$$T_2(o)(\partial_{...}, \mathbf{f}(...)) \,.\, |\theta > \overbrace{=}^{?} {}_\theta\Phi(d\mathbf{f}(...)) \,.\, |\mathbf{...} >$$

Ou équivalemment, pour un argument $\mathbf{x}$ a priori quelconque :

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \,.\, |\theta > \overbrace{=}^{?} {}_\theta\Phi(d\mathbf{f}(\mathbf{x})) \,.\, |\mathbf{x} >$$

Par chance, la discussion se déroule dans un espace de dimension deux ; ce qui permet de vérifier à la main ce que signifie cette égalité éventuelle. D'un côté et rendant compte comme prévu du développement de Taylor :

$$T_2(o)(\partial_{...}, \mathbf{f}(...)) \,.\, |\theta >= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_1(2) \\ 0_2(2) \end{bmatrix}$$

De l'autre côté du signe de l'égalité envisagée :

$${}_\theta\Phi(d\mathbf{f}(\mathbf{x})) \,.\, |\mathbf{x} > \tag{1.12}$$

$$=$$

$$[A^{\alpha}_{\chi\beta} \, . \, df_{\chi}] \, . \, |x_{\beta} >$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} A^1_{11} \, . \, df_1 \, + \, A^1_{21} \, . \, df_2 & A^1_{12} \, . \, df_1 \, + \, A^1_{22} \, . \, df_2 \\ A^2_{11} \, . \, df_1 \, + \, A^2_{21} \, . \, df_2 & A^2_{12} \, . \, df_1 \, + \, A^2_{22} \, . \, df_2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & A^1_{12} \, . \, df_1 \, + \, A^1_{22} \, . \, df_2 \\ -A^1_{12} \, . \, df_1 \, - \, A^1_{22} \, . \, df_2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} (A^1_{12} \, . \, df_1 \, + \, A^1_{22} \, . \, df_2) \, . \, x_2 \\ -(A^1_{12} \, . \, df_1 \, + \, A^1_{22} \, . \, df_2) \, . \, x_1 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} A^1_{12} \, . \, x_2 & A^1_{22} \, . \, x_2 \\ -A^1_{12} \, . \, x_1 & -A^1_{22} \, . \, x_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \end{bmatrix}$$

Ce bref calcul permet de vérifier en passant que la matrice de décomposition triviale est bien antisymétrique. Sinon, l'égalité envisagée n'est possible que si le système suivant l'est :

$$\begin{bmatrix} A^1_{12} \, . \, x_2 & A^1_{22} \, . \, x_2 \\ -A^1_{12} \, . \, x_1 & -A^1_{22} \, . \, x_1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} df_1 \\ df_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0_1(2) \\ 0_2(2) \end{bmatrix}$$

Comme il n'est pas possible d'identifier la matrice (2-2) apparue dans ce calcul avec la matrice identité :

$$\begin{bmatrix} A^1_{12} \, . \, x_2 & A^1_{22} \, . \, x_2 \\ -A^1_{12} \, . \, x_1 & -A^1_{22} \, . \, x_1 \end{bmatrix} \neq Id_2$$

... l'égalité envisagée ne peut pas être réalisée telle quelle. Il convient d'en approfondir l'analyse et peut-être d'incorporer les termes d'ordre deux qui avaient été négligés jusqu'à présent.

Remarque 1.4.4. *Sur l'intérêt de vouloir valider l'Equ.(1.10).*

L'Equ.(1.10) revêt une importance cruciale dans le raisonnement suivi parce qu'elle représente en quelque sorte l'*application identité* d'un ensemble d'applications faisant correspondre l'opérateur $\otimes_{\theta}(\mathrm{d}\mathbf{f}, ...)$ sensé être une dérivation intérieure agissant sur les éléments de l'ensemble $\mathrm{E} = \{\mathrm{E}(2, \mathrm{R}), \theta, [\mathrm{G}]\}$ à la différence vectorielle $\mathrm{d}\mathbf{f}$. Et l'action de cet opérateur est représentée par la matrice de décomposition triviale ${}_{\theta}\Phi(\mathrm{d}\mathbf{f})$. D'où la notion de dérivation matricielle (sous-entendu : réalisée par l'action d'une matrice) défendue dans ce document.

Cette précision permet de comprendre pourquoi l'identité envisagée n'est peut-être pas la bonne ; ou, a minima, elle fait réaliser qu'elle n'a sans doute pas encore été formulée correctement. Car, si la matrice triviale doit représenter l'action réalisée par la Jacobienne, elle doit agir non pas sur l'argument $\mathbf{x}$, mais sur le cube anti-réduit θ. Et la question subsidiaire devient : le peut-elle ?

