Hessiennes et propagateurs dans la théorie des produits tensoriels déformés et décomposés - Introduction

06 février 2019

Ce document confronte plusieurs thématiques associées à la théorie des produits tensoriels déformés et décomposés. Il y introduit les vieux concepts de dérivée covariante et de propagateur. Inspiré par les résultats récents issus de la GTR2, il introduit aussi une discussion sur les symétries des tétraèdres. L'objectif n'est pas d'asséner des vérités absolues mais de poser quelques briques qui permettront à terme d'avancer en direction de la rédaction d'une théorie de la gravitation quantique alternative.

Table des matières

French

1 De la présence de Hessiennes dans la théorie

Bien qu'elle n'en soit pas au départ le thème central, une métrique basée sur une Hessienne apparaît clairement dans la littérature scientifique et technique française en 1933 dans [[01] ; p. 16, (V)].

La théorie des produits tensoriels déformés [1] s'interroge sur la manière dont ceux-ci se décomposent. Trois grandes méthodes ont été proposées à ce jour : intrinsèque (voir [§ 5], [c]), extrinsèque (voir [§ 5 ; section I, pp. 1-15]) et celle dite des poupées russes. Dans tous les cas de figure, les décompositions trouvées présentent deux parties. La première, dite principale, est matricielle ; la seconde, dite résiduelle, est vectorielle. Lorsque la partie résiduelle d'une décomposition est nulle, celle-ci est dite "triviale". La partie principale d'une décomposition contient toujours une matrice Hessienne.

1.1 Le cas des décompositions intrinsèque en dimension trois

Il se trouve que la partie principale des décompositions intrinsèques des produits vectoriels [2] déformés (voir § [5]) fait naturellement émerger des Hessiennes dans la discussion théorique.

En effet si, à un instant t donné d'une chronologie locale, un produit vectoriel impliquant un vecteur **a**(t) donné comme premier argument (le projectile) et n'importe quel vecteur **b**(t) comme second argument (la cible), est déformé par une matrice carrée (3-3), [A(t)] de M(3, C), et que ce produit peut être décomposé de la façon suivante :

$$|[\mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)]_{[A(t)]} >= [P(t)] \,.\, |\mathbf{b}(t) > + |\mathbf{z}(t) >$$

$$([P(t)], \mathbf{z}(t)) \in M(3, C) \times E(3, C)$$

alors j'ai montré dans [a] que :

— Il existe obligatoirement une polynomiale de degré deux, Λ, dépendant des composantes du projectile, ici le vecteur **a**(t), dont les coefficients des termes de degré deux permettent de définir une Hessienne. Elle s'obtient en calculant le déterminant de la différence matricielle entre la partie principale triviale, ${}_{[A(t)]}\Phi(\mathbf{a})(t)$, et une partie principale non-triviale :

$$\Lambda(a^1, a^2, a^3)(t) = |{}_{[A(t)]}\Phi(\mathbf{a}(t)) - P(t)|.$$

Elle satisfait à chaque instant t la relation générique :

$$|{}_{[A(t)]}\Phi(\mathbf{a}(t)) - P(t)| + |P(t)|$$

$$=$$

1. dont il faut immédiatement noter qu'elle inclut les produits de Lie déformés.

2. Attention à la terminologie : ici, la discussion prend place dans un espace vectoriel de dimension trois.

$$\sum_m d_{mm} \,.\, (a^m)^2 \,+\, \sum_{m<n} (d_{mn} \,+\, d_{nm}) \,.\, a^m \,.\, a^n \,+\, \sum_m d_m \,.\, a^m$$

Et la Hessienne de cette polynomiale s'écrit :

$$[S_0] \,=\, [Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})] \,=\, \begin{pmatrix} 2.D_{11} & D_{12} & d_{13} \\ D_{12} & 2\,.\,D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & 2\,.\,D_{33} \end{pmatrix} \,=\, [d_{ij}] \,+\, [d_{ij}]^t$$

