© **Auteur : Thierry PERIAT ; Produits vectoriels déformés, involution, trous noirs satisfaisant aux solutions de Bowen-York pour le problème des données initiales et loi de dispersion des particules sans masse ; initiation à la thématique, 10 février 2021, ISBN 978-2-36923-115-8.**

Mots clés : produit vectoriel, déformation, involution, dispersion, lumière, tétraèdre.

Table des matières

french

1 Involution mathématique et trou noir

1.1 Contexte mathématique et physique de la discussion

Ce document s'inscrit au sein d'une démarche exploratoire pédagogique nommée "La théorie de la question (E) (alias TQE)". Un chapitre particulier de cette approche s'intéresse aux déformations des produits vectoriels déformés dont une représentation générique est le crochet [**a**, **...**][A] dans lequel apparait la paire ([A], **a**), un quelconque élément de l'ensemble U = M(3, C) x E(3, C).

Pour rappel, il est déjà connu que l'ensemble V peut parfois être muni d'une structure d'algèbre de Lie comme j'ai eu l'occasion de le démontrer dans [[e]]. Ici, l'attention se focalise sur la recherche des situations faisant de ce produit vectoriel déformé une opération involutive pour certains éléments de l'ensemble V = {E(3, C), [..., ...][A]}. Les raisons motivant ce choix sont les suivantes.

Remarque 1.1. ***Les difficultés techniques structurelles.***

Le fait de doter un espace vectoriel E bâti sur un corps K d'un produit vectoriel déformé (PVD) constitue une obstruction rédhibitoire à la définition d'un sous-espace de E qui soit muni d'une structure de groupe grâce à ce PVD. Ceci tient à l'anti-commutativité de ce type de produit. Celle-ci empêche la découverte d'un élément neutre unique (qui soit le même à gauche comme à droite). Par conséquent et a priori, l'obstruction n'est pas contournable.

Soit, X, le groupe inconnu dont nous cherchons l'existence ; la TQE se trouve ainsi être une théorie dont l'objet d'étude V peut être doté d'une structure d'algèbre –en l'occurrence « de Lie » notée Alg(X)- sans être en mesure d'identifier le groupe –en l'occurrence « de Lie » X, qui lui correspondrait en principe.

Cette difficulté majeure se contourne habituellement en introduisant la ruse de « l'involution » ; voir par exemple [[11] ; p.4] où une stratégie permettant de reconstruire X à partir de Alg(X) est proposée. Le développement des connaissances sur l'objet V exige donc de passer par un chemin détourné. Ce sera celui de l'involution.

Remarque 1.2. ***Une motivation venue de la cosmologie.***

La démarche dont je viens d'expliquer l'essence trouve une de ses motivations dans le monde en pleine effervescence de la cosmologie. Il se trouve que l'étude de l'involution mène en ligne directe à celle des trous noirs dont les données initiales sont celles mises en évidence par Bowen et York lorsque le PVD considéré est un moment angulaire déformé (MAD) [d**x**, **x**][A] dans lequel **x** représente une position spatiale ; voir par exemple [[04]] et [[05]]. Ces objets géométriques deviennent donc des objets algébriques. Ce constat soulève la question inverse : "à quels objets géométriques correspondront les éléments du groupe de Lie dont la découverte est espérée ?" De nombreux éléments seront accumulés qui tendront à prouver qu'il s'agit de tétraèdres.

Remarque 1.3. ***Le contexte historique***

Ce document s'inscrit dans une série de travaux visant à mieux connaitre la structure intime des espaces tridimensionnels, y compris aux échelles les plus fines. C'est la raison pour laquelle, peut-être, il convient de le placer dans la continuité d'un ensemble de recherches qui ont été initiées par l'article d'Einstein-Rosen en 1935 [[00]] et se sont achevées en 1953, deux ans avant le décès d'A. Einstein. A cette époque, une partie des chercheurs pensait qu'il était possible d'unifier la gravitation et l'électromagnétisme en

attribuant une nature géométrique aux particules élémentaires.
L'intuition guidant ce travail consiste à interpréter chaque trou noir comme une sorte d'aspirateur convertissant les champs de gravitation en champs électromagnétiques... L'intention reste d'aider les professionnels à élaborer une théorie satisfaisante de la gravitation quantique.

1.2 Mathématiques

Les lecteurs désireux de découvrir ce document sont encouragés à prendre au préalable connaissance des travaux exposés dans [[a]], [[b]] et [[c]]. Je rappelle ici quelques données élémentaires utiles.

Definition 1.1. ***Produits vectoriels déformés***

Tous les calculs dont il est question dans ce document concernent l'ensemble V. Les déformations agissant sur le produit vectoriel classique le font de la manière suivante :

$$[A] = \begin{pmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{pmatrix} \in M(3, C) \tag{1}$$

$$\forall\, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in E(3, C) : \, [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} = \sum_{d=1}^{3} \sum_{a<b=2}^{3} A^d_{ab} \cdot (q^a_1 \cdot q^b_2 - q^a_2 \cdot q^b_1) \cdot \mathbf{e}_d \tag{2}$$

Proposition 1.1. *Défini de la sorte, le produit vectoriel déformé est bien une déformation du produit vectoriel classique.*

Démonstration. De fait, tout produit vectoriel déformé se laisse écrire :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >$$

$$=$$

$$\sum_{a<b=2}^{3} A^1_{ab} \cdot (q^a_1 \cdot q^b_2 - q^a_2 \cdot q^b_1) \cdot \mathbf{e}_1 + A^2_{ab} \cdot (q^a_1 \cdot q^b_2 - q^a_2 \cdot q^b_1) \cdot \mathbf{e}_2 + A^3_{ab} \cdot (q^a_1 \cdot q^b_2 - q^a_2 \cdot q^b_1) \cdot \mathbf{e}_3$$

Cette relation admet une représntation équivalente :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >$$

$$=$$

$$\left| \begin{array}{c} \sum_{a<b=2}^{3} A^1_{ab} \cdot (q^a_1 \cdot q^b_2 - q^a_2 \cdot q^b_1) \\ \sum_{a<b=2}^{3} A^2_{ab} \cdot (q^a_1 \cdot q^b_2 - q^a_2 \cdot q^b_1) \\ \sum_{a<b=2}^{3} A^3_{ab} \cdot (q^a_1 \cdot q^b_2 - q^a_2 \cdot q^b_1) \end{array} \right\rangle$$

$$=$$

$$\left| \begin{array}{c} A^1_{12} \cdot (q^1_1 \cdot q^2_2 - q^2_2 \cdot q^1_1) + A^1_{23} \cdot (q^2_1 \cdot q^3_2 - q^3_2 \cdot q^2_1) + A^1_{13} \cdot (q^1_1 \cdot q^3_2 - q^3_2 \cdot q^1_1) \\ A^2_{12} \cdot (q^1_1 \cdot q^2_2 - q^2_2 \cdot q^1_1) + A^2_{23} \cdot (q^2_1 \cdot q^3_2 - q^3_2 \cdot q^2_1) + A^2_{13} \cdot (q^1_1 \cdot q^3_2 - q^3_2 \cdot q^1_1) \\ A^3_{12} \cdot (q^1_1 \cdot q^2_2 - q^2_2 \cdot q^1_1) + A^3_{23} \cdot (q^2_1 \cdot q^3_2 - q^3_2 \cdot q^2_1) + A^3_{13} \cdot (q^1_1 \cdot q^3_2 - q^3_2 \cdot q^1_1) \end{array} \right\rangle$$

Par ailleurs il est connu que :

$$| \wedge (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) > = \left| \begin{array}{c} q^2_1 \cdot q^3_2 - q^2_2 \cdot q^3_1 \\ -(q^1_1 \cdot q^3_2 - q^1_2 \cdot q^3_1) \\ q^1_1 \cdot q^2_2 - q^1_2 \cdot q^2_1 \end{array} \right\rangle \tag{3}$$

et que :

$$[J]^t \, . \, [A] \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ -A^1_{13} & -A^2_{13} & -A^3_{13} \\ A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \end{bmatrix} \quad (4)$$

ou encore :

$$[A]^t \, . \, [J] \;=\; \begin{bmatrix} A^1_{23} & -A^1_{13} & A^1_{23} \\ A^2_{23} & -A^2_{13} & A^2_{23} \\ A^3_{23} & -A^3_{13} & A^3_{23} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Il est du coup facile de constater que :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >= \; \{[A]^t \, . \, [J]\} \, . \, | \wedge (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) > \quad (6)$$

avec :

$$[J] \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \; [J]^t \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Le terme apparaissant tout à fait à droite n'est rien d'autre que le produit vectoriel classique. □

Proposition 1.2. *Un produit vectoriel classique est un produit vectoriel déformé par la matrice [J].*

Démonstration. De fait, en écrivant [A] = [J] dans (6) il vient immédiatement :

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[J]} \;=\; \wedge(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \quad (8)$$

□

Puisque d'un point de vue historique le produit vectoriel classique est le "point zéro" de la définition de cette opération, la terminologie attribuant les déformations de ce produit à une matrice [A] quelconque de M(3, C) peut porter à confusion. Je serai amené à revenir sur ce point qui semble au départ être un détail de nomenclature. L'analyse montrera que ce détail contient de nombreuses informations subliminales. Elles mèneront à s'interroger sur la présence semble t-il naturelle du groupe cyclique abélien C6 au sein de la définition d'une des plus anciennes et des plus habituelles opérations mathématiques.

$$[J]^2 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[J]^3 \;=\; -Id_3$$

$$[J]^4 \;=\; ([J]^2)^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -[J]$$

$$[J]^5 \;=\; -[J]^2$$

$$[J]^6 \;=\; Id_3$$

1.3 Involution bâtie sur le produit vectoriel déformé

Toute paire ([A], **a**) choisie arbitrairement dans U = M(3, C) × E(3, C) définit une application f = [**a**,...][A] dont la source est dans V et l'image dans E(3, C). Comme il n'y a, à ce stade de la discussion, aucune raison justifiant de ne pas pouvoir à nouveau appliquer f à l'image obtenue de la sorte, je pars du principe que cette application agit de façon interne dans V : f ∈ F(V ; V).

La définition du produit vectoriel déformé implique que cette application est linéaire.

$$f_1 = [\mathbf{a}_1, ...][A] \in F(V; V);\, f_2 = [\mathbf{a}_2, ...][A] \in F(V; V)$$

$$f_1 + f_2 = [\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, ...][A] = f \in F(V; V)$$

$$\forall \lambda \in C : \lambda \,.\, f_1 = [\lambda \,.\, \mathbf{a}_1, ...][A] = f \in F(V; V)$$

L'ensemble des éléments f de F(V ; V) apparait ainsi être un sous-ensemble des applications linéaires agissant sur V.

Remarque 1.4. ***La question du neutre***

Dans une recherche classique d'un élément neutre sur V, je poserais la question :

$$\exists\, \mathbf{n} \in V : \forall \mathbf{a} \in V, [\mathbf{a}, \mathbf{n}][A] = [\mathbf{n}, \mathbf{a}][A] = \mathbf{a}\,?$$

Pour débroussailler cette thématique, je considère la restriction de cette question à la recherche d'un neutre à gauche et je suppose que celui-ci existe sans démonstration ; il revient au même d'écrire :

$$\exists\, \mathbf{n}_g \in V : \forall \mathbf{a} \in V, [\mathbf{n}_g, \mathbf{a}][A] = \mathbf{a}$$

La traduction de cette égalité en termes de composantes livre les trois relations :

$$\exists\, \mathbf{n}_g \in V : \forall \mathbf{a} \in V, \forall \chi = 1, 2, 3, \sum_{\alpha<\beta=2}^{3} A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, (n^{\alpha}_g \,.\, a^{\beta} - a^{\alpha} \,.\, n^{\beta}_g) = a^{\chi}$$

Plus en détail, il s'agit du système :

$$A^1_{12} \,.\, (n^1_g \,.\, a^2 - a^1 \,.\, n^2_g) + A^1_{23} \,.\, (n^2_g \,.\, a^3 - a^2 \,.\, n^3_g) + A^1_{31} \,.\, (n^3_g \,.\, a^1 - a^3 \,.\, n^1_g) = a^1$$

$$A^2_{12} \,.\, (n^1_g \,.\, a^2 - a^1 \,.\, n^2_g) + A^2_{23} \,.\, (n^2_g \,.\, a^3 - a^2 \,.\, n^3_g) + A^2_{31} \,.\, (n^3_g \,.\, a^1 - a^3 \,.\, n^1_g) = a^2$$

$$A^3_{12} \,.\, (n^1_g \,.\, a^2 - a^1 \,.\, n^2_g) + A^3_{23} \,.\, (n^2_g \,.\, a^3 - a^2 \,.\, n^3_g) + A^3_{31} \,.\, (n^3_g \,.\, a^1 - a^3 \,.\, n^1_g) = a^3$$

Il se laisse réorganiser en un système de trois combinaisons linéaires écrites en fonction des trois composantes du neutre à gauche dont l'existence a été présumée :

$$(A^1_{12} \,.\, a^2 - A^1_{31} \,.\, a^3) \,.\, n^1_g + (A^1_{23} \,.\, a^3 - A^1_{12} \,.\, a^1) \,.\, n^2_g + (A^1_{31} \,.\, a^1 - A^1_{23} \,.\, a^2) \,.\, n^3_g = a^1$$

$$(A^2_{12} \,.\, a^2 - A^2_{31} \,.\, a^3) \,.\, n^1_g + (A^2_{23} \,.\, a^3 - A^2_{12} \,.\, a^1) \,.\, n^2_g + (A^2_{31} \,.\, a^1 - A^2_{23} \,.\, a^2) \,.\, n^3_g = a^2$$

$$(A^3_{12} \,.\, a^2 - A^3_{31} \,.\, a^3) \,.\, n^1_g + (A^3_{23} \,.\, a^3 - A^3_{12} \,.\, a^1) \,.\, n^2_g + (A^3_{31} \,.\, a^1 - A^3_{23} \,.\, a^2) \,.\, n^3_g = a^3$$

Le principe de sa résolution est connu et en principe simple : il suffit de trouver les racines de son discriminant. Il est aisé de comprendre que le calcul explicite ne sera pas chose rapide et évidente à faire. Pour autant, ce système se laisse formuler dans une écriture mixte mélangeant matrices et vecteurs de la manière suivante (convention de Dirac) :

$$[Y] \,.\, |\mathbf{n}_g >= |\mathbf{a}>$$

à condition de définir (convention ligne = α - colonne = β) :

$$[Y] = [y^{\alpha}{}_{\beta}] = [A^{\alpha}_{\beta\chi} \,.\, a^{\chi}]$$

et de ne pas oublier que le cube A est antisymétrique sur ses indices bas, donc réduit à une matrice [A] de M(3, C). Compte tenu des travaux antérieurs concernant la notion de décomposition triviale d'un produit vectoriel déformé, il vient simplement que :

$$[Y] = [y^{\alpha}{}_{\beta}] = [A^{\alpha}_{\beta\chi} \,.\, a^{\chi}] = [-A^{\alpha}_{\chi\beta} \,.\, a^{\chi}] = -_{[A]}\Phi(\mathbf{a})$$

Et le système à résoudre admet aussi la formulation condensée :

$$_{[A]}\Phi(\mathbf{a}) \,.\, |\mathbf{n}_g >= -|\mathbf{a}>$$

Ainsi, son discriminant coincide avec le déterminant de la décomposition la plus triviale d'un produit vectoriel déformé du type [**a**, ...][A]. De par la structure de ses composantes, ce déterminant est nul et j'en déduis que les composantes du neutre à gauche $\mathbf{n}_g$ sont liées entre elles. De là à pouvoir dire comment ces composantes sont précisément reliées les unes aux autres ...

Definition 1.2. ***Involution***

Une application f sera dite involutive si la répétition de son action sur la gauche d'un élément de V laisse celui-ci inchangé :

$$\exists \mathbf{x} \in V \xrightarrow{f} f(\mathbf{x}) \in V : f(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$$

Concernant la logique pure, il n'y a a priori pas de lien préétabli connu entre les deux propriétés suivantes (i) L'application f est une involution ; (ii) l'application f permet de doter V d'une structure d'algébre de Lie. L'application f est une involution chaque fois qu'il existe un élément **x** de V tel que :

$$([A], \mathbf{a}) \in U : \exists \mathbf{x} \in V,\, [\mathbf{a},\, [\mathbf{a}, \mathbf{x}]_{[A]}]_{[A]} = \mathbf{x} \tag{10}$$

Remarque 1.5. ***Involution et élément neutre à gauche***

Proposition 1.3. *Si une application f = [**a**,...][A] est involutive pour un élément **x** de V, alors il existe automatiquement une matrice [B([A], **a**)] de M(3, C) telle que le vecteur **a** se comporte comme un élément neutre à gauche pour le vecteur **x** au sein d'un produit vectoriel déformé par la matrice [B([A], **a**)] ; concrètement :*

$$Equ.(10) \Rightarrow \exists\, [B([A],\, \mathbf{a})] \in M(3, C) : [\mathbf{a}, \mathbf{x}]_{[B([A],\, \mathbf{a})]} = \mathbf{x}$$

Démonstration. J'écris tout simplement l'Equ.(10) en me servant de la définition des produits vectoriels déformés ; voir Equ.(2) :

$$\mathbf{a} \in E(3, C) : [\mathbf{a}, \sum_{\gamma=1}^{3} X^{\gamma} \,.\, \mathbf{e}_{\gamma}]_{[A]} = \mathbf{x}$$

avec :

$$\sum_{\alpha<\beta=2}^{3} A^{\gamma}_{\alpha\beta} \,.\, (a^{\alpha} \,.\, x^{\beta} - a^{\beta} \,.\, x^{\alpha}) = X^{\gamma}$$

De sorte que :

$$\sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma} \,.\, \{a^{\delta} \,.\, X^{\gamma} - a^{\gamma} \,.\, X^{\delta}\} = x^{\eta}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma} \, . \, \{a^{\delta} \, . \sum_{\alpha<\beta=2}^{3} A^{\gamma}_{\alpha\beta} \, . \, (a^{\alpha} \, . \, x^{\beta} - x^{\alpha} \, . \, a^{\beta}) - a^{\gamma} \, . \sum_{\alpha<\beta=2}^{3} A^{\delta}_{\alpha\beta} \, . \, (a^{\alpha} \, . \, x^{\beta} - x^{\alpha} \, . \, a^{\beta})\} \; = \; x^{\eta}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma} \, . \, \{ \sum_{\alpha<\beta=2}^{3} (A^{\gamma}_{\alpha\beta} \, . \, a^{\delta} \; - \; A^{\delta}_{\alpha\beta} \, . \, a^{\gamma}) \, . \, (a^{\alpha} \, . \, x^{\beta} \; - \; a^{\beta} \, . \, x^{\alpha})\} \; = \; x^{\eta}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{\alpha<\beta=2}^{3} \{ \sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma} \, . \, (A^{\gamma}_{\alpha\beta} \, . \, a^{\delta} \; - \; A^{\delta}_{\alpha\beta} \, . \, a^{\gamma}) \, . \, (a^{\alpha} \, . \, x^{\beta} \; - \; a^{\beta} \, . \, x^{\alpha})\} \; = \; x^{\eta}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{\alpha<\beta=2}^{3} (\sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma} \, . \, C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}) \, . \, (a^{\alpha} \, . \, x^{\beta} \; - \; x^{\alpha} \, . \, a^{\beta}) \; = \; x^{\eta} \, ; \, C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \; = \; A^{\gamma}_{\alpha\beta} \, . \, a^{\delta} \; - \; A^{\delta}_{\alpha\beta} \, . \, a^{\gamma}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{\alpha<\beta=2}^{3} B^{\eta}_{\alpha\beta} \, . \, (a^{\alpha} \, . \, x^{\beta} \; - \; x^{\alpha} \, . \, a^{\beta}) \; = \; x^{\eta} \, ; \, B^{\eta}_{\alpha\beta} \; = \; \sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma} \, . \, C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$$

Finalement :

$$\eta = 1, 2, 3 : \sum_{\alpha<\beta=2}^{3} B^{\eta}_{\alpha\beta} \, . \, (a^{\alpha} \, . \, x^{\beta} \; - \; x^{\alpha} \, . \, a^{\beta}) \; = \; x^{\eta} \tag{11}$$

avec :

$$B^{\eta}_{\alpha\beta} \; = \; \sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma} \, . \, C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \, ; \, C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \; = \; A^{\gamma}_{\alpha\beta} \, . \, a^{\delta} \; - \; A^{\delta}_{\alpha\beta} \, . \, a^{\gamma}$$

Ceci peut être réécrit avec l'aide de la matrice [B([A], **a**)] de la façon suivante :

$$[\mathbf{a}, \mathbf{x}]_{[B([A], \, \mathbf{a})]} \; = \; \mathbf{x} \tag{12}$$

avec :

$$B^{\eta}_{\alpha\beta} \; = \; \sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma} \, . \, (A^{\gamma}_{\alpha\beta} \, . \, a^{\delta} \; - \; A^{\delta}_{\alpha\beta} \, . \, a^{\gamma})$$

□

Lemme 1.1. ***Involution et neutre à gauche***

Soit W = {E(3, C), [..., ...][B([A], **a**)]} la partie de l'espace E(3, C) équipée du produit vectoriel déformé par la matrice [B([A], **a**)] obtenue au cours du calcul précédent. L'existence d'un élément involutif **x** sur V génère une application g = [**a**, ...][B([A], **a**)] agissant sur W de telle sorte que cet élément involutif a le vecteur **a** comme neutre à gauche dans W.

Remarque 1.6. ***Propriétés notables***

Puisque le cube A est anti-symétrique :

$$C^{\gamma\delta}_{\beta\alpha} \; = \; A^{\gamma}_{\beta\alpha} \, . \, a^{\delta} \; - \; A^{\delta}_{\beta\alpha} \, . \, a^{\gamma} \; = \; -C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \tag{13}$$

Par ailleurs :

$$C^{\delta\gamma}_{\alpha\beta} \; = \; A^{\delta}_{\alpha\beta} \, . \, a^{\gamma} \; - \; A^{\gamma}_{\alpha\beta} \, . \, a^{\delta} \; = \; -C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \tag{14}$$

De sorte que :

1. Les composantes de l'hyper-cube C possèdent des anti-symétries semblables à celles qu'ont les composantes du tenseur de Riemann lorsque celui-ci est exprimé dans un espace de dimension quatre [[12] ; §4.3.2, p. 110]. Toutefois, avant de tirer de ce constat des conclusions abusives, il faut se souvenir que l'hyper cube n'est pas nécessairement un tenseur et que ce travail se développe dans un environnement tridimensionnel alors que la théorie de la relativité générale s'épanouit dans un univers quadridimensionnel. Pour autant, puisque les formulations quadri- et tri-dimensionnelles du tenseur de Riemann se laissent relier entre elles grâce à la célèbre formule de Gauss-Codazzi [[13] ; p. 514, (21.75) et (21.76)], il pourra être ultérieurement intéressant de rechercher des circonstances mathématiques puis physiques autorisant à lier cet hyper-cube C au tenseur de Riemann.
2. La relation suivante s'applique :

$$B^{\eta}_{\beta\alpha} = \sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma} \,.\, C^{\gamma\delta}_{\beta\alpha} = -\sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma} \,.\, C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = -B^{\eta}_{\alpha\beta} \tag{15}$$

   Le cube B est donc lui aussi anti-symétrique sur ses indices bas et il se laisse donc réduire à un élément [B] de M(3, C).
3. Je remarque aussi que la recherche d'un élément involutif apporte une réponse indirecte à la question du neutre à gauche. Pour autant, les liens entre les deux discussions sont loins d'être faciles à expliciter. Ils obligent à faire un exercice de logique peu évident. Pour qu'un projectile **a** devenu neutre à gauche sur W au cours de la procédure impliquant l'involution d'un vecteur **x** sur V soit aussi neutre à gauche sur V pour ce même vecteur involutif, il suffirait que le cube anti-symétrique A ne soit pas déformé au cours de cette procédure ; soit :

$$B^{\eta}_{\alpha\beta} = \sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma} \,.\, C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = A^{\eta}_{\alpha\beta}$$

   Grâce à une normalisation des écritures, cette condition suffisante se laisse reformuler un peu différemmemt dû au fait que la discussion se déroule dans un espace de dimension trois et que les cubes impliqués sont anti-symétriques.

Definition 1.3. ***Normalisation des écritures des matrices résultant de la réduction d'un cube***

Les composantes de toute matrice [A] de M(3, C) résultant de l'anti-symétrisation des indices bas (équiv. de la réduction) d'un cube A peuvent toujours se réécrire de manière normalisée :

$$[A] = \begin{bmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \\ A^1_1 & A^2_1 & A^3_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & A^3_2 \end{bmatrix}$$

Cette particularité de l'écriture résulte du fait que toute paire d'indices (α, β) pris dans le sous-ensemble $\mathrm{Ind}_3 = \{1, 2, 3\}$ des entiers naturels de telle sorte que $\alpha < \beta$ peut toujours se remplacer par l'indice absent de cette paire ; soit par exemple ϵ cet indice absent.

De toute évidence, l'écriture normalisée obtenue de la sorte ne coincide pas avec la convention *ligne - colonne* habituellement utilisée dans la littérature mathématique ; à savoir :

$$\begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix} = [A^{\diamond}] \tag{16}$$

La convention *ligne - colonne* peut être respectée en introduisant la matrice :

$$[K] \,=\, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,;\, |K| \,=\, 1 \tag{17}$$

Cette affirmation se vérifie aisément en constatant que :

$$[A] \,=\, \{[A^{\diamond}]\,.\,[K]\}^t \tag{18}$$

La matrice transposée $[\mathrm{K}]^t$ est l'une des trois matrices représentant le groupe des tétraèdres dans les espaces de dimension trois [[01] ; annex J, pp. 653-655]. Elle est aussi un élément générant le groupe cyclique C3 [[02] ; p.18] (Z3 dans la langue allemande). Par convention du language, la matrice [A] est la *matrice déformante*, $[\mathrm{A}]^t.[\mathrm{J}]$ est la *matrice déformante effective* apparaissant dans l'Equ.(6) et enfin $[\mathrm{A}^{\diamond}]$ est la *matrice déformante normalisée* ; finalement :

$$[A]^t\,.\,[J] \,=\, [A^{\diamond}]\,.\,[K]\,.\,[J] \tag{19}$$

Exemple 1.1. *Définition de la matrice [B([A],* **a***)].*

Avec ces précisions il devient possible de réécrire l'Equ.(11) :

$$B^{\eta}_{\epsilon} \,=\, \sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma}\,.\,C^{\gamma\delta}_{\epsilon} \,;\, C^{\gamma\delta}_{\epsilon} \,=\, A^{\gamma}_{\epsilon}\,.\,a^{\delta} \,-\, A^{\delta}_{\epsilon}\,.\,a^{\gamma} \,=\, A^{(\gamma}_{\epsilon}\,.\,a^{\delta)}$$

Remarque 1.7. ***Impact de l'involution sur la matrice déformante.***

Je vais raisonner ici par l'absurde et examiner ce qui se passerait si la réalisation de l'involution aboutissait à fournir une matrice [B] égale à la matrice déformante [A]. Si la non-déformation de la matrice [A] au cours d'une procédure de recherche d'involution était possible, elle aboutirait à :

$$B^{\eta}_{\epsilon} \,=\, \sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\delta\gamma}\,.\,C^{\gamma\delta}_{\epsilon} \,=\, A^{\eta}_{\epsilon}$$

Or, en écrivant $(\gamma\delta) \equiv \mu$, la normalisation d'écriture décrite à la remarque précédente livre aussi :

$$B^{\eta}_{\epsilon} \,=\, \sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^{\eta}_{\mu}\,.\,C^{\mu}_{\epsilon} \,=\, A^{\eta}_{\epsilon}$$

Elle fait ressortir l'idée que, dans la configuration examinée ici, l'hypercube doit jouer un rôle équivalent à celui de la matrice identité Id_3.

