Eléments de topologie pour la théorie des produits tensoriels déformés.

©Thierry PERIAT, ISBN 978-2-36923-014-4, EAN 9782369230144.

22 avril 2021

Ce document se fixe pour objectif d'introduire des éléments habituels d'une structure d'espace topologique au sein de l'ensemble des décompositions des produits tensoriels déformés.

Mots clés : topologie, point, voisinage, produit tensoriel, déformation, décomposition.

Table des matières

1 Eléments de topologie. 1
1.1 Données initiales. 1
1.2 Rappels concernant les décompositions non-triviales. 10
1.3 Réflexions sur les décompositions. 10
1.4 Décompositions non-triviales équivalentes à la décomposition triviale. 11
1.5 Partie principale nulle. 12
1.6 Caractérisation fonctionnelle de l'équivalence. 14
1.7 Le cas des formes bilinéaires invariantes. 18
1.8 Caractérisations des parties principales des décompositions équivalentes 19
1.9 Une première relation d'équivalence. 20
1.10 Première relation caractéristique et adjoint algébrique. 22
1.11 Structures mathématiques sous-jacentes. 23

2 Bibliographie 24
2.1 Contributions personnelles 24
2.2 Ouvrages de référence 24
french

1 Eléments de topologie.

1.1 Données initiales.

L'espace de la discussion exposée dans ce document est un simple espace vectoriel de dimension entière D supérieure ou égale à deux bâti sur le corps commutatif des nombres complexes : E(D, C). Cet espace est muni d'une opération interne : le produit tensoriel déformé par un cube de nombres choisis arbitrairement dans C. Ce produit est symboliquement noté $\otimes_A$.

Quand il n'y a *a priori* aucune indication préalable pour aider à définir des fonctions à variables complexes sur l'espace $\mathrm{V}_D = \{\mathrm{E(D, C)}, \otimes_A\}$, les mathématiques préconisent de définir les circonstances dans lesquelles V_D peut être équipé d'une structure de C*-algèbre [1] ; puis à faire ensuite usage des travaux de Gelfand. Cet exercice imposé tient au fait que les C*-algèbres sont les généralisations non commutatives des algèbres des fonctions définies sur les espaces topologiques et représentées sur les espaces de Hilbert.

L'objectif du document est de commencer à équiper de manière classique la théorie des produits tensoriels déformés, puis décomposés -éventuellement non trivialement, d'une structure d'espace topologique au moyen de ces décompositions. Cette approche exige de transposer des notions classiques de topologie (point, voisinage, distance, etc.) au sein d'un ensemble de matrices de M(D, C).

Définition 1.1. *Structure d'espace topologique (rappel).*

Pour rappel, soit X un espace quelconque, il est muni d'une structure d'espace topologique T(X) à partir du moment où les conditions suivantes sont satisfaites [[01]] :

1. Les notions de *point*, de *voisinage d'un point* et de *distance* y sont définies.
2. L'ensemble vide $\emptyset$ et cet espace X tout entier font partie de la structure topologie.
3. L'intersection de deux éléments de la structure est encore dans la structure.
4. L'union de deux éléments de la structure est encore dans la structure.

Des définitions plus complètes, centrées sur la notion de séparabilité, sont fournies dans [[02] ; déf. 1.1].

Définition 1.2. *Point.*

Dans cette théorie, un point est un élément de cardinal un de l'ensemble des parties de M(D, C) constitué par une décomposition triviale d'un produit tensoriel déformé.

Concrètement, sur $V_D = \{E(D,\ C),\ \otimes_A\}$, une décomposition triviale est un élément de M(D, C) défini par :

$$_A\Phi\,:\,\mathbf{a}\,\in\,V_D\;\rightarrow\;{_A\Phi}(\mathbf{x})\;=\;[A^{\alpha}_{\chi\beta}\,.\,x^{\chi}]\;\in\;M(D,\,C)$$

et :

$$\forall\,\mathbf{a}\,\in\,V_D,\,\forall\,...\,\in\,E(D,\,C)\,:\,|\otimes_A(\mathbf{a},\,...)>=\,{_A\Phi}(\mathbf{x})\,.\,|...>\in\,E^*(D,\,C)\,\equiv\,C^D$$