Remarque 1.4.5. *Sur la matrice (2-2) devant assurer la cohérence.*

Soit la matrice [C] assurant les réflections dans un espace de dimension deux :

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il est facile de vérifier que :

$$[C]^t \,.\, |^{(2)}\mathbf{x} >= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}$$

Et de constater ensuite que la matrice (2-2) devant assurer la cohérence est une table de Pythagore bâtie sur le produit tensoriel classique et connectant les vecteurs $\mathbf{x}$ et θ :

$$\begin{bmatrix} A^1_{12}\,.\,x_2 & A^1_{22}\,.\,x_2 \\ -A^1_{12}\,.\,x_1 & -A^1_{22}\,.\,x_1 \end{bmatrix} = T_2(\otimes)(^{(2)}\theta,\, [C]^t \,.\, |^{(2)}\mathbf{x} >)$$

Il est également possible de vérifier ensuite que :

$$\forall\, ^{(2)}\mathbf{y} \in E(2,\, R) \,:\, | \otimes_\theta (^{(2)}\mathbf{y},\, ^{(2)}\mathbf{x}) >= T_2(\otimes)(^{(2)}\theta,\, [C]^t \,.\, |^{(2)}\mathbf{x} >) \,.\, |^{(2)}\mathbf{y} > \tag{1.13}$$

L'Equ.(1.12) obtenue au cours de la remarque 1.4.3 n'est rien d'autre qu'une représentation particulière de l'équation précédente :

$$^{(2)}\mathbf{y} = \, ^{(2)}d\mathbf{f} \,:\, | \otimes_\theta (^{(2)}d\mathbf{f},\, ^{(2)}\mathbf{x}) >= T_2(\otimes)(^{(2)}\theta,\, [C]^t \,.\, |^{(2)}\mathbf{x} >) \,.\, |^{(2)}d\mathbf{f} >$$

Avec les mêmes acteurs, il est également possible de montrer que :

$$| \otimes_\theta (^{(2)}d\mathbf{f},\, ^{(2)}\mathbf{x}) >= T_2(\otimes)(^{(2)}d\mathbf{f},\, [C]^t \,.\, |^{(2)}\mathbf{x} >) \,.\, |^{(2)}\theta >$$

De sorte que le produit tensoriel déformé par le vecteur θ possède trois visages :

$$\begin{gathered} | \otimes_\theta (^{(2)}d\mathbf{f},\, ^{(2)}\mathbf{x}) > \\ = \\ {}_\theta\Phi(d\mathbf{f}(\mathbf{x})) \,.\, |\mathbf{x} > \\ = \\ T_2(\otimes)(^{(2)}\theta,\, [C]^t \,.\, |^{(2)}\mathbf{x} >) \,.\, |^{(2)}d\mathbf{f} > \\ = \\ T_2(\otimes)(^{(2)}d\mathbf{f},\, [C]^t \,.\, |^{(2)}\mathbf{x} >) \,.\, |^{(2)}\theta > \end{gathered} \tag{1.14}$$

A la question posée à la fin de la remarque 1.4.4, il peut maintenant être apportée une réponse positive et elle invite à tester la recevabilité d'une identité entre deux matrices agissant sur le même objet mathématique ; à savoir : sur le cube antiréduit θ :

$$\forall\, \theta \,:\, T_2(\otimes)(^{(2)}d\mathbf{f},\, [C]^t \,.\, |^{(2)}\mathbf{x} >) \overbrace{=}^{?} T_2(o)(\partial_\mathbf{x},\, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \tag{1.15}$$

...

Remarque 1.4.6. *Test de cohérence.*

Dans la pratique, il s'agirait de tester :

$$\begin{bmatrix} df_1 \,.\, x_2 & df_2 \,.\, x_2 \\ -df_1 \,.\, x_1 & -df_2 \,.\, x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Ou équivalemment :

$$\begin{bmatrix} (\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \,.\, \theta_1 \,+\, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \,.\, \theta_2) \,.\, x_2 & (\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \,.\, \theta_1 \,+\, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \,.\, \theta_2) \,.\, x_2 \\ -(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \,.\, \theta_1 \,+\, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \,.\, \theta_2) \,.\, x_1 & -(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \,.\, \theta_1 \,+\, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \,.\, \theta_2) \,.\, x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Ces quatre relations peuvent être réparties en deux systèmes semblables mais non égaux :

$$\theta_1 \,.\, x_2 \,.\, \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \,+\, \theta_2 \,.\, x_2 \,.\, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \,=\, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$
$$\theta_1 \,.\, x_1 \,.\, \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \,+\, \theta_2 \,.\, x_1 \,.\, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \,=\, -\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