Par ailleurs, au sein d'une discussion dans laquelle les indices doivent être choisis dans Ind_3, l'indice μ constitué par la concaténation d'une paire d'indices obligatoirement distincts est forcément celui qui n'apparait pas déjà dans la paire en question ; de sorte que :

$$\begin{aligned} \mu \,=\, 1 \,:\, C^{(2,\,3)}_{\epsilon} \,&=\, C^{1}_{\epsilon} \,=\, A^{2}_{\epsilon}\,.\,a^{3} \,-\, A^{3}_{\epsilon}\,.\,a^{2} \,=\, A^{(2}_{\epsilon}\,.\,a^{3)} \\ \mu \,=\, 2 \,:\, C^{(3,\,1)}_{\epsilon} \,&=\, C^{2}_{\epsilon} \,=\, A^{3}_{\epsilon}\,.\,a^{1} \,-\, A^{1}_{\epsilon}\,.\,a^{3} \,=\, A^{(3}_{\epsilon}\,.\,a^{1)} \\ \mu \,=\, 3 \,:\, C^{(1,\,2)}_{\epsilon} \,&=\, C^{3}_{\epsilon} \,=\, A^{1}_{\epsilon}\,.\,a^{2} \,-\, A^{2}_{\epsilon}\,.\,a^{1} \,=\, A^{(1}_{\epsilon}\,.\,a^{2)} \end{aligned} \tag{20}$$

Et qu'il est au passage possible d'en déduire une expression normalisée de la matrice [B] dont il sera fait usage plus tard dans ce document :

$$B^{\eta}_{\epsilon} \tag{21}$$

$$=$$

$$A_1^\eta . C_\epsilon^1 + A_2^\eta . C_\epsilon^2 + A_3^\eta . C_\epsilon^3$$

$$=$$

$$A_1^\eta . (A_\epsilon^2 . a^3 - A_\epsilon^3 . a^2) + A_2^\eta . (A_\epsilon^3 . a^1 - A_\epsilon^1 . a^3) + A_3^\eta . (A_\epsilon^1 . a^2 - A_\epsilon^2 . a^1)$$

$$=$$

$$a^1 . (A_2^\eta . A_\epsilon^3 - A_3^\eta . A_\epsilon^2) + a^2 . (A_1^\eta . A_\epsilon^3 - A_1^\eta . A_\epsilon^3) + a^3 . (A_1^\eta . A_\epsilon^2 - A_2^\eta . A_\epsilon^3)$$

Ainsi, la non-déformation hypothétique de la matrice [A] au cours d'une procédure de recherche d'involution équivaut à égaler les composantes de l'hyper-cube C avec celles du symbole de Cronecker :

$$\forall \epsilon, \mu \in Ind_3 : C_\epsilon^\mu = \delta_\epsilon^\mu \Rightarrow \{1 \, si \, \mu = \epsilon \, ; 0 \, si \, \mu \neq \epsilon\}$$

C'est-à-dire, en disposant les composantes de l'hyper-cube dans le respect de la convention *ligne - colonne*, équivaut à poser les neuf relations suivantes :

$$C_1^1 = A_1^2 . a^3 - A_1^3 . a^2 = 1 \, ; C_2^1 = A_2^2 . a^3 - A_2^3 . a^2 = 0 \, ; C_3^1 = A_3^2 . a^3 - A_3^3 . a^2 = 0$$

$$C_1^2 = A_1^3 . a^1 - A_1^1 . a^3 = 0 \, ; C_2^2 = A_2^3 . a^1 - A_2^1 . a^3 = 1 \, ; C_3^2 = A_3^3 . a^1 - A_3^1 . a^3 = 0$$

$$C_1^3 = A_1^1 . a^2 - A_1^2 . a^1 = 0 \, ; C_2^3 = A_2^1 . a^2 - A_2^2 . a^1 = 0 \, ; C_3^3 = A_3^1 . a^2 - A_3^2 . a^1 = 1$$

qui se laissent condenser en :

$$[C^\diamond] = \begin{bmatrix} 0 & a^3 & -a^2 \\ -a^3 & 0 & a^1 \\ a^2 & -a^1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ou encore à supposer a priori que la relation suivante est vraie :

$$[C^\diamond] = -{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) . [A^\diamond] = Id_3$$

Dans cette égalité matricielle, la matrice rotation ${}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})$ apparaît ; son déterminant est nul :

$$|{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})| = -a^3 . (-a^2 . a^1) - a^2 . (-a^3 . - a^1) = 0 \Rightarrow |C^\diamond| = 0, \forall [A]$$

En revanche, le déterminant d'une matrice déformante vaut plus ou moins un et celui de la matrice déformante normalisée aussi, à cause des Equ.(17) et (18). En clair, admettre a priori la non-évolution de la matrice [A] au cours d'une procédure de recherche d'involution aboutit à égaler des matrices sans pouvoir égaler les déterminants de part et d'autre du signe de l'égalité. Ce n'est pas recevable.

Par conséquent, il en découle le :

Lemme 1.2. *De l'insconstance de la matrice déformante en cas d'involution.*

La matrice déformante [A] ne peut rester identique à elle-même au cours d'une procédure de recherche d'involution ; celle-ci peut toujours se symboliser par : [A] $\rightarrow$ [B([A], **a**)] $\neq$ [A]. Il n'en demeure pas moins que :

$$[C^\diamond] = -{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) . [A^\diamond] \tag{22}$$

et que :

$$[B^\diamond] = -[A^\diamond] . {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) . [A^\diamond] \tag{23}$$

Remarque 1.8. ***Interprétation de l'involution dans le cadre de la théorie des spineurs d'E. Cartan***

Le formalisme normalisé de l'hyper-cube C permet d'écrire par transposition :

$$[C^\diamond]^t = [A^\diamond]^t \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})$$

et par addition :

$$\frac{1}{2}\,.\,\{[C^\diamond]^t + [C^\diamond]^t\} = \frac{1}{2}\,.\,\{[A^\diamond]^t \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) - {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})\,.\,[A^\diamond]\}$$

La partie de cette relation placée à gauche du signe de l'égalité exprime la partie symétrique de la représentation normalisée de l'hyper-cube C. La partie placée à droite évoque des réflexions d'E. Cartan exposées dans [[14] ; chapitre IX, pp. 145-147, (1)] à cause de la matrice rotation ${}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})$. La similitude des écritures est complète chaque fois que (i) la représentation normalisée de la matrice déformante est symétrique et (ii) l'argument de la rotation est un infiniment petit. Dans ce cas, la partie symétrique de l'hyper-cube impliqué dans une involution basée sur l'application f est une représentation de la variation infinitésimale de la matrice déformante normalisée ; en clair :

$$\{[A^\diamond]^t = [A^\diamond],\, arg({}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})) \sim 0\} \Rightarrow \frac{1}{2}\,.\,\{[C^\diamond]^t + [C^\diamond]^t\} = \delta[A^\diamond] \tag{24}$$

Remarque 1.9. ***Interprétation de l'involution dans le cadre de la théorie de la relativité générale***

Au cours de la remarque destinée à répertorier les propriétés notables des acteurs de l'involution, j'ai constaté que l'hyper-cube C présentait des anti-symétries permettant d'évoquer une similitude avec l'hyper-cube des composantes du tenseur de Riemann exprimé dans un espace de dimension quatre. Malheureusement pour les amoureux de la simplicité, la discussion actuelle sur l'involution prend place dans un espace de dimension trois. Pour autant, les travaux initiés par A. Z. Petrov (entre 1950 et 1960, par exemple [[15]] ; une recherche bibliographique montre que les explorations russophones initiales ont évolué ensuite vers la classification de Petrov-Penrose concernant les spineurs) ont permis de dégager des travaux d'A. Einstein un sous-ensemble intéressant de situations physiques ; précisément : celles pour lesquelles le tenseur de Ricci est nul. Cet auteur a pu démontré qu'il était alors possible de réduire le tenseur de Riemann (quadri-dimensionnel) à une matrice symétrique de M(3, C) ; voir, en allemand : [[16] ; §92, pp. 312-319].
Sachant que les données astronomiques actuelles encouragent à penser que notre univers est globalement plat et vide, il devient raisonnable de réfléchir dans le cadre de la logique thermodynamique et d'affirmer que les volumes vides et plats de cet univers représentent statistiquement les situations de loin les plus probables ; voir par exemple [[17]].
Il devient également tentant de tester une identification entre une représentation normalisée symétrique de l'hyper-cube C impliqué dans l'involution et ce que je nommerai une matrice de Petrov.

$$[C^\diamond]^t = [C^\diamond] = [D(Petrov)[[16]; p.316, (92, 17)]]$$

Puisque la forme normalisée de l'hyper-cube doit être symétrique et que la matrice rotation est antisymétrique, l'identification évoquée ici ne peut concerner que des matrices déformamtes dont la représentation normalisée est anti-symétrique.

$$[A^\diamond]^t = -[A^\diamond]$$

Remarque 1.10. ***Involution et décompositions mathématiquement triviales.***

La décomposition mathématiquement triviale de l'application g admet 1_C pour valeur propre triple.

Démonstration. Comme je l'ai déjà démontré dans [[a]] et [b], un produit vectoriel déformé accepte toujours au moins une décomposition mathématiquement triviale. Dans le cadre de l'étude de l'involution, cette décomposition prend la forme suivante :

$$|[\mathbf{a},\mathbf{x}][B]>= {}_{[B]}\Phi(\mathbf{a}).|\mathbf{x}>= |\mathbf{x}> \tag{25}$$

Ou, plus exactement :

$$\{{}_{[B]}\Phi(\mathbf{a})\, -\, Id_3\}.|\mathbf{x}>= |\mathbf{0}> \tag{26}$$

De sorte que pour les éléments **x** non nuls de V, le projectile **a** remplit la condition :

$$|{}_{[B]}\Phi(\mathbf{a})\, -\, Id_3|\, =\, 0 \tag{27}$$

La décomposition mathématiquement triviale admet donc 1_C pour valeur propre triple.
□

Remarque 1.11. *Involution et décompositions mathématiquement triviales - suite.*

La décomposition mathématiquement triviale de l'application g vaut le carré de la décomposition mathématiquement triviale de l'application f et admet en particulier la matrice identité Id_3 comme représentation dans M(3, C).

Démonstration. Une autre conséquence de l'existence des décompositions mathématiquement triviales est qu'il est correct d'écrire :

$$|[\mathbf{a},[\mathbf{a},\mathbf{x}]_{[A]}]_{[A]}> \tag{28}$$

$$=$$

$$[{}_{[A]}\Phi(\mathbf{a})]\,.\,|[\mathbf{a},\mathbf{x}]_{[A]}>$$

$$=$$

$$[{}_{[A]}\Phi(\mathbf{a})]\,.\,\{[{}_{[A]}\Phi(\mathbf{a})]\,.\,|\mathbf{x}>\}$$

$$=$$

$$[{}_{[A]}\Phi(\mathbf{a})]^2\,.\,|\mathbf{x}>$$

Au cas où (i) il existe au moins un élément involutif et (ii) les décompositions mathématiquement triviales sont réalisées, il existe donc une contrainte simple et forte :

$$[{}_{[A]}\Phi(\mathbf{a})]^2\, =\, [{}_{[B([A],\,\mathbf{a}]}\Phi(\mathbf{a})]\, =\, Id_3\,;\, [B([A],\,\mathbf{a})]\, \neq\, [A] \tag{29}$$

□

Remarque 1.12. ***Valeurs propres de la décomposition mathématiquement triviale d'une application f involutive pour le produit vectoriel classique.***

Soit l'application $f_0 = [\mathbf{a}, ...][J] = \mathbf{a} \wedge ...$ symbolisant un produit vectoriel classique agissant par la gauche sur n'importe quel élément de E(3, C). Lorsque la contrainte involutive est trivialement réalisée :

$$[_{[J]}\Phi(\mathbf{a})]^2 \,=\, Id_3$$

Un calcul simple livre :

$$[_{[J]}\Phi(\mathbf{a})]^2 \,=\, T_2(\otimes)(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \,-\, |\mathbf{a}|^2 \,.\, Id_3 \tag{30}$$

avec :

$$|\mathbf{a}|^2 \,=<\mathbf{a}, \mathbf{a}>_{Id_3} = (a^1)^2 \,+\, (a^2)^2 \,+\, (a^3)^2 \,\in\, C \tag{31}$$

La notation $|\mathbf{a}|$ utilisée ici n'a rien à voir avec la notion de module (norme) d'un nombre complexe (élément de C). Elle désigne simplement la racine carrée complexe de la somme des carrés des composantes complexes du vecteur **a** qui est un élément de E(3, C). Par abus du langage, je dirai qu'il s'agit de la pseudo-norme complexe de ce vecteur.

Il est facile de vérifier que la réalisation la plus triviale de l'involution impose :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \,-\, (1 \,+\, |\mathbf{a}|^2) \,.\, Id_3 \,=\, [0]_3$$

Le polynome caractéristique s'écrit :

$$|T_2(\otimes)(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \,-\, \lambda \,.\, Id_3| \,=\, -\lambda \,.\, (\lambda^2 \,-\, |\mathbf{a}|^2); \; \lambda \,=\, 1 \,+\, |\mathbf{a}|^2 \tag{32}$$

Ses racines s'obtiennent en résolvant :

$$-\,\lambda \,.\, (\lambda^2 \,-\, |\mathbf{a}|^2) \,=\, 0; \; \lambda \,=\, 1 \,+\, |\mathbf{a}|^2 \tag{33}$$

Elles sont telles que :

$$\lambda \,\in\, \{-\,|\mathbf{a}|,\, 0,\, +\,|\mathbf{a}|\}; \; \lambda \,=\, 1 \,+\, |\mathbf{a}|^2$$

Les vecteurs liés à ces valeurs sont tels que leurs pseudo-normes complexes valent :

$$|\mathbf{a}| \,\in\, \{\pm i,\, \pm j,\, \pm j^2\} \tag{34}$$

Exemple 1.2. ***Les trous noirs dont les données initiales sont celles de Bowen-York.***

Proposition 1.4. *Les trous noirs dont les données initiales sont celles de Bowen-York sont des exemples de réalisation de l'involution.*

Démonstration. Lorsque la source gravitationnelle a le formalisme proposé dans [[04] ; (a)] ou [[05] ; (32) and (33)], alors le trou noir possède un moment angulaire constant **J** co-linéaire au vecteur spatial donnant la position **x**.

$$\mathbf{J} \,=\, [\mathbf{x}, \mathbf{p}]_{[B]} \,=\, \mu \,.\, \mathbf{x} \,=\, \mathbf{constant}; \; [B] \,\neq\, [J]; \; B^c_{ab} \,+\, B^c_{ba} \,=\, 0 \tag{35}$$

De toute évidence, l'Equ.(32) ne peut pas être réalisée dans le cadre de la géométrie euclidienne tri-dimensionnelle classique. Elle ne peut s'envisager que si le produit vectoriel a été déformé pour une raison ou une autre, par exemple par une matrice [B] de M(3, C) :

$$\mathbf{J} \,=\, [\mathbf{x}, \mathbf{p}]_{[B]}; \; [B] \,\neq\, [J]; \; B^c_{ab} \,+\, B^c_{ba} \,=\, 0$$

Dans ce cas, la co-linéarité avec le vecteur **x** correspond à une réalisation particulière de l'Equ.(12) dans laquelle le paramètre μ représente un facteur scalaire non-nul de proportionalité. La signification de ce facteur peut se déduire de considérations générales. Par exemple, un trou noir en rotation induisant une géométrie de Kerr [[06] ; p.9, après (4)] induit les relations :

$$|\mathbf{J}| = J \sim m \,.\, R_S(m) = \frac{2.G.m^2}{c} = \mu \,.\, r$$

dans lesquelles R_S(m) représente le rayon de Schwarzschild de la masse m en rotation ; ceci permet de comprendre que μ est une version pondérée de cette masse.

L'Equ.(29) est trivialement vraie à l'origine de tout repère spatial ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$) et, en général, elle s'explicite exhaustivement avec :

$$\mathbf{J} = \sum_{c=1}^{3} \sum_{a=1<b=2}^{3} B^c_{ab} \,.\, (x^a \,.\, p^b - p^a \,.\, x^b) \,.\, \mathbf{e}_c = \mu \,.\, \sum_{c=1}^{3} x^c \,.\, \mathbf{e}_c \,;\, [B] \neq [J]$$

$$\downarrow$$

$$\forall\, c = 1, 2, 3 : \sum_{a=1<b=2}^{3} B^c_{ab} \,.\, (x^a \,.\, p^b - p^a \,.\, x^b) = \mu \,.\, x^c$$

$$\downarrow$$

$$B^c_{12} \,.\, (x^1 \,.\, p^2 - p^1 \,.\, x^2) + B^c_{13} \,.\, (x^1 \,.\, p^3 - p^1 \,.\, x^3) + B^c_{23} \,.\, (x^2 \,.\, p^3 - p^2 \,.\, x^3) = \mu \,.\, x^c$$

$$\downarrow$$

$$(B^c_{12} \,.\, p^2 + B^c_{13} \,.\, p^3) \,.\, x^1 + (B^c_{23} \,.\, p^3 - B^c_{12} \,.\, p^1) \,.\, x^2 - (B^c_{13} \,.\, p^1 + B^c_{23} \,.\, p^2) \,.\, x^3 = \mu \,.\, x^c$$

Puisque le cube B est supposé être anti-symétrique, ces relations se laissent condenser et réécrire :

$$\{{}_{[B]}\Phi(\mathbf{p}) - \mu \,.\, Id_3\} \,.\, |\mathbf{x}> = |\mathbf{0}>;\; B^c_{ab} + B^c_{ba} = 0 \tag{36}$$

Elles ne sont donc bien qu'une réalisation particulière de l'Equ.(12) lorsque $\mathbf{p} = \mu.\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ étant la vitesse spatiale d'un flux d'énergie. Ce constat appelle deux remarques :

— Si l'Equ.(29) décrit convenablement un trou noir de Bowen-York black, alors l'Equ.(36) est automatiquement vraie.

  Qui plus est, s'il existe aussi un cube A anti-symétrique (représenté par une matrice [A] de M(3, C)) et un vecteur $\mathbf{a}$ de E(3, C) tel que l'Equ.(10) est vraie, alors l'application f = [$\mathbf{a}$, ...][A] est une involution et ce type de trou noir, s'il peut être détecté dans la nature, devient une réalisation physique d'un concept mathématique :

$$([A], \mathbf{a} = \frac{1}{\mu} \,.\, \mathbf{p} = \mathbf{v});\; \mu \neq 0$$

— Le facteur scalaire non nul μ représente les valeurs propres de la décomposition mathématiquement triviale ${}_{[B]}\Phi(\mathbf{p})$. A cause des Equ.(26) et (29), si ce type de décomposition existe vraiment dans la nature, elle devrait avoir 1 pour seule valeur propre triple.

□

Remarque 1.13. ***Valeurs propres des matrices de M(3, C).***

Soit une quelconque matrice [M] de M(3, C) exprimée dans sa forme normalisée. Soit à calculer :

$$\Delta = |[M] - \lambda \,.\, Id_3| \tag{37}$$

Il est facile de trouver que le polynome caractéristique vaut :

$$-\Delta = \lambda^3 - Trace[M] . \lambda^2 + \{(M_2^1 . M_1^2 + ...) - (M_1^1 . M_2^2 + ..)\} . \lambda - |M| \quad (38)$$

Le vieux théorème de D'Alambert garantit l'existence de solutions dans C. Elles se laissent calculer concrètement grâce à la méthode de Tartaglia-Cardan [[07] ; pp. 81-82]. Comme elle est relativement peu connue du public, j'en réexpose ici le cheminement. La première étape consiste à changer la variable λ en une nouvelle variable z :

$$z = \lambda - \frac{Trace[M]}{3} \quad (39)$$

J'écris par convention :

$$\chi = (M_2^1 . M_1^2 + ...) - (M_1^1 . M_2^2 + ..) \quad (40)$$

$$t = \frac{Trace[M]}{3} \, ; \, Trace[M] = \sum_{i=1}^{i=3} M_i^i \quad (41)$$

L'injection des relations (39), (40) et (41) dans l'Equ.(38) livre :

$$-\Delta \quad (42)$$

$$=$$

$$(z + t)^3 - Trace[M] . (z + t)^2 + \chi . (z + t) - |M|$$

$$=$$

$$(z^3 + 3 . t . z^2 + 3 . t^2 . z + t^3) - 3 . t . (z^2 + 2 . t . z + t^2) + \chi . (z + t) - |M|$$

$$=$$

$$z^3 + p . z + q \quad (43)$$

avec :

$$p = -3 . t^2 + \chi$$

$$q = -2 . t^3 + \chi . t - |M|$$

La deuxième étape de la démarche consiste à séparer la nouvelle variable z en deux sous-variables :

$$z = z_1 + z_2 \quad (44)$$

L'injection de (44) dans (43) aboutit à :

$$-\Delta = \{(z_1)^3 + (z_2)^3\} + (z_1 + z_2) . (3 . z_1 . z_2 + p) + q \quad (45)$$

L'objectif reste la découverte des racines de Δ. Une manière simple et particulière d'annuler ce polynome consiste à écrire simultanément :

$$(z_1)^3 + (z_2)^3 = -q \quad (46)$$

$$3 . z_1 . z_2 = -p \quad (47)$$

L'Equ.(47) induit :

$$(z_1 . z_2)^3 = -\frac{p^3}{27} \quad (48)$$

A cet endroit, $(z_1)^3$ et $(z_2)^3$ s'interprètent comme les deux racines du polynome du second degré suivant :

$$Z^2 + q . Z - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (49)$$

Elles sont données par les formules classiques :

$$Z_1 = (z_1)^3 = \frac{1}{2} . \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4.p^3}{27}}\} \tag{50}$$

$$Z_2 = (z_2)^3 = \frac{1}{2} . \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4.p^3}{27}}\} \tag{51}$$

Les sous-variables z_1 et z_2 peuvent en être déduites :

$$z_{11} = \{\frac{1}{2} . \{-q + \sqrt{q^2 + \frac{4.p^3}{27}}\}\}^{\frac{1}{3}};\ z_{12} = j \,.\, z_{11};\ z_{13} = j^2 \,.\, z_{11} \tag{52}$$

$$z_{21} = \{\frac{1}{2} . \{-q - \sqrt{q^2 + \frac{4.p^3}{27}}\}\}^{\frac{1}{3}};\ z_{22} = j \,.\, z_{21};\ z_{23} = j^2 \,.\, z_{21} \tag{53}$$

L'Equ.(44)[1] ne doit pas être mésinterprétée : il n'y a pas neuf solutions au problème posé mais seulement trois. Le meilleur moyen de s'en convaincre est de réinjecter l'Equ.(47) dans (44) :

$$a = 1, 2, 3 :\ {}_a z = z_{1a} - \frac{p}{3.z_{1a}} \tag{54}$$

C'est la procédure apparaissant dans [[07] ; pp. 81-82]. Elle a été proposée par Cardan en 1545 dans l'ouvrage *Ars Magna* mais probablement empruntée à Niccolo Fontana (dit "Tartaglia") ; voir [[08]]. La description faite dans [07] est incomplète parce qu'elle génère une question à laquelle aucune réponse n'est apportée :

"Puisque z_1 diffère en général de z_2, comment se fait-il que les valeurs :

$$i = 1, 2, 3 :\ {}_a z' = z_{2a} - \frac{p}{3.z_{2a}} \tag{55}$$

ne puissent pas être acceptées comme trois solutions supplémentaires ?"

A première vue, le passage de l'Equ.(47) à (48) est absolument correct mais le chemin inverse tentant de filtrer les Equ.(52) et (53) au travers de (47) semble surfaite. Cette énigme reçoit une réponse rationnelle grâce à trois remarques pertinentes :

1. L'introduction du nombre complexe i défini par $i^2 + 1 = 0$ (initiative apparemment dûe à Bombelli ; voir [[07] ; p. 82]) simplifie l'écriture, sa compréhension et sa cohérence interne ;
2. Le discriminant étudié et l'Equ.(49) sont proportionnels ;
3. Le couplage des arguments au sein des paires (z_1, z_2) via (47) devient ainsi possible et les calculs précis éliminent deux tiers des solutions qui semblaient au départ possible ; voir affirmation dans [[08]].

La méthode de tartaglia-Cardan est réexpliquée puis généralisée dans [[09] ; pp. 1-2].

Exemple 1.3. *Le cas des décompositions mathématiquement triviales.*

Tout ce qui a été écrit précédemment reste vrai et s'applique au cas particulier pour lequel les composantes de la matrice générique [M] sont données par :

$$[M] = {}_{[B]}\Phi(\mathbf{p}) \ :\ M^i_j = B^i_{kj} \,.\, p^k$$

Remarque 1.14. ***Un type particulier de valeurs propres.***

1. également connue sous le nom de formule de Cardan

C'est un fait du calcul mathématique que l'Equ.(37) peut également s'écrire alternativement (Tous les indices sont choisis dans $\{0,\ 1,\ 2\}$ et modulo 3 ; ce qui signifie concrètement que $3 \equiv 0$, $4 \equiv 1$, etc.) :

$$\Delta \ = \ \Pi_a \left(M_a^a - \lambda \right) - \sum_a \{ M_{a+2}^{a+1} \, . \, M_{a+1}^{a+2} \, . \, (M_a^a - \lambda) \} + (M_2^1 \, . \, M_3^2 \, . \, M_1^3 + M_3^1 \, . \, M_2^3 \, . \, M_1^2) \tag{56}$$

Cette autre formulation a l'avantage de rendre évident le fait que la réalisation simultanée des relations :

$$\forall \, a \ = \ 0, \, 1, \, 2 : \, \lambda_a \ = \ M_a^a \tag{57}$$

$$M_2^1 \, . \, M_3^2 \, . \, M_1^3 \ + \ M_3^1 \, . \, M_2^3 \, . \, M_1^2 \ = \ 0 \tag{58}$$

annule Δ.

Exemple 1.4. *Les matrices anti-symétriques.*

En particulier, l'Equ.(58) est obligatoirement vérifiée pour toutes les matrices anti-symétriques. L'inverse n'est pas nécessairement vrai. L'anti-symétrie d'une matrice valide (58) mais (56) impose seulement :

$$\Delta \;=\; \Pi_a \,(M_a^a \,-\, \lambda) \;+\; \sum_a (M_{a\,+\,2}^{a\,+\,1})^2 \,.\, (M_a^a \,-\, \lambda) \tag{59}$$

Exemple 1.5. *Une matrice [M] pour laquelle $\lambda = 1$ est une racine.*

Revenant à l'Equ.(37), je suppose maintenant disposer d'une matrice [M] telle que :

$$\Delta \,=\, |[M] \,-\, Id_3| \,=\, 0$$

Les Equ.(38) et (40) livrent alors :

$$-\Delta \,=\, 1^3 \;-\; Trace[M] \,.\, 1^2 \;+\; \chi \,.\, 1 \;-\; |M| \;=\; 0$$

C'est-à-dire :

$$1 \;-\; Trace[M] \;+\; \chi \;-\; |M| \,=\, 0$$

Au sein de cet ensemble de matrices, celles dont le déterminant est nul satisfont en particulier :

$$1 \;-\; Trace[M] \;+\; \chi \,=\, 0$$

Les tables de Pythagore du type $\mathrm{T}_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})$ -voir plus bas la définition 2.1 et l'Equ.(61)- ont un déterminant nul. Leur formalisme est également tel que $\chi = 0$. De sorte que, celles qui parmi elles auraient 1 pour valeur propre seraient caractérisées par la relation :

$$< \mathbf{h}, \mathbf{g} >_{Id_3} = \, 1$$

1.4 Commentaires

A première vue, il semble insolite de vouloir ou pouvoir lier un objet physique et une propriété mathématique. Même si l'idée que vient d'ébaucher cette première partie doit encore être approfondie, elle ne devrait finalement pas trop surprendre. Qu'on veuille bien y réfléchir : à la notion de trou noir l'imagination associe une sorte exotique d'aspirateur cosmique. Il concentre sur lui toute matière située à distance et, à cause de celà, déforme la structure spatio-temporelle. Et il le fait a priori en préservant le type de configuration géométrique qui lui est propre. C'est là, à un niveau heuristique, le côté involutif de cet étrange objet.

2 Compléments indispensables de la méthode intrinsèque

2.1 Contexte

De manière à faciliter la progression, je tiens à rappeler que :

1. La logique interne au document [[b]] a pour objectif la découverte de décompositions non-triviales pour les produits vectoriels déformés $[\mathbf{a}, \mathbf{b}][A]$. La partie principale de ces décompositions présumées, i.e. la matrice [P] apparaissant dans la paire $([P], \mathbf{z})$, se laisse construire pas à pas lorsque le déterminant de la Hessienne du polynôme Λ caractéristique de degré deux associé avec chacune des décompositions non-triviales possibles n'est pas nul.

Pour faire court, la question (E) a éventuellement une solution non-triviale dans les espaces mathématiques de dimension trois lorsque la Hessienne de la polynomiale associée avec cette solution est non-dégénérée : $|\mathrm{Hess}_{\mathbf{a}}\ \Lambda(\mathbf{a})| \neq 0$; ou, ce qui revient au même, lorsque cette polynomiale a un vecteur singulier ${}_{\Lambda}\mathbf{s}$.

2. La méthode intrinsèque est totalement incomplète puisqu'elle ne propose aucun concept permettant de découvrir la partie résiduelle de la décomposition non-triviale. Cette lacune est l'un des nombreux motifs ayant poussé à inventer des méthodes alternatives permettant de répondre à l'énigmatique question (E). La plus simple d'entre elles est sans doute la méthode dite extrinsèque qui, même si elle est elle-même entachée d'insuffisances, se laisse facilement confronter avec la version intrinsèque. Le calibrage des deux approches est possible et il permet enfin d'aboutir ; voir [[c]].
3. La partie principale des décompositions non-triviale est toujours le produit de deux types de matrices. Le premier contient l'information déformante. La seconde est ce que j'appelle le noyau [N] de cette décomposition. Le noyau est lui-même la somme de deux matrices : la première vaut plus ou moins une demi fois la Hessienne de la polynomiale caractérisant la solution non-triviale ; la seconde n'est rien d'autre qu'une matrice de rotation dont l'argument coincide avec le vecteur singulier de ladite polynomiale : ${}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})$. Ce fait étonnant suggère l'existence d'un lien entre la problématique de la question (E) et le produit vectoriel classique générique ${}_{\Lambda}\mathbf{s} \wedge \ldots$.
4. Si le formalisme de la partie principale intrinsèque restait vrai lorsque la Hessienne s'annule (hypothèse fausse à visée pédagogoique), la partie principale se résumerait à une matrice rotation ${}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})$. Mais dans ce cas le vecteur singulier ne serait plus défini. Quoiqu'il en soit, toutes les représentations des rotations ayant cette typologie triviale ${}_{[J]}\Phi(\ldots)$ ont un déterminant nul. Ce fait suggère que la recherche d'une transition continue entre le domaine de définition de la méthode intrinsèque décrite dans [[b]] et celui d'une méthode incluant les décompositions mathématiquement triviales doit inclure l'étude de Hessiennes non-nulles dont le déterminant est nul.

2.2 Formalisme alternatif pour la partie principale d'une décomposition non-triviale.

La méthode décrite dans [b] est en partie basée sur une jauge décrite par la relation [N] = [T].[P]. La matrice [T] contient l'information relative à la déformation agissant sur le produit vectoriel et elle est inversible. De sorte qu'il a été possible de calculer la partie principale $[P] = |A|.[A]^t.[J].[N]$. Il convient de remarquer ici que le noyau a toujours le formalisme suivant, indépendemment du raisonnement qu'il a été choisi de suivre dans [b] :

$$[N] = \begin{bmatrix} D_{11} & n_{12} & n_{13} \\ D_{12} - n_{12} & D_{22} & n_{23} \\ D_{13} - n_{13} & D_{23} - n_{23} & D_{33} \end{bmatrix} \tag{60}$$

Il contient implicitement :
— une matrice diagonale,
— une matrice triangulaire basse,
— une matrice rotation dont l'argument est un vecteur $\mathbf{n}$ ayant pour composantes ($-n_{23}$, n_{13}, $-n_{12}$).