De sorte que le point attaché à cette décomposition triviale est :

$$\{{_A\Phi}(\mathbf{x})\}\,\in\,P(M(D,\,C))$$

Remarque 1.1. *Problème de notation et de représentation des points.*

Il n'est pas commode d'attribuer un symbole représentatif à ce point puisqu'il est envisageable de penser que plusieurs cubes et plusieurs éléments de V_D peuvent concourir à définir le même point ; c'est le cas chaque fois que les relations suivantes décrivent une réalité :

$${_{1A}\Phi}(\mathbf{x}_1)\,=\,...\,=\,{_{pA}\Phi}(\mathbf{x}_p)\,=\,...\,{_A\Phi}(\mathbf{x})$$

Qu'implique une telle réalité ? A supposer qu'elle existe, c'est-à-dire qu'il existe au moins deux paires (cube, vecteur) concourant à définir un même point au sens qui

1. Cette démarche a été faite d'abord de façon naive dans [[a]] puis au sein d'une analyse critique dans [[b]].

vient d'être proposé pour ce mot, alors il revient au même d'avoir écrit un système de D^2 combinaisons linéaires des D composantes du premier vecteur s'identifiant avec un autre système de D^2 combinaisons linéaires des D composantes du second vecteur.

$$_1A^{\alpha}_{\chi\beta} \, . \, x^{\chi}_1 \, = \, _2A^{\alpha}_{\chi\beta} \, . \, x^{\chi}_2$$

Cette éventualité définit une situation redondante s'il a été espéré un moment pouvoir définir un vecteur par l'autre. L'espoir ne peut se concrétiser que si les deux matrices triviale peuvent être diagonalisées simultanément. Auquel cas un système de D combinaisons linéaires des D composantes du premier vecteur s'identifierait avec un autre système de D combinaisons linéaires des D composantes du second vecteur.

Il existe des situations mathématiques pour lesquelles cette diagonalisation simultanée peut être réalisée ; exemples :

— Il suffit de réduire la discussion à M(D, R), d'imposer à l'une des matrices triviales d'être définie positive et à l'autre d'être symétrique pour qu'il existe une matrice [T] ; dans ce cas, voir démomstration en allemand dans [[03] ; §4, p. 121, (4.3)] :

$$[T]^t \, . \, _{1A}\Phi(\mathbf{x}_1) \, . \, [T] \, = \, Id_D$$

$$[T]^t \, . \, _{2A}\Phi(\mathbf{x}_2) \, . \, [T] \, = \, Matrice\, diagonale$$

— Une méthode de diagonalisation consiste (i) à découvrir D vecteurs linéairement indépendants pour la matrice qui doit être diagonalisée, (ii) à s'en servir pour construire une matrice [T] puis (iii) à calculer [[04] ; §8.2.1] :

$$[T]^{-1} \, . \, _{1A}\Phi(\mathbf{x}_1) \, . \, [T] \, = \, [D_1]$$

$$[T]^{-1} \, . \, _{2A}\Phi(\mathbf{x}_2) \, . \, [T] \, = \, [D_2]$$

Exemple 1.1. *Représentation triviale dans un espace de dimension trois classique.*

Soit une discussion sur $V_3 = \{E(3,\, C),\, \otimes_A\}$ avec un cube A coincidant avec le tenseur de rang trois complètement antisymétrique de Levi-Civita. Il est antisymétrique sur ses indices bas et peut donc exceptionnellement être réduit à la matrice [J].

$$[J] \, = \, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \, ; \, [J]^t \, = \, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices les plus triviales sont alors celles en lesquelles le produit vectoriel classique se décompose lorsqu'il est représenté dans l'expace dual ; leur formalisme bien connu s'écrit :

$$_{[J]}\Phi(\mathbf{x}) \, = \, \begin{bmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) *Leurs valeurs propres* s'obtiennent en calculant les solutions du polynome suivant :

$$|_{[J]}\Phi(\mathbf{x}) \, - \, \lambda \, . \, Id_3| \, = \, \begin{vmatrix} -\lambda & -x^3 & x^2 \\ x^3 & -\lambda & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & -\lambda \end{vmatrix} \, = \, 0$$