Et :

$$\theta_1 \,.\, x_2 \,.\, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \,+\, \theta_2 \,.\, x_2 \,.\, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \,=\, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$$
$$\theta_1 \,.\, x_1 \,.\, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \,+\, \theta_2 \,.\, x_1 \,.\, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \,=\, -\frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

Ces deux systèmes ont le même discriminant et il est nul. Ce qui veut dire que chaque système est dégénéré et que l'unique moyen pour qu'il ne soit pas réduit à zéro est que la seconde ligne de chaque système soit proportionnelle à la première :

$$\forall\, \theta,\, \exists\, k \,\in\, R^* \,:\, x_2 \,=\, k \,.\, x_1,\, \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \,=\, -k \,.\, \frac{\partial f_2}{\partial x_1},\, \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \,=\, -k \,.\, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \tag{1.16}$$

Ces relations sont compatibles avec la nécessité pour le déterminant de la Jacobienne d'être nul. Ces relations étant satisfaites, il reste les secondes lignes des deux systèmes mais elles sont identiques et se résument à la condition :

$$\theta_1 \,.\, x_1 \,.\, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \,+\, \theta_2 \,.\, x_1 \,.\, \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \,=\, -\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \tag{1.17}$$

Elle permet *parfois* d'écrire :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \,=\, \frac{\theta_1 \,.\, x_1}{k \,.\, (\theta_2 \,.\, x_1 \,+\, 1)} \,.\, \frac{\partial f_1}{\partial x_1},\, \theta_2 \,.\, x_1 \,+\, 1 \,\neq\, 0$$

Et d'exprimer la Jacobienne sous la forme d'une table de Pythagore bâtie sur le produit tensoriel classique :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \,.\, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\theta_1 \,.\, x_1}{\theta_2 \,.\, x_1 \,+\, 1} \\ -\frac{1}{k} & \frac{\theta_1 \,.\, x_1}{k \,.\, (\theta_2 \,.\, x_1 \,+\, 1)} \end{bmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \,.\, T_2(\otimes)(\mathbf{K},\, \mathbf{L}) \tag{1.18}$$

impliquant les vecteurs :

$$\mathbf{K} \,:\, (1,\, -\frac{\theta_1 \,.\, x_1}{\theta_2 \,.\, x_1 \,+\, 1}),\, \theta_2 \,.\, x_1 \,+\, 1 \,\neq\, 0$$

$$\mathbf{L} \,:\, (1,\, -\frac{1}{k}),\, k \,\neq\, 0$$

Lemme 1.4.2. *Sur les dérivations matricielles dans les espaces de dimension deux.*

L'Equ.(1.10) est donc recevable dans un nombre limité de situations définies par les Equ.(1.16), (1.17) et (1.18) ; pour ces situations :

1. Le foncteur $\otimes_\theta$ transforme la différence vectorielle $\mathrm{d}\mathbf{f}$ en une dérivation intérieure $\otimes_\theta(\mathrm{d}\mathbf{f}, \ldots)$ agissant sur les arguments de la fonction vectorielle $\mathbf{f}$ choisis dans l'ensemble $\mathrm{E} = \{\mathrm{E}(2, \mathrm{R}),\, \theta,\, [\mathrm{G}]\}$ comme le fait l'opérateur d sur la fonction vectorielle $\mathbf{f}$.
2. Le schéma logique examiné s'écrit :

$$\begin{tikzcd}
d\mathbf{f}(\mathbf{x}) \arrow[r, "="] \arrow[d, "="] & T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\, \mathbf{f}(\mathbf{x}))\,.\,|\theta > \\
\exists \otimes_\theta (d\mathbf{f}(\mathbf{x}),\, \mathbf{x}) \arrow[r, "="] & T_2(\otimes)({}^{(2)}d\mathbf{f}(\mathbf{x}),\, [C]^t\,.\,|^{(2)}\mathbf{x} >)\,.\,|\theta > \arrow[u, "="']
\end{tikzcd}$$

3. Il semble justifié de noter symboliquement :

$$\otimes_\theta \,\equiv\, Id$$

   Ce qui signifie que le foncteur $\otimes_\theta$ réalise le même travail que la différence ordinaire d sur n'importe quel élément $\mathbf{f}$ de l'ensemble des fonctions vectorielles étudiées dans ce document.

1.4.2 Utilité de la démarche.

Les lecteurs peuvent à juste titre s'interroger sur l'utilité de l'approche ; pourquoi vouloir remplacer la Jacobienne par une table de Pythagore réalisant le même travail ?

Je vois au moins deux arguments en faveur de ma démarche :

1. Elle donne une chance de généraliser le raisonnement et définir de nombreuses autres dérivations intérieures ; ne serait-ce déjà que dans les espaces de dimension deux.
2. Elle facilite les calculs parce qu'il est infiniment plus aisé de réaliser des multiplications que des dérivations partielles.