— Une décomposition intrinsèque non-triviale, en particulier sa partie principale, n'existe que si le déterminant de cette Hessienne n'est pas nul :

$$\begin{gathered} |S_0| \\ = \\ 8.\,D_{11}\,.\,D_{22}\,.\,D_{33} \,+\, 2\,.\,D_{12}\,.\,D_{23}\,.\,D_{13} \\ - \\ 2\,.\,\{D_{11}\,.\,(D_{23})^2 \,+\, D_{22}\,.\,(D_{13})^2 \,+\, D_{33}\,.\,(D_{12})^2\} \\ \neq \\ 0 \end{gathered}$$

— La partie principale de la décomposition intrinsèque non-triviale, quand elle existe, s'exprime entièrement à l'aide de cette Hessienne, de son inverse, des coefficients des termes de degré un de la polynomiale Λ, de la matrice [A(t)] définissant le produit vectoriel déformé et d'une matrice [J] générant le groupe cyclique C6 :

$$[P]_{|A|} \,=\, |A|\,.\,([A])^t\,.\,[J]\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,[S_0] + |A|\,.\,_{[J]}\Phi([S_0]^{-1}\,.\,|\mathbf{d^*}>)\}\,;\, |A| \,=\, \pm\,1$$

1.2 Le cas des décompositions extrinsèque en dimension quelconque

Comme il est expliqué en détails dans [b ; section I ; voir § 5], les produits tensoriels déformés acceptent, au moins en première approximation, des décompositions non-triviales que la méthode extrinsèque permet de visualiser. J'ai beaucoup amélioré dans [c ; § 5] la compréhension qu'il faut avoir de cette méthode et ses liens avec la méthode intrinsèque, même dans les espaces vectoriels de dimension supérieure à trois. J'y ai également énoncé les formules de passage entre un produit tensoriel déformé et le produit de Lie déformé associé [c ; §1.4, pp. 3-9]. Lorsque ω représente le cube déformant le produit et que la forme bilinéaire impliquée dans la mise en oeuvre de cette méthode est représentée par une matrice [B] de M(D, C), la partie principale des décompositions non-triviales obtenues de la sorte s'écrit toujours génériquement [c ; p.11] :

$$[P] \,=\, _\omega\Phi(\mathbf{a}) \,-\, \frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,[HessP_{\mathbf{b}}(\mathbf{b} \to \mathbf{0})]$$

C'est une écriture dans laquelle apparaît à nouveau une Hessienne, en l'occurence ici : celle d'une polynomiale P($\mathbf{b}$) dépendante des composantes de la cible et n'est rien d'autre que l'un des scalaires associés avec ladite décomposition (voir les détails techniques dans [c]).

2 Partie principale d'une décomposition non-triviale, Hessiennes et dérivées covariantes

2.1 Un formalisme à la croisée des chemins

Il est légitime de s'interroger sur l'objet mathématique central introduit par la démarche que je poursuis ; à savoir : la partie principale des décompositions des produits tensoriels/de Lie déformés. Je veux dire s'interroger sur son formalisme, sur l'origine de ce dernier, sur sa généralité et sur l'existence d'objets apparentés.

La relecture attentive de l'ouvrage original (en allemand) d'A. Einstein permet de remarquer une expression évoquant ce qui sera reconnu plus tard comme étant une dérivation covariante [[02] ; p. 793, (25)]. Elle réapparaît dans le travail d'A. Lichnerowicz sur les propagateurs [[03] ; p. 9]. L'observation du formalisme des parties principales des décompositions non-triviales des produits tensoriels/de Lie déformés éveille l'idée que certaines d'entre elles pourraient bien avoir un lien avec cette notion de dérivée covariante.

