# La proposition d'Einstein-Rosen (1935) revisitée

Le lien entre les produits vectoriels déformés et les solutions de Bowen York

©Thierry PERIAT, ISBN 978-2-36923-113-4, EAN-0782369231134, v2

14 mars 2020

Dans les espaces vectoriels de dimension trois, la théorie des décompositions des produits vectoriels déformés algébriquement permet de retrouver une partie des solutions dites de Bowen-York pour le problème des données initiales. Celles-ci apparaissent au cours d'une recherche des solutions de la relativité générale.

## Contents



# 1 L'enjeu et la motivation

## 1.1 Rappel du contexte de la discussion physique

En 1935, A. Einstein et N. Rosen font paraitre un article [[01]] que le recul du temps permet aujourd'hui de qualifier d'historique. En effet, à partir des discussions, des principes et des équations maîtresses exposées dans [[02]], les deux auteurs développent ce que la théorie de la relativité générale peut se permettre de suggérer sur la notion de particule en physique. Ils le font avec un souci majeur en tête : celui d'intégrer les lois de l'électromagnétisme (EM) [1] aux équations de la théorie de la relativité générale de telle sorte qu'il devienne possible de décrire la structure atomique de la matière.

C'est le contexte qui leur permet de justifier de n'impliquer que les quatre composantes du vecteur "potentiel champ EM", **A** et les 16 coefficients de la matrice (4-4) représentant la métrique spatio-temporelle locale, [G], dans les équations de la théorie unitaire qu'ils souhaitent promouvoir.

[1] Elles ont été énoncées pour la première fois de manière synthétique en 1865 par J. C. Maxwell dans [[03]].

De nombreuses tentatives ayant la même motivation (unifier les deux piliers de la physique moderne) succéderont à celle-ci (voir par exemple [[04]]). Elles ne conserveront cependant pas toutes l'idée majeure véhiculée dans [[01]] et caractérisant d'ailleurs cet essai historique ; à savoir : vouloir identifier les particules physiques réelles avec des "ponts (bridges)" liant deux copies similaires de l'espace-temps.

Pour certaines équipes scientifiques actuelles, c'est une idée qui retrouve aujourd'hui (2017) tout son éclat. Ce renouveau est dû à l'espoir investi sur l'hypothèse de travail selon laquelle il devrait être possible d'identifier ces ponts avec les états intriqués de la matière qui ont récemment été mis en évidence dans le cadre de la recherche expérimentale [[05]] faites autour des conséquences présumées de la mécanique quantique (voir l'excellent livre -2 tomes- [[06]]).

De façon à concrétiser l'idée de "particules-ponts", les auteurs renoncent aux solutions discontinues de [[02]] pour des raisons bien expliquées dans [[01]; p.73, colonne de droite]. Ils le font en choisissant d'abord de restreindre le domaine de validité de leurs réflexions aux zones sans courbure de l'espace-temps pour lesquelles la métrique est celle dûe à un champ de gravitation homogène [01; p.74, (1), (2) et note de pied de page].

Comme ce choix laisse cependant subsister un hyperplan générant une singularité, suivant en cela les propositions faites par W. Mayer, ils décident d'éliminer les dénominateurs apparaissant dans le calcul du tenseur de Ricci en multipliant celui-ci par une puissance deux du déterminant, noté "g", de la matrice [G] et d'annuler le système d'équations obtenu de la sorte [01; p.74, (3a)]. Ce système satisfait bien [01; p.74, (1)] mais il présente à son tour une singularité lorsque $g = 0$. Elle est éliminée par une légère modification de [01; p.74, (1)] en [01; p.74, (1a)].

Prenant ensuite l'exemple de la métrique de Schwarzschild, les auteurs précisent ce qu'ils entendent par "particule-pont" en identifiant ce concept à toute situation pour laquelle $g = 0$. Et, effectivement, dans un espace mathématique de dimension quatre, l'annulation du déterminant g correspond forcément à des situations "dégénérées" se déroulant dans un sous-espace de dimension au plus égale à trois que l'esprit peut être tenté de confondre avec celui occupé par des particules matérielles.

# 2 Nouvelle tentative

## 2.1 La démarche et l'outil

**Remarque 2.1.** ***La logique du raisonnement***

En se plaçant exclusivement du point de vue de la logique, et en considérant que le raisonnement exposé dans [[01]] est forcément juste, il semble cohérent de se mettre à la recherche de l'ensemble des situations réelles incluses dans les solutions acceptables du problème exposé dans [01]. Ces solutions sont forcément un sous-ensemble de l'ensemble des solutions de la théorie [[02]] (voir [01] et exposé du §1.1. ci-dessus).

Parallèlement, les solutions pour le problème des données initiales implicitement posé par l'énoncé même de la théorie [[02]] contiennent celles proposées par Bowen-York (C'est aujourd'hui un fait historique).

Si donc, par un moyen qui m'est propre, je découvre des solutions de la théorie de la question (E) qui coincident avec celles de Bowen-York, elles seront nécessairement aussi des solutions de [[02]]. Il restera donc in fine à montrer si/que ces solutions particulières de la théorie de la relativité générale peuvent être des solutions du point de vue exposé dans [**01**] -et dans quelles circonstances concrètes- pour être assurés du fait que les solutions de la théorie de la question (E) sont aussi parfois celles de la proposition exposée dans [01].