Il s'agit de résoudre :

$$-\lambda \, . \, (\lambda^2 \, + \, (x^1)^2) \, + \, x^3 \, . \, (-\lambda \, . \, x^3 \, - \, x^1 \, . \, x^2) \, + \, x^2 \, . \, (x^3 \, . \, x^1 \, - \, \lambda \, . \, x^2) \, = \, 0$$

C'est-à-dire :

$$-\lambda \, . \, (\lambda^2 + \, < \mathbf{x}, \, \mathbf{x} >_{Id_3}) \, = \, 0$$

avec :

$$(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2} \;=\; \{(x^1)^2 \,+\, (x^2)^2 \,+\, (x^3)^2\}^{1/2} \,\in\, C$$

Les valeurs propres recherchées appartiennent à l'ensemble :

$$\{\lambda_- \;=\; -i\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2},\; \lambda_0 \;=\; 0,\; \lambda_+ \;=\; i\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}$$

b) *Les vecteurs propres* vont s'obtenir en considérant les systèmes :

$$\{_{[J]}\Phi(\mathbf{x}) \,-\, \lambda\,.\,Id_3\}\,.\,|\mathbf{y}> = \begin{bmatrix} -\lambda & -x^3 & x^2 \\ x^3 & -\lambda & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & -\lambda \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, il convient de résoudre non trivialement (synonyme : les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ ne doivent pas être nuls.) :

— le cas λ_0 :

$$-x^3\,.\,y^2 \,+\, x^2\,.\,y^3 \;=\; 0$$

$$x^3\,.\,y^1 \,-\, x^1\,.\,y^3 \;=\; 0$$

$$-x^2\,.\,y^1 \,+\, x^1\,.\,y^2 \;=\; 0$$

Il vient grâce à la première égalité :

$$y^3 \;=\; \frac{x^3}{x^2}\,.\,y^2$$

et grâce à la troisième :

$$y^1 \;=\; \frac{x^1}{x^2}\,.\,y^2$$

D'où le vecteur propre associé du genre :

$$y\,.\,\begin{bmatrix} \frac{x^1}{x^2} \\ 1 \\ \frac{x^3}{x^2} \end{bmatrix},\; \forall\, y \,\in\, C \,-\, \{0\}$$

Il est proportionnel au vecteur $\mathbf{x}$ de E(3, C) dont la représentation duale dans C^3 est (x^1, x^2 x^3).

— le cas λ_- :

$$i\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\,.\,y^1 \,-\, x^3\,.\,y^2 \,+\, x^2\,.\,y^3 \;=\; 0$$

$$x^3\,.\,y^1 \,+\, i\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\,.\,y^2 \,-\, x^1\,.\,y^3 \;=\; 0$$

$$-x^2\,.\,y^1 \,+\, x^1\,.\,y^2 \,+\, i\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\,.\,y^3 \;=\; 0$$

Grâce à la première égalité :

$$y^1 \;=\; i\,.\,\frac{x^2\,.\,y^3 \,-\, x^3\,.\,y^2}{(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}}$$

En injectant cette valeur dans la deuxième et dans la troisième égalité :

$$x^3\,.\,i\,.\,\frac{x^2\,.\,y^3 \,-\, x^3\,.\,y^2}{(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}} \,+\, i\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\,.\,y^2 \,-\, x^1\,.\,y^3 \;=\; 0$$

$$-x^2\,.\,i\,.\,\frac{x^2\,.\,y^3 \,-\, x^3\,.\,y^2}{(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}} \,+\, x^1\,.\,y^2 \,+\, i\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\,.\,y^3 \;=\; 0$$

Cette nouvelle présentation peut se réorganiser comme suit :

$$\{(x^3)^2 - <\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3}\} . y^2 - \{x^2 . x^3 + i.x^1 . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\} . y^3 = 0$$

$$\{-x^2 . x^3 + i.x^1 . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\} . y^2 + \{(x^2)^2 - <\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3}\} . y^3 = 0$$

La première égalité fournit :

$$y^3 = \frac{(x^3)^2 - <\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3}}{x^2 . x^3 + i.x^1 . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}} . y^2$$

En réinjectant cette valeur dans la relation donnant y^1 :

$$y^1 = \frac{x^1 . x^3 - i.x^2 . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}}{x^2 . x^3 + i.x^1 . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}} . y^2$$