Comme toute matrice, le noyau se laisse aisément partitionner entre une partie symétrique et une partie anti-symétrique :

$$[N] = \frac{1}{2}.\{[N] + [N]\}^t + \frac{1}{2}.\{[N] - [N]\}^t =$$

$$\frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 2.D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & 2.D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & 2.D_{33} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}.\begin{bmatrix} 0 & 2.n_{12} - D_{12} & 2.n_{13} - D_{13} \\ D_{12} - 2.n_{12} & 0 & 2.n_{23} - D_{23} \\ D_{13} - 2.n_{13} & D_{23} - 2.n_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

La partition livre bien une première matrice symétrique et une seconde qui peut s'interpréter comme une matrice de rotation dont l'argument est un vecteur **m** dont les composantes sont (D_{23} - 2.n_{23}, 2.n_{13} - D_{13}, D_{12} - 2.n_{12}).

Definition 2.1. ***Table de Pythagore construite autour du produit tensoriel classique.***

Soit **h** et **g** deux vecteurs quelconques de E(3, C). Une table de Pythagore construite autour du produit tensoriel classique est un élément de M(3, C) comparable à une table de multiplication liant les arguments de la paire (**h**, **g**) à l'aide de la multiplication définie sur C de la façon suivante :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \begin{bmatrix} h^1.g^1 & h^2.g^1 & h^3.g^1 \\ h^1.g^2 & h^2.g^2 & h^3.g^2 \\ h^1.g^3 & h^2.g^3 & h^3.g^3 \end{bmatrix} \tag{61}$$

Proposition 2.1. *Il existe un formalisme alternatif pour les noyaux des décompositions non-triviales dont le déterminant de la partie symétrique est nul.*

Remarque 2.1. ***Partition naturelle des tables***

Toutes les tables de Pythagore du type introduit ci-dessus se laissent aussi écrire :

$$\forall\, \mathbf{h},\, \mathbf{g} \in E(3, C) : T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \frac{1}{2}.\{T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) + T_2(\otimes)(\mathbf{g}, \mathbf{h})\} + \frac{1}{2}.\{T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) - T_2(\otimes)(\mathbf{g}, \mathbf{h})\}$$

Il est très facile de vérifier que :

$$\forall\, \mathbf{h},\, \mathbf{g} \in E(3, C) : {}_{[J]}\Phi(\frac{1}{2}.\mathbf{h} \wedge \mathbf{g}) = \frac{1}{2}.\{T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) - T_2(\otimes)(\mathbf{g}, \mathbf{h})\}$$

Par conséquent :

$$\forall\, \mathbf{h},\, \mathbf{g} \in E(3, C) : T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) = \frac{1}{2}.\{T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})\} + {}_{[J]}\Phi(\frac{1}{2}.\mathbf{h} \wedge \mathbf{g}) \tag{62}$$

Ce formalisme s'apparente fortement à celui des noyaux des décompositions non-triviales obtenues pour [**projectile**, ...][A] par la méthode intrinsèque exposée dans [[b]]. Il s'identifie avec lui chaque fois que les circonstances permettent :

— de découvrir une polynomiale Λ(**projectile**) telle que :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) = Hess_{(\mathbf{projectile},0)}\Lambda(\mathbf{projectile}) \qquad (63)$$

— de considérer que la moitié du produit vectoriel classique $\mathbf{h} \wedge \mathbf{g}$ jour un rôle similaire à celui que joue le vecteur singulier d'une polynomiale propre. L'observation attentive de l'Equ.(60) permet de comprendre que le vecteurs dont les trois composantes sont ($-n_{12}$, n_{13}, $-n_{23}$) joueront ici ce rôle.

$$\frac{1}{2}\,.\,\mathbf{h} \wedge \mathbf{g} \equiv (-n_{12},\, n_{13},\, -n_{23}) \qquad (64)$$

Remarque 2.2. ***Dégénérescences diverses***

Les points suivants méritent d'être notés :

1. Le déterminant de la partie symétrique de toute table de Pythagore construite autour du produit tensoriel classique du type $T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})$ est nul :

$$|T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})| = 0 \qquad (65)$$

Démonstration. Le calcul in extenso livre :

$$|T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) + T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h})|$$
$$=$$
$$\begin{vmatrix} 2.h^1.g^1 & h^2.g^1 + h^1.g^2 & h^3.g^1 + h^1.g^3 \\ h^2.g^1 + h^1.g^2 & 2.h^2.g^2 & h^3.g^2 + h^2.g^3 \\ h^3.g^1 + h^1.g^3 & h^2.g^3 + h^3.g^2 & 2.h^3.g^3 \end{vmatrix}$$
$$=$$
$$\begin{vmatrix} A = 2.h^1.g^1 & B = h^2.g^1 + h^1.g^2 & C = h^3.g^1 + h^1.g^3 \\ B = h^2.g^1 + h^1.g^2 & D = 2.h^2.g^2 & E = h^3.g^2 + h^2.g^3 \\ C = h^3.g^1 + h^1.g^3 & E = h^2.g^3 + h^3.g^2 & F = 2.h^3.g^3 \end{vmatrix}$$

Par conséquent :

$$A\,.\,(D\,.\,F - E^2) - B\,.\,(B\,.\,F - C\,.\,E) + C\,.\,(B\,.\,E - C\,.\,D)$$
$$= A\,.\,D\,.\,F - A\,.\,E^2 - B^2\,.\,F + B\,.\,C\,.\,E + C\,.\,B\,.\,E - C^2\,.\,D$$
$$= -2.h^1.g^1\,.\,(h^3.g^2 + h^2.g^3)^2 - 2.h^2.g^2\,.\,(h^3.g^1 + h^1.g^3)^2$$
$$-2.h^3.g^3\,.\,(h^2.g^1 + h^1.g^2)^2$$
$$+8.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3 + 2.(h^2.g^1 + h^1.g^2)\,.\,(h^3.g^1$$
$$+h^1.g^3)\,.\,(h^2.g^3 + h^3.g^2)$$
$$= -2.h^1.g^1\,.\,(h^3.g^2)^2 - 2.h^1.g^1\,.\,(h^2.g^3)^2 - 4.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$
$$-2.h^2.g^2\,.\,(h^3.g^1)^2 - 2.h^2.g^2\,.\,(h^1.g^3)^2 - 4.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$
$$-2.h^3.g^3\,.\,(h^1.g^2)^2 - 2.h^3.g^3\,.\,(h^2.g^1)^2 - 4.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$
$$+8.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$
$$+2.[h^2.h^3.(g^1)^2 + h^2.h^1.g^1.g^3 + h^1.h^3.g^1.g^2$$
$$+(h^1)^2.g^2.g^3]\,.\,(h^2.g^3 + h^3.g^2)$$
$$= -2.h^1.g^1\,.\,(h^3.g^2)^2 - 2.h^1.g^1\,.\,(h^2.g^3)^2$$
$$-2.h^2.g^2\,.\,(h^3.g^1)^2 - 2.h^2.g^2\,.\,(h^1.g^3)^2$$

$$-2.h^3.g^3\,.\,(h^1.g^2)^2\;-\;2.h^3.g^3\,.\,(h^2.g^1)^2$$
$$-\,4.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$
$$+\,2.[h^3.g^3\,.\,(h^2.g^1)^2\;+\;h^1.g^1.(h^2.g^3)^2$$
$$+\,h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3\;+\;h^2.g^2\,.\,(h^1.g^3)^2]$$
$$+\,2.[h^2.g^2.(h^3.g^1)^2\;+\;h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$
$$+\,h^1.g^1\,.\,(h^3.g^2)^2\;+\;h^3.g^3\,.\,(h^1.g^2)^2]$$
$$=\;0$$

□

2. La partie anti-symétrique de toute table de Pythagore construite autour du produit tensoriel classique du type $\mathrm{T}_2(\otimes)(\mathbf{h},\,\mathbf{g})$ est une matrice de rotation ; son déterminant est forcément nul dans une discussion ayant lieu sur M(3, C).
3. Le déterminant de toute table de Pythagore construite autour du produit tensoriel classique du type $\mathrm{T}_2(\otimes)(\mathbf{h},\,\mathbf{g})$ est évidemment nul.

Lemme 2.1. *Formalisme alternatif pour les noyaux des décompositions non-triviales.*

Les tables de Pythagore construites autour du produit tensoriel classique du type $\mathrm{T}_2(\otimes)(\mathbf{h},\,\mathbf{g})$ ont un formalisme mimant celui des noyaux non-triviaux pour les décompositions de certaines familles de produits vectoriels déformés. Elles se caractérisent par :

1. une partie symétrique dont le déterminant est nul :
2. une partie anti-symétrique représentant une rotation dont l'argument est, peut-être au signe moins prés, le produit vectoriel classique $\mathbf{h} \wedge \mathbf{g}$; son déterminant est également nul.
3. un déterminant nul.

La suite de l'exploration consacrée à l'involution définie sur les produits vectoriels déformés démontrera ultérieurement l'importance de ce formalisme alternatif.

2.3 Classification

Sur la base des configurations précédentes, une esquisse de classification peut débuter :

1. **Première catégorie** :
   La polynomiale $\Lambda(\mathbf{projectile})$ accompagnant une décomposition non-triviale d'un produit vectoriel déformé est propre ; dans ce cas le noyau est donné par la formule :

$$[N]_{|A|}\;=\;\frac{1}{2}\,.\,Hess_{(\mathbf{projectile},0)}\Lambda(\mathbf{projectile})\;-\;|A|\,.\,_{[J]}\Phi(_{\Lambda(\mathbf{projectile})}\mathbf{s}) \qquad (66)$$

   La partie principale de la décomposition non-triviale vaut :

$$[P]_{|A|}\;=\;|A|\,.\,\{[A]^t\,.\,[J]\}\,.\,[N_{|A|}]^t;\;|A|\;=\;\pm 1 \qquad (67)$$

   et la polynomiale elle-même peut s'écrire :

$$\Lambda(\mathbf{projectile})\;=\;||_{[A]}\Phi(\mathbf{projectile})\;-\;|A|\,.\,\{[A]^t\,.\,[J]\}\,.\,[N]_{|A|}|$$

2. **Seconde catégorie** :
La polynomiale $\Lambda(\mathbf{projectile})$ est impropre. Revenant à cet endroit sur le théorème initial, ces situations sont telles que :

$$|_{[A]}\Phi(\mathbf{projectile}) - [P]| \tag{68}$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3} d_{ij} \,.\, (projectile)^i \,.\, (projectile)^j + \sum_{i=1}^{i=3} d_i \,.\, (projectile)^i - |P|$$

Mais ici, le déterminant de la Hessienne est nul :

$$|Hess_{(\mathbf{projectile},0)}\Lambda(\mathbf{projectile})| = 0 \tag{69}$$

Cette seconde catégorie contient elle-même deux familles :

— **Première famille de la seconde catégorie** : La Hessienne n'est pas nulle.
Les parties symétriques des tables de Pythagore introduites précédemment entrent dans cette famille. Ce fait invite à tester l'hypothèse faisant de ces parties symétriques des représentations alternatives de Hessiennes intervenant dans les noyaux des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés. Pour avancer rationnellement sur cette voie, il est nécessaire de pouvoir lier le projectile et la paire de vecteurs $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$. Ici, les résultats généraux acquis dans [[b]; versions française et anglophone] livrent une formule liant la partie principale d'une décomposition non-triviale à la Hessienne [b-FR, théorème 1.2 de la jauge Hessienne, p.10] et [[b]-GB, corollaire 3.1 du théorème de reconstruction, p. 19]; la proposition examinée ici s'écrit :

$$Hess_{(\mathbf{projectile},\,0)}\Lambda(\mathbf{projectile}) \tag{70}$$

$$=$$

$$-|A| \,.\, \{[J]^t \,.\, ([A]^{-1})^t \,.\, [P] + [P]^t \,.\, [A]^{-1} \,.\, [J]\}$$

$$=$$

$$\{T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})\}$$

De cette équation il est possible de déduire au moins un ensemble particulier de parties principales :

$$\forall\, \mathbf{X} : T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) + {}_{[J]}\Phi(\mathbf{X}) = -|A| \,.\, [J]^t \,.\, ([A]^{-1})^t \,.\, [P] \tag{71}$$

Par ailleurs les résultats généraux livrent également :

— Le déterminant de ces parties principales particulières; ici, il est tel que :

$$|P| = |T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) + {}_{[J]}\Phi(\mathbf{X})| = <\mathbf{h}, \mathbf{X}>_{Id_3} \,.\, <\mathbf{g}, \mathbf{X}>_{Id_3} \tag{72}$$

D'où il ressort immédiatement que ce déterminant s'annule lorsque le vecteur inconnu $\mathbf{X}$ est orthogonal à au moins un des vecteurs de la paire ($\mathbf{h}$, $\mathbf{g}$).

— Une analogie formelle entre ces parties principales particulières et celles obtenues lorsque le déterminant de la Hessienne ne s'annule pas.

Démonstration. Il suffit de réécrire le formalisme particulier de la façon qui suit en inversant la partie déformamte :

$$[P] \tag{73}$$

$$=$$

$$|A| \,.\, (([A]^{-1})^t)^{-1} \,.\, [J] \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,+\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{X})\}$$

Puis en se servant de la partition naturelle de la table de Pythagore y figurant :

$$|A| \,.\, [P]$$

$$=$$

$$(([A]^{-1})^t)^{-1} \,.\, [J] \,.\, \{\frac{1}{2} \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) + T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\} + {}_{[J]}\Phi(\mathbf{X} + \frac{1}{2} \,.\, \mathbf{h} \wedge \mathbf{g})\}$$

Ainsi, l'analogie formelle avec les parties principales mises en évidence dans [[b]] est obtenue chaque fois que :

1. La matrice déformante [A] respecte la *règle d'or* :

$$(([A]^{-1})^t)^{-1} \,=\, [A]^t \tag{74}$$

"La transposée de son inverse vaut l'inverse de sa transposée". Les conséquences de cette règle sur le formalisme de ces matrices seront approfondies plus tard.

2. Il est possible d'isoler un vecteur jouant le rôle du vecteur singulier :

$$\mathbf{X} \,+\, \frac{1}{2} \,.\, (\mathbf{h} \,\wedge\, \mathbf{g}) \,\equiv\, {}_{\Lambda}\mathbf{s} \tag{75}$$

La somme d'un vecteur inconnu a priori quelconque **X** et du produit vectoriel classique des vecteurs de la paire (**h**, **g**) joue un rôle équivalent à celui joué par le vecteur singulier de la polynomiale Λ lorsque celle-ci est propre.

□

— La polynomiale générique caractérisant cette famille de situations s'écrit :

$$|{}_{[A]}\Phi(\mathbf{projectile}) \,-\, [P_{|A|}]| \tag{76}$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3} d_{ij} \,.\, (\mathit{projectile})^i \,.\, (\mathit{projectile})^j \,+\, \sum_{i=1}^{i=3} d_i \,.\, (\mathit{projectile})^i \,-\, |P_{|A|}|$$

$$=$$

$$...$$

Avec, en théorie, les coefficients de degré deux suivants :

$$d_{11}$$

$$=$$

$$\begin{gathered} p_{11} \,.\, (A^2_{13} \,.\, A^3_{12} \,-\, A^2_{12} \,.\, A^3_{13}) \\ +p_{21} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^3_{13} \,-\, A^1_{13} \,.\, A^3_{12}) \\ +p_{31} \,.\, (A^1_{13} \,.\, A^2_{12} \,-\, A^1_{12} \,.\, A^2_{13}) \end{gathered}$$

$$d_{22}$$

$$=$$

$$p_{12} \,.\, (A^2_{21} \,.\, A^3_{13} \,-\, A^2_{23} \,.\, A^3_{21})$$

$$+\,p_{22}\,.\,(A^1_{23}\,.\,A^3_{21}\;-\;A^1_{21}\,.\,A^3_{23})$$
$$+\,p_{32}\,.\,(A^1_{21}\,.\,A^2_{23}\;-\;A^1_{23}\,.\,A^2_{21})$$
$$d_{33}$$
$$=$$
$$p_{13}\,.\,(A^2_{31}\,.\,A^3_{32}\;-\;A^2_{32}\,.\,A^3_{31})$$
$$+\,p_{23}\,.\,(A^1_{12}\,.\,A^3_{13}\;-\;A^1_{13}\,.\,A^3_{12})$$
$$+\,p_{33}\,.\,(A^1_{32}\,.\,A^2_{31}\;-\;A^1_{31}\,.\,A^2_{32})$$
$$d_{12}\;+\;d_{21}$$
$$=$$
$$-\,p_{11}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{23}\;-\;A^2_{23}\,.\,A^3_{12})$$
$$-\,p_{12}\,.\,(A^3_{12}\,.\,A^2_{13}\;-\;A^2_{12}\,.\,A^3_{13})$$
$$-\,p_{21}\,.\,(A^1_{23}\,.\,A^3_{12}\;-\;A^1_{12}\,.\,A^3_{23})$$
$$-\,p_{22}\,.\,(A^3_{12}\,.\,A^1_{13}\;-\;A^1_{12}\,.\,A^3_{13})$$
$$-\,p_{31}\,.\,(A^1_{12}\,.\,A^2_{23}\;-\;A^1_{23}\,.\,A^2_{12})$$
$$-\,p_{32}\,.\,(A^1_{12}\,.\,A^2_{13}\;-\;A^2_{12}\,.\,A^1_{13})$$

et les permutations cycliques ad hoc pour les deux autres paires de coefficients. Les coefficients de degré un sont explicités dans [b].

Exemple 2.1. ***Le produit vectoriel classique***
Dans ce cas, [A] = [J], |A| = -1 et il est possible de prouver que [[f] ; remarque 1.4, pp. 5-6] :

$$d_{ij}\;=\;-p_{ij}$$
$$d_1\;=\;p_{11}\,.\,(p_{32}\;-\;p_{23})\;+\;(p_{21}\,.\,p_{13}\;-\;p_{31}\,.\,p_{12})$$
$$d_2\;=\;p_{22}\,.\,(p_{13}\;-\;p_{31})\;+\;(p_{21}\,.\,p_{32}\;-\;p_{12}\,.\,p_{23})$$
$$d_3\;=\;p_{33}\,.\,(p_{21}\;-\;p_{12})\;+\;(p_{32}\,.\,p_{13}\;-\;p_{23}\,.\,p_{31})$$

L'Equ.(70) permet de poser en particulier :

$$[P_{-1}]\;=\;[p_{ij}]\;=\;-[h^i\,.\,g^j\;+\;\epsilon_{ijk}\,.\,X^k]$$

Du coup :

$$d_{ij}\;=\;h^i\,.\,g^j\;+\;\epsilon_{ijk}\,.\,X^k$$

Comme :

$$d_1\;=\;-\{2\,.\,h^1\,.\,g^1\,.\,X^1\;+\;(h^1\,.\,g^2\;+\;h^2\,.\,g^1)\,.\,X^2\;+\;(h^1\,.\,g^3\;+\;h^3\,.\,g^1)\,.\,X^3\}$$
$$d_2\;=$$
$$d_3\;=$$

Ce qui semble se laisser condenser par :

$$\forall\,i\;=\;1,\,2,\,3\;:\;d_i\;=\;-\sum_j\,(h^i\,.\,g^j\;+\;h^j\,.\,g^i)\,.\,X^j$$

La polynomiale signant la décomposition non-triviale prend désormais le formalisme :

$$\Lambda(\textbf{projectile})$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3}(h^i\,.\,g^j\,+\,\epsilon_{ijk}\,.\,X^k)\,.\,(projectile)^i\,.\,(projectile)^j$$

$$-\sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3}(h^i\,.\,g^j\,+\,h^j\,.\,g^i)\,.\,X^j\,.\,X^i$$

$$-<\mathbf{h},\,\mathbf{X}>_{Id_3}\,.\,<\mathbf{g},\,\mathbf{X}>_{Id_3}$$

Le vecteur inconnu qui a été introduit au cours de la démarche est quelconque. Il ne semble donc pas non plus que la généralité de la discussion soit réduite en choisissant :

$$\mathbf{X}\,=\,\mathbf{projectile}$$

Auquel cas, la polynomiale caractérisant ces situations est typiquement du genre :

$$\Lambda(\mathbf{projectile})$$

$$=$$

$$\sum_{i=1}^{i=3}\sum_{j=1}^{j=3}(h^i\,.\,g^j)\,.\,X^i\,.\,X^j-(h^i\,.\,g^j+h^j\,.\,g^i)\,.\,X^j\,.\,X^i-<\mathbf{h},\,\mathbf{X}>_{Id_3}\,.\,<\mathbf{g},\,\mathbf{X}>_{Id_3}$$

$$=$$

$$-2\,.<\mathbf{h},\,\mathbf{X}>_{Id_3}\,.\,<\mathbf{g},\,\mathbf{X}>_{Id_3}$$

C'est une forme quadratique dont les coefficients sont déterminés par la table de Pythagore $\mathrm{T}_2(\otimes)(\mathbf{h},\,\mathbf{g})$ ou sa transposée.

— **Seconde famille de la seconde catégorie** : La Hessienn est nulle.
Si l'Equ.(64) restait valide dans ce cas, elle engendrerait des contraintes très précises :

$$[0]$$

$$=$$

$$-|A|\,.\,\{[J]^t\,.\,([A]^{-1})^t\,.\,[P]\,+\,[P]^t\,.\,[A]^{-1}\,.\,[J]\}$$

$$=$$

$$\{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\,+\,T_2^t(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\}$$

Les tables de Pythagore compatibles avec ces situations devraient être anti-symétriques ; ce qui est impossible.

Démonstration. Si tel était le cas, à supposer par simplicité que les vecteurs **h** et **g** n'ont aucune composante nulle, il faudrait pouvoir écrire :

$$h^1\,.\,g^2\,=\,-h^2\,.\,g^1\,\Rightarrow\,g^2\,=\,-\frac{h^2}{h^1}\,.\,g^1$$

$$h^1\,.\,g^3\,=\,-h^3\,.\,g^1\,\Rightarrow\,g^3\,=\,-\frac{h^3}{h^1}\,.\,g^1$$

$$h^2\,.\,g^3\,=\,-h^3\,.\,g^2\,\Rightarrow\,g^3\,=\,-\frac{h^3}{h^2}\,.\,g^2\,=\,-\frac{h^3}{h^2}\,.\,-\frac{h^2}{h^1}\,.\,g^1\,=\,\frac{h^3}{h^1}\,.\,g^1$$

La première ligne est incompatible avec la troisième. □

Compte tenu des résultats acquis sur les déterminants (voir la remarque "dégénérescences"), il resterait à envisager le cas d'une Hessienne se confondant avec une table de Pythagore qui serait ici nulle ; ceci ne fait aucun sens et finalement les seules parties principales se laissant associer avec une Hessienne nulle (quelle qu'en soit la nature) doivent seulement respecter :

$$|A| = \pm 1 \,:\, [J]^t \,.\, ([A]^{-1})^t \,.\, [P] + [P]^t \,.\, [A]^{-1} \,.\, [J] = [0]$$

Ce qui se traduit en particulier par :

$$[A],\, [J],\, |A| = -1 \,:\, [P] + [P]^t = [0]$$

Les parties principales sont antisymétriques lorsque le produit vectoriel est classique et que la Hessienne est nulle. Les matrice de rotation des décompositions intuitives et triviales illustrent parfaitement ces situations : ${}_{[J]}\Phi(\mathbf{projectile})$. Plus généralement, la contrainte ci-dessus se laisse généraliser à n'importe quel produit vectoriel déformé par une matrice [A] dont le déterminant vaut plus ou moins un en posant :

$$|A| = \pm 1 \,:\, {}_{[A]}\Phi(\mathbf{projectile}) = [J]^t \,.\, ([A]^{-1})^t \,.\, [P]$$

pourvu que :

$${}_{[A]}\Phi(\mathbf{projectile}) + {}_{[A]}\Phi^t(\mathbf{projectile}) = [0]$$

La première de ces deux relations peut évoquer la relation de continuité obtenue dans un autre de mes travaux en comparant la méthode intrinsèque et la méthode extrinsèque. Pour autant, les apparences sont souvent trompeuses et ce point devra être analysé plus à fond avant de tirer une quelconque conclusion le concernant.

3 Caractérisation de l'involution.

3.1 Outils préliminaires.

Après avoir exposé la problématique de l'involution ainsi que son lien éventuel avec l'astronomie (section 01) et un complément sur les solutions possibles de la question (E) dans les espaces de dimension trois (section 02), je voudrais maintenant rentrer dans le vif du sujet, c'est-à-dire tenter de caractériser les matrices [B([A], **a**] représentant l'involution et, mieux encore, en donner les représentations concrètes.

Remarque 3.1. ***Une autre lecture des matrices de M(3, C).***

Tout élément de M(3, C), par exemple [A], se laisse décoder visuellement comme un enchevêtrement de six éléments de E(3, C).

Démonstration. De fait :

$$[A] = \begin{bmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{bmatrix}$$

peut se comprendre comme la juxtaposition horizontale de trois colonnes :

$$[A] = [|\mathbf{a}_1 >,\, |\mathbf{a}_2 >,\, |\mathbf{a}_3 >]$$

avec :

$$|\mathbf{a}_\eta> \equiv \left| \begin{array}{c} A^\eta_{12} \\ A^\eta_{23} \\ A^\eta_{13} \end{array} \right\rangle ; \; \eta = 1, 2, 3.$$

ou comme la superposition verticale de trois lignes :

$$[A] = \begin{bmatrix} |\mathbf{a}^1> \\ |\mathbf{a}^2> \\ |\mathbf{a}^3> \end{bmatrix}$$

Chacun des six vecteurs implicitement contenus dans cet élément [A] de M(3, C) est un élément de $C^3 \equiv$ E(3, C). Et chacune des trois composantes complexes de chacun de ces six vecteurs est commune à un autre vecteur que celui à laquelle elle appartient. □

Concernant l'application de ce décodage visuel à la forme normalisée de la matrice déformante ; il vient pour les trois colonnes :

$$[A^\diamond] = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$|\mathbf{a}_1> \equiv \left| \begin{array}{c} A^1_1 \\ A^2_1 \\ A^3_1 \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{a}_2> \equiv \left| \begin{array}{c} A^1_2 \\ A^2_2 \\ A^3_2 \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{a}_3> \equiv \left| \begin{array}{c} A^1_3 \\ A^2_3 \\ A^3_3 \end{array} \right\rangle$$

et pour les trois lignes :

$$|\mathbf{a}^1> \equiv \left| \begin{array}{c} A^1_1 \\ A^1_2 \\ A^1_3 \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{a}^2> \equiv \left| \begin{array}{c} A^2_1 \\ A^2_2 \\ A^2_3 \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{a}^3> \equiv \left| \begin{array}{c} A^3_1 \\ A^3_2 \\ A^3_3 \end{array} \right\rangle$$

Definition 3.1. ***Hexa-pack***

Un *hexa-pack* est un ensemble de six éléments de E(3, C) dont les composantes sont enchevêtrées de telle sorte qu'elles permettent la reconstruction d'un élément de M(3, C) ; celui-ci est *la mère* de cet hexa-pack.

Remarque 3.2. ***Quelques propriétés remarquables des hexa-packs.***

Il convient de remarquer à ce propos que :
- Tout élément de M(3, C) est équivalent à un hexa-pack mais que tout élément de E^6(3, C) ne constitue inversement pas systématiquement un hexa-pack, donc une matrice de M(3, C).
- Tout hexa-pack contient deux sous-ensembles de trois vecteurs obtenus par la manière dont sa mère est visuellement décodée : le premier sous-ensemble est constitué des trois colonnes : $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$; tandis que le second l'est à partir des trois lignes : $(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3)$.
- Tout hexa-pack permet de construire neuf produits vectoriels classiques distincts ; à savoir les $\mathbf{a}_i \wedge \mathbf{a}^j$ pour i et j = 1, 2, 3. Dans le cas des mères symétriques, il n'en reste que six parce que $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}^i$ et que cette égalité entraine la nullité de trois d'entre eux.
- Chacun des produits vectoriels classiques peut être déformé, individuellement ou collectivement.
- Tout hexa-pack permet aussi de construire neuf tables de Pythagore $T_2(\otimes)(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^j)$ pour i et j = 1, 2, 3 ; et leurs transposées.

3.2 Propriétés des matrices [B([A], a)] impliquées dans l'involution.

L'objectif de la suite de ce document est de découvrir le formalisme et les propriétés de la matrice [B([A], **a**)] introduite au travers de l'Equ.(11). Le but consiste donc à extraire toute la substantifique moelle des liens entre [B(f)] et f = [**a**, ...][A] ≡ ([A], **a**).

Remarque 3.3. ***Involution et conditions inertielles***

Les lois de la mécanique classique (je pense en particulier aux lois de Newton) enseignent que la position spatiale d'un objet physique (souvent associée à un vecteur **x** de E(3, R)) qui est initialement immobile [2], reste inchangée tant que cet objet n'interagit pas avec son environnement ou, ce qui revient au même, tant que la somme des interactions qu'il subit à un instant t de la chronologie est nulle.

Ainsi, (i) si g = [**p**, ...][B(f)] représente une action de l'environnement sur cet objet -donc sur sa position- via la quantité de mouvement **p** et la matrice [B] et (ii) si cette action là laisse la position de l'objet inchangée, alors il devient logique d'écrire [**p**, **x**][B(f)] = **x**.

Cette description mathématique d'une action physique signe le fait que le moment angulaire déformé f = [**x**, **p**][A] induit une involution sur V. C'est un moyen simple et original de relier le concept mathématique d'involution au concept physique d'inertie. Le moyen le plus simple de décrire cette forme d'inertie s'obtient en l'associant avec la décomposition mathématiquement triviale de g : ${}_{[B(f)]}\Phi(\mathbf{p}) = \mathrm{Id}_3$. Par intuition, je relaterai désormais cette configuration aux zones vides de l'espace-temps.