**Remarque 2.2.** ***Quelques rappels sur la théorie de la question (E)***

La théorie des décompositions des produits vectoriels déformés -dite de la question (E) ou TQE- permet de démontrer que (voir [[a]]) ceux de ces produits définis *dans un espace de dimension trois quelconque* qui sont du type suivant [2] :

$$[d\mathbf{x}, ...]_{[A]}$$

et qui se laissent décomposer de façon non-triviale sont associés à une forme polynomiale de degré au plus égal à deux ; c'est l'enseignement essentiel du théorème initial. Cette forme polynomiale correspond de manière générique au calcul du déterminant de la différence entre le résultat trivial et le résultat qui ne l'est pas ; in extenso à :

$$\Lambda(d\mathbf{x}) = |_{[A]}\Phi(d\mathbf{x}) - [P]| \tag{1}$$

Le théoréme de reconstruction permet de comprendre ensuite que le noyau des décompositions se confond toujours avec la matrice [D] des coefficients de degré deux de cette polynomiale. Enfin, dès le moment où la matrice déformante [A] est inversible, la partie principale d'une décomposition admissible peut se calculer à partir du noyau. Elle est notée [P] et se distingue en général de la version triviale de cette décomposition, c'est-à-dire de la matrice :

$$_{[A]}\Phi(d\mathbf{x})$$

Pour la famille de produits vectoriel déformés sur laquelle se concentre ce document, les résultats généraux de la théorie des produits vectoriels déformés prennent la forme particulière suivante :

$$[P]_{|A|} = |A| . ([A]^t . [J]) . [K]_{|A|} \tag{2}$$

$$[D] = [K]_{|A|} = \frac{1}{2} . Hess_{(d\mathbf{x},0)}\Lambda(d\mathbf{x}) + |A| . _{[J]}\Phi(Hess^{-1}_{(d\mathbf{x},0)}\Lambda(d\mathbf{x}) . |\mathbf{d}* >)$$

$$\Lambda(d\mathbf{x}) = \Lambda(dx^1, dx^2, dx^3) = |_{[A]}\Phi(d\mathbf{x}) - [P]| = \sum_{ij} d_{ij} . dx^i . dx^j + \sum_i d_i . dx^i - |P| \tag{3}$$

$$|_{\Lambda}\mathbf{s} >= -Hess^{-1}_{(d\mathbf{x},0)}\Lambda(d\mathbf{x}) . |\mathbf{d}* >; \; |A| = \pm 1 \tag{4}$$

$$|P| = |K(type\, I)| = <_{\Lambda} \mathbf{s}, \; _{\Lambda}\mathbf{s} >_{[D]} + \frac{|[D] + [D]^t|}{8} \tag{5}$$

[2] où "d" désigne ici une dérivation ordinaire, **x** représente la position spatiale d'un évènement, **...** représente un vecteur spatial quelconque et [A], une matrice (3-3) quelconque de M(3,C) ou M(3,R).

## 2.2 Proposition essentielle

**Proposition 2.1.** ***Produits vectoriels déformés et solutions de Bowen-York pour le probl ème des données initiales.***

Sous réserve de la réalisation concomittante de trois conditions :

1. La polynomiale est propre (équivalemment, sa Hessienne classique n'est pas dégénérée) ;
$$|Hess_{(d\mathbf{x},0)}\Lambda(d\mathbf{x})| \neq 0 \tag{6}$$

2. La polynomiale se laisse identifier avec un développement limité à l'ordre deux inclus de type Taylor - Mac Laurin d'une fonction f($\mathbf{x}$) ;
$$\Lambda(d\mathbf{x}) = df(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}.\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^i \partial x^j}.x^i.x^j + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^i}.x^i \tag{7}$$

3. Le gradient spatial de cette fonction f définit (ou correspond à) un champ en $\mathrm{r}^{-2}$ ; par exemple :
$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^i} = -\frac{G.m}{r^3}.x^i \iff \mathbf{Grad_x} f(\mathbf{x}) = -\frac{G.m}{r^3}\,.\,\mathbf{x}\,;\, r = (<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2} \tag{8}$$
*nota bene*: Ces champs sont visiblement des champs centraux, style de Newton ou de Coulomb, agissant dans un environnement géométrique de nature quasiment euclidienne.

Alors :

1. La fonction $\Lambda(\mathrm{d}\mathbf{x})$ a toujours un vecteur singulier coincidant avec une position spatiale $\mathbf{x}$ ;

2. Chaque partie principale d'une décomposition non-triviale [P] est telle que le vecteur :
$$\sim\ {}^{(3)}[G]^{-1}\,.\,[P]\,.\,\mathbf{p}$$
peut à tous les coups s'identifier de manière cohérente avec une solution de [[02]] dite "de Bowen-York pour le problème des valeurs initales" telle qu'elle apparait in extenso par exemple dans [[07] ; §8.2.6, p. 136, (8.69)].

Dans cette expression, ${}^{(3)}[\mathrm{G}]^{-1}$ représente l'inverse d'une métrique "spatiale", "locale" et "plane" et $\mathbf{p}$ est une quantité de mouvement spatiale classique.