Tous ces calculs sont recevables quelle que soit la valeur de y^2 si le discriminant du sous-système est nul ; ce qui s'écrit en particulier ici :

$$\{(x^2)^2 - <\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3}\} . \{(x^3)^2 - <\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3}\}$$

$$=$$

$$\{(x^1)^2 . <\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3} + (x^2 . x^3)^2\}$$

Il se trouve que cette relation est toujours vraie, quelles que soient les composantes du vecteur $\mathbf{x}$; ainsi, le vecteur propre recherché s'écrit génériquement :

$$y . \begin{bmatrix} \frac{x^1 . x^3 - i.x^2 . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}}{x^2 . x^3 + i.x^1 . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}} \\ 1 \\ \frac{(x^3)^2 - <\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3}}{x^2 . x^3 + i.x^1 . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}} \end{bmatrix}, \forall y \in C - \{0\}$$

— le cas λ_+ :

$$-i . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2} . y^1 - x^3 . y^2 + x^2 . y^3 = 0$$

$$x^3 . y^1 - i . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2} . y^2 - x^1 . y^3 = 0$$

$$-x^2 . y^1 + x^1 . y^2 - i . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2} . y^3 = 0$$

Grâce à la première égalité :

$$y^1 = -i . \frac{x^2 . y^3 - x^3 . y^2}{(<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}}$$

En injectant cette valeur dans la deuxième et dans la troisième égalité :

$$-i . x^3 . \frac{x^2 . y^3 - x^3 . y^2}{(<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}} - i . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2} . y^2 - x^1 . y^3 = 0$$

$$i . x^2 . \frac{x^2 . y^3 - x^3 . y^2}{(<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}} + x^1 . y^2 - i . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2} . y^3 = 0$$

Cette nouvelle présentation peut se réorganiser comme suit :

$$-\{(x^3)^2 - <\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3}\} . y^2 + \{x^2 . x^3 - i . x^1 . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\} . y^3 = 0$$

$$\{x^2 . x^3 + i . x^1 . (<\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\} . y^2 - \{(x^2)^2 - <\mathbf{x}, \mathbf{x}>_{Id_3}\} . y^3 = 0$$

Le discriminant de ce sous-système est le même que pour le cas de la valeur propre λ_- et les mêmes conclusions peuvent en être tirées ; la première égalité fournit :

$$y^3 \;=\; \frac{\{(x^3)^2 - <\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3}\}}{\{x^2\,.\,x^3\; -\; i\,.\,x^1\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}}\,.\,y^2$$

Sa réinjection dans l'expression explicitant y^1 donne :

$$y^1 \;=\; \frac{\{x^1\,.\,x^3\; +\; i\,.\,x^2\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}}{\{x^2\,.\,x^3\; -\; i\,.\,x^1\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}}\,.\,y^2$$

Le vecteur propre recherché s'écrit génériquement :

$$y\,.\,\begin{bmatrix} \frac{\{x^1\,.\,x^3\,+\,i\,.\,x^2\,.\,(<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}}{\{x^2\,.\,x^3\,-\,i\,.\,x^1\,.\,(<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}} \\ 1 \\ \frac{\{(x^3)^2\,-\,<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3}\}}{\{x^2\,.\,x^3\,-\,i\,.\,x^1\,.\,(<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}} \end{bmatrix}\,,\;\forall\,y\;\in\;C\;-\;\{0\}$$

c) Tout ceci étant fait, une matrice [T] peut être fabriquée :

$$[T]\;=\;\begin{bmatrix} \frac{x^1\,.\,x^3\,-\,i.x^2\,.\,(<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}}{x^2\,.\,x^3\,+\,i.x^1\,.\,(<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}} & x^1 & \frac{\{x^1\,.\,x^3\,+\,i\,.\,x^2\,.\,(<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}}{\{x^2\,.\,x^3\,-\,i\,.\,x^1\,.\,(<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}} \\ 1 & x^2 & 1 \\ \frac{(x^3)^2\,-\,<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3}}{x^2\,.\,x^3\,+\,i.x^1\,.\,(<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}} & x^3 & \frac{\{(x^3)^2\,-\,<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3}\}}{\{x^2\,.\,x^3\,-\,i\,.\,x^1\,.\,(<\mathbf{x},\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}} \end{bmatrix}$$