Remarque 3.4. ***Première propriété caractérisant le vide.***

Au sein de cette théorie,les composantes de la matrice générique [B] associée avec la notion d'inertie introduite et expliquée précédemment doivent respecter les relations :

$$\begin{aligned} -\,(B^1_{12}\,.\,a^2 \,+\, B^1_{13}\,.\,a^3) &= 1 \\ -(B^2_{12}\,.\,a^2 \,+\, B^2_{13}\,.\,a^3) &= 0 \\ -(B^3_{12}\,.\,a^2 \,+\, B^3_{13}\,.\,a^3) &= 0 \\ B^1_{12}\,.\,a^1 \,-\, B^1_{23}\,.\,a^3 &= 0 \\ B^2_{12}\,.\,a^1 \,-\, B^2_{23}\,.\,a^3 &= 1 \\ B^3_{12}\,.\,a^1 \,-\, B^3_{23}\,.\,a^3 &= 0 \\ B^1_{13}\,.\,a^1 \,+\, B^1_{23}\,.\,a^2 &= 0 \\ B^2_{13}\,.\,a^1 \,+\, B^2_{23}\,.\,a^2 &= 0 \\ B^3_{13}\,.\,a^1 \,+\, B^3_{23}\,.\,a^2 &= 1 \end{aligned} \tag{77}$$

Ces relations se laissent réorganiser en deux sous-ensembles :

— Les conditions concernant la diagonale de la matrice [B] :

$$-(B^1_{12}\,.\,a^2 \,+\, B^1_{13}\,.\,a^3) = 1$$

$$B^2_{12}\,.\,a^1 \,-\, B^2_{23}\,.\,a^3 = 1$$

$$B^3_{13}\,.\,a^1 \,+\, B^3_{23}\,.\,a^2 = 1$$

2. La littérature utilise parfois l'expression *immobile à l'origine de la chronologie dans le repère de la discussion.*

— Les conditions concernant les composantes situées en dehors de la diagonale de la matrice [B] :

$$\begin{aligned} B^2_{12} \,.\, a^2 &= -B^2_{13} \,.\, a^3 \\ B^3_{12} \,.\, a^2 &= -B^3_{13} \,.\, a^3 \\ B^1_{23} \,.\, a^3 &= B^1_{12} \,.\, a^1 \\ B^3_{23} \,.\, a^3 &= B^3_{12} \,.\, a^1 \\ B^1_{13} \,.\, a^1 &= -B^1_{23} \,.\, a^2 \\ B^2_{13} \,.\, a^1 &= -B^2_{23} \,.\, a^2 \end{aligned}$$

Le second sous-ensemble permet d'obtenir :

$$\forall\, \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \;:\; B^1_{13} \,.\, B^3_{23} \,.\, B^2_{12} \;=\; B^2_{23} \,.\, B^1_{12} \,.\, B^3_{13}$$

Et :

$$\forall\, \mathbf{a} \neq \mathbf{0} :\; B^3_{12} \,.\, B^2_{13} \,.\, B^1_{23} \;=\; B^2_{23} \,.\, B^1_{12} \,.\, B^3_{13} \;=\; \Pi$$

Ces deux premiers résultats se condensent en :

$$[B] \;=\; \begin{pmatrix} B^1_{12} & B^2_{12} & B^3_{12} \\ B^1_{23} & B^2_{23} & B^3_{23} \\ B^1_{13} & B^2_{13} & B^3_{13} \end{pmatrix}$$

et :

$$\forall\, \mathbf{a} \neq \mathbf{0} :\; B^1_{13} \,.\, B^3_{23} \,.\, B^2_{12} \;=\; B^3_{12} \,.\, B^2_{13} \,.\, B^1_{23} \;=\; B^2_{23} \,.\, B^1_{12} \,.\, B^3_{13} \;=\; \Pi \tag{78}$$

Lemme 3.1. *Des trois produits monochromes.*

Tout élément de M(3, C) contient neuf composantes qui peuvent être réparties conventionnellement en trois sous-ensembles colorés en rouge, vert et bleu. Cette partition permet de calculer trois produits monochromes.

Si, peu importe le vecteur **a**, l'égalité ${}_{[B(f)]}\Phi(\mathbf{x}) = \mathrm{Id}_3$ est vraie, alors les trois produits monochromes sont forcément égaux entre eux.

Remarque 3.5. ***Deuxième propriété caractérisant le vide.***

Le déterminant de la matrice [B] s'obtient classiquement en calculant in extenso (méthode de Cramer) :

$$|B| \tag{79}$$

$$=$$

$$B^1_{12} \,.\, (B^2_{23} \,.\, B^3_{13} - B^2_{13} \,.\, B^3_{23}) - B^2_{12} \,.\, (B^1_{23} \,.\, B^3_{13} - B^1_{13} \,.\, B^3_{23}) + B^3_{12} \,.\, (B^1_{23} \,.\, B^2_{13} - B^1_{13} \,.\, B^2_{23})$$

Pour le plaisir, je vais maintenant calculer l'expression :

$$\Delta_P \tag{80}$$

$$=$$

$$B^1_{12} \,.\, (B^2_{23} \,.\, B^3_{13} - B^2_{13} \,.\, B^3_{23}) + B^2_{23} \,.\, (B^1_{12} \,.\, B^3_{13} - B^1_{13} \,.\, B^3_{12}) + B^3_{13} \,.\, (B^1_{12} \,.\, B^2_{23} - B^1_{23} \,.\, B^2_{12})$$

Elle est en quelque sorte un pseudo-determinant obtenu en appliquant une méthode similaire au procédé classique mais en descendant le long de la diagonale de la matrice [B]. L'Equ.(78) permet alors de constater que :

$$|B| \;=\; 3.\Pi \;-\; B^1_{12} \,.\, B^2_{13} \,.\, B^3_{23} \;-\; B^2_{12} \,.\, B^1_{23} \,.\, B^3_{13} \;-\; B^3_{12} \,.\, B^1_{13} \,.\, B^2_{23} \;=\; \Delta_P \tag{81}$$

Lemme 3.2. *Des produits polychromes.*

Tout élément de M(3, C) contient neuf composantes qui peuvent être réparties conventionnellement en trois sous-ensembles colorés en rouge, vert et bleu. Cette partition permet de calculer trois produits polychromes.

Si, peu importe le vecteur $\mathbf{a}$, l'égalité ${}_{[B(f)]}\Phi(\mathbf{x}) = \mathrm{Id}_3$ est vraie, alors le déterminant de la matrice [B] est égal soit à son pseudo-déterminant, soit à trois fois la valeur d'un produit monochrome moins la somme des trois produits polychromes.

Remarque 3.6. ***Troisième propriété caractérisant le vide.***

Le second sous-ensemble des conditions concernant les composantes hors de la diagonale de la matrice [B] livre aussi :

$$\frac{B_{12}^2}{B_{12}^3} = \frac{B_{13}^2}{B_{13}^3}$$

$$\frac{B_{23}^1}{B_{23}^3} = \frac{B_{12}^1}{B_{12}^3}$$

$$\frac{B_{13}^1}{B_{13}^2} = \frac{B_{23}^1}{B_{23}^2}$$

L'injection de ces relations dans l'Equ.(79) impose finalement :

$$\forall\,[B] \neq [0] \,:\, |B| = 0 \tag{82}$$

Lemme 3.3. *Du determinant nul.*

Si, peu importe le vecteur $\mathbf{a}$, l'égalité ${}_{[B(f)]}\Phi(\mathbf{x}) = \mathrm{Id}_3$ est vraie, alors le déterminant de la matrice [B] est nul ($|\mathrm{B}| = 0$). Du coup, à cause du lemme précédent : la somme des trois produits monochromes est égale à la somme des trois produits polychromes. Equivalemment, chaque produit monochrome vaut le tiers de la somme des produits polychromes.

Remarque 3.7. ***Quatrième condition caractérisant le vide.***

Les conditions concernant les composantes de la diagonale de la matrice [B] sont :

$$0\,.\,a^1 - B_{12}^1\,.\,a^2 - B_{13}^1\,.\,a^3 = 1$$

$$B_{12}^2\,.\,a^1 + 0\,.\,a^2 - B_{23}^2\,.\,a^3 = 1$$

$$B_{13}^3\,.\,a^1 + B_{23}^3\,.\,a^2 + 0\,.\,a^3 = 1$$

Elles se laissent réorganiser en :

$$\begin{pmatrix} 0 & -B_{12}^1 & -B_{13}^1 \\ B_{12}^2 & 0 & -B_{23}^2 \\ B_{13}^3 & B_{23}^3 & 0 \end{pmatrix} . |\mathbf{a}> = \left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\rangle \tag{83}$$

Le discriminant de ce système se calcule facilement et il vaut zéro à cause de l'Equ.(78) :

$$\begin{vmatrix} 0 & -B_{12}^1 & -B_{13}^1 \\ B_{12}^2 & 0 & -B_{23}^2 \\ B_{13}^3 & B_{23}^3 & 0 \end{vmatrix} = B_{12}^1\,.\,B_{23}^2\,.\,B_{13}^3 - B_{13}^1\,.\,B_{12}^2\,.\,B_{23}^3 = 0 \tag{84}$$

Par conséquent, le systéme est dégénéré et les composantes du vecteur **a** ne peuvent pas être indépendantes. Ces trois relations peuvent également s'écrire :

$$B_{12}^{1} . a^{2} = -(1 + B_{13}^{1} . a^{3})$$
$$B_{23}^{2} . a^{3} = -(1 - B_{12}^{2} . a^{1})$$
$$B_{13}^{3} . a^{1} = 1 - B_{23}^{3} . a^{2}$$

Un produit fournit :

$$B_{13}^{3} . B_{12}^{1} . B_{23}^{2} . a^{1} . a^{2} . a^{3} = (1 - B_{12}^{2} . a^{1}) . (1 - B_{23}^{3} . a^{2}) . (1 + B_{13}^{1} . a^{3})$$

Cette nouvelle relation est ostensiblement une polynomiale de degré deux écrite en fonction des composantes du vecteur **a** :

Démonstration. Un développement fournit :

$$B_{13}^{3} . B_{12}^{1} . B_{23}^{2} . a^{1} . a^{2} . a^{3}$$
$$=$$
$$(1 - B_{12}^{2} . a^{1}) . (1 - B_{23}^{3} . a^{2} + B_{13}^{1} . a^{3} - B_{23}^{3} . B_{13}^{1} . a^{2} . a^{3})$$
$$=$$
$$(1 - B_{23}^{3} . a^{2} + B_{13}^{1} . a^{3} - B_{23}^{3} . B_{13}^{1} . a^{2} . a^{3})$$
$$-$$
$$B_{12}^{2} . a^{1} . (1 - B_{23}^{3} . a^{2} + B_{13}^{1} . a^{3} - B_{23}^{3} . B_{13}^{1} . a^{2} . a^{3})$$
$$=$$
$$1 - B_{12}^{2} . a^{1} - B_{23}^{3} . a^{2} + B_{13}^{1} . a^{3} - B_{23}^{3} . B_{13}^{1} . a^{2} . a^{3}$$
$$+ B_{12}^{2} . B_{23}^{3} a^{1} . a^{2} - B_{12}^{2} . B_{13}^{1} a^{1} . a^{3} + B_{12}^{2} . B_{23}^{3} . B_{13}^{1} . a^{1} . a^{2} . a^{3}$$

L'Equ.(68) aide à se rendre compte du fait que ces calculs livrent finalement :

$$\Psi(\mathbf{a})$$
$$=$$
$$1 - B_{12}^{2} . a^{1} - B_{23}^{3} . a^{2} + B_{13}^{1} . a^{3} - B_{23}^{3} . B_{13}^{1} . a^{2} . a^{3} + B_{12}^{2} . B_{23}^{3} a^{1} . a^{2} - B_{12}^{2} . B_{13}^{1} a^{1} . a^{3}$$
$$=$$
$$0$$

□

Ce qui permet d'aboutir au :

Lemme 3.4. *De la contrainte bleue.*

C'est un fait étrange mais indéniable, la contrainte énoncée précédemment n'implique que les composantes bleues de la matrice [B] ; d'où son nom :

$$\alpha = B_{12}^{2} ; \beta = B_{23}^{3} ; \gamma = B_{13}^{1} \tag{85}$$

$$\Psi(\mathbf{a}) = 1 - \alpha . a^{1} - \beta . a^{2} - \gamma . a^{3} + \beta . \gamma . a^{2} . a^{3} + \alpha . \beta . a^{1} . a^{2} + \alpha . \gamma . a^{1} . a^{3} = 0$$

Exemple 3.1. ***Tables de Pythagore pour le produit tensoriel classique et conditions spécifiques au vide.***

Ce paragraphe débute l'exploration d'une interrogation : "Une table de Pythagore construite sur le produit tensoriel classique peut-elle parfois être une matrice définissant l'involution d'un produit vectoriel déformé ?"

Il revient au même de se demander si la relation suivante est envisageable :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) = \begin{bmatrix} h^1 . g^1 & h^2 . g^1 & h^3 . g^1 \\ h^1 . g^2 & h^2 . g^2 & h^3 . g^2 \\ h^1 . g^3 & h^2 . g^3 & h^3 . g^3 \end{bmatrix} = [B] \,|_{[B]}\Phi(\mathbf{a}) = Id_3$$

De fait :

1. Puisque la discussion se déroule sur le corps des nombres complexes, les produits monochromes d'une table du genre ci-dessus sont égaux :
$$\Pi = h^1 . h^2 . h^3 . g^1 . g^2 . g^3 \tag{86}$$
2. Il en est de même pour les produits polychromes de cette table générique.
3. Très ostensiblement, le déterminant de cette table vaut zéro.
4. La contrainte bleue s'écrit :
$$1 = h^2 . g^1 . a^1 - h^3 . g^2 . a^2 + h^1 . g^3 . a^3 \tag{87}$$
$$- h^3 . g^2 . h^1 . g^3 . a^2 . a^3 + h^2 . g^1 . h^3 . g^2 \, a^1 . a^2 - h^2 . g^1 . h^1 . g^3 \, a^1 . a^3$$
5. A cause de l'Equ.(e89) qui sera démontrée un peu plus loin, cette table doit être une décomposition triviale qui dépend des composantes du vecteur **a** ; ceci oblige à vérifier la validité de :
$$\eta\,,\,\epsilon = 1,2,3 \,:\, B^\eta_\epsilon = \sum_{\lambda=1}^{3} D^\eta_{\lambda\epsilon} . a^\lambda$$
ou, plus précisément, de :
$$\eta\,,\,\epsilon = 1,2,3 :$$
$$B^\eta_\epsilon = (A^\eta_3 . A^2_\epsilon + A^\eta_2 . A^3_\epsilon) . a^1 + (A^\eta_1 . A^3_\epsilon - A^\eta_3 . A^1_\epsilon) . a^2 - (A^\eta_1 . A^2_\epsilon + A^\eta_2 . A^1_\epsilon) . a^3$$
Dans le cas examiné ici :
$$\eta\,,\,\epsilon = 1,2,3 : \tag{88}$$
$$h^\epsilon . g^\eta$$
$$=$$
$$(A^\eta_3 . A^2_\epsilon + A^\eta_2 . A^3_\epsilon) . a^1 + (A^\eta_1 . A^3_\epsilon - A^\eta_3 . A^1_\epsilon) . a^2 - (A^\eta_1 . A^2_\epsilon + A^\eta_2 . A^1_\epsilon) . a^3$$

Les points 1, 2 et 3 constituent un point de départ encourageant. Les points 4 et 5, en revanche, ne sont pas satisfaisants et -à ce stade de la discussion- il ne m'est pas encore possible d'aller plus loin. Je reprendrai la recherche d'une réponse à la question posée ici un peu plus tard dans ce document ; voir l'exemple 3.2. Puisque les tables de Pythagore, ou plus exactement leurs parties symétriques, peuvent représenter des parties principales de décompositions non-triviales, j'envisagerai de savoir si -en général- les noyaux de ces parties principales peuvent parfois être des matrices caractérisant des produits vectoriels déformés involutifs.

3.3 La fraction de Koide.

Definition 3.2. ***La fraction d'Y. Koide, version mathématique du concept.***

Par convention, je dirai qu'il existe une fraction mathématique de Koide chaque fois que, disposant de trois nombres (X, Y, Z), il sera possible de calculer :

$$\forall\,(X,\,Y,\,Z)\,\in\,C^3\,|\,(X\,+\,Y\,+\,Z)\,\neq\,0\,\rightarrow\,\exists\,k(X,\,Y,\,Z)\,=\,\frac{X^2\,+\,Y^2\,+\,Z^2}{(X\,+\,Y\,+\,Z)^2} \tag{89}$$

Par exemple : les trois nombres pourraient être les trois longueurs d'un triangle ou trois des quatres surfaces d'un tétraèdre.

Remarque 3.8. ***La cinquième condition caractérisant le vide - le ratio de Koide et la contrainte bleue.***

Soit :

$$X\,=\,B^2_{12}\,.\,a^1\,;\,Y\,=\,B^3_{23}\,.\,a^2\,;\,Z\,=\,B^1_{13}\,.\,a^3\,;\,S\,=\,X+Y+Z\,;\,O\,=\,X\,.\,Y+Y\,.\,Z+Z\,.\,X \tag{90}$$

Ces relations induisent les suivantes :

$$S^2\,=\,X^2\,+\,Y^2\,+\,Z^2\,+\,2\,.\,O \tag{91}$$

Si la somme S n'est pas nulle :

$$S\,\neq\,0\,\rightarrow\,1\,=\,k(X,\,Y,\,Z)\,+\,2.\frac{O}{S^2}\,\rightarrow\,O\,=\,\frac{(1\,-\,k)\,.\,S^2}{2} \tag{92}$$

Lorsque la contrainte bleue est définie dans une discussion sur l'involution des produits vectoriels déformés, elle peut aussi se reformuler de la façon suivante :

$$O\,-\,S\,+\,1\,=\,0 \tag{93}$$

et elle permet d'introduire une fraction de Koide :

$$\frac{(1\,-\,k)\,.\,S^2}{2}\,-\,S\,+\,1\,=\,0 \tag{94}$$

Lemme 3.5. *Le role de la fraction de Koide.*

Un nouveau vecteur ayant pour composantes (X, Y, Z) données par l'Equ.(90) peut toujours être défini par la donnée de la paire ([B], **a**) de M(3, C) × E(3, C).

Si ce vecteur **a** respecte la contrainte bleue résultant du fait de poser ${}_{[B(f)]}\Phi(\mathbf{x})\,=\,\mathrm{Id}_3$, alors la somme S de ses composantes dépend d'une fraction de Koide.

3.4 Les matrices [B([A], a)] autorisant l'involution

Proposition 3.1. *La forme normalisée de la matrice [$B^\diamond$] permettant l'involution sur V est une décomposition mathématiquement triviale.*

Démonstration. : Je repars de l'Equ.(21) :

$$B^\eta_\epsilon\,=\,a^1\,.\,(A^\eta_2\,.\,A^3_\epsilon\,-\,A^\eta_3\,.\,A^2_\epsilon)\,+\,a^2\,.\,(A^\eta_1\,.\,A^3_\epsilon\,-\,A^\eta_1\,.\,A^3_\epsilon)\,+\,a^3\,.\,(A^\eta_1\,.\,A^2_\epsilon\,-\,A^\eta_2\,.\,A^3_\epsilon)$$

Avec :

$$\eta,\,\epsilon\,=\,1,2,3\,:\,D^\eta_{1\epsilon}\,=\,A^\eta_2\,.\,A^3_\epsilon\,-\,A^\eta_3\,.\,A^2_\epsilon \tag{95}$$

$$\eta,\, \epsilon \,=\, 1,2,3 \,:\, D^{\eta}_{2\epsilon} \,=\, A^{\eta}_{1} \,.\, A^{3}_{\epsilon} \,-\, A^{\eta}_{1} \,.\, A^{3}_{\epsilon} \tag{96}$$

$$\eta,\, \epsilon \,=\, 1,2,3 \,:\, D^{\eta}_{3\epsilon} \,=\, A^{\eta}_{1} \,.\, A^{2}_{\epsilon} \,-\, A^{\eta}_{2} \,.\, A^{3}_{\epsilon} \tag{97}$$

Elles se laissent ensuite condenser en :

$$\eta,\, \epsilon \,=\, 1,2,3;\,:\, B^{\eta}_{\epsilon} \,=\, \sum_{\lambda\,=\,1}^{3} a^{\lambda} \,.\, D^{\eta}_{\lambda\epsilon} \tag{98}$$

ou encore en :

$$[B^{\diamond}([A],\mathbf{a})] \,=\, {}_{D}\Phi(\mathbf{a}) \tag{99}$$

□

Lemme 3.6. *Règle d'obtention de la matrice [B].*

La matrice [B] est une transformée de la décomposition triviale classique. Ce résultat important doit être confronté avec l'Equ.(23). Il prouve que la forme normalisée de la matrice [B] caractérisant l'involution est obtenue à partir de la décomposition triviale ${}_{[A]}\Phi(\mathbf{a})$ grâce à la transformation :

$${}_{D}\Phi(\mathbf{a}) \,=\, -[A^{\diamond}] \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) \,.\, [A^{\diamond}] \tag{100}$$

Elle peut se comprendre comme une sorte de jauge impliquant la représentation normalisée des matrices déformantes. Elle transforme les décompositions triviales des produits vectoriels déformés [**a**, ...][A] en une décomposition triviale des produits vectoriels déformés [**a**, ...][D].

Remarque 3.9. ***Conventions***

Une attention particulière doit être portée aux conventions d'écriture. Dans le cadre d'une notation normalisée, les composantes de la matrice $[\mathrm{A}^{\diamond}]$ sont les $\mathrm{A}^{ligne}{}_{colonne}]$. Par exemple, les trois composantes $\mathrm{A}^{\eta}{}_{3}$ (η = 1, 2, 3) constituent la troisième colonne de la matrice $[\mathrm{A}^{\diamond}]$ et le vecteur $\mathbf{a}_3$. De même, les trois composantes $\mathrm{A}^{2}{}_{\epsilon}$ (ϵ = 1, 2, 3) constituent la deuxième ligne de la matrice $[\mathrm{A}^{\diamond}]$ en même temps que le vecteur $\mathbf{a}^2$. Soit à construire maintenant la table $\mathrm{T}_2(\otimes)(\mathbf{a}_3,\, \mathbf{a}^2)$. Parce que par convention, (i) les composantes du premier argument de la table doivent être écrites horizontalement ; (ii) celles du second argument doivent être écrites verticalement, chaque produit $\mathrm{A}^{\eta}{}_{3}.\ \mathrm{A}^{2}{}_{\epsilon}$ doit se comprendre, contre-intuitivement, comme une composante placée au croisement de la η-ème colonne et de la ϵ-ème ligne dans $\mathrm{T}_2(\otimes)(\mathbf{a}_3,\, \mathbf{a}^2)$. Mais puisque la discussion prend place sur le corps commutatif des nombres complexes, chaque produit $\mathrm{A}^{\eta}{}_{3}.\ \mathrm{A}^{2}{}_{\epsilon}$ peut aussi se réécrire $\mathrm{A}^{2}{}_{\epsilon}.\ \mathrm{A}^{\eta}{}_{3} = \mathrm{T}^{\epsilon}{}_{\eta}$ pour préserver la convention d'écriture dite (ligne, colonne). Ces précisions apparemment tatillonnes auront leur importance un peu plus loin dans ce document ; voir la remarque 3.13.

Remarque 3.10. ***L'inverse de la représentation de la matrice déformante.***

Le formalisme des composantes des trois matrices constituant le cube D sont précisées plus bas dans ce document au travers des Equ.(102), (103) et (104). Elles suggèrent l'idée de l'existence d'un lien entre ce cube et l'inverse de la forme normalisée de la matrice déformante. Dans le cadre de la discussion commencée dans [[b]], ces matrices sont forcément non-dégénérées puisque |A| = ± 1.

$$[A^{\diamond}] \,\in\, M(3,\, C) \,:\, |A^{\diamond}| \,=\, |A| \,=\, \pm 1 \,\neq\, 0 \,\Rightarrow\, \exists\, [A^{\diamond}]^{-1}$$

Il est donc toujours envisageable d'en calculer les inverses $[\mathrm{A}^{\diamond}]^{-1}$; ils satisfont :

$$[A^{\diamond}] \,.\, [A^{\diamond}]^{-1} \,=\, Id_3$$

ou :

$$\begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce système est équivalent à :

$$\sum_{c_1=1}^{c_1=3} A_{c_1}^l . a_{c_2}^{c_1} = \delta_{c_2}^l$$

Il a pour solutions :

$$a_1^1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & A_2^1 & A_3^1 \\ 0 & A_2^2 & A_3^2 \\ 0 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}}{|A|}; \; a_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} A_1^1 & 1 & A_3^1 \\ A_1^2 & 0 & A_3^2 \\ A_1^3 & 0 & A_3^3 \end{vmatrix}}{|A|}; \; a_1^3 = \frac{\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & 1 \\ A_1^2 & A_2^2 & 0 \\ A_1^3 & A_2^3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|};$$

$$a_2^1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & A_2^1 & A_3^1 \\ 1 & A_2^2 & A_3^2 \\ 0 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}}{|A|}; \; a_2^2 = \frac{\begin{vmatrix} A_1^1 & 0 & A_3^1 \\ A_1^2 & 1 & A_3^2 \\ A_1^3 & 0 & A_3^3 \end{vmatrix}}{|A|}; \; a_2^3 = \frac{\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & 1 \\ A_1^3 & A_2^3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|};$$

$$a_3^1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & A_2^1 & A_3^1 \\ 0 & A_2^2 & A_3^2 \\ 1 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}}{|A|}; \; a_3^2 = \frac{\begin{vmatrix} A_1^1 & 0 & A_3^1 \\ A_1^2 & 0 & A_3^2 \\ A_1^3 & 1 & A_3^3 \end{vmatrix}}{|A|}; \; a_3^3 = \frac{\begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & 0 \\ A_1^2 & A_2^2 & 0 \\ A_1^3 & A_2^3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Elles peuvent s'écrire de façon plus concise (tous les indices se comprennent modulo 3) :

$$|A| . a_{c2}^{c1} = (-1)^{c1+c2+1} . (A_{c1+1}^{c2+1} . A_{c1+2}^{c2+2} - A_{c1+1}^{c2+2} . A_{c1+2}^{c2+1}); \; |A| = \pm 1 \tag{101}$$

Ce calcul technique ne servira pas dans ce document. Il peut cependant aider les lecteurs intéressés à contrôler les calculs de ce document par une voie alternative.