## 2.3 Domaine de définition des prérequis de la proposition essentielle

Soit donc les trois prérequis de la proposition essentielle. De la confrontation des Equ.(3) et (07), puis de la prise en considération de l'Equ.(8), il résulte les identifications suivantes :
$$[D] = [d_{ij}] = \frac{1}{2}\,.\,Hess_{(\mathbf{x},0)}f(\mathbf{x}) \tag{9}$$
$$d_i = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^i} \iff \mathbf{d}^* = -\frac{G.m}{r^3}\,.\,\mathbf{x} = \mathbf{Grad_x} f(\mathbf{x}) \tag{10}$$
$$|P| = 0(3) \tag{11}$$

**Remarque 2.3.** ***Domaine de validité des identifications proposées:***

A cause de l'Equ.(11), les identifications proposées ne sont finalement valables que pour des décompositions dont la partie principale, [P], a un déterminant de valeur proche de zéro. L'Equ.(5) permet de traduire cette exigence concrètement par :

$$|P| \, = <_{\Lambda} \, \mathbf{s}, \, _{\Lambda}\mathbf{s} >_{[D]} \, + \frac{|[D] \, + \, [D]^t|}{8} \, = \, 0(3) \tag{12}$$

Les trois composantes du vecteur singulier de la polynomiale $\Lambda$ satisfont eux aussi à l'équation d'une polynomiale de degré deux. La Hessienne de la fonction f peut aisément être calculée ; il vient dans un premier temps :

$$[\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^i \partial x^j}] \, = \, [\frac{\partial d_i}{\partial x^j}] \, = \, - \, G.m.[\frac{\partial(\frac{x^i}{r^3})}{\partial x^j}] \, = \, - \, \frac{G.m}{r^6} \, . \, [\delta^i_j \, . \, r^3 \, - \, x^i \, . \, 3 \, . \, r^2 \, . \, \frac{\partial r}{\partial x^j}]$$

Et puisque :

$$\frac{\partial r}{\partial x^j} \, = \, \frac{x^j}{r}$$

Il est ensuite facile de constater que cette matrice est symétrique et vaut :

$$2.[D] \, = \, [\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^i \partial x^j}] \, = \, - \, \frac{G.m}{r^3} \, . \, \{Id_3 \, - \, \frac{3}{r^2} \, . \, T_2(\otimes)(\mathbf{x}, \mathbf{x})\} \, = \, - \, \frac{G.m}{r^3} \, . \, \{Id_3 \, - \, \frac{3}{r^2} \, . \, \phi\} \tag{13}$$

Avec, par convention et pour simplifier l'écriture :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \, = \, \begin{pmatrix} x^1 \, . \, x^1 & x^2 \, . \, x^1 & x^3 \, . \, x^1 \\ x^1 \, . \, x^2 & x^2 \, . \, x^2 & x^3 \, . \, x^2 \\ x^1 \, . \, x^3 & x^2 \, . \, x^3 & x^3 \, . \, x^3 \end{pmatrix} \, = \, [x^i \, . \, x^j] \, = \, \phi \tag{14}$$

En partant de l'Equ.(3), et au cas où la polynomiale $\Lambda$ a des coefficients ne variant pas en fonction de d$\mathbf{x}$, il vient :

$$[S_0] \, = \, Hess_{(d\mathbf{x},0)} \Lambda(d\mathbf{x}) \, = \, [D] \, + \, [D]^t \tag{15}$$

A cause de la symétrie de la matrice [D] il en résulte en particulier ici que :

$$Hess_{(\mathbf{x},0)} f(\mathbf{x}) \, = \, [d_{ij}] \, + \, [d_{ij}]^t \, = \, [Hess_{(d\mathbf{x},0)} \Lambda(d\mathbf{x})] \tag{16}$$

L'approche développée dans [[a]] impose la condition :

$$[D] \, = \, [K]$$

reportée ci-dessus dans l'Equ.(2). Elle conduit à une trés forte restriction du domaine de validité de l'exploration conduite dans ce document puisqu'elle impose la nullité du vecteur singulier de la polynomiale $\Lambda$ :

$$_{\Lambda}\mathbf{s} \, = \, \mathbf{0} \tag{17}$$

**Lemme 2.1.** *Les conditions définissant les prérequis de la proposition essentielle ne sont recevables au sein de la partie de la théorie des produits vectoriels déformés livrant des noyaux de type I que si le vecteur singulier de la polynomiale* $\Lambda$ *est nul.*

L'étape suivante consiste à calculer le déterminant de cette Hessienne car, au sein de la théorie des produits vectoriels déformés, ce calcul décide de l'existence ou non de solution(s) pour le problème posé ; à savoir : "Les produits vectoriels déformés étudiés ici sont-ils oui ou non décomposables?" Le calcul fournit en fait :

$$|S_0| \, = \, |Hess_{(d\mathbf{x},0)} \Lambda(d\mathbf{x})| \, = \, - \, 2. \, (\frac{G.m}{r^3})^3 \tag{18}$$

Ce résultat doit être confronté avec l'Equ.(6). Il est encourageant à plus d'un titre car, excepté si la source est de masse nulle (ce qui n'a aucun sens dans le cadre de cette étude) ou pour les observateurs placés à l'infini, cette quantité n'est jamais nulle. Par conséquent, dans la très grande majorité des situations rencontrées en réalité, cette Hessienne peut être inversée, le problème posé a un sens et le vecteur singulier de la polynomiale peut être calculé.

**Lemme 2.2.** *Dans les conditions définissant les prérequis de la proposition essentielle, sauf à une distance infinie de la source du champ en $1/r^2$ considéré, le vecteur singulier de la polynomiale $\Lambda$ peut toujours être calculé. Il correspond toujours à une position spatiale.*

*Preuve* - L'inverse de la Hessienne vaut :

$$[S_0]^{-1} \; = \; -\frac{2.r^3}{G.m}\,.\,\{Id_3 \; - \; \frac{3}{2.r^2}\,.\,\phi\} \tag{19}$$

Le calcul du vecteur singulier peut commencer avec :

$$|_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{s}> = \; -Hess^{-1}_{(d\mathbf{x},0)}\Lambda(d\mathbf{x})\,.\,|\mathbf{d}*> = \; \frac{G.m}{r^3}\,.\,[S_0]^{-1}\,.\,|\mathbf{x}> = \; -2\,.\,\{Id_3 - \frac{3}{2.r^2}\,.\,\phi\}\,.\,|\mathbf{x}>$$