1.5 Les questions encore ouvertes.

1.5.1 La question des termes de degré deux.

Le sujet sera traité dans les chapitres suivants.

1.5.2 La dérivation matricielle dans les espaces de dimension supérieure à deux.

Le sujet sera traité dans les chapitres suivants.

1.6 Résumé.

Ce document explore la notion de *dérivation matricielle* dans un état d'esprit visant à fonder une démarche par laquelle l'utilisation d'une matrice remplacerait efficacement le calcul différentiel et non pas à réaliser une bibliothèque ordonnée des dérivations ordinaires connues et déjà effectuées sur des ensembles de matrices. A titre d'illustration pédagogique, il ne souhaite pas rappeler que la dérivée ordinaire de sinus x est cosinus x mais savoir s'il existe un nombre permettant de lier ces deux fonctions trigonométriques.

La démarche est développée au sein d'une théorie se focalisant sur les produits tensoriels déformés, leurs représentations duales et les décompositions de celles-ci. Les données élémentaires de ce contexte sont rappelées au début de l'exposé. Un lien entre certains types de produits déformés (ils sont trompeusement appelés extérieurs) et les formes de Pfaff étudiées à la fin du dix-neuvième siècle et au début du vingtième est remarqué. Elles jouent un grand rôle dans l'énoncé du point de vue d'E. Cartan sur la théorie de la gravitation d'A. Einstein [04].

La discussion se poursuit ensuite en cherchant à proposer une définition rationnelle acceptable de la notion de dérivation matricielle. Une remarque préalable sans doute cruciale sur la notion de surjection et un argument lié au comptage des composantes des cubes antiréduits mènent à recentrer le débat sur les espaces de dimension deux.

Par touches successives, je découvre un ensemble de situations pour lesquelles il est possible de substituer une table de multiplication (de Pythagore) à la Jacobienne (un ensemble de quatre dérivées partielles d'ordre un) décrivant les variations du premier ordre d'une fonction vectorielle.

La démarche n'est encore que balbutiante et demande à être approfondie, poursuivie. L'objectif utilitaire est de fournir aux informaticiens des formules dont le codage permettra de calculer les variations vectorielles plus rapidement que le calcul différentiel ne l'autorise.

Deuxième partie

Exercices sur la notion de dérivation matricielle.

Chapitre 2

Exemples dans les espaces de dimension deux.

2.1 Premier exemple.

2.1.1 Contexte et objectif.

Rappel : le raisonnement réalisé au cours du chapitre précédent indique l'existence possible d'ensembles de fonctions vectorielles génériquement notées $\mathbf{f}$: $(\mathrm{f}_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2), \mathrm{f}_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2))$ dépendant in fine de deux variables réelles, in extenso : la paire $(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2)$, dont les Jacobiennes peuvent parfois s'identifier avec une table de multiplication.

Ce chapitre se propose de tester ce résultat au travers d'exemples concrets et de dénicher un certain nombre d'informations éventuellement passées inaperçues au cours de la démarche théorique.

Remarque 2.1.1. *Précisions techniques.*

Bien que la partie théorique ait montré que les conditions de l'identification "*Jacobienne - table de multiplication*" exigent en particulier de ne considérer que les situations pour lesquelles les deux variables sont linéairement liées l'une à l'autre :

$$x_2 = k \,.\, x_1 \tag{2.1}$$

... je commencerai l'étude de chaque exemple en considérant que les deux variables réelles sont a priori indépendantes l'une de l'autre ; ce qui autorise à proposer la :

2.1.2 Définition.

Ceci ayant été rappelé et dit, soit la fonction vectorielle $\mathbf{f}$ définie par :

$$f_1(x_1, x_2) = a_1 \,.\, x_1^m + a_2 \,.\, x_2^n \tag{2.2}$$

$$f_2(x_1, x_2) = b_1 \,.\, x_1^p + b_2 \,.\, x_2^q$$

et pour laquelle s'appliquent les conditions :

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} = [Inv._1] \neq {}^{(2)}[0] \, ; \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = [Inv._2] \neq {}^{(2)}[0] \tag{2.3}$$

... qui traduisent l'invariance et la non-nullité des coefficients a_1, a_2, b_1 et b_2 ainsi que celle des puissances m, n, p et q.

De plus, les deux fonctions numériques f_1 et f_2 des deux variables réelles x_1 et x_2 sont supposées continues et différentiables un nombre infini de fois ; en d'autres termes, elles sont de classe C^∞.