Remarque 3.11. ***Le cube D générant la matrice [B].***

Soit maintenant les trois matrices [D] composant le cube D :

$$\begin{gathered} {}_1[D] \\ = \\ [D_{1\epsilon}^{\eta}] \\ = \\ \begin{bmatrix} D_{11}^1 & D_{12}^1 & D_{13}^1 \\ D_{11}^2 & D_{12}^2 & D_{13}^2 \\ D_{11}^3 & D_{12}^3 & D_{13}^3 \end{bmatrix} \\ = \\ \begin{bmatrix} A_2^1 . A_1^3 - A_3^1 . A_1^2 & A_2^1 . A_2^3 - A_3^1 . A_2^2 & A_2^1 . A_3^3 - A_3^1 . A_3^2 \\ A_2^2 . A_1^3 - A_3^2 . A_1^2 & A_2^2 . A_2^3 - A_3^2 . A_2^2 & A_2^2 . A_3^3 - A_3^2 . A_3^2 \\ A_2^3 . A_1^3 - A_3^3 . A_1^2 & A_2^3 . A_2^3 - A_3^3 . A_2^2 & A_2^3 . A_3^3 - A_3^3 . A_3^2 \end{bmatrix} \\ = \\ \begin{bmatrix} A_2^1 . A_1^3 & A_2^1 . A_2^3 & A_2^1 . A_3^3 \\ A_2^2 . A_1^3 & A_2^2 . A_2^3 & A_2^2 . A_3^3 \\ A_2^3 . A_1^3 & A_2^3 . A_2^3 & A_2^3 . A_3^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_3^1 . A_1^2 & A_3^1 . A_2^2 & A_3^1 . A_3^2 \\ A_3^2 . A_1^2 & A_3^2 . A_2^2 & A_3^2 . A_3^2 \\ A_3^3 . A_1^2 & A_3^3 . A_2^2 & A_3^3 . A_3^2 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{102}$$

$$=$$
$$\left(\begin{array}{cc} \otimes & \begin{pmatrix} A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A^1_2 \\ A^2_2 \\ A^3_2 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} A^1_2 \,.\, A^3_1 & A^1_2 \,.\, A^3_2 & A^1_2 \,.\, A^3_3 \\ A^2_2 \,.\, A^3_1 & A^2_2 \,.\, A^3_2 & A^2_2 \,.\, A^3_3 \\ A^3_2 \,.\, A^3_1 & A^3_2 \,.\, A^3_2 & A^3_2 \,.\, A^3_3 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$
$$-$$
$$\left(\begin{array}{cc} \otimes & \begin{pmatrix} A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A^1_3 \\ A^2_3 \\ A^3_3 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} A^1_3 \,.\, A^2_1 & A^1_3 \,.\, A^2_2 & A^1_3 \,.\, A^2_3 \\ A^2_3 \,.\, A^2_1 & A^2_3 \,.\, A^2_2 & A^2_3 \,.\, A^2_3 \\ A^3_3 \,.\, A^2_1 & A^3_3 \,.\, A^2_2 & A^3_3 \,.\, A^2_3 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$
$$=$$
$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\, \mathbf{a}^{\diamond}{}_2) \;-\; T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\, \mathbf{a}^{\diamond}{}_3)$$

Suivant la même démarche, il vient :

$$ {}_2[D] \tag{103}$$
$$=$$
$$[D^{\eta}_{2\epsilon}]$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} D^1_{21} & D^1_{22} & D^1_{23} \\ D^2_{21} & D^2_{22} & D^2_{23} \\ D^3_{21} & D^3_{22} & D^3_{23} \end{bmatrix}$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} A^1_1 \,.\, A^3_1 \;-\; A^1_3 \,.\, A^1_1 & A^1_1 \,.\, A^3_2 \;-\; A^1_3 \,.\, A^1_2 & A^1_1 \,.\, A^3_3 \;-\; A^1_3 \,.\, A^1_3 \\ A^2_1 \,.\, A^3_1 \;-\; A^2_3 \,.\, A^1_1 & A^2_1 \,.\, A^3_2 \;-\; A^2_3 \,.\, A^1_2 & A^2_1 \,.\, A^3_3 \;-\; A^2_3 \,.\, A^1_3 \\ A^3_1 \,.\, A^3_1 \;-\; A^3_3 \,.\, A^1_1 & A^3_1 \,.\, A^3_2 \;-\; A^3_3 \,.\, A^1_2 & A^3_1 \,.\, A^3_3 \;-\; A^3_3 \,.\, A^1_3 \end{bmatrix}$$
$$=$$
$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\, \mathbf{a}^{\diamond}{}_1) \;-\; T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\, \mathbf{a}^{\diamond}{}_3)$$

Et :

$$ {}_3[D]$$
$$=$$
$$[D^{\eta}_{3\epsilon}] \tag{104}$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} D^1_{31} & D^1_{32} & D^1_{33} \\ D^2_{31} & D^2_{32} & D^2_{33} \\ D^3_{31} & D^3_{32} & D^3_{33} \end{bmatrix}$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} A^1_1 \,.\, A^2_1 \;-\; A^1_2 \,.\, A^1_1 & A^1_1 \,.\, A^2_2 \;-\; A^1_2 \,.\, A^1_2 & A^1_1 \,.\, A^2_3 \;-\; A^1_2 \,.\, A^1_3 \\ A^2_1 \,.\, A^2_1 \;-\; A^2_2 \,.\, A^1_1 & A^2_1 \,.\, A^2_2 \;-\; A^2_2 \,.\, A^1_2 & A^2_1 \,.\, A^2_3 \;-\; A^2_2 \,.\, A^1_3 \\ A^3_1 \,.\, A^2_1 \;-\; A^3_2 \,.\, A^1_1 & A^3_1 \,.\, A^2_2 \;-\; A^3_2 \,.\, A^1_2 & A^3_1 \,.\, A^2_3 \;-\; A^3_2 \,.\, A^1_3 \end{bmatrix}$$
$$=$$
$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\, \mathbf{a}^{\diamond}{}_1) \;-\; T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\, \mathbf{a}^{\diamond}{}_2)$$

Il est aisé d'en déduire une des relations importantes de ce document :

$$[B^{\diamond}] \tag{105}$$
$$=$$
$$\begin{gathered} a^1 \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\, \mathbf{a}^{\diamond}{}_3) \;-\; T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\, \mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\} \\ + a^2 \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\, \mathbf{a}^{\diamond}{}_1) \;-\; T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\, \mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\} \\ + a^3 \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\, \mathbf{a}^{\diamond}{}_1) \;-\; T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\, \mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\} \end{gathered}$$

Remarque 3.12. ***Calcul de cohérence***

Je vais maintenant entreprendre un calcul in extenso visant à tester la cohérence d'une confrontation entre les Equ.(23) et (105).

$$-[A^\diamond] \, . \, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) \, . \, [A^\diamond]$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & a^3 & -a^2 \\ -a^3 & 0 & a^1 \\ a^2 & -a^1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A^2_1 . a^3 - A^3_1 . a^2 & A^2_2 . a^3 - A^3_2 . a^2 & A^2_3 . a^3 - A^3_3 . a^2 \\ A^3_1 . a^1 - A^1_1 . a^3 & A^3_2 . a^1 - A^1_2 . a^3 & A^3_3 . a^1 - A^1_3 . a^3 \\ A^1_1 . a^2 - A^2_1 . a^1 & A^1_2 . a^2 - A^2_2 . a^1 & A^1_3 . a^2 - A^2_3 . a^1 \end{bmatrix}$$

Comme la largeur de la page va être trop petite, j'examine maintenant la suite du calcul colonne par colonne. La colonne de gauche vaut :

$$\begin{bmatrix} A^1_1 . (A^2_1 . a^3 - A^3_1 . a^2) + A^1_2 . (A^3_1 . a^1 - A^1_1 . a^3) + A^1_3 . (A^1_1 . a^2 - A^2_1 . a^1) \\ A^2_1 . (A^2_1 . a^3 - A^3_1 . a^2) + A^2_2 . (A^3_1 . a^1 - A^1_1 . a^3) + A^2_3 . (A^1_1 . a^2 - A^2_1 . a^1) \\ A^3_1 . (A^2_1 . a^3 - A^3_1 . a^2) + A^3_2 . (A^3_1 . a^1 - A^1_1 . a^3) + A^3_3 . (A^1_1 . a^2 - A^2_1 . a^1) \end{bmatrix}$$

Chacun des trois termes se laisse refactoriser en fonction des composantes de **a** :

$$\begin{bmatrix} a^1 . (A^1_2 . A^3_1 - A^1_3 . A^2_1) + a^2 . (A^1_3 . A^1_1 - A^1_1 . A^3_1) + a^3 . (A^1_1 . A^2_1 - A^1_2 . A^1_1) \\ a^1 . (A^2_2 . A^3_1 - A^2_3 . A^2_1) + a^2 . (A^2_3 . A^1_1 - A^2_1 . A^3_1) + a^3 . (A^2_1 . A^2_1 - A^2_2 . A^1_1) \\ a^1 . (A^3_2 . A^3_1 - A^3_3 . A^2_1) + a^2 . (A^3_3 . A^1_1 - A^3_1 . A^3_1) + a^3 . (A^3_1 . A^2_1 - A^3_2 . A^1_1) \end{bmatrix}$$

La colonne du milieu s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A^1_1 . (A^2_2 . a^3 - A^3_2 . a^2) + A^1_2 . (A^3_2 . a^1 - A^1_2 . a^3) + A^1_3 . (A^1_2 . a^2 - A^2_2 . a^1) \\ A^2_1 . (A^2_2 . a^3 - A^3_2 . a^2) + A^2_2 . (A^3_2 . a^1 - A^1_2 . a^3) + A^2_3 . (A^1_2 . a^2 - A^2_2 . a^1) \\ A^3_1 . (A^2_2 . a^3 - A^3_2 . a^2) + A^3_2 . (A^3_2 . a^1 - A^1_2 . a^3) + A^3_3 . (A^1_2 . a^2 - A^2_2 . a^1) \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} a^1 . (A^1_2 . A^3_2 - A^1_3 . A^2_2) + a^2 . (A^1_3 . A^1_2 - A^1_1 . A^3_2) + a^3 . (A^1_1 . A^2_2 - A^1_2 . A^1_2) \\ a^1 . (A^2_2 . A^3_2 - A^2_3 . A^2_2) + a^2 . (A^2_3 . A^1_2 - A^2_1 . A^3_2) + a^3 . (A^2_1 . A^2_2 - A^2_2 . A^1_2) \\ a^1 . (A^3_2 . A^3_2 - A^3_3 . A^2_2) + a^2 . (A^3_3 . A^1_2 - A^3_1 . A^3_2) + a^3 . (A^3_1 . A^2_2 - A^3_2 . A^1_2) \end{bmatrix}$$

La colonne de droite s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A^1_1 . (A^2_3 . a^3 - A^3_3 . a^2) + A^1_2 . (A^3_3 . a^1 - A^1_3 . a^3) + A^1_3 . (A^1_3 . a^2 - A^2_3 . a^1) \\ A^2_1 . (A^2_3 . a^3 - A^3_3 . a^2) + A^2_2 . (A^3_3 . a^1 - A^1_3 . a^3) + A^2_3 . (A^1_3 . a^2 - A^2_3 . a^1) \\ A^3_1 . (A^2_3 . a^3 - A^3_3 . a^2) + A^3_2 . (A^3_3 . a^1 - A^1_3 . a^3) + A^3_3 . (A^1_3 . a^2 - A^2_3 . a^1) \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} a^1 . (A^1_2 . A^3_3 - A^1_3 . A^2_3) + a^2 . (A^1_3 . A^1_3 - A^1_1 . A^3_3) + a^3 . (A^1_1 . A^2_3 - A^1_2 . A^1_3) \\ a^1 . (A^2_2 . A^3_3 - A^2_3 . A^2_3) + a^2 . (A^2_3 . A^1_3 - A^2_1 . A^3_3) + a^3 . (A^2_1 . A^2_3 - A^2_2 . A^1_3) \\ a^1 . (A^3_2 . A^3_3 - A^3_3 . A^2_3) + a^2 . (A^3_3 . A^1_3 - A^3_1 . A^3_3) + a^3 . (A^3_1 . A^2_3 - A^3_2 . A^1_3) \end{bmatrix}$$

A ce stade, il est déjà facile de comprendre que le produit matriciel étudié peut formellement se mettre sous la forme :

$$-[A^\diamond] \, . \, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) \, . \, [A^\diamond] = \sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,3} a^i \, . \, [M_i]$$

Ce qui constitue en soi un bon départ pour le but que je me suis fixé. Il reste à exprimer les matrices [M$_i$] en détail.

$$[M_1] = \begin{bmatrix} A^1_2 . A^3_1 - A^1_3 . A^2_1 & A^1_2 . A^3_2 - A^1_3 . A^2_2 & A^1_2 . A^3_3 - A^1_3 . A^2_3 \\ A^2_2 . A^3_1 - A^2_3 . A^2_1 & A^2_2 . A^3_2 - A^2_3 . A^2_2 & A^2_2 . A^3_3 - A^2_3 . A^2_3 \\ A^3_2 . A^3_1 - A^3_3 . A^2_1 & A^3_2 . A^3_2 - A^3_3 . A^2_2 & A^3_2 . A^3_3 - A^3_3 . A^2_3 \end{bmatrix}$$

Compte tenu des propos tenus sur la notion d'hexa-pack, je peux exprimer les six vecteurs suivants :

$$[A^\diamond] = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$|\mathbf{a}^\diamond{}_1 > \equiv \left| \begin{array}{c} A^1_1 \\ A^2_1 \\ A^3_1 \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{a}^\diamond{}_2 > \equiv \left| \begin{array}{c} A^1_2 \\ A^2_2 \\ A^3_2 \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{a}^\diamond{}_3 > \equiv \left| \begin{array}{c} A^1_3 \\ A^2_3 \\ A^3_3 \end{array} \right\rangle$$

et :

$$|\mathbf{a}^{\diamond 1} > \equiv \left| \begin{array}{c} A^1_1 \\ A^1_2 \\ A^1_3 \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{a}^{\diamond 2} > \equiv \left| \begin{array}{c} A^2_1 \\ A^2_2 \\ A^2_3 \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{a}^{\diamond 3} > \equiv \left| \begin{array}{c} A^3_1 \\ A^3_2 \\ A^3_3 \end{array} \right\rangle$$

Ceci implique que :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_2, \mathbf{a}^{\diamond 3}) = \left(\begin{array}{cc} \otimes & \begin{pmatrix} A^1_2 & A^2_2 & A^3_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A^3_1 \\ A^3_2 \\ A^3_3 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} A^1_2 . A^3_1 & A^2_2 . A^3_1 & A^3_2 . A^3_1 \\ A^1_2 . A^3_2 & A^2_2 . A^3_2 & A^3_2 . A^3_2 \\ A^1_2 . A^3_3 & A^2_2 . A^3_3 & A^1_2 . A^3_3 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_3, \mathbf{a}^{\diamond 2}) = \left(\begin{array}{cc} \otimes & \begin{pmatrix} A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A^2_1 \\ A^2_2 \\ A^2_3 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} A^1_3 . A^2_1 & A^2_3 . A^2_1 & A^3_3 . A^2_1 \\ A^1_3 . A^2_2 & A^2_3 . A^2_2 & A^3_3 . A^2_2 \\ A^1_3 . A^2_3 & A^2_3 . A^2_3 & A^1_3 . A^2_3 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

Et les transposées de ces matrices sont :

$$T^t_2(\otimes)(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}^3) = \begin{bmatrix} A^1_2 . A^3_1 & A^1_2 . A^3_2 & A^1_2 . A^3_3 \\ A^2_2 . A^3_1 & A^2_2 . A^3_2 & A^2_2 . A^3_3 \\ A^3_2 . A^3_1 & A^3_2 . A^3_2 & A^1_2 . A^3_3 \end{bmatrix}$$

$$T^t_2(\otimes)(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}^2) = \begin{bmatrix} A^1_3 . A^2_1 & A^1_3 . A^2_2 & A^1_3 . A^2_3 \\ A^2_3 . A^2_1 & A^2_3 . A^2_2 & A^2_3 . A^2_3 \\ A^3_3 . A^2_1 & A^3_3 . A^2_2 & A^1_3 . A^2_3 \end{bmatrix}$$

D'où il est logique d'écrire après une observation attentive que :

$$[M_1] = T^t_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_2, \mathbf{a}^{\diamond 3}) - T^t_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_3, \mathbf{a}^{\diamond 2})$$

Il est également simple de voir que :

$$T^t_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_i, \mathbf{a}^{\diamond j}) = T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond j}, \mathbf{a}^\diamond{}_i)$$

C'est également un fait que :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_3, \mathbf{a}^{\diamond 1}) = \left(\begin{array}{cc} \otimes & \begin{pmatrix} A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A^1_1 \\ A^1_2 \\ A^1_3 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} A^1_1 . A^1_3 & A^1_1 . A^2_3 & A^1_1 . A^3_3 \\ A^1_2 . A^1_3 & A^1_2 . A^2_3 & A^1_2 . A^3_3 \\ A^1_3 . A^1_3 & A^1_3 . A^2_3 & A^1_3 . A^3_3 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond}{}_1, \mathbf{a}^{\diamond 3}) = \left(\begin{array}{cc} \otimes & \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_1^3 \\ A_2^3 \\ A_3^3 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} A_1^3 \,.\, A_1^1 & A_1^3 \,.\, A_1^2 & A_1^3 \,.\, A_1^3 \\ A_2^3 \,.\, A_1^1 & A_2^3 \,.\, A_1^2 & A_2^3 \,.\, A_1^3 \\ A_3^3 \,.\, A_1^1 & A_3^3 \,.\, A_1^2 & A_3^3 \,.\, A_1^3 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

Et que :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond}{}_1, \mathbf{a}^{\diamond 2}) = \left(\begin{array}{cc} \otimes & \begin{pmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_1^2 \\ A_2^2 \\ A_3^2 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} A_1^2 \,.\, A_1^1 & A_1^2 \,.\, A_1^2 & A_1^2 \,.\, A_1^3 \\ A_2^2 \,.\, A_1^1 & A_2^2 \,.\, A_1^2 & A_2^2 \,.\, A_1^3 \\ A_3^2 \,.\, A_1^1 & A_3^2 \,.\, A_1^2 & A_3^2 \,.\, A_1^3 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond}{}_2, \mathbf{a}^{\diamond 1}) = \left(\begin{array}{cc} \otimes & \begin{pmatrix} A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_2^1 \\ A_3^1 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} A_1^1 \,.\, A_2^1 & A_1^1 \,.\, A_2^2 & A_1^1 \,.\, A_2^3 \\ A_2^1 \,.\, A_2^1 & A_2^1 \,.\, A_2^2 & A_2^1 \,.\, A_2^3 \\ A_3^1 \,.\, A_2^1 & A_3^1 \,.\, A_2^2 & A_3^1 \,.\, A_2^3 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

Ces résultats intermédiaires permettent de poser :

$$[M_2]$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} A_3^1 \,.\, A_1^1 \,-\, A_1^1 \,.\, A_1^3 & A_3^1 \,.\, A_2^1 \,-\, A_1^1 \,.\, A_2^3 & A_3^1 \,.\, A_3^1 \,-\, A_1^1 \,.\, A_3^3 \\ A_3^2 \,.\, A_1^1 \,-\, A_1^2 \,.\, A_1^3 & A_3^2 \,.\, A_2^1 \,-\, A_1^2 \,.\, A_2^3 & A_3^2 \,.\, A_3^1 \,-\, A_1^2 \,.\, A_3^3 \\ A_3^3 \,.\, A_1^1 \,-\, A_1^3 \,.\, A_1^3 & A_3^3 \,.\, A_2^1 \,-\, A_1^3 \,.\, A_2^3 & A_3^3 \,.\, A_3^1 \,-\, A_1^3 \,.\, A_3^3 \end{bmatrix}$$
$$=$$
$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 1}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_3) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 3}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_1)$$

$$[M_3]$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} A_1^1 \,.\, A_1^2 \,-\, A_2^1 \,.\, A_1^1 & A_1^1 \,.\, A_2^2 \,-\, A_2^1 \,.\, A_2^1 & A_1^1 \,.\, A_3^2 \,-\, A_2^1 \,.\, A_3^1 \\ A_1^2 \,.\, A_1^2 \,-\, A_2^2 \,.\, A_1^1 & A_1^2 \,.\, A_2^2 \,-\, A_2^2 \,.\, A_2^1 & A_1^2 \,.\, A_3^2 \,-\, A_2^2 \,.\, A_3^1 \\ A_1^3 \,.\, A_1^2 \,-\, A_2^3 \,.\, A_1^1 & A_1^3 \,.\, A_2^2 \,-\, A_2^3 \,.\, A_2^1 & A_1^3 \,.\, A_3^2 \,-\, A_2^3 \,.\, A_3^1 \end{bmatrix}$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} A_1^1 \,.\, A_1^2 & A_1^1 \,.\, A_2^2 & A_1^1 \,.\, A_3^2 \\ A_1^2 \,.\, A_1^2 & A_1^2 \,.\, A_2^2 & A_1^2 \,.\, A_3^2 \\ A_1^3 \,.\, A_1^2 & A_1^3 \,.\, A_2^2 & A_1^3 \,.\, A_3^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_2^1 \,.\, A_1^1 & A_2^1 \,.\, A_2^1 & A_2^1 \,.\, A_3^1 \\ A_2^2 \,.\, A_1^1 & A_2^2 \,.\, A_2^1 & A_2^2 \,.\, A_3^1 \\ A_2^3 \,.\, A_1^1 & A_2^3 \,.\, A_2^1 & A_2^3 \,.\, A_3^1 \end{bmatrix}$$
$$=$$
$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 2}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_1) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 1}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_2)$$

Par conséquent, sous réserve de l'absence d'erreurs, je trouve que :

$$[B]$$
$$=$$
$$[A^{\diamond}] \,.\, {}_{[J]}\Phi(-\mathbf{a}) \,.\, [A^{\diamond}]$$
$$=$$
$$a^1 \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 3}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_2) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 2}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\}$$
$$a^2 \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 1}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_3) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 3}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\}$$
$$a^3 \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 2}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_1) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 1}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\}$$

Ce résultat coincide avec l'Equ.(105).

Lemme 3.7. *De la constitution des matrices [B◇].*

Toute matrice [B◇] résultant de la recherche d'une involution sur V = {E(3, C), [**a**, ...][A]} est la somme pondérée par les composantes du vecteur **a** de six tables de Pythagore bâties autour du produit tensoriel classique et de l'hexa-pack naturellement contenu dans la matrice déformante [A] exprimée sous sa forme normalisée.

Remarque 3.13. ***Précision sur une propriété utile des tables de Pythagore.***

J'invite les lecteurs à relire attentivement la remarque 3.9 avant de poursuivre et de calculer :

$$T_2^t(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_1, \mathbf{a}^{\diamond 2}) \; - \; T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_1, \mathbf{a}^{\diamond 2})$$
$$=$$
$$[A^2_\eta \, . \, A^\epsilon_1] \; - \; [A^2_\epsilon \, . \, A^\eta_1]$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} A^1_1.A^2_1 & A^1_1.A^2_2 & A^1_1.A^2_3 \\ A^2_1.A^2_1 & A^2_1.A^2_2 & A^2_1.A^2_3 \\ A^3_1.A^2_1 & A^3_1.A^2_2 & A^3_1.A^2_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^2_1.A^1_1 & A^2_1.A^2_1 & A^2_1.A^3_1 \\ A^2_2.A^1_1 & A^2_2.A^2_1 & A^2_2.A^3_1 \\ A^2_3.A^1_1 & A^2_3.A^2_1 & A^2_3.A^3_1 \end{bmatrix}$$

Cette relation se laisse reformuler :

$$T_2^t(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_1, \mathbf{a}^{\diamond 2}) \; - \; T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_1, \mathbf{a}^{\diamond 2}) \; = \begin{bmatrix} 0 & A^1_1.A^2_2 - A^2_1.A^2_1 & A^1_1.A^2_3 - A^3_1.A^2_1 \\ ... & 0 & A^2_1.A^2_3 - A^3_1.A^2_2 \\ ... & ... & 0 \end{bmatrix}$$

A noter que :

$$|\mathbf{a}^\diamond{}_1 > \wedge |\mathbf{a}^{\diamond 2} >= \left| \begin{matrix} A^1_1 \\ A^2_1 \\ A^3_1 \end{matrix} \right\rangle \wedge \left| \begin{matrix} A^2_1 \\ A^2_2 \\ A^2_3 \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} A^2_1.A^2_3 - A^3_1.A^2_2 \\ A^3_1.A^2_1 - A^1_1.A^2_3 \\ A^1_1.A^2_2 - A^2_1.A^2_1 \end{matrix} \right\rangle$$

De sorte que :

$$T_2^t(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_1, \mathbf{a}^{\diamond 2}) \; - \; T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_1, \mathbf{a}^{\diamond 2})$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} 0 & (\mathbf{a}^\diamond{}_1 \wedge \mathbf{a}^{\diamond 2})^3 & -(\mathbf{a}^\diamond{}_1 \wedge \mathbf{a}^{\diamond 2})^2 \\ -(\mathbf{a}^\diamond{}_1 \wedge \mathbf{a}^{\diamond 2})^3 & 0 & (\mathbf{a}^\diamond{}_1 \wedge \mathbf{a}^{\diamond 2})^1 \\ (\mathbf{a}^\diamond{}_1 \wedge \mathbf{a}^{\diamond 2})^2 & -(\mathbf{a}^\diamond{}_1 \wedge \mathbf{a}^{\diamond 2})^1 & 0 \end{bmatrix}$$

De plus (rappel) :

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{w} >= \left| \begin{matrix} u^2.w^3 - u^3.w^2 \\ u^3.w^1 - u^1.w^3 \\ u^1.w^2 - u^2.w^1 \end{matrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -u^3 & u^2 \\ u^3 & 0 & -u^1 \\ -u^2 & u^1 & 0 \end{bmatrix} . \left| \begin{matrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{matrix} \right\rangle = {}_{[J]}\Phi(\mathbf{u}) \, . \, |\mathbf{w} >$$

Conséquence (le signe moins doit être manipulé avec attention) :

$$T_2^t(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_1, \mathbf{a}^{\diamond 2}) \; - \; T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_1, \mathbf{a}^{\diamond 2}) \; = \; [A^2_\eta \, . \, A^\epsilon_1 \; - \; A^2_\epsilon \, . \, A^\eta_1] \; = \; {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}^{\diamond 2} \wedge \mathbf{a}^\diamond{}_1)$$

Cette relation est valide pour n'importe quelle paire ($\mathbf{a}^\diamond{}_1$, $\mathbf{a}^{\diamond 2}$) ; ce qui sera fort utile pour la suite.

$$\forall \, i, \, j \; = \; 1, \, 2, \, 3 \; : \; T_2^t(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_i, \mathbf{a}^{\diamond j}) \; - \; T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_i, \mathbf{a}^{\diamond j}) \; = \; {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}^{\diamond j} \wedge \mathbf{a}^\diamond{}_i) \qquad (106)$$

Remarque 3.14. ***Mise en évidence d'un lien avec les noyaux des parties principales des décompositions non-triviales.***

Pour démontrer ce lien, il existe deux chemins. Le premier, rapide, consiste à rappeler l'Equ.(62) et le second, dit *du pauvre homme*, consiste à faire des calculs in extenso fastidieux. Etant paresseux de nature, je choisirai le chemin de la facilité pour prouver que :

$$\begin{gathered}
[B^{\diamond}([A],\,\mathbf{a})] \\
= \\
a^1\,.\,[\frac{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,+\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,-\,T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)}{2}] \\
+\,a^2\,.\,[\frac{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,+\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,-\,T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)}{2}] \\
+\,a^3\,.\,[\frac{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,+\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,-\,T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)}{2}] \\
+\,a^1\,.\,[\frac{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,-\,\{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\}}{2}] \\
+\,a^2\,.\,[\frac{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,-\,\{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\}}{2}] \\
+\,a^3\,.\,[\frac{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,-\,\{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\}}{2}] \\
= \\
a^1\,.\,[\frac{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,+\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,-\,T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)}{2}] \\
+\,a^2\,.\,[\frac{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,+\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,-\,T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)}{2}] \\
+\,a^3\,.\,[\frac{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,+\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,-\,T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)}{2}] \\
+\,a^1\,.\,[\frac{{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}^{\diamond 3}\,\wedge\,\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,-\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}^{\diamond 2}\,\wedge\,\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)}{2}] \\
+\,a^2\,.\,[\frac{{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}^{\diamond 1}\,\wedge\,\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,-\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}^{\diamond 3}\,\wedge\,\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)}{2}] \\
+\,a^3\,.\,[\frac{{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}^{\diamond 2}\,\wedge\,\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,-\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}^{\diamond 1}\,\wedge\,\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)}{2}] \\
= \\
a^1\,.\,[\frac{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,+\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,-\,T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)}{2}] \\
+\,a^2\,.\,[\frac{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,+\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,-\,T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)}{2}] \\
+\,a^3\,.\,[\frac{T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,+\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\,-\,T_2(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\,-\,T_2^t(.)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)}{2}] \\
+\frac{1}{2}\cdot{}_{[J]}\Phi(\mathbf{S}_{[J]}([A^{\diamond}],\,\mathbf{a}))
\end{gathered} \tag{107}$$

Avec :

$$\begin{gathered}
\mathbf{S}_{[J]}([A^{\diamond}],\,\mathbf{a}) \\
= \\
a^1\,.\,(\mathbf{a}^{\diamond 3}\wedge\mathbf{a}^{\diamond}{}_2-\mathbf{a}^{\diamond 2}\wedge\mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\,+a^2\,.\,(\mathbf{a}^{\diamond 1}\wedge\mathbf{a}^{\diamond}{}_3-\mathbf{a}^{\diamond 3}\wedge\mathbf{a}^{\diamond}{}_1)+a^3\,.\,(\mathbf{a}^{\diamond 2}\wedge\mathbf{a}^{\diamond}{}_1-\mathbf{a}^{\diamond 1}\wedge\mathbf{a}^{\diamond}{}_2)
\end{gathered} \tag{108}$$

Cette relation justifie d'introduire les deux concepts suivants :

Definition 3.3. ***Vecteur pondérateur et somme vectorielle pondérée.***

Soit l'élément quelconque $\mathbf{a}$ de E(3, C) agissant en tant que projectile au sein du produit vectoriel déformé $[\mathbf{a}, ...][A]$; les Equ.(106) et (108) permettent de dire qu'il agit comme un *vecteur pondérateur*. La paire ([A], $\mathbf{a}$) contient naturellement un ensemble de sept vecteurs : le vecteur pondérateur et (ce qu j'ai nommé un peu plus haut dans ce exposé) l'hexa-pack associée à la représentation normalisée $[A^\diamond]$ de la matrice déformante [A]. Ces sept vecteurs peuvent toujours être combinés de manière à former une somme pondérée $\mathbf{S}_{[X]}([A], \mathbf{a})$ de six produits vectoriels déformés simultanément par un élément quelconque [X] de M(3, C) ; plus précisément :

$$\mathbf{S}_{[X]}([A],\, \mathbf{a}) \tag{109}$$

$$=$$

$$a^1 \,.\, ([\mathbf{a}^3,\, \mathbf{a}_2]_{[X]} - [\mathbf{a}^2,\, \mathbf{a}_3]_{[X]} + a^2 \,.\, ([\mathbf{a}^1,\, \mathbf{a}_3]_{[X]} - [\mathbf{a}^3,\, \mathbf{a}_1]_{[X]}) + a^3 \,.\, ([\mathbf{a}^2,\, \mathbf{a}_1]_{[X]} - [\mathbf{a}^1,\, \mathbf{a}_2]_{[X]})$$

Avec ces conventions, il est maintenant possible de comprendre que l'Equ.(109) décrit la somme pondérée $\mathbf{S}_{[J]}([A], \mathbf{a})$ de six produits vectoriels simultanément déformés par la matrice [J] ; ce sont donc en réalité des produits vectoriels classiques. Ils apparaissent ici au sein d'une discussion étudiant l'involution du produit vectoriel $[\mathbf{a}, ...][A]$. J'aurai l'occasion de revenir sur ces concepts un peu plus loin.