Puisque:

$$\phi\,.\,|\mathbf{x}> = \; r^2\,.\,|\mathbf{x}> \tag{20}$$

Et il suit :

$$|_{\mathbf{\Lambda}}\mathbf{s}> = \; -2\,.\,|\mathbf{x}> \; +3\,.\,|\mathbf{x}> = \; |\mathbf{x}> \tag{21}$$

$\square$

**Théorème 2.1.** *Origine du principe de moindre action.*

Les conditions définissant les prérequis de la proposition essentielle sont aussi celles pour lesquelles la position spatiale minimise toutes les pentes de la polynomiale $\Lambda$. Or celle-ci dépend de la vitesse spatiale de l'objet physique étudié, à un facteur 1/dt près. Par conséquent, ces conditions décrivent des circonstances physiques dans lesquelles cet objet physique tend à avoir une vitesse constante dans l'espace.

**Corollaire 2.1.** ***Le calcul du déterminant***

Pour finir l'exploration du domaine de définition de ces prérequis, il convient de calculer le déterminant à l'aide des informations accumulées jusque là. L'Equ.(5) permet de commencer avec :

$$|P| \; = \; \frac{|S_0|}{8} + \; <_{\Lambda}\,\mathbf{s},_{\Lambda}\,\mathbf{s}>_{[D]}$$

Les Equ.(13), (16) et (21) permettent de poursuivre avec :

$$|P| \; = \; \frac{|S_0|}{8} \; + \; \frac{1}{2}.<\mathbf{x}|.\{[S_0].|\mathbf{x}>$$

Les Equ.(19) et (20) fournissent alors :

$$-|P| \; = \; \frac{2.\,(\frac{G.m}{r^3})^3}{8} \; + \; \frac{1}{2}.<\mathbf{x}|.\{\frac{G.m}{r^3}\,.\,\{Id_3 \; - \; \frac{3}{r^2}\,.\,\phi\}.|\mathbf{x}>$$

De sorte qu'en effectuant les calculs requis :

$$|P| \; = \; \frac{G.m}{r} \; - \; \frac{1}{4}.(\frac{G.m}{r^3})^3$$

Grâce à l'Equ.(12) le domaine de validité de cette approche est maintenant clairement défini et tel que :

$$\frac{G.m}{r}.\{1 - \frac{1}{4}.(\frac{G.m}{r^3})^2\} = 0(3)$$

En partant du principe que le potentiel de gravitation ne doit pas être nul pour que tous ces calculs aient pu être faits de manière cohérente, il reste :

$$\frac{G.m}{r^3} = 2 \tag{22}$$

A titre d'exemple, si la source du champ est sphérique, homogène et de rayon r, alors elle doit avoir une densité volumique de matière bien déterminée égale à :

$$\rho = \frac{3}{2.\pi.G} \sim 0,7.10^{-12} kg/m^3$$

pour que cette théorie s'applique raisonnablement. Les mêmes calculs étant vus sous un autre angle, et à supposer qu'ils concernent un électron dont la masse est relativement bien connue, cette approche ne vaut que sur une surface sphérique de rayon r égal à :

$$r = (\frac{G.m}{2})^{1/3} \sim 3,15.10^{-14} m$$

Quoiqu'il en soit, cette exploration se heurte quand même un énorme problème logique puisque :

**Corollaire 2.2.** ***Recherche de compatibilité avec les noyaux de type I***

A strictement parler, les Lem.2.1 et 2.2 font que les conditions physiques sous-jacentes aux prérequis de la proposition essentielle qui sont recevables au sein de la partie de la théorie des produits vectoriels déformés livrant des noyaux de type I ne s'appliquent finalement qu'à l'endroit où se situe la source du champ en $1/\mathrm{r}^2$ considéré ; c'est-à-dire : à l'origine du repère dans lequel les discussions sont menées et les calculs effectués. Or, à cet endroit précis, $\mathbf{x} = \mathbf{s} = \mathbf{0}$ et les potentiels apparaissant dans ces prérequis, Equ.(8), divergent ; in extenso : ne sont plus définis. Pour le moins, il faudrait introduire des potentiels dont les dérivées partielles permettent de construire des Hessiennes contenant des asymétries justifiant l'usage des noyaux de type I. Par exemple, l'Equ.(8) devrait être modifiée en écrivant :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^i} = -\frac{G.m}{r^3}.x^i + g_i(\mathbf{x}) \tag{23}$$

Ce qui -fondamentalement- revient à considérer des potentiels de gravitation post-newtoniens (modifiés)[3]. Grâce à l'Equ.(13), le calcul de la Hessienne de cette fonction fournit alors :

$$[\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^i \partial x^j}] = -\frac{G.m}{r^3}.\{Id_3 - \frac{3}{r^2}.\phi\} + T_2(o)(\mathbf{Grad_x}, \mathbf{g}^*(\mathbf{x})) \tag{24}$$

$$\mathbf{g}^*(\mathbf{x}) : (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), g_3(\mathbf{x}))$$

Et plus rien ne garantit que la matrice ajoutée soit symétrique. Les prérequis de la proposition essentielle mènent désormais aux équations :

$$[D]$$

[3] Les lecteurs comprenant l'américain pourront découvrir avec intérêt un chapitre entier consacré à ce sujet dans la référence mondialement connue et reconnue [[08] ; chapter 39].