2.1.3 La Jacobienne.

Par définition, la Jacobienne de la fonction vectorielle **f** étudiée ici vaut :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \, . \, a_1 \, . \, x_1^{m-1} & n \, . \, a_2 \, . \, x_2^{n-1} \\ p \, . \, b_1 \, . \, x_1^{p-1} & q \, . \, b_2 \, . \, x_2^{q-1} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Aussi longtemps que l'abscisse diffère de zéro ($x_1 \neq 0$), cette Jacobienne peut se reformuler par convenance de la façon suivante :

$$\forall \, x_1 \neq 0 \, : \, [J] \, = \, m \, . \, a_1 \, . \, x_1^{m-1} \, . \begin{bmatrix} 1 & \frac{n \, . \, a_2 \, . \, x_2^{n-1}}{m \, . \, a_1 \, . \, x_1^{m-1}} \\ \frac{p \, . \, b_1 \, . \, x_1^{p-1}}{m \, . \, a_1 \, . \, x_1^{m-1}} & \frac{q \, . \, b_2 \, . \, x_2^{q-1}}{m \, . \, a_1 \, . \, x_1^{m-1}} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

C'est l'équation avec laquelle je vais travailler.

2.1.4 Le rappel du résultat acquis dans la partie théorique.

Le chapitre précédent a permis de montrer que lorsque la Jacobienne d'une fonction vectorielle peut s'identifier avec une table de multiplication, alors l'égalité suivante est vraie :

$$[J] \, = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} . \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\theta_1 \, . \, x_1}{\theta_2 \, . \, x_1 + 1} \\ -\frac{1}{k} & \frac{\theta_1 \, . \, x_1}{k \, . \, (\theta_2 \, . \, x_1 + 1)} \end{bmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} . \, T_2(\otimes)(\mathbf{K}, \mathbf{L}) \, = \, [T] \tag{2.6}$$

Je rappellerai un peu plus loin la signification exacte des symboles θ_1, θ_2, **K**, **L**, et je me contenterai dans un premier temps de remarquer que la table de multiplication avec laquelle une Jacobienne peut s'identifier a un formalisme générique simple pouvant se noter :

$$[T] \, = \, \frac{\partial f_1}{\partial x_1} . \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\theta_1 \, . \, x_1}{\theta_2 \, . \, x_1 + 1} \\ -\frac{1}{k} & \frac{\theta_1 \, . \, x_1}{k \, . \, (\theta_2 \, . \, x_1 + 1)} \end{bmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} . \begin{bmatrix} 1 & -T \\ -\frac{1}{k} & \frac{T}{k} \end{bmatrix} ; \, T \, = \, \frac{\theta_1 \, . \, x_1}{\theta_2 \, . \, x_1 \, + \, 1} \tag{2.7}$$

2.1.5 Les relations résultant de l'identification.

En admettant a priori que l'identification "*Jacobienne - table de multiplication*" est réalisable et réalisée pour la fonction vectorielle **f** étudiée ici, trois relations en résultent :

$$-T = \frac{n\,.\,a_2\,.\,x_2^{n-1}}{m\,.\,a_1\,.\,x_1^{m-1}} \tag{2.8}$$

$$-\frac{1}{k} = \frac{p\,.\,b_1\,.\,x_1^{p-1}}{m\,.\,a_1\,.\,x_1^{m-1}} = \frac{p\,.\,b_1}{m\,.\,a_1}\,.\,x_1^{p-m} \tag{2.9}$$

$$\frac{T}{k} = \frac{q\,.\,b_2\,.\,x_2^{q-1}}{m\,.\,a_1\,.\,x_1^{m-1}} \tag{2.10}$$

2.1.6 Première conséquence des identifications.

En multipliant la première relation par la deuxième et en comparant le résultat obtenu avec la troisième, j'obtiens une relation supplémentaire assurant la cohérence des trois identifications :

$$-T\,.\,-\frac{1}{k}$$

$$=$$

$$\frac{n\,.\,a_2\,.\,x_2^{n-1}}{m\,.\,a_1\,.\,x_1^{m-1}}\,.\,\frac{p\,.\,b_1\,.\,x_1^{p-1}}{m\,.\,a_1\,.\,x_1^{m-1}}$$

$$=$$

$$\frac{q\,.\,b_2\,.\,x_2^{q-1}}{m\,.\,a_1\,.\,x_1^{m-1}}$$

$$= \frac{T}{k}$$

Cette relation supplémentaire s'écrit :

$$n\,.\,p\,.\,a_2\,.\,b_1\,.\,x_1^{p-1}\,.\,x_2^{n-1} = m\,.\,q\,.\,a_1\,.\,b_2\,.\,x_1^{m-1}\,.\,x_2^{q-1}$$

Elle signe la nullité du déterminant de la Jacobienne :

$$|J| = 0 \tag{2.11}$$

... qui est bien une des conditions implicitement exigées pour la réalisation de l'identification "*Jacobienne - table de multiplication*" ; voir le chapitre précédent dédié à la théorie. Cette condition s'écrit aussi de façon condensée :

$$x_2^{n-q} = \frac{m\,.\,q}{n\,.\,p}\,.\,\frac{a_1\,.\,b_2}{a_2\,.\,b_1}\,.\,x_1^{m-p} \tag{2.12}$$