Theorem 3.1. ***Caractéristiques détaillées d'une matrice [B([A], a)] compatible avec l'involution sur V.***

Une matrice $[B([A], \mathbf{a})]$ de M(3, C) compatible avec l'existence d'une involution construite à partir du produit vectoriel déformé $[\mathbf{a}, ...][A]$ et telle que ${}_{[B(f)]}\Phi(\mathbf{x}) = \mathrm{Id}_3$ est caractérisée par les propriétés suivantes :

1. Son formalisme normalisé, i. e. : $[B^\diamond]$, doit être une décomposition mathématiquement triviale d'un produit tensoriel classique construit sur le cube D - précisément $\otimes_D(\mathbf{a}, ...)$- et satisfaire l'Equ.(23).
2. Son déterminant est toujours nul ; rappel Equ.(82).

$${}_{[B]}\Phi(\mathbf{a}) \,=\, Id_3 \,\Rightarrow\, |B([A], \mathbf{a})| \,=\, 0$$

3. Les trois produits monochromes qu'elle contient par construction sont égaux entre eux et à un nombre complexe a priori arbitraire Π ; rappel Equ.(78).

$$\forall\, \mathbf{a} \neq \mathbf{0} :\, B^1_{13} \,.\, B^3_{23} \,.\, B^2_{12} \,=\, B^3_{12} \,.\, B^2_{13} \,.\, B^1_{23} \,=\, B^2_{23} \,.\, B^1_{12} \,.\, B^3_{13} \,=\, \Pi$$

4. La somme de ses trois produits polychromes vaut trois fois l'un quelconque de ses trois produits monochromes ; rappel Equ.(81).

$$3.\Pi \,-\, B^1_{12} \,.\, B^2_{13} \,.\, B^3_{23} \,-\, B^2_{12} \,.\, B^1_{23} \,.\, B^3_{13} \,-\, B^3_{12} \,.\, B^1_{13} \,.\, B^2_{23} \,=\, 0$$

5. Les composantes du vecteur $\mathbf{a}$ définissent une polynomiale de degré deux notée Ψ dite *contrainte bleue* ; rappel Equ.(85).

$$\alpha \,=\, B^2_{12} \,;\, \beta \,=\, B^3_{23} \,;\, \gamma \,=\, B^1_{13}$$

$$\Psi(\mathbf{a}) \,=\, 1 - \alpha \,.\, a^1 - \beta \,.\, a^2 - \gamma \,.\, a^3 + \beta \,.\, \gamma \,.\, a^2 \,.\, a^3 + \alpha \,.\, \beta \,.\, a^1 \,.\, a^2 + \alpha \,.\, \gamma \,.\, a^1 \,.\, a^3 \,=\, 0$$

3.5 Exemples pédagogiques.

Remarque 3.15. ***Méthode***

La matrice [B] obtenue précédemment résulte d'une longue manipulation commencée au niveau de l'Equ.(12). Elle apparaît sous sa forme normalisée, [B$^\diamond$], et elle fait par ailleurs appel au formalisme normalisée de la matrice déformante, [A$^\diamond$]. Pour vérifier si elle permet de vérifier l'Equ.(29), il faut successivement :

1. Normaliser la matrice déformante [A] impliquée dans une application donnée grâce à l'Equ.(18).
2. Calculer une première fois la matrice [B$^\diamond$] grâce à l'Equ.(23) ;
3. Calculer une seconde fois la matrice [B$^\diamond$] grâce à l'Equ.(105).
4. Par mesure de sécurité, vérifier que les deux formulations de la matrice sont bien identiques et valident :

$$[A^\diamond]\,.\,{}_{[J]}\Phi(-\mathbf{a})\,.\,[A^\diamond] \tag{110}$$

$$=$$

$$\begin{gathered} a^1\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^\diamond{}_2)\;-\;T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^\diamond{}_3)\} \\ a^2\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^\diamond{}_3)\;-\;T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 3},\mathbf{a}^\diamond{}_1)\} \\ a^3\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 2},\mathbf{a}^\diamond{}_1)\;-\;T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 1},\mathbf{a}^\diamond{}_2)\} \end{gathered}$$

5. Reconvertir la matrice [B$^\diamond$] dans sa forme non normalisée [B] grâce à l'Equ.(18) qui vaut en réalité pour tous les éléments de M(3, C).
6. Vérifier les quatre critères supplémentaires auxquels la matrice [B] ainsi obtenue doit satisfaire pour être certain que l'Equ.(29) soit validée. Leur existence est démontrée au cours de la sous-section 3.2 ; pour rappel, les critères sont les suivants :
   (a) les produits monochromes doivent être égaux entre eux ;
   (b) les produits polychromes doivent être égaux entre eux ;
   (c) son déterminant doit être nul ;
   (d) le projectile doit satisfaire la contrainte bleue.

Remarque 3.16. ***Avertissement : non-unicité***

Attention : la matrice [B(f)] livrée par la procédure précédente vérifie bien l'Equ.(29) : ${}_{[B(f)]}\Phi(\mathbf{a}) = \mathrm{Id}_3$. Or cette équation ne vaut que (i) si le vecteur **a** est un neutre à gauche dans le produit vectoriel déformé [**a**, **x**][B(f)] et (ii) si ce produit se décompose trivialement. Du point de vue des mathématiques, le point (i) est indispensable pour qu'il soit possible d'affirmer que le produit vectoriel [**a**, **x**][A] définit une involution sur V. En revanche, concernant le point (ii), le produit vectoriel déformé [**a**, **x**][B(f)] pourrait simultanément se décomposer non-trivialement et être égal à **x** :

$$|[\mathbf{a},\mathbf{x}][B(f)]>=\,[P]\,.\,|\mathbf{x}>\;+|\mathbf{z}>=\;|\mathbf{x}>$$

Auquel cas, le produit vectoriel [**a**, **x**][A] définit encore une involution sur V mais plus rien n'autorise à identifier [P] avec une décomposition triviale qui serait identifiée à la matrice identité Id_3.

Definition 3.4. ***Matrices démocratiques.***

Par définition, une matrice démocratique est un élément de M(3, C) tel que :

$$\exists\, h \,\in\, C : [M] \,=\, h\,.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{111}$$

Ces matrices apparaissent dans les travaux concernant le théorème d'Helmholtz-Hodge et, comme indiqué dans [[c]], dans certaines recherches physiques tentant d'expliquer l'origine de la masse des quarks et des leptons ; par exemple : [[17] ; §4.5, pp. 39 - 42, (4.44)].

Definition 3.5. ***Vecteur démocratique.***

Par définition, un vecteur démocratique est un élément de E(3, C) dont toutes les composantes sont égales :

$$\exists\, h \,\in\, C : |\mathbf{m}> = \, h\,.\left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right\rangle \tag{112}$$

Là encore, ce vecteur peut se retrouver dans certaines explorations dédiées à la recherche de la masse des neutrinos. Il définit également un des axes de référence utilisé pour décrire les rotations du tétraèdre [[01] ; pp. 653-655].

Exemple 3.2. *Le cas d'une matrice déformante normalisée démocratique.*

Dans ce cas la matrice déformante normalisée est supposée avoir un formalisme décrit par l'Equ.(111). Visiblement, elle est symétrique ; ce qui se traduit immédiatement par :

$$\forall\, m,\, n \,=\, 1,\, 2,\, 3 : \mathbf{a}^{\diamond}{}_m \,=\, \mathbf{a}^{\diamond n} \,=\, \mathbf{h} \,:\, (h,\, h,\, h).$$

L'Equ.(105) fournit :

$$\forall\, \mathbf{a} \,\in\, E(3,\, C),\, [A^{\diamond}] \,=\, h\,.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \,:\, [B^{\diamond}([A^{\diamond}],\, \mathbf{a})] \,=\, [0] \,\in\, M(3,\, C) \tag{113}$$

La vérification du calcul s'effectue en passant par l'Equ.(23), c'est-à-dire en calculant :

$$[A^{\diamond}]\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})\,.\,[A^{\diamond}] \tag{114}$$

$$=$$

$$h^2\,.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$h^2\,.\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} a^2 - a^3 & a^2 - a^3 & a^2 - a^3 \\ a^3 - a^1 & a^3 - a^1 & a^3 - a^1 \\ a^1 - a^2 & a^1 - a^2 & a^1 - a^2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\, \forall\, h \,\in\, C,\, \forall\, \mathbf{a} \,\in\, E(3,\, C),$$

La cohérence des Equ.(23) et (105) pour le cas particulier examiné dans cet exemple est démontrée. La reconversion de la matrice nulle grâce à l'Equ.(18) redonne la matrice nulle ; et donc ici : [B] = [0]. Si les critéres concernant les produits mono- et polychromes, ainsi que la nullité du déterminant ne posent aucun soucis, il devient évident que cette matrice nulle ne peut jamais donner une matrice triviale identifiable à la matrice identité de M(3, C) :

$$_{[0]}\Phi(\mathbf{a}) \,=\, [0] \,\neq\, Id_3$$

Il en découle le :

Lemme 3.8. *De la matrice démocratique.*

Une matrice démocratique ne peut jamais servir à définir une involution sur V.

Exemple 3.3. *La matrice [J] caractérisant le produit vectoriel classique est déformante.*

J'examine maintenant ce qui se passe lorsque :

$$[A] \,=\, [J]$$

Avec l'aide de l'Equ.(18) :

$$[A^\diamond] \,=\, [J^\diamond] \,=\, [A]^t \,.\, [K]^{-1} \,=\, [J]^t \,.\, [K]^t$$

et de l'Equ.(7), il vient :

$$[J^\diamond] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{115}$$

La forme normalisée de la matrice déformante associée au produit vectoriel classique est une matrice diagonale (1, -1, 1). A cet endroit, l'hexa-pack peut être formulé :

$$[J^\diamond] \,=\, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$|\mathbf{a}_1 > \equiv \left| \begin{array}{c} A_1^1 \,=\, 1 \\ A_1^2 \,=\, 0 \\ A_1^3 \,=\, 0 \end{array} \right\rangle ;\, |\mathbf{a}_2 > \equiv \left| \begin{array}{c} A_2^1 \,=\, 0 \\ A_2^2 \,=\, -1 \\ A_2^3 \,=\, 0 \end{array} \right\rangle ;\, |\mathbf{a}_3 > \equiv \left| \begin{array}{c} A_3^1 \,=\, 0 \\ A_3^2 \,=\, 0 \\ A_3^3 \,=\, 1 \end{array} \right\rangle$$

et :

$$[J^\diamond] \,=\, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$|\mathbf{a}^1 > \equiv \left| \begin{array}{c} A_1^1 \,=\, 1 \\ A_2^1 \,=\, 0 \\ A_3^1 \,=\, 0 \end{array} \right\rangle ;\, |\mathbf{a}^2 > \equiv \left| \begin{array}{c} A_1^2 \,=\, 0 \\ A_2^2 \,=\, -1 \\ A_3^2 \,=\, 0 \end{array} \right\rangle ;\, |\mathbf{a}^3 > \equiv \left| \begin{array}{c} A_1^3 \,=\, 0 \\ A_2^3 \,=\, 0 \\ A_3^3 \,=\, 1 \end{array} \right\rangle$$

Comme attendu, à cause de la symétrie de [J$^\diamond$] :

$$\forall\, m \,=\, 1,\, 2,\, 3 :\, \mathbf{a}_m \,=\, \mathbf{a}^m$$

Du coup, la matrice [B$^\diamond$([J], **a**)] prend ici une forme particulière de l'Equ.(105) :

$$[B([J],\, \mathbf{a})]$$

$$=$$

$$a^1 \, . \, \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_3, \mathbf{a}^\diamond{}_2) \, - \, T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_2, \mathbf{a}^\diamond{}_3)\}$$
$$a^2 \, . \, \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_1, \mathbf{a}^\diamond{}_3) \, - \, T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_3, \mathbf{a}^\diamond{}_1)\}$$
$$a^3 \, . \, \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_2, \mathbf{a}^\diamond{}_1) \, - \, T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_1, \mathbf{a}^\diamond{}_2)\}$$

De manière à bien me faire comprendre, je vais illustrer le mode de fonctionnement d'une table de Pythagore :

$$T_2(operation)(\mathbf{argument\,1}, \mathbf{argument\,2})$$

$$=$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$$

$$=$$

$$\left(\begin{array}{cc} \otimes & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

Dans le même état d'esprit :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) \, = \, \left(\begin{array}{cc} \otimes & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

et :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \, = \, \left(\begin{array}{cc} \otimes & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

Avec ces préliminaires :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_3, \mathbf{a}^\diamond{}_2) \, - \, T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_2, \mathbf{a}^\diamond{}_3) \, = \, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_1, \mathbf{a}^\diamond{}_3) \, - \, T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_3, \mathbf{a}^\diamond{}_1) \, = \, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_2, \mathbf{a}^\diamond{}_1) \, - \, T_2(\otimes)(\mathbf{a}^\diamond{}_1, \mathbf{a}^\diamond{}_2) \, = \, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De sorte que l'application de l'Equ.(105) au cas particulier étudié (i. e. : [A] = [J]) fournit :

$$[B^\diamond([J], \mathbf{a})] \, = \, \begin{bmatrix} 0 & -a^3 & -a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ a^2 & a^1 & 0 \end{bmatrix} \, = \, {}_{[J]}\Phi(a^1, -a^2, a^3) \, = \, \begin{bmatrix} B^1_1 & B^1_2 & B^1_3 \\ B^2_1 & B^2_2 & B^2_3 \\ B^3_1 & B^3_2 & B^3_3 \end{bmatrix}$$

Il convient ensuite de vérifier ces manipulations algébriques à l'aide de l'Equ.(23) avant d'aller plus loin. Il faudrait en principe trouver :

$$[A^\diamond] \, . \, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) \, . \, [A^\diamond] \, = \, -[B^\diamond]$$

Or le calcul montre que :

$$
{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})\,.\,[A^{\diamond}] \;=\; \begin{bmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & -a^1 & 0 \end{bmatrix}
$$

Et, dans un second temps, que :

$$
[A^{\diamond}]\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})\,.\,[A^{\diamond}] \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & -a^1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^3 & a^2 \\ -a^3 & 0 & a^1 \\ -a^2 & -a^1 & 0 \end{bmatrix}
$$

C'est bien le résultat attendu : il prouve la cohérence des Equ.(23) et (105) dans le cas particulier examiné ici. Concernant la vérification des autres critères qualifiant une involution, il convient de dénormaliser la matrice trouvée. Il devient visible que ces matrices ne satisfont pas la condition sur les produits monochromes et qu'elles ne peuvent servir à définir une involution. Ce n'est finalement pas une surprise.
Pour comprendre pourquoi, peut-être convient-il d'examiner ce que voudrait dire *définir une involution avec le produit vectoriel classique*. Pour rappel et en général, définir une involution, c'est découvrir une application agissant par la gauche sur un objet mathématique de telle sorte que le fait de l'appliquer deux fois sur cet objet le laisse inchangé ; exemple type : tourner la grande aiguille d'une horloge ancienne de 180 degrés deux fois de suite la ramène à sa position initiale.
Or, dans un espace euclidien de dimension trois réel classique rapporté à sa base orthonormée directe (la règle du tire-bouchon actionné de la main droite s'applique), la répétition d'un produit vectoriel classique fournit la relation :

$$
\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \;=\; (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,.\,\mathbf{a} \,-\, (\mathbf{a})^2\,.\,\mathbf{b} \tag{116}
$$

Et même si (i) les deux arguments (les vecteurs **a** et **b**) étaient orthogonaux entre eux et (ii) la norme euclidienne (un nombre réel strictement positif) du premier valait un, cette relation livrerait au mieux :

$$
\{(\mathbf{a})^2 \,=\, 1,\, (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}) \,=\, 0\} \;\Rightarrow\; \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \,=\, -\mathbf{b} \tag{117}
$$

Elle serait une réflection. Pour des raisons assez faciles à visualiser avec sa main droite, le produit vectoriel classique ne peut pas définir d'involution sur E(3, R) ; il définit au mieux une réflection.

Par conséquent, le résultat obtenu ci-dessus n'étonne plus qu'à moitié.

Arrivé à ce stade de la discussion, il faut encore se demander pourquoi l'extrapolation de la discussion à V = {E(3, C), [J]} interdirait la définition d'une involution. Je raisonne par l'absurde et je suppose qu'elle est réalisée :

$$
\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \;=\; (\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,.\,\mathbf{a} \,-\, (\mathbf{a})^2\,.\,\mathbf{b} \,=\, \mathbf{b} \tag{118}
$$

Dans ce cas, elle implique que :

$$
(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,.\,\mathbf{a} \;=\; \{1 \,+\, (\mathbf{a})^2\}\,.\,\mathbf{b} \tag{119}
$$

Ce qui revient à dire que les arguments sont colinéaires et que leur produit vectoriel est forcément nul. La discussion perd donc de facto son sens.

Lemme 3.9. *De l'obstruction à l'involution sur V_0 = {E(3, C), [**a**, ...][J]}*

Il n'existe pas d'involution sur V_0 et explorer l'existence de celle-ci dans les conditions géométriques et algébriques classiques n'a aucun sens. Autrement dit : faire le choix d'étudier le sujet en posant arbitrairement [A] = [J] sur V_0 est absurde.

Ce lemme va beaucoup plus loin que l'obstruction mise en évidence par cette analyse du cas classique. En effet, jusqu'à présent dans cette exploration, il n'existe au départ aucun critère indiquant l'inutilité de choisir telle ou telle matrice déformante pour tester le comportement du produit vectoriel qu'elle déforme vis-à-vis de l'involution. C'est un constat regrettable eu égard à la lourdeur relative des calculs à effectuer avant de se rendre compte que le choix initial fait arbitrairement n'était finalement pas sensé. Dit autrement : il serait judicieux de disposer d'un critère permettant de choisir la matrice déformante en amont des manipulations.

Remarque 3.17. ***Une remarquable décomposition.***

Malgré les propos qui viennent d'être tenus autour du produit vectoriel classique, je suppose ici qu'il existe un repère dans lequel la matrice déformante normalisée coincide avec la matrice [J] définissant habituellement le produit vectoriel classique : $[A^\diamond] = [J]$. Je remarque au passage que c'est ce qui semble continuellement se réaliser dans notre environnement géométrique perçu comme Euclidien et tridimensionnel ; a priori :

$$[A^\diamond] = [J] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{120}$$

$$\downarrow$$

$$|\mathbf{a}^\diamond{}_1 > \equiv \left| \begin{matrix} A_1^1 = 0 \\ A_1^2 = 1 \\ A_1^3 = 0 \end{matrix} \right\rangle ; |\mathbf{a}^\diamond{}_2 > \equiv \left| \begin{matrix} A_2^1 = 0 \\ A_2^2 = 0 \\ A_2^3 = -1 \end{matrix} \right\rangle ; |\mathbf{a}^\diamond{}_3 > \equiv \left| \begin{matrix} A_3^1 = 1 \\ A_3^2 = 0 \\ A_3^3 = 0 \end{matrix} \right\rangle \tag{121}$$

et :

$$[J] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$|\mathbf{a}^{\diamond 1} > \equiv \left| \begin{matrix} A_1^1 = 0 \\ A_2^1 = 0 \\ A_3^1 = 1 \end{matrix} \right\rangle ; |\mathbf{a}^{\diamond 2} > \equiv \left| \begin{matrix} A_1^2 = 1 \\ A_2^2 = 0 \\ A_3^2 = 0 \end{matrix} \right\rangle ; |\mathbf{a}^{\diamond 3} > \equiv \left| \begin{matrix} A_1^3 = 0 \\ A_2^3 = -1 \\ A_3^3 = 0 \end{matrix} \right\rangle \tag{122}$$

Ceci implique que :

$$\mathbf{a}^\diamond{}_1 = -\mathbf{a}^{\diamond 3}; \mathbf{a}^\diamond{}_2 = -\mathbf{a}^{\diamond 1}; \mathbf{a}^\diamond{}_3 = \mathbf{a}^{\diamond 2} \tag{123}$$

$$|\mathbf{a}^\diamond{}_1 \wedge \mathbf{a}^{\diamond 2} >= |\mathbf{a}^\diamond{}_1 \wedge \mathbf{a}^\diamond{}_3 >= \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \right\rangle = |\mathbf{a}^\diamond{}_2 > \tag{124}$$

$$|\mathbf{a}_2 \wedge \mathbf{a}^{\diamond 3} >= -|\mathbf{a}^\diamond{}_2 \wedge \mathbf{a}^\diamond{}_1 >= |\mathbf{a}^\diamond{}_1 \wedge \mathbf{a}^\diamond{}_2 >= \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = -|\mathbf{a}^\diamond{}_3 >$$

$$|\mathbf{a}^\diamond{}_3 \wedge \mathbf{a}^{\diamond 1} >= -|\mathbf{a}^\diamond{}_3 \wedge \mathbf{a}^\diamond{}_2 >= |\mathbf{a}^\diamond{}_2 \wedge \mathbf{a}^\diamond{}_3 >= \left| \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = -|\mathbf{a}^\diamond{}_1 >$$

et aussi :

$$|\mathbf{a}^{\diamond}{}_1 \wedge \mathbf{a}^{\diamond 3} >= \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle ; |\mathbf{a}^{\diamond}{}_3 \wedge \mathbf{a}^{\diamond 2} >= \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle ; |\mathbf{a}^{\diamond}{}_2 \wedge \mathbf{a}^{\diamond 1} >= \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\rangle ; \qquad (125)$$

Dans ces circonstances, la somme pondérée vaut (voir la définition 3.3 et l'Equ.(108)) :

$$\mathbf{S}_{[J]}([J], \mathbf{a}) \qquad (126)$$
$$=$$
$$a^1 . (\mathbf{a}^{\diamond 3} \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_2 - \mathbf{a}^{\diamond 2} \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_3) + a^2 . (\mathbf{a}^{\diamond 1} \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_3 - \mathbf{a}^{\diamond 3} \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_1) + a^3 . (\mathbf{a}^{\diamond 2} \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_1 - \mathbf{a}^{\diamond 1} \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_2)$$
$$=$$
$$a^1 . (-\mathbf{a}^{\diamond}{}_1 \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_2 - \mathbf{a}^{\diamond}{}_3 \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_3) + a^2 . (-\mathbf{a}^{\diamond}{}_2 \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_3 + \mathbf{a}^{\diamond}{}_1 \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_1) + a^3 . (\mathbf{a}^{\diamond}{}_3 \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_1 + \mathbf{a}^{\diamond}{}_2 \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_2)$$
$$=$$
$$-a^1 . (\mathbf{a}^{\diamond}{}_1 \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_2) - a^2 . (\mathbf{a}^{\diamond}{}_2 \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_3) + a^3 . (\mathbf{a}^{\diamond}{}_3 \wedge \mathbf{a}^{\diamond}{}_1)$$
$$=$$
$$a^1 . \mathbf{a}^{\diamond}{}_3 + a^2 . \mathbf{a}^{\diamond}{}_1 - a^3 . \mathbf{a}^{\diamond}{}_2$$

Il existe une correspondance ultra-simple entre les vecteurs composant $[A^{\diamond}] = [J]$ et la base canonique de l'espace vectoriel E(3, R) ; précisément :

$$\mathbf{e}_3 = -\mathbf{a}^{\diamond}{}_2; \mathbf{e}_1 = \mathbf{a}^{\diamond}{}_3; \mathbf{e}_2 = \mathbf{a}^{\diamond}{}_1;$$

Sachant tout ceci :

$$\forall \mathbf{a} : \mathbf{S}_{[J]}([J], \mathbf{a}) = a^1 . \mathbf{e}_1 + a^2 . \mathbf{e}_2 + a^3 . \mathbf{e}_3 = \mathbf{a} \qquad (127)$$

C'est un résultat remarquable en ce sens que, dans ces circonstances particulières, la somme pondérée de la matrice déformante normalisée $[A^{\diamond}] = [J]$ par un quelconque vecteur $\mathbf{a}$ de E(3, C) redonne ce vecteur.

Soit à calculer maintenant la matrice $[B^{\diamond}]$ à l'aide de l'Equ.(105) :

$$[B^{\diamond}([A], \mathbf{a})] \qquad (128)$$
$$=$$
$$a^1 . \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 3}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_2) - T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 2}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\}$$
$$+a^2 . \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 1}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_3) - T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 3}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\}$$
$$+a^3 . \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 2}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_1) - T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond 1}, \mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\}$$
$$=$$
$$a^1 . \{T_2(\otimes)(-\mathbf{a}^{\diamond}{}_1, \mathbf{a}^{\diamond}{}_2) - T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond}{}_3, \mathbf{a}^{\diamond}{}_3)\}$$
$$+a^2 . \{T_2(\otimes)(-\mathbf{a}^{\diamond}{}_2, \mathbf{a}^{\diamond}{}_3) - T_2(\otimes)(-\mathbf{a}^{\diamond}{}_1, \mathbf{a}^{\diamond}{}_1)\}$$
$$+a^3 . \{T_2(\otimes)(\mathbf{a}^{\diamond}{}_3, \mathbf{a}^{\diamond}{}_1) - T_2(\otimes)(-\mathbf{a}^{\diamond}{}_2, \mathbf{a}^{\diamond}{}_2)\}$$
$$=$$
$$a^1 . \{T_2(\otimes)(-\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3) - T_2(\otimes)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)\}$$
$$+a^2 . \{T_2(\otimes)(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) - T_2(\otimes)(-\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)\}$$
$$+a^3 . \{T_2(\otimes)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) - T_2(\otimes)(\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_3)\}$$

$$=$$

$$a^1 . \{T_2(\otimes)(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) - T_2(\otimes)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1)\}$$

$$+a^2 . \{T_2(\otimes)(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1) + T_2(\otimes)(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2)\}$$

$$+a^3 . \{T_2(\otimes)(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + T_2(\otimes)(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3)\}$$

$$=$$

$$a^1 . \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a^2 . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a^3 . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} -a^1 & a^3 & 0 \\ 0 & a^2 & a^1 \\ a^2 & 0 & a^3 \end{bmatrix}$$

Soit maintenant à calculer a priori la même matrice mais avec l'aide de l'Equ.(23) :

$$- [A^\diamond] . {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) . [A^\diamond] \tag{129}$$

$$=$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -a^3 & a^2 \\ a^3 & 0 & -a^1 \\ -a^2 & a^1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -a^3 & -a^2 & 0 \\ 0 & a^1 & a^3 \\ a^1 & 0 & -a^2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} -a^1 & 0 & a^2 \\ a^3 & a^2 & 0 \\ 0 & a^1 & a^3 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$[B]^t$$

Il faudrait bien peu de chose pour que ces deux formulations soient égales ... et elles le sont à une transposition près. Malheureusement, les calculs menés en amont exigent qu'elles soient strictement égales.

Une fois encore se pose la question de savoir si une erreur de manipulation algébrique s'est malencontreusement glissée dans cet exposé... ou si, ici aussi, il n'est pas justifié de se poser la question de l'involution dans un espace dans lequel le produit vectoriel n'est pas déformé. Car, stricto sensu, les deux formulations précédentes ne sont vraiment égales que si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; auquel cas, la question de l'involution n'a aucun sens quand [A$^\diamond$] = [J].