Le discriminant du système associé vaut :

$$|T|$$

$$=$$

$$\frac{x^1\,.\,x^3\; -\; i.x^2\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}}{x^2\,.\,x^3\; +\; i.x^1\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}}\,.\,\{x^2\,.\,\frac{\{(x^3)^2 - <\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3}\}}{\{x^2\,.\,x^3\; -\; i\,.\,x^1\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}}\; -\; x^3\}$$

$$-\,x^1\,.\,\{\frac{\{(x^3)^2 - <\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3}\}}{\{x^2\,.\,x^3\; -\; i\,.\,x^1\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}}\; -\; \frac{(x^3)^2 - <\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3}}{x^2\,.\,x^3\; +\; i.x^1\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}}\}$$

$$+\,\frac{\{x^1\,.\,x^3\; +\; i\,.\,x^2\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}}{\{x^2\,.\,x^3\; -\; i\,.\,x^1\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\}}\,.\,\{x^3\; -\; x^2\,.\,\frac{(x^3)^2 - <\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3}}{x^2\,.\,x^3\; +\; i.x^1\,.\,(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}}\}$$

Tous les termes peuvent se regrouper sur un dénominateur commun égal à :

$$d\;=\;(x^2\,.\,x^3)^2\;+\;(x^1)^2\,.\;<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3}$$

Pour faciliter les calculs, un changement de variables introduisant moins d'indices et évitant les confusions se révèle utile :

$$x^1\;=\;x\,;\;x^2\;=\;y\,;\;x^3\;=\;z\,;\;d\;=\;(y\,.\,z)^2\;+\;x^2\,.\,n^2$$

$$(<\mathbf{x},\,\mathbf{x}>_{Id_3})^{1/2}\;=\;\{(x^1)^2\;+\;(x^2)^2\;+\;(x^3)^2\}^{1/2}\;=\;(x^2\;+\;y^2\;+\;z^2)^{1/2}\;=\;n$$

Ceci étant posé, le discriminant se réécrit :

$$|T|$$

$$=$$

$$\frac{x\,.\,z\;-\;i\,.\,y\,.\,n}{y\,.\,z\;+\;i\,.\,x\,.\,n}\,.\,\{y\,.\,\frac{\{z^2\;-\;n^2\}}{\{y\,.\,z\;-\;i\,.\,x\,.\,n\}}\;-\;z\}$$

$$-x\,.\,\{\frac{\{z^2\,-\,n^2\}}{\{y\,.\,z\,-\,i\,.\,x\,.\,n\}}\,-\,\frac{z^2\,-\,n^2}{y\,.\,z\,+\,i\,.\,x\,.\,n}\}$$
$$+\,\frac{\{x\,.\,z\,+\,i\,.\,y\,.\,n\}}{\{y\,.\,z\,-\,i\,.\,x\,.\,n\}}\,.\,\{z\,-\,y\,.\,\frac{z^2\,-\,n^2}{y\,.\,z\,+\,i\,.\,x\,.\,n}\}$$

Autrement dit :

$$\begin{gathered} d\,.\,|T| \\ = \\ (x\,.\,z\,-\,i\,.\,y\,.\,n)\,.\,\{y\,.\,(z^2\,-\,n^2)\,-\,z\,.\,(y\,.\,z\,-\,i\,.\,x\,.\,n)\} \\ -\,2\,.\,i\,.\,n\,.\,x^2\,.\,(z^2\,-\,n^2) \\ +\,(x\,.\,z\,+\,i\,.\,y\,.\,n)\,.\,\{z\,.\,(y\,.\,z\,+\,i\,.\,x\,.\,n)\,-\,y\,.\,(z^2\,-\,n^2)\} \\ = \\ (x\,.\,z\,-\,i\,.\,y\,.\,n)\,.\,(-\,y\,.\,n^2\,+\,i\,.\,x\,.\,z\,.\,n) \\ -\,2\,.\,i\,.\,n\,.\,x^2\,.\,(z^2\,-\,n^2) \\ +\,(x\,.\,z\,+\,i\,.\,y\,.\,n)\,.\,(i\,.\,x\,.\,z\,.\,n\,+\,y\,.\,n^2) \\ = \\ i\,.\,n\,.\,(x\,.\,z\,-\,i\,.\,y\,.\,n)\,.\,(i\,.\,y\,.\,n\,+\,x\,.\,z) \\ -\,2\,.\,i\,.\,n\,.\,x^2\,.\,(z^2\,-\,n^2) \\ +\,i\,.\,n\,.\,(x\,.\,z\,+\,i\,.\,y\,.\,n)\,.\,(x\,.\,z\,-\,i\,.\,y\,.\,n) \\ = \\ -\,2\,.\,i\,.\,n\,.\,x^2\,.\,(z^2\,-\,n^2) \\ +\,2\,.\,i\,.\,n\,.\,(x^2\,.\,z^2\,+\,y^2\,.\,n^2) \end{gathered}$$