$$=$$

$$[K]_{|A|}$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}\,.\,Hess_{(d\mathbf{x},0)}\Lambda(d\mathbf{x})\;+\;|A|\,.\,_{[J]}\Phi(Hess^{-1}_{(d\mathbf{x},0)}\Lambda(d\mathbf{x})\,.\,|\mathbf{d}*>) \tag{25}$$

$$=$$

$$\frac{1}{2}\,.\,Hess_{(\mathbf{x},0)}f(\mathbf{x})$$

$$=$$

$$-\frac{1}{2}\,.\,\frac{G.m}{r^3}\,.\,\{Id_3\;-\;\frac{3}{r^2}\,.\,\phi\}\;+\;\frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\mathbf{Grad_x},\,\mathbf{g}^*(\mathbf{x}))$$

$$d_i\;=\;\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^i}\;+\;g_i(\mathbf{x}) \tag{26}$$

$$(11)\;:\;|P|\;=\;0(3)$$

Ces équations ne sont cohérentes qu'en envisageant l'*hypothèse de travail* selon laquelle la polynomiale $\Lambda$ est continue, qui plus est représente le potentiel classique (newtonien), tandis que la partie antisymétrique du noyau correspond à la matrice ajoutée, représentant des corrections post-newtoniennes.

$$[S_0]\;=\;Hess_{(d\mathbf{x},0)}\Lambda(d\mathbf{x})\;=\;-\frac{G.m}{r^3}\,.\,\{Id_3\;-\;\frac{3}{r^2}\,.\,\phi\} \tag{27}$$

$$|A|\,.\,_{[J]}\Phi(Hess^{-1}_{(d\mathbf{x},0)}\Lambda(d\mathbf{x})\,.\,|\mathbf{d}*>)\;=\;\frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\mathbf{Grad_x},\,\mathbf{g}^*(\mathbf{x})) \tag{28}$$

J'ai clairement démontré dans [[c] ; §§ 1.4 et 1.5] que la prise en compte des variations des coefficients d'une polynomiale de degré deux permettait d'introduire une asymétrie au voisinage de l'origine. C'est exactement ce dont l'exploration menée ici a besoin. L'asymétrie concerne la fonction f($\mathbf{x}$) et se manifeste au travers de l'Equ.(28). Dans ces conditions, l'Equ.(17) n'est plus nécessaire, le Lem.2.1 devient faux (et tant mieux), les Equ.(18) à (21) restent vraies ; le théorème 2.1 aussi. Le calcul du déterminant |P| mené au Coroll.2.1 s'appuye maintenant sur les Equ.(5) et (27). Grâce aux Equ.(20) et (21), il livre exactement la même et surprenante Equ.(22).

**Théorème 2.2.** *L'univers toutbillonaire.*

In fine, l'usage des noyaux de type I issus de la théorie des produits vectoriels déformés est compatible avec les prérequis de la proposition essentielle sous réserve (i) d'accepter la *variabilité* des coefficients des polynomiales résultant des décompositions non-triviales de ces produits et (ii) de faire appel à l'hypothèse de travail contenue dans les Equ.(27) et (28). Ces prérequis et ces équations se caractérisent par l'apparition d'une propriété étrange et inattendue de l'espace des positions de cette théorie [4] ; à savoir : chaque position spatiale est à la fois un lieu minimisant les variations des vitesses de l'objet étudié[5] et l'expression d'un champ tourbillonaire (rotationnel) sous-jacent tel que :

$$\mathbf{x}\;=\;|A|\,.\,\mathbf{Rot_x g}^*(\mathbf{x})\;=\;{}_{\Lambda}\mathbf{s} \tag{29}$$

[4] Elle s'obtient en considérant l'équation transposée de l'Equ.(28) et en la soustrayant de cette dernière.

[5] Cette phrase traduit l'Equ.(21) et le théorème 2.1

## 2.4 Démonstration de la proposition essentielle

**Remarque 2.4.** ***Les liens avec les solutions de Bowen-York pour le problème des données initiales***

L'étude conduite dans ce document concerne essentiellement les produits vectoriel déformés du type suivant :

$$[d^{(3)}\mathbf{x}, ^{(3)} ...]_{^{(3)}[A]}$$

Dans les conditions explicitées précédemment (voir les prérequis de la proposition essentielle), les parties principales des décompositions non-triviales de ces produits s'écrivent grâce aux Equ.(2), (21) et (27) :

$$[P]_{|A|} \,=\, \{[A]^t \,.\, [J]\} \,.\, \{-\frac{G.m.|A|}{2.r^3} \,.\, \{Id_3 \,-\, \frac{3}{r^2} \,.\, T_2(\otimes)(\mathbf{x},\mathbf{x})\} \,+\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{x})\} \tag{30}$$

Soit par convention :

$$[A]^t \,.\, [J] \,=\, [A_*^{ik}] \tag{31}$$

Les composantes des décompositions étudiées ici s'écrivent donc :

$${}_{|A|}p_{ij} \,=\, A_*^{ik} \,.\, \{-\frac{G.m.|A|}{2.r^3} \,.\, \{\delta_j^k \,-\, \frac{3}{r^2} \,.\, x^k.x^j\} \,+\, \epsilon_{klj}.x^l\}$$

Je vais maintenant construire le vecteur suivant :

$$\frac{r^2}{6.G.m} \,.\, {}_{|A|}p_{ij} \,.\, p^j \,=\, \frac{r^2}{6.G.m} \,.\, A_*^{ik} \,.\, \{-\frac{G.m.|A|}{2.r^3} \,.\, \{\delta_j^k \,-\, \frac{3}{r^2} \,.\, x^k.x^j\} \,+\, \epsilon_{klj}.x^l\} \,.\, p^j$$