2.1.7 Conséquence de la dépendance linéaire des variables.

Une autre condition exigée par la théorie est la dépendance linéaire des variables. Cette dépendance est explicitée par le coefficient k ; celui-ci est donné par la deuxième relation d'identification :

$$k \;=\; -\frac{m\,.\,a_1}{p\,.\,b_1}\,.\,x_1^{m\,-\,p} \tag{2.13}$$

Ce qui fournit :

$$x_2 \;=\; -\frac{m\,.\,a_1}{p\,.\,b_1}\,.\,x_1^{m\,-\,p\,+\,1}$$

Et par élévation à la puissance n - q :

$$x_2^{n\,-\,q} \;=\; (-1)^{n\,-\,q}\,.\,\frac{m^{n\,-\,q}\,.\,a_1^{n\,-\,q}}{p^{n\,-\,q}\,.\,b_1^{n\,-\,q}}\,.\,x_1^{\{(m\,+\,n\,+\,1)\,-\,(p\,+\,q)\}}$$

De sorte que cette théorie dispose de deux relations distinctes spécifiant les liens entre les variables x_2 et x_1. Comme ces deux relations doivent être vraies simultanément, il en découle la nécessité pour ces variables de ne dépendre que des coefficients et des puissances définissant la fonction vectorielle étudiée ; l'égalité :

$$x_2^{n\,-\,q} \;=\; (-1)^{n\,-\,q}\,.\,\frac{m^{n\,-\,q}\,.\,a_1^{n\,-\,q}}{p^{n\,-\,q}\,.\,b_1^{n\,-\,q}}\,.\,x_1^{\{(m\,+\,n\,+\,1)\,-\,(p\,+\,q)\}} \;=\; \frac{m\,.\,q}{n\,.\,p}\,.\,\frac{a_1\,.\,b_2}{a_2\,.\,b_1}\,.\,x_1^{m\,-\,p}$$

impose en effet :

$$x_1^{(n\,+\,1\,-\,q)} \;=\; (-1)^{q\,-\,n}\,.\,\{\frac{p\,.\,b_1}{m\,.\,a_1}\}^{n\,-\,q\,-\,1}\,.\,\frac{q\,.\,b_2}{n\,.\,a_2} \tag{2.14}$$

Et, en réutilisant le facteur k issu de la deuxième des trois identifications nécessaires à valider l'identification "*Jacobienne - table de multiplication*" :

$$x_2^{(n\,+\,1\,-\,q)}$$
$$=$$
$$k^{(n\,+\,1\,-\,q)}\,.\,x_1^{(n\,+\,1\,-\,q)}$$
$$=$$
$$\{(-1)\,.\,\frac{m\,.\,a_1}{p\,.\,b_1}\,.\,x_1^{m\,-\,p}\}^{(n\,+\,1\,-\,q)}\,.\,(-1)^{q\,-\,n}\,.\,\{\frac{p\,.\,b_1}{m\,.\,a_1}\}^{n\,-\,q\,-\,1}\,.\,\frac{q\,.\,b_2}{n\,.\,a_2}$$
$$=$$
$$(-1)\,.\,\{\frac{m\,.\,a_1}{p\,.\,b_1}\}^{(n\,+\,1\,-\,q)}\,.\,\{\frac{p\,.\,b_1}{m\,.\,a_1}\}^{n\,-\,q\,-\,1}\,.\,\frac{q\,.\,b_2}{n\,.\,a_2}\,.\,x_1^{\{(m\,+\,n\,+\,1)\,-\,(p\,+\,q)\}}$$
$$=$$
$$(-1)\,.\,\{\frac{m\,.\,a_1}{p\,.\,b_1}\}^{2}\,.\,\frac{q\,.\,b_2}{n\,.\,a_2}\,.\,x_1^{\{(m\,+\,n\,+\,1)\,-\,(p\,+\,q)\}}$$
$$=$$
$$etc.$$

Il en résulte que l'identification "*Jacobienne - table de multiplication*" n'est possible qu'en $(n + 1 - q)^2$ points (x_1, x_2) qui tous dépendent des coefficients et des puissances définissant la fonction vectorielle étudiée.