3.6 La matrice [B◇] comme noyau d'une décomposition non-triviale.

Une confrontation visuelle entre les équations (62) et (105) peut suggérer d'explorer la recevabilité de la proposition suivante :

Proposition 3.2. *Il existe des circonstances pour lesquelles la partie principale, [P], d'une décomposition non-triviale du produit vectoriel déformé [**a**, ...][A] satisfait à l'ensemble des critères mathématiques faisant d'elle une représentation admissible d'une matrice [B([A], **a**)] associée à l'involution de ce produit et décrite via les équations (10), (11), (12) and (23).*

Cette proposition suggère que, lorsque :

$$\exists\,([P],\,\mathbf{z})\,\in\,U\,:\,|[\mathbf{a},\,...][A]>=\,[P]\,.\,|...>\,+|\mathbf{z}> \tag{130}$$

Il existe parfois des circonstances validant les relations ci-dessous :

$$[P]\;=\;[B([A],\,\mathbf{a})];\;{}_{[P]}\Phi(\mathbf{a})\;=\;Id_3 \tag{131}$$

Démonstration. : A cause de la remarque 3.3 et de l'Equ.(79) participant à définir les matrices [B] admissibles (troisième critère), la proposition précédente, si elle est vraie, ne peut concerner que les parties principales dont le déterminant est nul. En tenant compte de la classification des situations qui a été établie dans la sous-section 2.3, il devient immédiat que les circonstances admissibles sont représentées de façon différente selon que :

1. **Première catégorie : Le déterminant de la Hessienne n'est pas nul.** Dans ce cas, les résultats généraux acquis dans [[b]] montrent que la condition de nullité sur le déterminant s'écrit :

$$|P|\;=\;|B([A],\,\mathbf{a})|\;=<_\Lambda\,\mathbf{s},\;{}_\Lambda\mathbf{s}>_{[d_{ij}]}\;+\;\frac{|Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})|}{8}\;=\;0 \tag{132}$$

Démonstration. Pour mémoire, la transposée de la partie principale du noyau d'une décomposition intrinsèque non-triviale s'écrit ; voir Equ.(**??**) ci-dessus :

$$[N]_{|A|}\;=\;\frac{1}{2}\,.\,[S_0]\;-\;|A|\,.\,{}_{[J]}\Phi({}_\Lambda\mathbf{s})\;=\;K([P]_{|A|})$$

avec :

$$[S_0]\;=\;[Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})]\;=\;[d_{ij}\;+\;d_{ji}]\;=\;[D_{ij}]\,;\,|A|\;=\;\pm 1.$$

Ce qui correspond à la matrice suivante :

$$[N]_{|A|}\;=\;\begin{bmatrix} d_{11} & \frac{1}{2}\,.\,D_{12}\,+\,|A|\,.\,s^3 & \frac{1}{2}\,.\,D_{13}\,-\,|A|\,.\,s^2 \\ \frac{1}{2}\,.\,D_{12}\,-\,|A|\,.\,s^3 & d_{22} & \frac{1}{2}\,.\,D_{23}\,+\,|A|\,.\,s^1 \\ \frac{1}{2}\,.\,D_{13}\,+\,|A|\,.\,s^2 & \frac{1}{2}\,.\,D_{23}\,-\,|A|\,.\,s^1 & d_{33} \end{bmatrix}$$

dont le déterminant vaut in extenso :

$$|N|_{|A|}$$

$$=$$

$$d_{11}\,.\,\{d_{22}\,.\,d_{33}\;-\;(\frac{1}{2}\,.\,D_{23}\;+\;|A|\,.\,s^1)\,.\,(\frac{1}{2}\,.\,D_{23}\;-\;|A|\,.\,s^1)\}$$

$$-$$

$$(\frac{1}{2}\,.\,D_{12}+|A|\,.\,s^3)\,.\,\{(\frac{1}{2}\,.\,D_{12}-|A|\,.\,s^3)\,.\,d_{33}-(\frac{1}{2}\,.\,D_{23}+|A|\,.\,s^1)\,.\,(\frac{1}{2}\,.\,D_{13}+|A|\,.\,s^2)\}$$
$$+$$
$$(\frac{1}{2}\,.\,D_{13}-|A|\,.\,s^2)\,.\,\{(\frac{1}{2}\,.\,D_{12}-|A|\,.\,s^3)\,.\,(\frac{1}{2}\,.\,D_{23}-|A|\,.\,s^1)-d_{22}\,.\,(\frac{1}{2}\,.\,D_{13}+|A|\,.\,s^2)\}$$

Plus exactement encore :

$$|N|_{|A|}$$
$$=$$
$$d_{11}\,.\,(d_{22}\,.\,d_{33}\;-\;\frac{1}{4}\,.\,D_{23}\,.\,D_{23}\;+\;(s^1)^2)$$
$$-\,(\frac{1}{2}\,.\,D_{12}\;+\;|A|\,.\,s^3)\,.\,(\frac{1}{2}\,.\,D_{12}\,.\,d_{33}\;-\;|A|\,.\,s^3\,.\,d_{33})$$
$$+\,(\frac{1}{2}\,.\,D_{12}\;+\;|A|\,.\,s^3)\,.\,(\frac{1}{4}\,.\,D_{23}\,.\,D_{13}\;+\;\frac{|A|}{2}\,.\,D_{13}\,.\,s^1\;+\;\frac{|A|}{2}\,.\,D_{23}\,.\,s^2\;+\;s^1\,.\,s^2)$$
$$+\,(\frac{1}{2}\,.\,D_{13}\;-\;|A|\,.\,s^2)\,.\,(\frac{1}{4}\,.\,D_{12}\,.\,D_{23}\;-\;\frac{|A|}{2}\,.\,D_{12}\,.\,s^1\;-\;\frac{|A|}{2}\,.\,D_{23}\,.\,s^3\;+\;s^1\,.\,s^3)$$
$$-\,(\frac{1}{2}\,.\,D_{13}\;-\;|A|\,.\,s^2)\,.\,(\frac{1}{2}\,.\,d_{22}\,.\,D_{13}\;+\;|A|\,.\,d_{22}\,.\,s^2)$$

Le calcul se poursuit avec :

$$|N|_{|A|}$$
$$=$$
$$d_{11}\,.\,d_{22}\,.\,d_{33}\;-\;\frac{1}{4}\,.\,d_{11}\,.\,D_{23}\,.\,D_{23}\;+\;d_{11}\,.\,(s^1)^2$$
$$-$$
$$\frac{1}{2}\,.\,D_{12}\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,D_{12}\,.\,d_{33}-|A|\,.\,s^3\,.\,d_{33}-\frac{1}{4}\,.\,D_{23}\,.\,D_{13}-\frac{|A|}{2}\,.\,D_{13}\,.\,s^1-\frac{|A|}{2}\,.\,D_{23}\,.\,s^2-s^1\,.\,s^2\}$$
$$-$$
$$|A|\,.\,s^3\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,D_{12}\,.\,d_{33}-|A|\,.\,s^3\,.\,d_{33}-\frac{1}{4}\,.\,D_{23}\,.\,D_{13}-\frac{|A|}{2}\,.\,D_{13}\,.\,s^1-\frac{|A|}{2}\,.\,D_{23}\,.\,s^2-s^1\,.\,s^2\}$$
$$+$$
$$\frac{1}{2}\,.\,D_{13}\,.\,\{\frac{1}{4}\,.\,D_{12}\,.\,D_{23}-\frac{|A|}{2}\,.\,D_{12}\,.\,s^1-\frac{|A|}{2}\,.\,D_{23}\,.\,s^3+s^1\,.\,s^3-\frac{1}{2}\,.\,d_{22}\,.\,D_{13}-|A|\,.\,d_{22}\,.\,s^2\}$$
$$-$$
$$|A|\,.\,s^2\,.\,\{\frac{1}{4}\,.\,D_{12}\,.\,D_{23}-\frac{|A|}{2}\,.\,D_{12}\,.\,s^1-\frac{|A|}{2}\,.\,D_{23}\,.\,s^3+s^1\,.\,s^3-\frac{1}{2}\,.\,d_{22}\,.\,D_{13}-|A|\,.\,d_{22}\,.\,s^2\}$$

De sorte que :

$$|N|_{|A|}$$
$$=$$
$$d_{11}\,.\,d_{22}\,.\,d_{33}\;-\;\frac{1}{4}\,.\,d_{11}\,.\,D_{23}\,.\,D_{23}\;+\;d_{11}\,.\,(s^1)^2$$
$$+\,\{-\frac{1}{4}\,.\,D_{12}\,.\,D_{12}\,.\,d_{33}\;+\;\frac{|A|}{2}\,.\,D_{12}\,.\,s^3\,.\,d_{33}\;+\;\frac{1}{8}\,.\,D_{12}\,.\,D_{23}\,.\,D_{13}\}$$
$$+\,\{D_{12}\,.\,\frac{|A|}{4}\,.\,D_{13}\,.\,s^1\;+\;D_{12}\,.\,\frac{|A|}{4}\,.\,D_{23}\,.\,s^2\;+\;\frac{1}{2}\,.\,D_{12}\,.\,s^1\,.\,s^2\}$$
$$+\,\{-\frac{|A|}{2}\,.\,D_{12}\,.\,d_{33}\,.\,s^3\;+\;d_{33}\,.\,(s^3)^2\;+\;\frac{|A|}{4}\,.\,D_{23}\,.\,D_{13}\,.\,s^3\}$$

$$+\{\frac{1}{2}\,.\,D_{13}\,.\,s^1\,.\,s^3\;+\;\frac{1}{2}\,.\,D_{23}\,.\,s^2\,.\,s^3\;+\;|A|\,.\,s^1\,.\,s^2\,.\,s^3\}$$
$$+\{\frac{1}{8}\,.\,D_{12}\,.\,D_{23}\,.\,D_{13}\;-\;\frac{|A|}{4}\,.\,D_{12}\,.\,D_{13}.s^1\;-\;\frac{|A|}{4}\,.\,D_{13}\,.\,D_{23}\,.\,s^3\}$$
$$+\{\frac{1}{2}\,.\,D_{13}\,.\,s^1\,.\,s^3\;-\;\frac{1}{4}\,.\,D_{13}\,.\,d_{22}\,.\,D_{13}\;-\;\frac{|A|}{2}\,.\,D_{13}\,.\,d_{22}\,.\,s^2\}$$
$$+\{-\frac{|A|}{4}\,.\,D_{12}\,.\,D_{23}\,.\,s^2\;+\;\frac{1}{2}\,.\,D_{12}\,.\,s^1\,.\,s^2\;+\;\frac{1}{2}\,.\,D_{23}\,.\,s^3\,.\,s^2\}$$
$$\{-|A|\,.\,s^2\,.\,s^1\,.\,s^3\;+\;\frac{|A|}{2}\,.\,d_{22}\,.\,D_{13}\,.\,s^2\;+\;d_{22}\,.\,(s^2)^2\}$$

Les termes de degré impair (1 et 3) disparaissent. Cette expression compliquée se simplifie drastiquement pour se réduire à :

$$|N|_{|A|}$$
$$=$$
$$d_{11}\,.\,(s^1)^2+d_{22}\,.\,(s^2)^2+d_{33}\,.\,(s^3)^2+D_{12}\,.\,s^1\,.\,s^2+D_{23}\,.\,s^2\,.\,s^3+D_{13}\,.\,s^1\,.\,s^3+\frac{|S_0|}{8}$$
$$=$$
$$d_{ij}\,.\,s^i\,.\,s^j\;+\;\frac{|S_0|}{8}$$
$$=$$
$$<_\Lambda\,\mathbf{s},\;_\Lambda\mathbf{s}>_{[d_{ij}]}\;+\frac{|Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})|}{8}$$

Ce déterminant ne dépend finalement pas d'une valeur particulière de celui de la matrice déformante [A] : $|A| = \pm 1$. Par ailleurs, puisque [[b], version française ; p. 17 - et Equ.(67) ci-dessus] :

$$[P_{|A|}]\;=\;|A|\,.\,\{[A]^t\,.\,[J]\}\,.\,[N_{|A|}]^t$$

et que :

$$|J|\;=\;|J^t|\;=\;-1\,;\;|A^t|\;=\;|A|\;=\;\pm 1\,;\;|N_{|A|}|\;=\;|N^t_{|A|}|$$

il devient clair que :

$$|P_{|A|}|\tag{133}$$
$$=$$
$$|A|\,.\,|A^t|\,.\,|J|\,.\,|N^t_{|A|}|\;=\;-|N_{|A|}|$$
$$=$$
$$-\{<_\Lambda\,\mathbf{s},\;_\Lambda\mathbf{s}>_{[d_{ij}]}\;+\frac{|Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})|}{8}\}$$

De sorte que si le déterminant de la Hessienne ne s'annule pas mais qu'il est souhaité que celui de la partie principale oui, alors l'Equ.(132) est retrouvée. □

2. **Seconde catégorie - Première famille : Le déterminant de la Hessienne est nul sans que celle-ci le soit.**
   Dans ce cas, l'Equ.(73) fournit le formalisme générique des parties principales des décompositions non-triviales et l'Equ.(72) en fournit le déterminant ; de sorte qu'ici, la condition de nullité s'écrit simplement :

$$|P|\;=\;|T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\;+\;_{[J]}\Phi(\mathbf{X})|\;=<\mathbf{h},\,\mathbf{X}>_{Id_3}\;.\;<\mathbf{g},\,\mathbf{X}>_{Id_3}=\,0\tag{134}$$

Les situations intéressantes appartenant à cette famille mettent clairement en évidence la nécessité de disposer d'un triplé de vecteurs non nuls de E(3, C), **h**, **g** et **X** tels que (i) ou bien au moins un des deux premiers doit être orthogonal au troisième ; (ii) ou bien le troisième est un spineur d'E. Cartan [[14]] : $|\mathbf{X}| = 0$, $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$.

3. **Seconde catégorie - Seconde famille : Le déterminant de la Hessienne est nul parce que celle-ci est nulle.**

Dans la suite de ce travail, je concentre mon attention sur les situations de la première catégorie.

Remarque 3.18. ***Le formalisme générique des noyaux des décompositions non-triviales (rappel)***

Dans ce paragraphe, j'utilise la notation suivante pour les noyaux de la première catégorie :

$$K([P]_{|A|}) = \begin{pmatrix} \frac{|A|}{2} \,.\, H_{11} & \frac{|A|}{2} \,.\, H_{12} + s^3 & \frac{|A|}{2} \,.\, H_{13} - s^2 \\ \frac{|A|}{2} \,.\, H_{21} - s^3 & \frac{|A|}{2} \,.\, H_{22} & \frac{|A|}{2} \,.\, H_{23} + s^1 \\ \frac{|A|}{2} \,.\, H_{31} + s^2 & \frac{|A|}{2} \,.\, H_{32} - s^1 & \frac{|A|}{2} \,.\, H_{33} \end{pmatrix} ; \; |A| = \pm 1 \qquad (135)$$

Une critique peut se formuler à cet endroit. Elle argue du fait que le formalisme de cette catégorie semble dépendre de la méthode de décomposition utilisée. La méthode intrinsèque ne donne pas exactement le formalisme fourni par la méthode extrinsèque. J'ai démontré dans [[b], version française] et dans [[f] ; remark 2.9, pp. 13-15] qu'il est possible de réaliser une calibration sensée des deux résultats permettant de les faire coincider.

Ceci étant dit et admis, j'étudie les situations définies par :

$$\begin{gathered} K([P]_{|A|}) \\ = \\ \begin{pmatrix} B^1_{12} & B^2_{12} & B^3_{12} \\ B^1_{23} & B^2_{23} & B^3_{23} \\ B^1_{13} & B^2_{13} & B^3_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1_3 & B^2_3 & B^3_3 \\ B^1_1 & B^2_1 & B^3_1 \\ B^1_2 & B^2_2 & B^3_2 \end{pmatrix} \\ = \\ [B] ; \; |B| = 0, \end{gathered} \qquad (136)$$

et je cherche à savoir si ces matrices permettent de définir l'involution sur V = {E(3, C) ; [**a**, ...][A]} où (i) $\mathbf{a} = \mathbf{p}$ représente une impulsion spatiale et où (ii) la matrice déformante [A] ne coincide jamais avec la matrice [J] ; dans ces situations, la polynomiale Λ se simplifie en :

$$\Lambda(p^1, p^2, p^3) = |_{[A]}\Phi(\mathbf{p}) - [P]| = \sum_{ab} d_{ab} \,.\, p^a \,.\, p^b + \sum_a d_a \,.\, p^a \, ; \; |P| = 0 \qquad (137)$$

Remarque 3.19. ***Condition sur les produits monochromes.***

La contrainte sur les produits monochromes est ; voir l'Equ.(78) :

$$B^3_{12} \,.\, B^2_{13} \,.\, B^1_{23} \;=\; B^2_{23} \,.\, B^1_{12} \,.\, B^3_{13} \;=\; B^1_{13} \,.\, B^3_{23} \,.\, B^2_{12}$$

Ici :

$$(\frac{|A|}{2} \,.\, H_{13} \,-\, s^2) \,.\, (\frac{|A|}{2} \,.\, H_{32} \,-\, s^1) \,.\, (\frac{|A|}{2} \,.\, H_{21} \,-\, s^3)$$

$$= \tag{138}$$

$$\frac{|A|}{8} \,.\, H_{11} \,.\, H_{22} \,.\, H_{33}$$

$$= \tag{139}$$

$$(\frac{|A|}{2} \,.\, H_{12} \,+\, s^3) \,.\, (\frac{|A|}{2} \,.\, H_{23} \,+\, s^1) \,.\, (\frac{|A|}{2} \,.\, H_{31} \,+\, s^2)$$

Les Equ.(138) et (139) induisent l'existence d'une polynomiale de degré trois qui dépend des composantes du *vecteur singulier* $_\Lambda\mathbf{s}$: (s^1, s^2, s^3).

$$2.s^3 \,.\, s^1 \,.\, s^2 + \frac{|A|}{2} \,.\, (H_{12} - H_{21}) \,.\, s^1 \,.\, s^2 + \frac{|A|}{2} \,.\, (H_{23} - H_{32}) \,.\, s^2 \,.\, s^3 + \frac{|A|}{2} \,.\, (H_{31} - H_{13}) \,.\, s^1 \,.\, s^3$$

$$+ \frac{1}{4} \,.\, (H_{12} \,.\, H_{31} + H_{21} \,.\, H_{13}) \,.\, s^1 + \frac{1}{4} \,.\, (H_{12} \,.\, H_{23} + H_{21} \,.\, H_{32}) \,.\, s^2 + \frac{1}{4} \,.\, (H_{23} \,.\, H_{31} + H_{32} \,.\, H_{13}) \,.\, s^3$$

$$+ \frac{|A|}{2} \,.\, (H_{12} \,.\, H_{23} \,.\, H_{31} \,-\, H_{21} \,.\, H_{13} \,.\, H_{32}) \;=\; 0$$

Quand cette polynomiale Λ n'a pas de discontinuité, sa Hessienne est symétrique et la polynomiale de degré trois se simplifie pour devenir :

$$2.s^3 \,.\, s^1 \,.\, s^2 \,+\, \frac{1}{2} \,.\, (H_{12} \,.\, H_{13}) \,.\, s^1 \,+\, \frac{1}{2} \,.\, (H_{12} \,.\, H_{23}) \,.\, s^2 \,+\, \frac{1}{2} \,.\, (H_{23} \,.\, H_{13}) \,.\, s^3 \;=\; 0 \tag{140}$$

$$\forall\, a,\, b \;=\; 1,\, 2,\, 3 :\; H_{ab} \;=\; H_{ba}$$

Dans ce document je limiterai ma recherche à ces cas simples.

Remarque 3.20. ***Une solution simple pour résoudre la condition sur les produits monochromes.***

Cette polynomiale simplifiée accepte elle-même une solution simple :

$$H_{12} \;=\; \frac{2.i}{3^{1/2}} \,.\, s^3 \,;\; H_{13} \;=\; \frac{2.i}{3^{1/2}} \,.\, s^2 \,;\; H_{23} \;=\; \frac{2.i}{3^{1/2}} \,.\, s^1 \tag{141}$$

$$\forall\, a,\, b \;=\; 1,\, 2,\, 3 :\; H_{ab} \;=\; H_{ba}$$

Elle connecte les composantes du vecteur singulier et les composantes hors-diagonale de la Hessienne. En injectant cette solution dans le formalisme générique de l'Equ.(135), il vient pour |A| = ± 1 :

$$K([P]_{|A|}) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{|A|}{2} \,.\, H_{11} & (\frac{|A|}{2} \,+\, \frac{3^{1/2}}{2.i}) \,.\, H_{12} & (\frac{|A|}{2} \,-\, \frac{3^{1/2}}{2.i}) \,.\, H_{13} \\ (\frac{|A|}{2} \,-\, \frac{3^{1/2}}{2.i}) \,.\, H_{12} & \frac{|A|}{2} \,.\, H_{22} & (\frac{|A|}{2} \,+\, \frac{3^{1/2}}{2.i}) \,.\, H_{23} \\ (\frac{|A|}{2} \,+\, \frac{3^{1/2}}{2.i}) \,.\, H_{13} & (\frac{|A|}{2} \,-\, \frac{3^{1/2}}{2.i}) \,.\, H_{23} & \frac{|A|}{2} \,.\, H_{33} \end{pmatrix} \tag{142}$$

Ce qui permet de constater :

— |A| = +1

$$[B_+] = K([P]_{+1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,.\,H_{11} & \frac{1}{2}\,.\,H_{12} + s^3 & \frac{1}{2}\,.\,H_{13} - s^2 \\ \frac{1}{2}\,.\,H_{21} - s^3 & \frac{1}{2}\,.\,H_{22} & \frac{1}{2}\,.\,H_{23} + s^1 \\ \frac{1}{2}\,.\,H_{31} + s^2 & \frac{1}{2}\,.\,H_{32} - s^1 & \frac{1}{2}\,.\,H_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,.\,H_{11} & \frac{1}{2}\,.\,H_{12} + \frac{3^{1/2}}{2.i}\,.\,H_{12} & \frac{1}{2}\,.\,H_{13} - \frac{3^{1/2}}{2.i}\,.\,H_{13} \\ \frac{1}{2}\,.\,H_{21} - \frac{3^{1/2}}{2.i}\,.\,H_{12} & \frac{1}{2}\,.\,H_{22} & \frac{1}{2}\,.\,H_{23} + \frac{3^{1/2}}{2.i}\,.\,H_{23} \\ \frac{1}{2}\,.\,H_{31} + \frac{3^{1/2}}{2.i}\,.\,H_{13} & \frac{1}{2}\,.\,H_{32} - \frac{3^{1/2}}{2.i}\,.\,H_{23} & \frac{1}{2}\,.\,H_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,.\,H_{11} & -j\,.\,H_{12} & -j^2\,.\,H_{13} \\ -j^2\,.\,H_{12} & \frac{1}{2}\,.\,H_{22} & -j\,.\,H_{23} \\ -j\,.\,H_{13} & -j^2\,.\,H_{23} & \frac{1}{2}\,.\,H_{33} \end{pmatrix}$$

— |A| = -1

$$[B_-] = K([P]_{-1}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,.\,H_{11} & j^2\,.\,H_{12} & j\,.\,H_{13} \\ j\,.\,H_{12} & -\frac{1}{2}\,.\,H_{22} & j^2\,.\,H_{23} \\ j^2\,.\,H_{13} & j\,.\,H_{23} & -\frac{1}{2}\,.\,H_{33} \end{pmatrix}$$

Ici, 1, j, j^2 représentent les trois racines complexes de l'unité ; elles peuvent se regrouper par convention au sein d'un élément $\mathbf{1}_{C3}$ de E(3, C). Le déterminant de ces matrices peut évidemment se calculer. Il faut lui imposer de s'annuler :

$$|B_+| = \frac{1}{8}\,.\,H_{11}\,.\,H_{22}\,.\,H_{33} - 2\,.\,H_{12}\,.\,H_{23}\,.\,H_{13} - \frac{1}{2}\,.\,\{H_{11}\,.\,(H_{23})^2 + H_{22}\,.\,(H_{13})^2 + H_{33}\,.\,(H_{12})^2\} = 0 \tag{143}$$

A cause de la contrainte sur les produits monochromes ; voir à nouveau l'Equ.(78) :

$$\frac{1}{8}\,.\,H_{11}\,.\,H_{22}\,.\,H_{33} = -H_{12}\,.\,H_{23}\,.\,H_{13}$$

La contrainte sur le déterminant s'écrit :

$$H_{12}\,.\,H_{23}\,.\,H_{13} = -\frac{1}{6}\,.\,\{H_{11}\,.\,(H_{23})^2 + H_{22}\,.\,(H_{13})^2 + H_{33}\,.\,(H_{12})^2\}$$

Pour l'heure, je ne poursuis pas encore les calculs car d'autres contraintes doivent être prises en compte.

Lemme 3.10. *De la contrainte sur les produits monochromes.*

Les composantes bleues des matrices admissibles sont proportionnelles à celles des vecteurs singuliers ; voir Equ.(141).

Remarque 3.21. ***La contrainte bleue.***

La formulation générique de la contrainte bleue pour une involution du produit vectoriel déformé [**a**, ...][A] s'écrit :

$$0 = 1 - B^2_{12} \,.\, a^1 - B^3_{23} \,.\, a^2 + B^1_{13} \,.\, a^3 - B^3_{23} \,.\, B^1_{13} \,.\, a^2 \,.\, a^3 + B^2_{12} \,.\, B^3_{23} \, a^1 \,.\, a^2 - B^2_{12} \,.\, B^1_{13} \, a^1 \,.\, a^3$$

Pour le produit [**p**, ...][A] il s'agit de :

$$\begin{aligned} 0 \;=\; 1 \;-\; (\frac{|A|}{2}\,.\,H_{12} \;+\; s^3)\,.\,p^1 \;-\; (\frac{|A|}{2}\,.\,H_{23} \;+\; s^1)\,.\,p^2 \;+\; (\frac{|A|}{2}\,.\,H_{31} \;+\; s^2)\,.\,p^3 \\ -\,(\frac{|A|}{2}\,.\,H_{23} \;+\; s^1)\,.\,(\frac{|A|}{2}\,.\,H_{31} \;+\; s^2)\,.\,p^2\,.\,p^3 \\ +\,(\frac{|A|}{2}\,.\,H_{12} \;+\; s^3)\,.\,(\frac{|A|}{2}\,.\,H_{23} \;+\; s^1)\,p^1\,.\,p^2 \\ -\,(\frac{|A|}{2}\,.\,H_{12} \;+\; s^3)\,.\,(\frac{|A|}{2}\,.\,H_{31} \;+\; s^2)\,p^1\,.\,p^3 \end{aligned}$$

Il ne m'est pas possible de donner un sens précis à cette contrainte aussi longtemps qu'elle revêt ce formalisme. En se souvenant ici qu'une conséquence logique de l'Equ.(29) est :

$$\begin{aligned} -(B^1_{12}\,.\,p^2 \;+\; B^1_{13}\,.\,p^3) \;&=\; 1 \\ B^2_{12}\,.\,p^1 \;-\; B^2_{23}\,.\,p^3 \;&=\; 1 \\ B^3_{13}\,.\,p^1 \;+\; B^3_{23}\,.\,p^2 \;&=\; 1 \end{aligned}$$

Il s'agit de :

$$\begin{aligned} \frac{|A|}{2}\,.\,H_{11}\,.\,p^2 \;+\; (\frac{|A|}{2}\,.\,H_{31} \;+\; s^2)\,.\,p^3 \;&=\; -1 \\ (\frac{|A|}{2}\,.\,H_{12} \;+\; s^3)\,.\,p^1 \;-\; \frac{|A|}{2}\,.\,H_{22}\,.\,p^3 \;&=\; 1 \\ \frac{|A|}{2}\,.\,H_{33}\,.\,p^1 \;+\; (\frac{|A|}{2}\,.\,H_{23} \;+\; s^1)\,.\,p^2 \;&=\; 1 \end{aligned}$$

Et il en découle :

$$\begin{aligned} s^2\,.\,p^3 \;&=\; -1 \;-\; \frac{|A|}{2}\,.\,H_{11}\,.\,p^2 \;-\; \frac{|A|}{2}\,.\,H_{31}\,.\,p^3 \\ s^3\,.\,p^1 \;&=\; 1 \;+\; \frac{|A|}{2}\,.\,H_{22}\,.\,p^3 \;-\; \frac{|A|}{2}\,.\,H_{12}\,.\,p^1 \\ s^1\,.\,p^2 \;&=\; 1 \;-\; \frac{|A|}{2}\,.\,H_{33}\,.\,p^1 \;-\; \frac{|A|}{2}\,.\,H_{23}\,.\,p^2 \end{aligned}$$

Si les composantes de la quantité de mouvement **p** ne s'annulent pas :

$$\begin{aligned} s^2 \;&=\; -\frac{1}{p^3} \;-\; \frac{|A|\,.\,p^2}{2\,.\,p^3}\,.\,H_{11} \;-\; \frac{|A|}{2}\,.\,H_{31} \\ s^3 \;&=\; \frac{1}{p^1} \;+\; \frac{|A|\,.\,p^3}{2\,.\,p^1}\,.\,H_{22} \;-\; \frac{|A|}{2}\,.\,H_{12} \\ s^1 \;&=\; \frac{1}{p^2} \;-\; \frac{|A|\,.\,p^1}{2\,.\,p^2}\,.\,H_{33} \;-\; \frac{|A|}{2}\,.\,H_{23} \end{aligned} \tag{144}$$

la contrainte bleue connecte le vecteur singulier ${}_{\Lambda}\mathbf{s}$, les composantes de la Hessienne [H], et la quantité de mouvement **p** d'une manière similaire à la contrainte sur les produits monochromes ; voir l'Equ.(141).

Remarque 3.22. ***Etude de compatibilité entre la contrainte bleue et la condition sur les produits monochromes.***

Les composantes du vecteur singulier ${}_{\Lambda}\mathbf{s}$ doivent être les mêmes, qu'elles soient déduites de la contrainte bleue ou de la condition sur les produits monochromes :

$$s^2 = -\frac{1}{p^3} - \frac{|A|\,.\,p^2}{2\,.\,p^3}\,.\,H_{11} - \frac{|A|}{2}\,.\,H_{13} = \frac{3^{1/2}}{2.i}\,.\,H_{13}$$

$$s^3 = \frac{1}{p^1} + \frac{|A|\,.\,p^3}{2\,.\,p^1}\,.\,H_{22} - \frac{|A|}{2}\,.\,H_{12} = \frac{3^{1/2}}{2.i}\,.\,H_{12}$$

$$s^1 = \frac{1}{p^2} - \frac{|A|\,.\,p^1}{2\,.\,p^2}\,.\,H_{33} - \frac{|A|}{2}\,.\,H_{23} = \frac{3^{1/2}}{2.i}\,.\,H_{23}$$

Dans ce cas :

$$-1 - \frac{|A|\,.\,p^2}{2}\,.\,H_{11} = \{\frac{|A|}{2} - i.\frac{3^{1/2}}{2}\}\,.\,H_{13}\,.\,p^3$$

$$1 + \frac{|A|\,.\,p^3}{2}\,.\,H_{22} = \{\frac{|A|}{2} - i.\frac{3^{1/2}}{2}\}\,.\,H_{12}\,.\,p^1$$

$$1 - \frac{|A|\,.\,p^1}{2}\,.\,H_{33} = \{\frac{|A|}{2} - i.\frac{3^{1/2}}{2}\}\,.\,H_{23}\,.\,p^2$$

Les connaissances élémentaires sur les racines complexes de +1 et -1 permettent de rappeler que :

$$|A| = \pm 1 \Rightarrow \{\frac{|A|}{2} - i.\frac{3^{1/2}}{2}\} = -j\; or\; j^2\; with\; j^3 = 1 \tag{145}$$

La cohérence est donc obtenue lorsque :

— |A| = +1

$$-1 - \frac{p^2}{2}\,.\,H_{11} = -j\,.\,H_{13}\,.\,p^3 \tag{146}$$

$$1 + \frac{p^3}{2}\,.\,H_{22} = -j\,.\,H_{12}\,.\,p^1$$

$$1 - \frac{p^1}{2}\,.\,H_{33} = -j\,.\,H_{23}\,.\,p^2$$

— |A| = - 1

$$-1 + \frac{p^2}{2}\,.\,H_{11} = j^2\,.\,H_{13}\,.\,p^3 \tag{147}$$

$$1 - \frac{p^3}{2}\,.\,H_{22} = j^2\,.\,H_{12}\,.\,p^1$$

$$1 + \frac{p^1}{2}\,.\,H_{33} = j^2\,.\,H_{23}\,.\,p^2$$

La condition de réalité est atteinte lorsque les composantes hors-diagonale de la Hessienne sont des nombres complexes.