C'est aussi :

$$\frac{r^2}{6.G.m} \,.\, {}_{|A|}p_{ij} \,.\, p^j \,=\, -\frac{|A|}{12.r} \,.\, A_*^{ik} \,.\, \{\delta_j^k \,-\, \frac{3}{r^2} \,.\, x^k.x^j\} \,.\, p^j \,+\, \frac{r^2}{6.G.m} \,.\, A_*^{ik} \,.\, \epsilon_{klj}.x^l \,.\, p^j$$

ou encore :

$$\frac{r^2}{6.G.m} \,.\, {}_{|A|}p_{ij} \,.\, p^j \,=\, -\frac{|A|}{12.r} \,.\, A_*^{ij} \,.\, p^j + \frac{|A|}{4.r^3} \,.\, A_*^{ik} \,.\, x^k.x^j \,.\, p^j + \frac{r^2}{6.G.m} \,.\, A_*^{ik} \,.\, \epsilon_{klj} \,.\, x^l \,.\, p^j \tag{32}$$

Les solutions de Bowen-York pour le problème des données intiales -voir [[07]; (a) §8.2.6, p. 136, (8.69)], [[07]; (b) p. 23, equ.(69)]- s'écrivent :

$$X_i(BY) \,=\, -\frac{7}{4.r} \,.\, f^{ij} \,.\, p^j \,-\, \frac{1}{4.r^3} \,.\, x^i \,.\, x^j \,.\, p^j \,-\, \frac{1}{r^3} \,.\, \epsilon_{ilj} \,.\, x^l \,.\, S^j \tag{33}$$

Il est un fait que ces solutions peuvent être formellement confrontées avec le vecteur que je viens de construire sur la base des solutions du problème des décompositions non triviales d'une famille précise de produits vectoriel déformés :

$$\frac{r^2}{6.G.m} \,.\, {}_{|A|}p_{ij} \,.\, p^j \,=\, X_i(BY)$$

$$-\frac{|A|}{12.r} \,.\, A_*^{ij} \,.\, p^j \,=\, -\frac{7}{4.r} \,.\, f^{ij} \,.\, p^j$$

$$|A| \,.\, A_*^{ik} \,.\, x^k.x^j \,.\, p^j \,=\, -x^i \,.\, x^j \,.\, p^j$$

$$\frac{r^2}{6.G.m} \,.\, A_*^{ik} \,.\, \epsilon_{klj} \,.\, x^l \,.\, p^j \,=\, -\frac{1}{r^3} \,.\, \epsilon_{ilj} \,.\, x^l \,.\, S^j$$

Cette confrontation est-elle cohérente? En fait, elle s'écrive encore :

$$\frac{r^2}{6.G.m} \,.\, {}_{|A|}p_{ij} \,.\, p^j \,=\, X_i(BY)$$

$$\forall\,\mathbf{p}:\ |A|\,.\,A_*^{ij}\ =\ 21\,.\,f^{ij}$$

$$\forall\,\mathbf{x},\mathbf{p}:\ |A|\,.\,A_*^{ik}\,.\,x^k\ =\ -x^i$$

$$\forall\,\mathbf{x}:\ A_*^{ik}\,.\,\epsilon_{klj}\,.\,p^j\ =\ -\frac{6.G.m}{r^5}\,.\,\epsilon_{ilj}\,.\,S^j$$

De sorte que :

$$\frac{r^2}{6.G.m}\,.\,_{|A|}[P]\,.\,|\mathbf{p}>=\,|\mathbf{X}_{BY}> \tag{34}$$

$$\forall\,\mathbf{p}:\ |A|\,.\,[A]^t\,.\,[J]\ =\ 21\,.\,[f^{ij}] \tag{35}$$

$$\forall\,\mathbf{x},\mathbf{p}:\ \{|A|\,.\,[A]^t\,.\,[J]\ +\ Id_3\}\,.\,|\mathbf{x}>=\,|\mathbf{0}> \tag{36}$$

$$\forall\,\mathbf{x}:\ \{[A]^t\,.\,[J]\}\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{p})\ =\ -\frac{6.G.m}{r^5}\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{S}) \tag{37}$$

Ceci signifie que :

1. La proposition essentielle est mathématiquement démontrée : Equ.(34).

2. Les déformations “algébriques” (les produits matriciels $[A]^t.[J]$) agissant sur le produit vectoriel classique ont le même effet que les déformations “géométrique” compatibles avec les solutions de Bowen York, à un facteur $|A|.21$ près.

   Pour rappel : les métriques de Bowen York sont celles d'un espace plat. L'identification proposée ici contraint à ne retenir parmi elles que celles qui satisfont à :

   $$\forall\,\mathbf{x},\mathbf{p}:\ \{21\,.\,[f^{ij}]\ +\ Id_3\}\,.\,|\mathbf{x}>=\,|\mathbf{0}> \tag{38}$$

   Cette relation est valable dans tout l'espace quand la métrique de Bowen-York vaut :

   $$[f^{ij}]\ =\ -\frac{1}{21}\,.\,Id_3$$

3. L'analyse menant aux solutions de Bowen York se situe dans le contexte d'un découpage 3 + 1 de l'espace-temps (dit : ADM). Dans ce contexte, $\mathbf{p}$ est la quantité de mouvement “ADM” et $\mathbf{S}$ est le moment angulaire “ADM”. Dans un contexte géométrique euclidien strict, ces deux vecteurs sont forcément orthogonaux ; ce n'est plus forcément vrai dans une géométrie déformée. L'Equ.(37) s'écrit aussi grâce à l'Equ.(36) :

   $$\forall\,\mathbf{x}\ :\ \frac{2.G.m}{7.r^5}\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{S})\ =\ -|A|\,.\,[f^{ij}]\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{p}) \tag{39}$$