2.1.8 Calcul des variations.

Dans le cadre de validité de l'identification "*Jacobienne - table de multiplication*", il est exceptionnellement permis d'écrire les égalités :

$$|d\mathbf{f}(\mathbf{x}) >= | \otimes_\theta (d\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) >= [T] \,.\, |\theta > \tag{2.15}$$

parce que justement :

$$[J] \,=\, [T]$$

La théorie exige de manière générale que :

$$T \,=\, \frac{\theta_1 \,.\, x_1}{(\theta_2 \,.\, x_1 \,+\, 1)}$$

De sorte que :

$$|\theta >= \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \frac{1}{T} \,.\, \theta_1 \,-\, \frac{1}{x_1} \end{bmatrix}$$

Et que :

$$|d\mathbf{f}(\mathbf{x}) >= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \,.\, \begin{bmatrix} 1 & -T \\ -\frac{1}{k} & \frac{T}{k} \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \frac{1}{T} \,.\, \theta_1 \,-\, \frac{1}{x_1} \end{bmatrix} \,=\, \frac{T}{x_1} \,.\, \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \,.\, \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{k} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Ici, plus particulièrement, la première et la deuxième des trois relations rendant l'identification "*Jacobienne - table de multiplication*" possible permettent d'exprimer les variations de manière plus précise ; en effet :

$$T \,=\, -\frac{n \,.\, a_2}{m \,.\, a_1} \,.\, k^{n\,-\,1} \,.\, x_1^{n\,-\,m}$$

permet de poser :

$$\frac{T}{x_1} \,=\, -\frac{n \,.\, a_2}{m \,.\, a_1} \,.\, k^{n\,-\,1} \,.\, x_1^{n\,-\,m\,-\,1}$$

et puisque, pour rappel :

$$-\frac{1}{k} \,=\, \frac{p \,.\, b_1}{m \,.\, a_1} \,.\, x_1^{p\,-\,m}$$

il suit :

$$k^{n\,-\,1} \,=\, (-1)^{n\,-\,1} \,.\, \{\frac{m \,.\, a_1}{p \,.\, b_1}\}^{n\,-\,1} \,.\, x_1^{(m\,+\,n\,-\,p\,-\,1)}$$

et :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \,.\, \frac{T}{x_1} \,=\, -n \,.\, a_2 \,.\, (-1)^{n\,-\,1} \,.\, \{\frac{m \,.\, a_1}{p \,.\, b_1}\}^{n\,-\,1} \,.\, x_1^{(2\,.\,n\,+\,m\,-\,p\,-\,3)}$$

Mais puisque la variable x_1 dépend des coefficients et des puissances, dans cette théorie, il en est de même des variations de la fonction vectorielle étudiée.

2.1.9 Résumé.

Dans cette section j'ai cherché à appliquer la théorie élaborée au chapitre précédent sur une fonction vectorielle définie au paragraphe 1.1.2. L'identification entre la Jacobienne de cette fonction et une table de multiplication étant réalisée a priori, l'exploration met en exergue les points suivants :

1. L'identification fournit trois relations permettant d'exprimer k et T ainsi que leur ratio.
2. En multipliant la première par la deuxième et en comparant le résultat obtenu avec la troisième, je retrouve bien que le déterminant de la Jacobienne doit être nul.
3. La confrontation de l'expression du déterminant nul avec une exigence théorique résumée par la relation $x_2 = k.x_1$ livre une seconde relation de dépendance entre les variables x_1 et x_2 ; de sorte que finalement ces deux variables ne le sont pas parce qu'elles dépendent entièrement des coefficients et des puissances définissant la fonction vectorielle étudiée.
4. L'identification ne peut être réalisée qu'en $(n + 1 - q)^2$ points (x_1, x_2).
5. Les variations de la fonction vectorielle étudiée ne dépendent que des coefficients et des puissances définissant cette fonction.

2.1.10 Lorsque toutes les puissances sont égales entre elles.

Lorsque toutes les puissances définissant la fonction vectorielle sont égales, in extenso quand :

$$m = n = p = q \tag{2.17}$$

cette fonction se définit par :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= a_1 . x_1^m + a_2 . x_2^m \\ f_2(x_1, x_2) &= b_1 . x_1^m + b_2 . x_2^m \end{aligned} \tag{2.18}$$

... et l'identification entre la Jacobienne de la fonction vectorielle et une table de multiplication n'est possible qu'en un seul point P dont les coordonnées sont données par :

$$x_1 = \frac{a_1}{b_1} . \frac{b_2}{a_2} \tag{2.19}$$

et puisqu'ici :

$$k = -\frac{a_1}{b_1} \tag{2.20}$$

par :

$$x_2 = -(\frac{a_1}{b_1})^2 . \frac{b_2}{a_2} \tag{2.21}$$

Les variations en ce point sont telles que :

$$df_1(P) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} . \frac{T}{x_1} = -m . a_2 . (-1)^{m-1} . \{\frac{a_1}{b_1}\}^{(3.m-4)} . \{\frac{b_2}{a_2}\}^{(2.m-3)}$$

$$df_2(P) = m . a_2 . (-1)^{m-1} . \{\frac{a_1}{b_1}\}^{3.(m-1)} . \{\frac{b_2}{a_2}\}^{(2.m-3)}$$

Je constate que le point P ne dépend pas de la puissance m mais que les variations autour de ce point si.