La dérivée covariante n'est pas, que ce soit dans la première comme dans la seconde référence, l'objet central de ces deux travaux. Elle y apparait chaque fois sous forme d'un emprunt, soit aux travaux d'E.B. Christoffel [[04]] pour ce qui concerne la relativité générale ; soit aux réflexions générales sur la notion de tenseur-distribution [[03]] pour ce qui relève de la théorie des propagateurs.

Proposition 2.1. ***Dérivée covariante et partie principale des décompositions extrinsèques*** *Dans le cas des décompositions extrinsèques éventuellement non-triviales des produits tensoriels déformés (voir [b] et [c]), la dérivée covariante réapparait finalement comme un cas particulier pour certaines familles particulières de ce type de produits.*

Preuve : En effet, considérons l'expression de la dérivée covariante pour un tenseur-distribution d'ordre un telle qu'elle est exprimée par exemple dans [[03] ; p. 9] :

$$\nabla_\alpha T_\beta \,=\, \partial_\alpha T_\beta \,-\, \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \,.\, T_\rho$$

Et considérons le cas particulier d'un tel tenseur qui soit en réalité le gradient "classique" d'une fonction f dans le système $\mathbf{x}$ des coordonnées utilisées localement pour exprimer cette dérivée covariante ; in extenso, supposons que :

$$\forall\beta \,:\, T_\beta \,=\, \partial_\beta f \iff \mathbf{T}^* \,=\, \partial_{\mathbf{x}} f$$

Il en résulte que :

$$\nabla_\alpha \partial_\beta f \,=\, \partial_\alpha \partial_\beta f \,-\, \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \,.\, \partial_\rho f$$

Dans le langage de la théorie des produits tensoriels/de Lie déformés et décomposés non-trivialement, cette relation peut aussi s'interpréter comme une relation matricielle dans laquelle apparaissent (i) la Hessienne classique de la fonction f, (ii) le cube symétrique $\Gamma(2)$ des symboles de Christoffel de la seconde espèce et (iii) une sorte de partie principale triviale construite sur ce dernier :

$$[\nabla_\alpha \partial_\beta f] \;=\; Hess_{(\mathbf{x},0)}f \;-\; {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{T}^*)$$

Il n'est plus alors très difficile d'imaginer l'existence d'une forme bilinéaire représentée par la matrice carrée inversible [B] telle que la relation précédente devienne :

$$[B]^{-1} . [\nabla_\alpha \partial_\beta f] \;=\; [B]^{-1} . Hess_{(\mathbf{x},0)}f \;-\; [B]^{-1} . {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{T}^*)$$

Elle livre l'expression formelle :

$$[B]^{-1} . [\nabla_\alpha \partial_\beta f] \;=\; [B]^{-1} . Hess_{(\mathbf{x},0)}f \;-\; {}_{\omega}\Phi(\mathbf{T}^*)$$

dans laquelle le cube ω satisfait la relation :

$$[B]^{-1} . {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{T}^*) \;=\; {}_{\omega}\Phi(\mathbf{T}^*)$$

Au signe moins près, le terme à droite de l'égalité dans l'avant-dernière relation peut clairement s'interpréter comme l'expression générique de la partie principale d'une décomposition extrinsèque pour un produit tensoriel/de Lie déformé par le cube ω ;

$$| \otimes_\omega (\mathbf{T}^*, ...) >= \{{}_{\omega}\Phi(\mathbf{T}^*) \;-\; [B]^{-1} . Hess_{(\mathbf{x},0)}f\} . |... > \; + |\mathbf{z} >$$

L'interprétation amorcée ici peut être poursuivie bien plus avant et elle peut permettre de préciser le cube ω ainsi que le scalaire associé avec cette décomposition extrinsèque : voir plus de détails dans [b] et [c]. Finalement, dans le cas particulier du tenseur-distribution qui vient d'être examiné, la partie principale de la décomposition extrinsèque s'écrit :

$$[P]_{extrins} \;=\; -[\nabla_\alpha \partial_\beta f]$$

De facto, la notion de dérivée covariante se retrouve donc être au centre de trois approches apparemment sans lien les unes avec les autres : elle naît d'abord des travaux de Christoffel sur la préservation des formes différentielles d'ordre deux [[04]] et dont le lectorat francophone trouvera une transcription fort utile dans [[05]] ; elle est également induite par une propriété usuelle des tenseurs-distribution d'ordre 1 (voir [[03] ; p. 9]) ; enfin elle exprime la partie principale des décompositions extrinsèques de certaines familles particulières de produits tensoriels/de Lie déformés (voir ci-dessus).