Avec l'aide des résultats déjà acquis, la contrainte bleue se laisse réécrire :

— |A| = +1

$$0$$

$$=$$

$$1 + j.H_{12}\,.\,p^1 + j.H_{23}\,.\,p^2 - j.H_{13}\,.\,p^3 - j^2\,.\,H_{23}\,.\,H_{13}\,.\,p^2\,.\,p^3 + j^2\,.\,H_{12}\,.\,H_{23}\,p^1\,.\,p^2 - j^2\,.\,H_{12}\,.\,H_{13}\,p^1\,.\,p^3$$

— |A| = -1

$$0 = 1 - j^2.H_{12}\,.\,p^1 - j^2.H_{23}\,.\,p^2 + j^2.H_{13}\,.\,p^3 - j\,.\,H_{23}\,.\,H_{13}\,.\,p^2\,.\,p^3 + j\,.\,H_{12}\,.\,H_{23}\,p^1\,.\,p^2 - j\,.\,H_{12}\,.\,H_{13}\,p^1\,.\,p^3$$

Ce qui fournit :

— |A| = +1

1. Partie imaginaire :

$$0 = H_{12}\,.\,p^1 + H_{23}\,.\,p^2 - H_{13}\,.\,p^3 + H_{23}\,.\,H_{13}\,.\,p^2\,.\,p^3 - H_{12}\,.\,H_{23}\,p^1\,.\,p^2 + H_{12}\,.\,H_{13}\,p^1\,.\,p^3$$

2. Partie réelle :

$$-2 = -H_{12}\,.\,p^1 - H_{23}\,.\,p^2 + H_{13}\,.\,p^3 + H_{23}\,.\,H_{13}\,.\,p^2\,.\,p^3 - H_{12}\,.\,H_{23}\,p^1\,.\,p^2 + H_{12}\,.\,H_{13}\,p^1\,.\,p^3$$

La confrontation aboutit à :

$$H_{12}\,.\,p^1 + H_{23}\,.\,p^2 - H_{13}\,.\,p^3 = 1$$

$$H_{23}\,.\,H_{13}\,.\,p^2\,.\,p^3 - H_{12}\,.\,H_{23}\,p^1\,.\,p^2 + H_{12}\,.\,H_{13}\,p^1\,.\,p^3 = -1$$

et finalement à :

$$(H_{12}\,.\,p^1)^2 + (H_{23}\,.\,p^2)^2 + (H_{13}\,.\,p^3)^2 = -1$$

— |A| = -1 ; de manière similaire :

1. Partie imaginaire :

$$0 = H_{12}\,.\,p^1 + H_{23}\,.\,p^2 - H_{13}\,.\,p^3 - H_{23}\,.\,H_{13}\,.\,p^2\,.\,p^3 + H_{12}\,.\,H_{23}\,p^1\,.\,p^2 - H_{12}\,.\,H_{13}\,p^1\,.\,p^3$$

2. Partie réelle :

$$-2 = H_{12}\,.\,p^1 + H_{23}\,.\,p^2 - H_{13}\,.\,p^3 + H_{23}\,.\,H_{13}\,.\,p^2\,.\,p^3 - H_{12}\,.\,H_{23}\,p^1\,.\,p^2 + H_{12}\,.\,H_{13}\,p^1\,.\,p^3$$

La confrontion fournit :

$$H_{12}\,.\,p^1 + H_{23}\,.\,p^2 - H_{13}\,.\,p^3 = -1$$

$$-H_{23}\,.\,H_{13}\,.\,p^2\,.\,p^3 + H_{12}\,.\,H_{23}\,p^1\,.\,p^2 - H_{12}\,.\,H_{13}\,p^1\,.\,p^3 = 1$$

et, finalement :

$$(H_{12}\,.\,p^1)^2 + (H_{23}\,.\,p^2)^2 + (H_{13}\,.\,p^3)^2 = -1$$

En réinjectant les composantes du vecteur singulier, il apparait une autre forme quadratique :

$$(s^3\,.\,p^1)^2 + (s^1\,.\,p^2)^2 + (s^2\,.\,p^3)^2 = \frac{3}{4} \tag{148}$$

La découverte de situations purement réelles ne devrait donc pas être totalement impossible.

Lemme 3.11. *La contrainte bleue.*

Les trois *composantes bleues* de toute Hessienne admissible et les trois composantes de la quantité de mouvement sont liées les unes aux autres via la relation :

$$(H_{12}\,.\,p^1)^2 + (H_{23}\,.\,p^2)^2 + (H_{13}\,.\,p^3)^2 = -1 \tag{149}$$

Remarque 3.23. ***Vérification***

Je vais maintenant calculer :

$$
{}_{[B_-]}\Phi(\mathbf{p})
$$

$$
=
$$

$$
\begin{bmatrix} B^1_{11} . p^1 + B^1_{21} . p^2 + B^1_{31} . p^3 & B^1_{12} . p^1 + B^1_{22} . p^2 + B^1_{32} . p^3 & B^1_{13} . p^1 + B^1_{23} . p^2 + B^1_{33} . p^3 \\ B^2_{11} . p^1 + B^2_{21} . p^2 + B^2_{31} . p^3 & B^2_{12} . p^1 + B^2_{22} . p^2 + B^2_{32} . p^3 & B^2_{13} . p^1 + B^2_{23} . p^2 + B^2_{33} . p^3 \\ B^3_{11} . p^1 + B^3_{21} . p^2 + B^3_{31} . p^3 & B^3_{12} . p^1 + B^3_{22} . p^2 + B^3_{32} . p^3 & B^3_{13} . p^1 + B^3_{23} . p^2 + B^3_{33} . p^3 \end{bmatrix}
$$

$$
=
$$

$$
\begin{bmatrix} -B^1_3 . p^2 - B^1_2 . p^3 & B^1_3 . p^1 - B^1_1 . p^3 & B^1_2 . p^1 + B^1_1 . p^2 \\ -B^2_3 . p^2 - B^2_2 . p^3 & B^2_3 . p^1 - B^2_1 . p^3 & B^2_2 . p^1 + B^2_1 . p^2 \\ -B^3_3 . p^2 - B^3_2 . p^3 & B^3_3 . p^1 - B^3_1 . p^3 & B^3_2 . p^1 + B^3_1 . p^2 \end{bmatrix}
$$

$$
=
$$

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{2} . H_{11} . p^2 - j^2 . H_{13} . p^3 & -\frac{1}{2} . H_{11} . p^1 - j . H_{12} . p^3 & j^2 . H_{13} . p^1 + j . H_{12} . p^2 \\ -j^2 . H_{12} . p^2 - j . H_{23} . p^3 & j^2 . H_{12} . p^1 + \frac{1}{2} . H_{22} . p^3 & j . H_{23} . p^1 - \frac{1}{2} . H_{22} . p^2 \\ -j . H_{13} . p^2 + \frac{1}{2} . H_{33} . p^3 & j . H_{13} . p^1 - j^2 . H_{23} . p^3 & -\frac{1}{2} . H_{33} . p^1 + j^2 . H_{23} . p^2 \end{bmatrix}
$$

Il est possible de poursuivre avec l'aide de l'Equ.(e138) :

$$
{}_{[B_-]}\Phi(\mathbf{p})
$$

$$
=
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} . H_{11} . p^1 - j . H_{12} . p^3 & j^2 . H_{13} . p^1 + j . H_{12} . p^2 \\ -j^2 . H_{12} . p^2 - j . H_{23} . p^3 & 1 & j . H_{23} . p^1 - \frac{1}{2} . H_{22} . p^2 \\ -j . H_{13} . p^2 + \frac{1}{2} . H_{33} . p^3 & j . H_{13} . p^1 - j^2 . H_{23} . p^3 & 1 \end{bmatrix}
$$

La validation ne peut être obtenue que si la condition sur les termes *hors-diagonale* est valide ; rappel l'Equ.(e68) :

$$
- j . H_{12} . p^3 = \frac{1}{2} . H_{11} . p^1 \tag{150}
$$

$$
j^2 . H_{13} . p^1 + j . H_{12} . p^2 = 0
$$

$$
-j^2 . H_{12} . p^2 - j . H_{23} . p^3 = 0
$$

$$
j . H_{23} . p^1 = \frac{1}{2} . H_{22} . p^2
$$

$$
j . H_{13} . p^2 = \frac{1}{2} . H_{33} . p^3
$$

$$
j . H_{13} . p^1 - j^2 . H_{23} . p^3 = 0
$$

Ces relations sont liées au fait que le déterminant |B| s'annule ; voir la remarque 3.3 et l'Equ.(79). Elles ont une conséquence incontournable : les composantes de la quantité de mouvement **p** ne peuvent être indépendantes les unes des autres. Ce fait confirme ce que l'observation de l'Equ.(149) permettait déjà de deviner. Il contient aussi l'information importante qu'il existe tout un ensemble de matrices [B] admissibles à représenter l'involution tout en ayant le formalisme générique des noyaux des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés. □

Theorem 3.2. ***Involution et décomposition non-triviale dont le déterminant est nul****. Pour chacune des deux valaurs autorisées de |A| (i. e. : + or - 1), il existe au moins un ensemble de situations telles qu'une décomposition non-triviale d'un produit vectoriel déformé ayant un déterminant nul définit une involution sur V = {E(3, C) ; [*$\mathbf{p}$*, ...][A]}.*

3.7 Involution et relation de dispersion dans le vide pour les particules sans masse.

Proposition 3.3. *La contrainte bleue, représentée par l'Equ.(149) peut s'identifier avec une relation décrivant la dispersion de la lumière dans le vide.*

Démonstration. L'équation de Klein-Gordon (abbréviation : EKG) dans un espace-temps courbe a le formalisme [[10] ; p. 44, (3.26)] :

$$g^{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\alpha x^\beta} + (m^2 + \xi \,.\, R(\mathbf{x})) \,.\, \phi(\mathbf{x}) = 0$$

Elle admet pour solution générique :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{0}, 0) \,.\, e^{i.(\mathbf{k}.\mathbf{x} - \omega \,.\, t)}$$

Dans ce paragraphe, je focalise mon attention sur les espaces-temps plats qui sont aussi ceux pour lesquels les travaux de Petrov déjà cités plus haut s'appliquent ; voir la remarque 1.9. J'injecte cette solution dans l'EKG ; ceci permet d'obtenir :

$$\forall \phi : \, g^{ab} \,.\, k_a \,.\, k_b - (g^{a0} + g^{0a}) \,.\, \omega \,.\, k_a + g^{00} \,.\, \omega^2 - m^2 = 0$$

Cette polynomiale se laisse bien entendu analyser à l'aide de la démarche exposée dans [[b]] ; concrètement, je décide d'interpréter les situations validant les solutions génériques de l'EKG comme celles annulant la polynomiale :

$$\Lambda(\mathbf{k}^*) = |_{[A]}\Phi(\mathbf{k}^*) - [P]| = g^{ab} \,.\, k_a \,.\, k_b - (g^{a0} + g^{0a}) \,.\, \omega \,.\, k_a + g^{00} \,.\, \omega^2 - m^2$$

Cette interpretation suggère que l'EKG signe la présence du produit vectoriel vectoriel déformé $[\mathbf{k}^*, \ldots]_{[A]}$ qui n'a pas été décomposé trivialement.

$$|[\mathbf{k}^*, \ldots]_{[A]} > = [P] \,.\, |\ldots > + |\mathbf{z} >$$

Quand la géométrie est celle de Minskowki avec la signature (+ - - -), le déterminant stratégique (un autre mot pour la polynomiale $\Lambda(\mathbf{k}^*)$) est :

$$^{(4)}[G] \to [\eta] \Rightarrow \Lambda(\mathbf{k}^*) = |_{[A]}\Phi(\mathbf{k}^*) - [P]| = -\mathbf{k}^{*2} + \omega^2 - m^2$$

Dans de telles circonstances, la dispersion des ondes planes devraient être décrites par [[01] ; p. 99] :

$$(\frac{h}{2\pi})^2 \,.\, \omega^2 = c^2 \,.\, (\frac{h}{2\pi})^2 \,.\, \mathbf{k}^{*2} + m^2 \,.\, c^4$$

A condition que l'EKG ait été écrite initialement dans un système d'unités tel que h (constante de Planck) = c (vitesse de la lumière dans le vide) = 1, il devient évident que :

$$^{(4)}[G] \to [\eta] \Rightarrow \Lambda(\mathbf{k}^*) = |_{[A]}\Phi(\mathbf{k}^*) - [P]| = 0$$

C'est le résultat attendu pour une onde plane circulant dans le vide. Il existe une équivalence bien connue en mécanique quantique entre la quantité de mouvement et le vecteur d'onde :

$$\mathbf{p}^* = \frac{h}{2\pi} \,.\, \mathbf{k}^*$$

Cette équivalence permet d'obtenir sans difficulté excessive une relation similaire à l'Equ.(**??**) avec l'aide de la relation de dispersion agissant sur les particules dépourvues de masse (par exemple : les photons) ; de fait, puisque :

$$1 = (\frac{2\pi \,.\, c}{h \,.\, \omega} \,.\, \mathbf{p}^*)^2 + (\frac{2\pi \,.\, m \,.\, c^2}{h, . \,\omega})^2$$

Il suit pour m = 0 :

$$1 \,=\, (\frac{2\pi\,.\,c}{h\,.\,\omega}\,.\,\mathbf{p}^{*})^{2} \,=\, (\frac{c}{E_{\nu}}\,.\,\mathbf{p}^{*})^{2}$$

Ce formalisme ouvre la porte aux énergies négatives dont il connu qu'elles existent (anti-matière) et il se laisse identifier avec l'Equ.(160) quand :

$$H_{12} \,=\, H_{23} \,=\, H_{13} \,=\, \frac{2\pi\,.\,c}{h\,.\,\omega} \,=\, \pm\frac{c}{E_{\nu}} \tag{151}$$

A cause de l'Equ.(135) et des résultats acquis entre-temps, les matrices représentant l'involution sont données par :

— lorsque |A| = +1 :

$$[B_{+}] \,=\, K([P]_{1}) \,=\, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\,.\,H_{11} & \mp\,.\,j\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} & \mp\,.\,j^{2}\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} \\ \mp\,.\,j^{2}\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} & \frac{1}{2}\,.\,H_{22} & \mp\,.\,j\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} \\ \mp\,.\,j\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} & \mp\,.\,j^{2}\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} & \frac{1}{2}\,.\,H_{33} \end{pmatrix}$$

— lorsque |A| = -1 :

$$[B_{-}] \,=\, K([P]_{-1}) \,=\, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,.\,H_{11} & \pm\,.\,j^{2}\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} & \pm\,.\,j\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} \\ \pm\,.\,j\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} & -\frac{1}{2}\,.\,H_{22} & \pm\,.\,j^{2}\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} \\ \pm\,.\,j^{2}\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} & \pm\,.\,j\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} & -\frac{1}{2}\,.\,H_{33} \end{pmatrix}$$

Mais, en injectant l'Equ.(151) nouvellement trouvée dans l'Equ.(143) exprimant la contrainte sur le déterminant, il vient :

$$H_{12}\,.\,H_{23}\,.\,H_{13}$$
$$=$$
$$-\frac{1}{6}\,.\,\{H_{11}\,.\,(H_{23})^{2} \,+\, H_{22}\,.\,(H_{13})^{2} \,+\, H_{33}\,.\,(H_{12})^{2}\}$$
$$=$$
$$-\frac{1}{6}\,.\,\frac{c^{2}}{E_{\nu}^{2}}\{H_{11} \,+\, H_{22} \,+\, H_{33}\}$$

Il en résulte que :

$$Trace[H] \,=\, -6\,.\,\frac{c}{E_{\nu}} \tag{152}$$

et, à cause des Equ.(**??**), les composantes diagonales doivent être choisies en relation avec le nombre de composantes H_{ab} (pour les valeurs de a $\neq$ b) précédées d'un signe négatif de telle sorte que :

$$\frac{1}{8}\,.\,H_{11}\,.\,H_{22}\,.\,H_{33} \,=\, -H_{12}\,.\,H_{23}\,.\,H_{13} \,=\, \pm\,.\,\frac{c^{3}}{E_{\nu}^{3}} \tag{153}$$

Ces contraintes induisent un ensemble de solutions simples pour lesquelles le choix du signe + ou - doit être effectué soigneusement de manière à assurer la cohérence du tout :

$$H_{11} \,=\, H_{22} \,=\, H_{33} \,=\, \pm\frac{2c}{E_{\nu}} \tag{154}$$

Par exemple, une des matrices représentant l'involution est :

$$H_{12} \,=\, -\frac{c}{E_{\nu}}\ ;\ H_{23} \,=\, H_{13} \,=\, \frac{c}{E_{\nu}}\ ;\ H_{11} \,=\, H_{22} \,=\, H_{33} \,=\, \frac{2c}{E_{\nu}} \tag{155}$$

$$[B_{-}]$$

$$=$$

$$K([P]_{-1})$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{c}{E_\nu} & -j^2 \cdot \frac{c}{E_\nu} & j \cdot \frac{c}{E_\nu} \\ -j \cdot \frac{c}{E_\nu} & -\frac{c}{E_\nu} & j^2 \cdot \frac{c}{E_\nu} \\ j^2 \cdot \frac{c}{E_\nu} & j \cdot \frac{c}{E_\nu} & -\frac{c}{E_\nu} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\frac{c}{E_\nu} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -j^2 & j \\ -j & -1 & j^2 \\ j^2 & j & -1 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\frac{c}{E_\nu} \cdot \left(\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} . \\ i \\ i\,.\,j \\ i\,.\,j^2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} i & i\,.\,j^2 & i\,.\,j \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & -j^2 & -j \\ -j & -1 & -j^2 \\ -j^2 & -j & -1 \end{bmatrix} \end{array} \end{array} \right)$$

Il est possible de condenser cette matrice en une table de Pythagore en définissant le vecteur suivant :

$$\mathbf{1}_{C3} \,=\, (1,\, j,\, j^2)$$

Ce qui permet de constater que le vecteur générant horizontalement la table de Pythagore construite autour du produit de deux nombres complexes vaut i.$\mathbf{1}_{C3}$. Dans cet état d'esprit, le vecteur générant verticalement cette table vaut i.[K].$|\mathbf{1}_{C3}>$. Ceci permet de poser :

$$[B_-] \,=\, K([P]_{-1}) \,=\, -\frac{c}{E_\nu}\,.\,T_2(.)(\mathbf{1}_{C3},\, [K].\,|\mathbf{1}_{C3}>)$$

Par ailleurs il est aussi possible de décomposer cette table

$$-\frac{c}{E_\nu}\,.\,\{Id_3 \,+\, j\,.\, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \,+\, j^2\,.\, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \}$$

$$=$$

$$-\frac{c}{E_\nu}\,.\,\{Id_3 \,+\, j\,.\,[K]^t \,+\, j^2\,.\,[K]\}$$

Les matrices compatibles avec la définition d'une involution ont donc un lien clair avec un des générateurs du groupe tétraédral ; voir Equ.(17). Enfin, dans ce cas particulier, les relations contenues dans l'Equ.(150) fournissent :

$$j\,.\,p^3 \,=\, p^1\,;\, j\,.\,p^1 \,=\, p^2\,;\, j\,.\,p^2 \,=\, p^3 \tag{156}$$

et les composantes de la quantité de mouvement spatiale, i. e. : $\mathbf{p}$, sont liées par la relation :

$$\sum_{a\,=\,1}^{a\,=\,3} p^a \,=\, \mathbf{p}^{\oplus} \,=\, 0 \tag{157}$$

Elle donne l'espoir de découvrir des représentations purement réelles de l'involution sur V. En vertu de l'équivalence *masse - énergie*, les ratios c/E_ν sont équivalents aux ratios 1/m.c. Par conséquent, la recherche des valeurs propres de ces matrices peut présenter un intérêt pour l'étude de la physique des particules. La question a été formellement traitée au niveau de la remarque 1.13. L'application au cas particulier traité ici aboutit à une simplification de l'Equ.(38) parce que le déterminant de la matrice examinée est nul. Le cas général se réduit à vouloir résoudre :

$$\lambda\,.\,\{\lambda^2 \;-\; Trace[M]\,.\,\lambda \;+\; \{(M_2^1\,.\,M_1^2 \;+\; ...) \;-\; (M_1^1\,.\,M_2^2 \;+\; ..)\}\} \;=\; 0 \qquad (158)$$

Les calculs intermédiaires livrent :

$$Trace[M] \;=\; -\frac{3\,.\,c}{E_\nu} \;\equiv\; -\frac{3}{m_\nu\,.\,c} \qquad (159)$$

$$L \;=\; (M_2^1\,.\,M_1^2 \;+\; ...) \;-\; (M_1^1\,.\,M_2^2 \;+\; ..) \;=\; 0 \qquad (160)$$

Le calcul fournit les deux valeurs propres suivantes :

$$\lambda \;=\; 0,\; \lambda \;=\; 2\,.\,Trace[M] \;=\; -\frac{6\,.\,c}{E_\nu} \;\equiv\; -\frac{6}{m_\nu\,.\,c} \qquad (161)$$

La valeur propre nulle correspond aux situations pour lesquelles E_ν » c. □

4 Résumé

4.1 Version brève

La longue et laborieuse démarche entreprise dans ce document apporte donc les résultats intermédiaires suivants :

1. Il existe un sous-ensemble d'éléments notés génériquement ([B], **a**) de M(3, C) × E(3, C) pour lesquels le système des Equ.(29) est satisfait :

$$_{[B]}\Phi(\mathbf{a}) \;=\; Id_3$$

   Soit Inv(3, C) le sous-ensemble des matrices [B] de M(3, C) pour lesquelles l'Equ.(29) est valide.

2. Les éléments d'Inv(3, C) se distinguent d'un élément quelconque de M(3, C) par un certain nombre de caractéristiques internes : égalité des produits monochromes, égalité des produits polychromes, nullité du déterminant et une contrainte sur les composantes du vecteur **a** dite *contrainte bleue*.

3. Certains éléments d'Inv(3, C) sont les noyaux de type I (premiére catégorie de la classification 2.3) de décompositions non-triviales de produits vectoriels déformés ayant pour spécificité d'avoir un déterminant nul. Soit Inv(3, C, I, 0) ce sous ensemble d'Inv(3, C).

4. Pour les éléments d'Inv(3, C, I, 0), la contrainte bleue se laissent identifier avec une forme quadratique -généralisation de l'Equ.(149) :

$$(H_{12}\,.\,a^1)^2 \;+\; (H_{23}\,.\,a^2)^2 \;+\; (H_{13}\,.\,a^3)^2 \;=\; -1 \qquad (162)$$

   Cette identification ouvre les portes d'une intégration de cette exploration au sein d'une discussion impliquant les spineurs d'E.Cartan et les paramétrisations d'Euler dans un espace mathématique de dimension quatre ; voir [[f]]. Elle autorise une application physique à la relation de dispersion de la lumière dans les régions vides de l'espace.

4.2 Résumé détaillé de la démarche et principaux résultats.

Le but initial de ce document est d'explorer aussi loin que possible la notion d'involution sur les espaces vectoriels E(3, C) équippés d'une application f = [**a**, ...][A] ; écriture dans laquelle [A] représente un quelconque élément de M(3, C). Bien qu'il ait été au départ souhaité de placer cette exploration sur un plan entièrement mathématique, il a pu être constaté en chemin que la notion d'involution sur les espaces E(3, C) dotés d'un produit vectoriel déformé par la matrice [A] trouvait au moins deux applications en physique mathématique : (i) les trous noirs définis par les données initiales dites de Bowen-York ; (ii) la loi décrivant la dispersion des ondes électromagnétiques sans masse (les photons) dans le vide.

La recherche d'une involution sur V = {E(3, C), [**a**, ...][A]} se laisse relier à la quête d'un neutre à gauche ; voir les remarques 1.1 et 1.4.
La réalisation de l'involution induit automatiquement l'existence d'une matrice [B([A], **a**)] = [B(f)] de M(3, C) qui ne peut pas s'identifier avec la matrice déformante [A] ; voir la remarque 1.7 et le lemme 1.2.
Elle impose l'Equ.(23) qui se laisse interpréter dans deux contextes différents, selon que la matrice déformante est symétrique ou antisymétrique. Dans le premier cas, un lien avec les spineurs d'E. Cartan peut s'envisager ; voir la remarque 1.8. Dans le second, la classification de Petrov concernant les espaces sans courbure ($R_{\alpha\beta} = 0$) peut être évoquée ; voir les remarques 1.6 et 1.9.
Elle induit également l'obligation pour la matrice [B(f)] d'être elle-même une décomposition triviale vis-à-vis d'un produit vectoriel déformé par un cube D et de satisfaire l'Equ.(105).
La plus simple des représentations de la matrice [B(f)] satisfait la relation : ${}_{[B]}\Phi(\mathbf{a}) = Id_3$; Equ.(29). Ce qui détermine un lien avec la notion physique d'inertie -voir la remarque 3.3- et directement un ensemble de caractéristiques morphologiques sur la matrice [B(f)] ; voir les lemmes 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 et la possibilité d'établir un lien théorique avec le ratio de Koide -voir le lemme 3.5.

La cohérence entre les deux représentations imposées de la matrice [B(f)] est testée et confirmée au cours de la remarque 3.12).
Le formalisme normalisé de la matrice [B(f)] est une somme pondérée par les composantes du vecteur **a** d'un pack de six vecteurs naturellement contenus dans la forme normalisée de la matrice déformante [A] ; voir le lemme 3.7.
Grâce à l'étude menée au cours de la sous-section 2.2, il est démontré que chaque matrice apparaissant dans cette somme pondérée exhibe une analogie claire avec les représentations alternatives des noyaux des parties principales des décompositions non-triviales de produits vectoriels déformés ; voir les remarques 3.13 et 3.14.
Finalement, les matrices [B(f)] admissibles ne peuvent être que des noyaux dont la Hessienne n'est pas nulle, soit de type I, soit de type II mais toujours à déterminant nul ; voir la classification de la sous-section 2.3.
La sous-section 3.6 met en évidence un exemple concret de matrice admissible et la sous-section 3.7 se sert de cet acquis pour établir un lien avec la loi de dispersion dans le vide des ondes électromagnétiques ne portant pas de masse en considérant le cas particulier $\mathbf{a} = \mathbf{p}$ où ce dernier représente une quantité de mouvement.

Cette conclusion particulière concernant la physique ouvre en réalité une boîte de Pandore sur tout un univers mathématique. Car elle a construit un lien rationnel entre une matrice pouvant représenter l'involution et une forme quadratique.

4.3 Perspectives.

Il me semble nécessaire de complételer cette discussion initiatique à la notion d'involution sur les espaces dotés d'un produit vectoriel déformé dans les directions complémentaires suivantes :

— En tentant d'énoncer l'ensemble des représentations concrètes des matrices admissibles [B(f)] ;

— En découvrant la structure mathématique de cet ensemble ;

— En cherchant s'il existe un lien entre cette structure et celle du groupe tétraédral ;

— En généralisant le lien découvert avec une version limitée de l'équation de Klein-Gordon ;

— En se demandant de quelle manière cette approche se laisse appliquer à la description des particules de la physique moderne.

Une fois de plus je remercie les institutions et les auteurs qui permettent de faire progresser ces explorations en mettant leurs propres travaux à disposition.

Références

5 Bibliographie

5.1 Articles, documents et livres

[11] Vergnoux, R. : Groupes quantiques discrets et algèbres d'opérateurs. Mémoire d'habilitation, 7 juin 2013.

[00] A. Einstein, N. Rosen : The particle problem in the theory of relativity ; pp. 73-77, physical review, vol. 48, July 1, 1935.

[01] Scherz, U. : Quantenmechanik (Eine Einführung mit Anwendungen auf Atome, Moleküle und Festkörper) ; ©1999 B.G. Teubner, Stuttgart - Leipzig (Teubner-Studienbuecher ; Physik), ISBN 3-519-03246-5, 669 pages.

[02] Introduction to group theory for physicists ; State University of New-York at Stony Brook ; January 12, 2011.

[04] (a) J. M. Bowen, General Relativity and Gravitation 11, 227 (1979) ; (b) 3 + 1 formalism and bases of numerical relativity - lecture notes ; arXiv : gr-qc/0703035v1, 06 March 2007 ; (c) Initial data for numerical relativity. Living Rev. relativity 3 (2000), 5 ; DOI : 10.12942/lrr-2000-5. [online] ; seen on the 11th June 2015.

[05] Bowen York Type Initial Data for Binaries for Neutron Stars ; arXiv :1606.03881v1 [gr-qc] 15 June 2016.

[06] M. Coleman Miller : Quasi periodic brightness oscillations from accreting black holes and neutron stars.

[07] Bordas encyclopédie, 50/51 mathématiques, ©Bordas-Éditeurs, 1972, Paris, 184 pages.

[08] Méthode de Cardan, Wikipédia France, version du 12 octobre 2020.

[09] A simplified expression for the solution of cubic polynomial equations using function evaluation ; arXiv :2002.069076v1 [math.GM] 14 February 2020.

[10] Birell, N. D. and Davies, P. C. W. : Quantum fields in curved spacetime ; Cambridge monographs on mathematical physics, ©Cambridge University Press 1982, first paperback 1984, reprinted 1989, 1992, 1994, 0-521-27858-9 paperback edition, 340 pages.

[12] Gourgoulhon, E. : Relativité Générale, parcours recherche, astronomie, astrophysique et ingénierie spatiale, cours de master 2, année 2012-2013 ; Observatoire de Paris, Universités Paris VI, Paris VII et Paris XI, 324 pages.

[13] M.T.W. : Gravitation, ©1973 by W. H. Freeman and Company.

[14] Cartan, E. : The theory of spinors, first published by Hermann of Paris in 1966 ; translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)" ; Hermann, 1937 ; Dover Publications, Inc. New York. ©1966 by Hermann, Paris, ISBN 0-486-64070-1, 151 pages.

[15] Petrov, A. Z. : On the spaces determining the gravitational fields. Doklady Akademii Nauk USSR, 1951, vol. XXXI, 149-152.

[16] Landau und Lifschitz : Lehrbuch des theoretischen Physik, Band II : Klassische Feldtheorie, 12., ueberarbeit. Aufl. ©Akademischer Verlag, Berlin, 1992, ISBN 3-05-501550-9, 480 pages.

[17] Mass and Flavor Mixing Schemes of Quarks and Leptons ; arXiv : hep-ph/9912358v2 24 Feb 2000.

5.2 Contributions personnelles

[a] PERIAT, T. : Aspects mathématiques de la théorie des produits tensoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-028-1, 25 octobre 2019.

[b] PERIAT, T. : Décompositions intrinsèques des produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-036-6, v2, 14 août 2018. The (E) question in a three-dimensional space : decomposing linear systems, intrinsic method and more ; ISBN 978-2-36923-084-7, v2, 19 February 2020.

[c] PERIAT, T. : Variations des fonctions vectorielles et décompositions de Helmholtz ; ISBN 978-2-36923-098-4, v1, 25 octobre 2020.

[d] PERIAT, T. : La proposition d'Einstein-Rosen (1935) revisitée, 17 pages, ISBN 978-2-36923-113-4, v1, 17 mars 2019.

[e] PERIAT, T. : Produits vectoriels déformés, algèbres de Lie et classification de Bianchi ; ISBN 978-2-36923-136-3, 1 mai 2019.

[f] PERIAT, T. : Produits vectoriels déformés, spineurs de Cartan et paramétrisation d'Euler ; ISBN 978-2-36923-073-1, 31 mars 2019.