En fin de compte :

$$d\,.\,|T|\,=\,2\,.\,i\,.\,n^3\,.\,(x^2\,+\,y^2)$$

Ce discriminant est défini chaque fois que le dénominateur n'est pas nul.

$$d\,=\,(y\,.\,z)^2\,+\,x^2\,.\,(x^2\,+\,y^2\,+\,z^2)\,=\,x^4\,+\,x^2\,.\,y^2\,+\,y^2\,.\,z^2\,+\,z^2\,.\,x^2\,\neq\,0$$

Quand il est défini, il s'écrit :

$$|T|\,=\,2\,.\,i\,.\,(x^2\,+\,y^2\,+\,z^2)^{3/2}\,.\,\frac{(x^2\,+\,y^2)}{(y\,.\,z)^2\,+\,x^2\,.\,(x^2\,+\,y^2\,+\,z^2)}$$

Et chaque fois que son numérateur n'est pas nul [2], alors la matrice [T] est inversible ; la matrice triviale initiale peut être diagonalisée ... après calcul de l'inverse de [T]. D'utiles rappels sur les matrices réelles peuvent se découvrir dans [[05] ; §10]. De longues et pénibles manipulations algébriques attendent de toute façon le lecteur intéressé. Pour ne pas perdre de vue le sens de ces tourments, il convient de rappeler :

1. qu'ils permettent de préciser la notion de point (définition 1.2) ; de fait, si deux matrices triviales bâties sur des paires (cube, argument) différentes peuvent être diagonalisées chacune de son côté et livrent le même élément de E(3, C) alors -par principe- les composantes de celui-ci seront les composantes du point représenté par l'une et par l'autre matrice triviale :

$$[T]^{-1}\,.\,{}_1{}_A\Phi(\mathbf{x}_1)\,.\,[T]\,=\,\begin{bmatrix} p^1 & 0 & 0 \\ 0 & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & p^3 \end{bmatrix}\,=\,[T]^{-1}\,.\,{}_2{}_A\Phi(\mathbf{x}_2)\,.\,[T]$$

2. Il ne faut pas oublier que la dicussion se place sur E(3, C) ; en particulier, les spineurs de Cartan sont systématiquement éliminer ; voir [[06]].

2. qu'ils permettent in fine d'associer un triplet de nombre complexes, donc un élément de E(3, C) à toute matrices triviale diagonalisable. Cet élément associé n'a aucune raison de coincider avec l'argument de cette matrice qui, au demeurant n'est pas inversible (voir plus loin pourquoi au niveau de la remarque 1.2) :

$$repadj_T \,:\, {}_A\Phi(\mathbf{x}) \,\rightarrow\, [T]^{-1} \,.\, {}_A\Phi(\mathbf{x}) \,.\, [T] \,\equiv\, \mathbf{p} \,\equiv\, Point\, P \,:\, (p^1,\, p^2,\, p^3) \,\in\, C^3$$

Voir une introduction à la notion de représentation adjointe (en allemand) dans [[03] ; Kapitel VIII, §8].

La question des diagonalisations des matrices est un vieux problème de mathématique. Il est au moins en partie résolu en décidant de ramener la discussion générale dans un cadre permettant d'introduire la notion de tore [[11] ; p. 60, § 1] grâce à la démonstration de la proposition 1.3 de cette référence. Je noterai à cet endroit que les notions de groupe réductif et de tore jouent également un rôle fondamental dans le théorème de restriction de Chevalley [[12] ; § 1.1, p. 8].