   Cette équation a au moins deux types de conséquences :

   - (a) En considérant la transposée de cette relation, il vient deux nouvelles relations :

     $$\frac{2.G.m}{7.r^5}\,.\,_{[J]}\Phi^t(\mathbf{S})\ =\ -|A|\,.\,_{[J]}\Phi^t(\mathbf{p})\,.\,[f^{ij}]^t$$

     $$\downarrow$$

     $$-\frac{2.G.m}{7.r^5}\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{S})\ =\ |A|\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{p})\,.\,[f^{ij}]^t$$

     $$\downarrow$$

     $$[0]\ =\ _{[J]}\Phi(\mathbf{p})\,.\,[f^{ij}]^t\ -\ [f^{ij}]\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{p}) \tag{40}$$

$$\forall\,\mathbf{x}\ :\ \frac{4.G.m}{7.r^5}\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{S})\ =\ -|A|\,.\,\{[f^{ij}]\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{p})\ +\ _{[J]}\Phi(\mathbf{p})\,.\,[f^{ij}]^t\} \tag{41}$$

- (b) Les composantes du moment angulaire peuvent être isolées à l'aide de l'Equ.(39) :

$$\epsilon_{ikr} \, . \, A_*^{im} \, . \, \epsilon_{mjk} \, . \, p^j \; = \; \frac{6.G.m}{r^5} \, . \, S^r$$

et à partir de là, la norme quantifiée de ces moments angulaires peut être calculée :

$$f_{rt} \, . \, S^r \, . \, S^t \; = \; l. \, (l \, + \, 1). \, (\frac{h}{2\pi})^2 \, ; \, l \; = \; 0, \, 1, \, 2, \, ... \tag{42}$$

**Remarque 2.5.** ***Le lien cohérent avec les produits angulaires déformés***

Sous réserve de pouvoir poser (entre autre) :

$$_{[A]}\Phi(\mathbf{x}) \; = \; \{[A]^t \, . \, [J]\} \, . \, _{[J]}\Phi(\mathbf{x}), \tag{43}$$

les décompositions décrites par l'Equ.(30) pourraient aussi s'écrire :

$$[P]_{|A|} \; = \; _{[A]}\Phi(\mathbf{x}) \; - \; \frac{G.m.|A|}{2.r^3} \, . \, \{[A]^t \, . \, [J]\} \, . \, \{Id_3 \; - \; \frac{3}{r^2} \, . \, T_2(\otimes)(\mathbf{x}, \mathbf{x})\} \tag{44}$$

En se rappelant que la déformation algébrique (le produit matriciel $[A]^t.[J]$) joue ici un rôle similaire à celui de l'inverse de la métrique compatible avec les solutions de Bowen-York (à cause de l'Equ.(35), cette équation s'écrit encore :

$$[P]_{|A|} \; = \; _{[A]}\Phi(\mathbf{x}) \; - \; \frac{21.G.m}{2.r^3} \, . \, [f^{ij}] \, . \, \{Id_3 \; - \; \frac{3}{r^2} \, . \, T_2(\otimes)(\mathbf{x}, \mathbf{x})\} \tag{45}$$

Tenant compte à cet endroit précis de l'Equ.(27), il vient :

$$[P]_{|A|} \; = \; _{[A]}\Phi(\mathbf{x}) \; - \; \frac{1}{2} \, . \, [-21 \, . \, f^{ij}] \, . \, Hess_{(d\mathbf{x},0)}\Lambda(d\mathbf{x}) \tag{46}$$

Ce formalisme est équivalent à celui des décompositions non-triviales des produits vectoriel déformés suivants :

$$[\mathbf{x}, \, d\mathbf{x}]_{[A]}$$

qui sont obtenues grâce à l'usage de la méthode extrinsèque dans un environnement déterminé par l'inverse de la métrique compatible avec les solutions de Bowen-York (voir par exemple mon travail [[d]]). Par ailleurs, l'Equ.(43) est la relation qui apparait dans les conditions spécifiques à cette exploration (présence d'un champ en $1/r^2$) lorsqu'il est souhaité faire coincider les décompositions intrinsèques et extrinsèques d'un même produit vectoriel déformé. Ce fait est expliqué en détail dans [[d] ; § 2, pp. 2-6]. Ces résultats démontrent clairement que ces méthodes de décomposition sont permettent l'étude des moments angulaires déformés de façon cohérente. In fine, la proposition essentielle est démontrée. □

## 2.5 Compléments techniques

**Remarque 2.6.** ***Quelques aspects techniques à examiner***

Les solutions de Bowen-York existent dans la partie spatiale (tridimensionnelle donc) d'une coupe de type ADM (ou 3 + 1) de l'espace-temps. Elles sont donc bien dans un espace ayant la même dimension que celui des solutions proposées dans [01] pour lequel $g = |^{(4)}G| = 0$ implique une dégénérescence des systèmes mathématiques linéaires impliquant la matrice (4-4), [G]. Ce premier constat est donc en faveur de l'existence des situations que je cherche à mettre en exergue.