Le fait que la première relation de Christoffel (voir [[04] ; p. 49, (9)]) suinte la présence d'une dérivée covariante et le formalisme de la loi du mouvement qu'on nomme aujourd'hui "la loi de Lorentz-Einstein" (voir § 5 [b ; section II]) peut justifier l'intuition que la dérivée covariante ait un lien avec la notion de mouvement, de propagation. Cette loi est la version covariante de la loi de Lorentz en électromagnétisme. Elle apparait par exemple dans [[06] ; p. 60, bas de page - 1955] et elle est connue des anglo-saxons sous le nom de densité volumique de force de Lorentz. Elle a été récemment discutée dans l'article [[07] ; en anglais].

3 Réflexions générales sur les tétraèdres et la cosmologie

Le tétraèdre est un objet géométrique fascinant étudié depuis l'antiquité par les humains. Il appartient à ce que les anciens grecs appelaient les solides platoniciens en référence à Platon (428/427 avant JC ; 348/347 avant JC). Inspiré par (i) la présence répétitive (voir [??] et [??]) du groupe cyclique C6 dans mes travaux d'investigation sur les volumes vides, (ii) par les résultats récents issus de la GTR2 (voir [??] en anglais) et (iii) par les travaux des professionnels dans le cadre des recherches sur l'énoncé d'une théorie raisonnable de la gravitation quantique (voir par exemple le lien entre la notion d'opérateur, celle de relation de fermeture induite par l'invariance de jauge et la figure platonique dans [[08] ; p. 4, (21) et figure 2]), j'introduis ici des éléments de discussion sur les symétries des tétraèdres qui me permettent d'inventer une relation d'équivalence ternaire.

3.1 Premières définitions et conventions

Définition 3.1. ***Le trio***

Parmi les très nombreuses propriétés de symétrie du cas régulier (ses quatre faces sont d'égale surface), on peut signaler le fait qu'il est possible d'introduire un objet géométrique insolite, une espèce d'étoile à trois branches rectilignes qu'on appelera "un trio", justement parce qu'il est constitué d'un trio de segments rectilignes réunis en un point unique et rayonnant sur le plan en le séparant en trois secteurs angulaires égaux de 180 degrés.

Cet objet est inhabituel en ce sens que : chaque extrémité libre des trois segments étant positionnée au milieu de l'une, quelconque, des quatre faces, et ce positionnement étant réitéré sur trois faces au total, on construit un nouvel objet fait de trois parties connectées dont les trois extrêmités libres dessinent les positions où pourrait venir s'enchasser un quatrième trio sur la quatrième face, formant alors un objet désormais fermé composé de quatre trios. Autrement dit, sur un tétraèdre qu'on pourrait qualifier de parfait ou de régulier, trois faces ou trois de ces objets déterminent entièrement la quatrième face ou le quatrième objet. On peut dire que ces objets se comportent comme une représentation duale de chaque face.