Définition 1.3. *Taille d'un point.*

La taille d'un point est la valeur du déterminant de la matrice qui le représente ; en clair :

$$|{}_A\Phi(\mathbf{x})| \,=\, |A^{\alpha}_{\chi\beta} \,.\, x^{\chi}| \,\in\, C$$

Remarque 1.2. *Une propriété des décompositions triviales des produits de Lie déformés.*

Le calcul algébrique permet de démontrer l'existence des décompositions triviales pour n'importe quel produit tensoriel déformé. Ce fait se traduit par la relation générique déjà rappelée ci-dessus :

$$|\otimes_A (\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_2) > = \, {}_A\Phi(\mathbf{u}_1) \,.\, |\mathbf{u}_2 >$$

Elle n'appelle à première vue aucune remarque particulière en dehors de son ininté-ressante trivialité. Lorsque le cube A est quelconque, elle permet même d'envisager le cas où les deux arguments coincident :

$$\mathbf{u}_1 \,=\, \mathbf{u}_2 \,\Rightarrow\, |\otimes_A (\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_1) > = \, {}_A\Phi(\mathbf{u}_1) \,.\, |\mathbf{u}_1 >$$

Pourtant, dans le document [[d] ; § 2.1.5, p.18], j'ai montré que si le cube A est anti-symétrique sur ses indices bas, alors :

$$\forall\, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \,\in\, E^2(D,\, C),\, \forall\, A \,:\, A^k_{ij} \,+\, A^k_{ji} \,=\, 0$$

$$\otimes_A(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

$$=$$

$$\sum_k (\sum_i \sum_j A^k_{ij} \,.\, a^i \,.\, b^j) \,.\, \mathbf{e}_k$$

$$=$$

$$\sum_k (\sum_{i<j} A^k_{ij} \,.\, a^i \,.\, b^j \,+\, \sum_{i=j} A^k_{ij} \,.\, a^i \,.\, b^j \,+\, \sum_{i>j} A^k_{ij} \,.\, a^i \,.\, b^j) \,.\, \mathbf{e}_k$$

$$=$$

$$\sum_k (\sum_{i<j} A^k_{ij} \,.\, a^i \,.\, b^j \,+\, 0 \,.\, a^i \,.\, b^j \,-\, \sum_{i<j} A^k_{ij} \,.\, a^j \,.\, b^i) \,.\, \mathbf{e}_k$$

$$=$$

$$\sum_k (\sum_{i<j} A^k_{ij} \, . \, (a^i \, . \, b^j \, - \, a^j \, . \, b^i) \, . \, \mathbf{e}_k$$

Ce qui permet de constater la coincidence entre produit tensoriel déformé par un cube anti-symétrique sur ses indices bas et produit de Lie déformé par ce cube là :

$$\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E^2(D, C) :$$

$$\forall A : A^k_{ij} + A^k_{ji} = 0, \otimes_A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_A$$

Soit à reconsidérer alors le sujet des décompositions triviales quand le cube est élément de $C^-{}_{(D-D-D)}$; il vient logiquement :

$$\forall A \in C^-_{(D-D-D)}, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E(D, C) : |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_A >= {}_A\Phi(\mathbf{a}) \, . \, |\mathbf{b} >$$

Mais cette fois-ci, le cas de deux arguments égaux a une conséquence inattendue dûe à l'anti-symétrie du cube :

$$\forall A \in C^-_{(D-D-D)}, \forall \mathbf{a} \in E(D, C) : |[\mathbf{a}, \mathbf{a}]_A >= {}_A\Phi(\mathbf{a}) \, . \, |\mathbf{a} >= |\mathbf{0} >$$

Ces circonstances n'ont de réalité cohérente que dans trois cas : (i) l'argument est nul, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; (ii) le cube A est nul et (iii) le déterminant de la décomposition triviale est nul. Autrement dit, puisque les deux premiers cas sont parfaitement sans intérêt, il ne peut exister de décompositions triviales relatées à la décomposition d'un produit de Lie déformé (par définition, par un cube anti-symétrique) que des matrices associées avec un système dégénéré d'équations :

$$\forall A \in C^-_{(D-D-D)} - \{A = 0\}, \forall \mathbf{a} \in E(D, C) - \{\mathbf{0}\} : |{}_A\Phi(\mathbf{a})| = 0$$