2.1.11 Discussion.

Il est extraordinairement difficile de se faire une idée juste et globale des messages contenus dans cette approche. Il me semble qu'il sera plus aisé de comprendre un peu ce que le raisonnement théorique sous-tend au travers d'exemples particuliers simples. Par exemple, lorsque toutes les puissances sont égales entre elles et égales à deux, la fonction vectorielle s'écrit :

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= a_1 . x_1^2 + a_2 . x_2^2 \\ f_2(x_1, x_2) &= b_1 . x_1^2 + b_2 . x_2^2 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Si, pour des raisons qui seraient imposées par des conditions physiques, chaque composante restait invariante au cours du temps, cette fonction vectorielle décrirait un ensemble de points de coordonnées (x_1, x_2) devant simultanément être situés sur deux coniques du plan. Selon les valeurs précises des coefficients a_1, a_2, b_1, b_2, il s'agirait à chaque fois d'une ellipse, d'une parabole ou d'une hyperbole et le nombre de points décrits par cette définition varierait entre zéro et l'infini (les deux coniques coincident) en passant par un et deux.

A chaque instant ou pour chaque lapse de temps infiniment petit d'une chronologie définie pour les points du plan, le raisonnement que je viens d'évoquer est vrai. De sorte que lorsque les composantes de la fonction vectorielle sont libres de varier, cette fonction décrit 0, 1, 2 ou une infinité de points correspondant aux configurations nommées : une disjonction, une intersection (à la limite tangentielle) ou une coincidence totale des deux coniques.

La théorie exposée au chapitre précédent et l'analyse qu'en fait celui-ci arrive à la conclusion que la Jacobienne de ce type de fonction vectorielle ne peut coincider avec une table de multiplication qu'en un seul point.

Comme elle ne dit pas si ce point coincide forcément avec un des points validant la définition de la fonction examinée à un instant donné. Et au cas où il coincide avec cette définition, comme elle ne dit pas non plus à quel instant a lieu cette coincidence, seule l'étude au cas par cas permettra de dire si, où et quand les points autorisant à subsituer une table de multiplication à la Jacobienne ont une existence intéressante du point de vue physique.

2.2 Remerciements.

Etant ancien élève des classes préparatoires aux grandes écoles (mathématiques supérieures et spéciales section P' de l'école Sainte-Geneviève, Versailles, en 1974-1975), retraité de l'art dentaire (doctorat d'état en chirurgie dentaire, Paris, 1982 ; certificat en radioprotection dentaire sur la période 2007-2022) et self-made man dans le domaine de la physique mathématique que j'étudie désormais par passion, je prie le lectorat de faire preuve d'un sens critique aigu lorsqu'il parcourt mes documents. Je remercie chaleureusement tous les auteurs acceptant, comme moi, de mettre leurs travaux à libre disposition du public. Vos commentaires éclairés seront toujours bien venus.

Bibliographie

2.3 Livres, ouvrages et cours.

[01] Darboux, G. : Sur le problème de Pfaff, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, **VI** (1882), numéro 1, 14-36 et 49-68.

[02] Cartan, E. : Sur certaines équations différentielles et le problème de Pfaff, Ann. Ec. Norm. **16** (1899), 239-33 ; [Oeuvres compl. II, 1, 303-396].

[03] Einstein's vierbein field theory of curved space ; arXiv :1106.2037v1 [gr-qc], 10 June 2011.

[04] Cartan, E. : Sur les équations de la gravitation d'Einstein ; extrait du journal de mathématiques 1922. Fasc. n°2. Gauthier-Villard et Cie, éditeurs, Paris, 74 pages.

2.4 Travaux personnels précisant le contexte de la discussion menée dans ce document.

[a] PERIAT, T. : Les premières relations d'E. B. Christoffel revisitées ; ISBN 978-2-36923-051-9, EAN 9782369230519, 8 septembre 2020, 12 pages.

[b] PERIAT, T. : Hessiennes et propagateurs dans la théorie des produits tensoriels déformés et décomposés - Introduction ; ISBN 9782-36923-089-2, EAN 9782369230892, version du 06 février 2019.

[c] PERIAT, T. : Matricial derivations ; ISBN 9782-36923-015-1, EAN 9782369230151, March 2021.

[d] PERIAT, T. : Sur les méthodes extrinsèques permettant de diviser les produits tensoriels déformés dans les espaces de dimension deux ; ISBN 9782-36923-103-5, EAN 9782369231035, 2 mai 2022, 66 pages.

Table des matières