Définition 3.2. ***Transitivité ternaire***

On dit que la manoeuvre consistant à assembler trois trios de la façon décrite ci-dessus est une opération ternaire transitive parce qu'elle implique simultanément trois arguments (les trois trios) et qu'elle permet de construire à partir d'eux un nouvel objet ayant trois extrêmités libres (En chimie on dirait : ayant trois valences libres). En supposant qu'un trio se décrit par un triplé d'arguments (a, b, c), la transitivité ternaire est donc l'opération consistant à pouvoir écrire :

$$((a, b, c), (b, d, e), (c, e, f)) = (a, d, f)$$

Définition 3.3. ***Opération de fermeture***

On dit qu'une opération ternaire transitive permet de réaliser une "opération de fermeture" quand les trois extrêmités laissées libres permettent toujours de construire un triangle à l'intérieur duquel il est possible d'inscrire un nouveau et donc quatrième trio.

Définition 3.4. ***Réflexivité ternaire***

On dit qu'une opération ternaire est réflexive chaque fois que, sur un ensemble d'arguments, il existe au moins un argument, a, tel que le trio (a, a, a) existe.

Dans le cadre de la relation logique que je suis en train de construire entre la notion de trio et celle de surface triangulaire, éventuellement constitutive d'un tétraèdre, le trio (a, a, a) "pourrait" représenter une surface triangulaire équilatérale.

Définition 3.5. ***(Anti-) Cyclicité ternaire***

On dit qu'une opération agissant sur un ensemble d'arguments est (resp. anti-) cyclique ternaire si, pour chaque partie constituée de trois éléments de cet ensemble, soit {a, b, c} le représentant générique de ces parties, les trios (a, b, c), (b, c, a) et (c, a, b) existent ; respectivement : les trios (c, b, a), (b, a, c) et (a, c, b) existent.

Remarque 3.1. *Un ensemble d'arguments muni d'une opération ternaire réflexive génère un ensemble de trios.*

Proposition 3.1. *Si une opération ternaire réflexive (i) agit sur un ensemble de trois arguments distincts et (ii) est deplus cyclique et transitive, alors elle génère automatiquement les éléments d'un ensemble de trios qui auraient été générés par la version réflexive et anti-cyclique de cette opération ternaire.*

Définition 3.6. ***Relation d'équivalence ternaire***

Un ensemble d'arguments équipé d'une opération ternaire, réflexive, cyclique (resp. anti-) et transitive est dit être muni d'une relation d'équivalence ternaire (resp. d'une anti-relation d'équivalence ternaire).

Définition 3.7. ***Euclidianité***

Mot inventé par mes soins, l'euclidianité décrit toute situation dans laquelle la géométrie est Euclidienne.

Une grande partie de mes futurs efforts va consister à traduire ces définitions conventionnelles dans le langage de la topologie (la science du terrain et des formes).

3.2 Prémisses d'un scénario décrivant les déviations par rapport à l'euclidianité

Une autre propriété passionnante de ces tétraèdres concerne les normales et leurs liens avec la géométrie locale, notamment quand cette dernière est euclidienne.

On peut donc a contrario se poser la question de savoir comment définir, à travers les divers objets mathématiques à disposition, à savoir : face, normale à une face et trio de segments, la déviation par rapport à l'euclidianité.

Une première idée, spontanée et directement inspirée de la construction réalisée dans le cadre de géométrie différentielle pour introduire le tenseur de courbure à l'aide de crochets de Lie, est de subodorer le fait que trois trios ne pourront plus définir un quatrième qui soit exactement semblable à eux-mêmes si la géométrie est déformée sur la quatrième face.

4 Propagateurs dans la théorie des produits tensoriels déformés

4.1 L'importance stratégique de l'élément de longueur

Les solutions des équations de la théorie de la relativité générale sont le point d'aboutissement des travaux d'A. Einstein [[02]] comme l'a parfaitement démontré A. Lichnerowicz (1955) dans [[06] ; p. 288, (92-2)]. En revanche elles sont le point de départ des réflexions de E. Cartan (1922) [[09]] pour démontrer les équations de la théorie de la relativité générale.