En revanche, si l'Equ.(38) contient bien le cas des métriques euclidiennes tridimensionnelles, elle en contient aussi beaucoup d'autres qui sont dégénérées. C'est le cas chaque fois que :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{p} : |21 \,.\, [f^{ij}] \,+\, Id_3| \,=\, 0 \tag{47}$$

Elles coincident donc obligatoirement avec des solutions prenant place dans un sous-espace de dimension deux. Cette difficulté technique ne peut se lever qu'en considérant -non pas une- mais plusieurs solutions de ce type, chacune étant judicieusement associée avec une des coupes de dimension deux possibles dans un espace de dimension quatre quelconque. La problématique étant considérée de la sorte, je dois m'attendre à trouver diverses solutions ayant le formalisme de l'Equ.(34) :

$$\forall \alpha \,:\, \frac{{}_{\alpha}r}{3.G.m} \,.\, {}^{(3)}[{}_{\alpha}P] \,.\, {}^{(3)}{}_{\alpha}\mathbf{p}$$

et chacune d'elle est solution de type Bowen-York pour le sous-espace de dimension trois considéré. Il en résulte que la procédure doit livrer un ensemble de sous-espaces de dimension deux (la représentation la plus simple de ceux-ci étant une surface, ou un bout de surface, plane ou non).

Comme rien n'assure que ces surfaces se coupent de manière cohérente, il est tentant d'imaginer que cette cohérence est recouvrée lorsqu'elles définissent localement une figure géométrique ad hoc (mais encore à decouvrir). Ce schéma mental va peut-être permettre de comprendre la présence de la matrice [J] apparue dans [[a]] puisque, pour rappel utile, elle est reliable à l'un des deux générateurs du groupe des rotations des tétraèdres.

Quoiqu'il en soit, j'ai démontré dans un autre travail que la condition de dégénérescence concernant la métrique spatiale correspond exactement à l'une des conditions faisant du produit vectoriel déformé $[\mathbf{x}, \mathbf{...}]_{[A]}$ une opération involutive sur E(3, R). Je reviendrai donc dans d'autres documents sur ce sujet.

## 2.6 Sur les liens logiques existants entre la proposition essentielle et le problème d'Einstein-Rosen

La démonstration de la proposition essentielle n'emprûnte rien à celle des auteurs qui sont cités ici. Elle n'a rien à voir avec le développement de la théorie qui a fait naître ces solutions, à savoir : la relativité générale.

La coincidence ne fait que traduire la rencontre fortuite entre une démarche algébrique pure et une autre qui ne l'est pas mais relève principalement de la géométrie. Plus précisément : cette rencontre n'a été rendue possible que grâce à une mise en condition au cours de laquelle : (i) il est apparu que les champs de gravitation Newtonien permettent de faire de chaque position spatiale un point singulier pour une famille spécifique de formes polynomiales, Equ.(21) ; (ii) la discussion se focalise sur les moments angulaires déformés ; voir Rem2.5.

La méthode mathématique sur laquelle repose finalement ces résultats exige de comparer un déterminant dépendant d'une différence de position spatiale avec le développement limité d'une fonction numérique dépendant de la position ; ce qui est en soi un sujet passionnant des mathématiques. J'en donne un aperçu dans deux de mes investigations ; voir [[e]] et [[f]].

# References

## 2.7 Oeuvres internationales

[01] A. Einstein, N. Rosen: The particle problem in the theory of relativity; pp. 73-77, physical review, vol. 48, July 1, 1935.

[02] Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7.

[03] A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field: J. Clerk Maxwell; Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, 155: 459 - 512; a priori consultable sur le site http://rstl.royalsocietypublishing.org/ sous votre responsabilité.

[04] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme ; collection d'ouvrage à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. Darmois et A. Lichnerowicz. ©1955 by Masson and Cie, éditeurs.

[05] Alain Aspect, "Proposed experiment to test the nonseparability of quantum mechanics", Physical Review D, vol. 14, numero 8, 15 octobre 1976 (DOI 10.1103/PhysRevD.14.1944).

[06] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe : Mécanique quantique, Tome I et II ; collection enseignement des sciences, ISBN 2-7056-5733-9, ©1973, Hermann, 293 rue Lecourbe, 75015 Paris.

[07] (a) Gourgoulhon: 3 + 1 formalism and bases of numerical relativity - lecture notes; arXiv: gr-qc/0703035v1, 06 March 2007; (b) Cook, Gregory B. Initial data for numerical relativity. Living Rev. relativity 3 (2000), 5; DOI: 10.12942/lrr-2000-5. [online]; seen on the 11th June 2015.

[08] MTW: Gravitation; Copyright ©1973 by W. H. Freeman and Company.

## 2.8 Contributions personnelles

[a] PERIAT, T. : Théorie quantique des champs appliquée aux produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-151-6, v2, 03 February 2020.

[b] PERIAT, T. : The (E) question in a three-dimensional space: Decomposing linear systems, intrinsic method and more, ISBN 978-2-36923-084-7, v2, 19 February 2020.

[c] PERIAT, T. : Kaons : Exercice d'application pour la théorie des produits vectoriels déformés, incluant une discussion sur les rotations, les involutions et les dérivées ; ISBN 978-2-36923-152-3, vprovisire du 11 mars 2020.

[d] PERIAT, T. : Quelques propriétés originales des champs de gravitation : Surfaces en évolution - Supraconductivité de type I ; ISBN 978-2-36923-081-6, EAN-9782369230816, v2, 27 février 2020.

[e] PERIAT, T. : Invisibilité géométrique - Partie 01, Introduction à la problématique et premiers calculs ; ISBN 978-2-36923-130-1, EAN-9782369231301, 10 mai 2019.

[f] PERIAT, T. : GTR2, pseudo-champs électromagnétiques
et pseudo-tenseur de courbure ; ISBN 978-2-36923-135-6, EAN-9782369231356, v2, 14 février 2020.