Dans [b], avec l'aide des acquis tirés des travaux de Christoffel [[04]] et ceux de la méthode extrinsèque appliquée à la loi de Lorentz-Einstein, j'ai tenté de démontrer qu'elles peuvent être considérées comme une conséquence de la préservation de la limite quantique. J'ai par la même de facto relié les travaux d'Einstein à ceux d'Heisenberg ; posant ainsi les premières briques d'une théorie quantique de la gravitation basée sur une étude de l'évolution des surfaces.

Je me propose de démontrer ici que solutions des équations de la théorie de la relativité générale peuvent servir de point de départ pour valider l'affirmation selon laquelle celles-ci porte avec elle la preuve de l'existence et de l'importance de produits tensoriels déformés.

En cours...

5 Travaux personnels

L'ensemble de ces travaux est accessible sur mon site : cordes-cosmiques.fr.

a. PERIAT, T. : Décompositions intrinsèques des produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, v2, 27 pages, 14

août 2018.

b. PERIAT, T. : A. Einstein versus W. Heisenberg ; ISBN 978-2-36923-026-7, EAN 9782369230267, 24 pages, 02 décembre 2018. Cette version incorpore le document intitulé : Les premières relations d'E.B. Christoffel revisitées ; ISBN 978-2-36923-051-9, v2, du 2 juillet 2015.
c. PERIAT, T. : Décompositions intrinseèques des produits de Lie déformés ; ISBN 978-2-36923-110-3, EAN 9782369231103, v1, 23 pages, 16 décembre 2018.
d. PERIAT, T. : Produits tensoriels déformés et C*algebres ; ISBN 978-2-36923-137-0, EAN 9782369231370, 14 pages, 10 janvier 2019.
e. PERIAT, T. : Les regions vides - la vision empruntee a Lamb et Rutherford ; ISBN 978-2-36923-138-7, EAN 9782369231387, 7 pages, 11 janvier 2019.
f. PERIAT, T. : The GTR2 proposal and the flow of time hypothesis ("Do black holes end their life as neutrons stars ?") ; ISBN 978-2-36923-145-5, EAN 9782369231455, 8 pages, 11 janvier 2019.

6 Bibliographie

Références

[01] Cartan, Elie. Les espaces métriques fondés sur la notion de d'aire dans "Actualités scientifiques et industrielles", numéro 72, exposés de géométrie publiés sous la direction de monsieur Elie Cartan, membre de l'institut et professeur à la Sorbonne ; Paris, Hermann et Cie, éditeurs, 1933.

[02] Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie ; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7.

[03] Lichnerowicz, A. : Commutateurs et propagateurs en relativité générale ; publications mathématiques de l'I.H.E.S., tome 10 (1961), pp. 5-56 (accessible sur www.numdam.org).

[04] Christoffel, E. B. : Ueber die Transformation der homogenen Differentiale Ausdruecke zweites Graden ; Journal fuer die reine und angewandte Mathematik, pp. 46-70, Berlin, 1826. Copie électronique peut être obtenue en s'adressant à l'université de Goettingen.

[05] Cotton, E. : Sur les variétés à trois dimensions, Ann. Fac. Sc. Toulouse, t. 1, 1899, p. 385-438. | Article (lien sur NUMDAM ; travaux de l'Université de Toulouse).

[06] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme (relativité générale et théories unitaires) ; préface du P^r Darmois ; Masson et Cie Editeurs, librairie de l'Académie de médecine, Paris, 1955, 298 pages.

[07] The motion of point particles in curved spacetime ; arXiv :1102.0529v3 [gr-qc], 26 September 2011.

[08] Lectures on loop gravity ; arXiv :1102.3660v1 [gr-qc], 17 February 2011.

[09] Cartan, E. : Sur les équations de la gravitation d'Einstein ; extrait du Journal de Mathématiques, Fasc. 2, Gauthier-Villars et Cie, Editeurs, Libraires du bureau des longitudes, de l'Ecole Polytechnique, 1922, 74 pages.

[10] Cartan, E. : The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966 ; translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)" ; Hermann, 1937.