Théorème 1.1. *La taille des points bâtis sur des produits de Lie déformés est nulle.*

Proposition 1.1. *Soit les résultats acquis au cours de l'exemple 1.1. Lorsqu'elle existe, la diagonale obtenue par diagonalisation d'une matrice triviale de M(3, C) contient forcément au moins une valeur égale à zéro.*

Démonstration. Lorsqu'un élément de l'ensemble des matrices triviales définies sur M(3, C) est diagonalisable, il respecte la relation établie au cours de l'exemple 1.1 :

$$[T]^{-1} \, . \, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{x}) \, . \, [T] = \begin{bmatrix} p^1 & 0 & 0 \\ 0 & p^2 & 0 \\ 0 & 0 & p^3 \end{bmatrix}$$

Or en vertu des règles habituelles s'appliquant aux déterminant, le déterminant d'un produit de matrices vaut le produit des déterminants de ces matrices, il vient :

$$|[T]^{-1} \, . \, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{x}) \, . \, [T]| = |T|^2 \, . \, |{}_{[J]}\Phi(\mathbf{x})| = p^1 \, . \, p^2 \, . \, p^3 = 0$$

parce que le déterminant de la matrice triviale est nul (théorème 1.1). Donc au moins une des valeurs complexes apparaissant dans la diagonale doit être nulle. □

Corollaire 1.1. *Représentations des points obtenues par représentation adjointe en dimension trois.*

Il n'existe finalement que six infinités et un vecteur nul ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$) représentant les points obtenus par l'usage de la représentation adjointe des matrices triviales de M(3, C) :

$$p^1 = 0, \forall p^2, p^3$$
$$p^2 = 0, \forall p^1, p^3$$
$$p^3 = 0, \forall p^1, p^2$$
$$p^1 = p^2 = 0, \forall p^3$$
$$p^2 = p^3 = 0, \forall p^1$$
$$p^3 = p^1 = 0, \forall p^2$$
$$p^1 = p^2 = p^3 = 0$$

1.2 Rappels concernant les décompositions non-triviales.

L'exploration systématique des décompositions des produits tensoriels déformés a nécessité et permis la mise au point de méthodes, extrinsèque [[e]], intrinsèque [[f]] puis leur confrontation dans un certain nombre de circonstances [[g]]. Ces diverses études font ressortir l'existence de décompositions non-triviales pouvant être atteintes par approximation grâce à la méthode du scalaire associé. Lorsque l'espace E(4, C) est équipé d'une forme bilinéaire non-dégénérée représentée dans M(4, C) par la matrice inversible [B], leur formalisme générique est du genre :

— Termes de degré deux :

$$[P] \,=\, {}_A\Phi(\mathbf{u}_1) \,-\, \frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,[Hess_{(\mathbf{u}_2)}\,P_2(\mathbf{0})]$$

— Termes de degré un :

$$|\mathbf{z}> = \,-[B]^{-1}\,.\,|\mathbf{Grad}_{(\mathbf{u}_2)}\,P_2(\mathbf{0})>$$

— Terme de degré zéro :

$$0(3) \,=\, P_2(\mathbf{0})$$

Ces décompositions non-triviales correspondent aux paires ([P], **z**) de M(4, C) × E(4, C) qui minimisent, mieux : voire annulent, le vecteur :

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in\, E^2(4,\, C)\;:\; |\delta\mathbf{E}> = \,|\otimes_A(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)> \,-\{[P]\,.\,|\mathbf{u}_2> \,+|\mathbf{z}>\}$$

L'expression des arguments de la paire représentant une décomposition non-triviale fait intervenir une polynomiale de degré deux, notée P_2, qui dépend des composantes du second argument impliqué dans le produit déformé qu'on a sous la main. Dans la version initiale de la méthode extrinsèque, elle est conçue comme un développement limité à l'ordre trois exclu autour de la valeur nulle de cet argument mais il est permis d'extrapoler le raisonnement à d'autres situations pour tenir compte des réalités physiques qu'il est souhaité décrire de la sorte.

$$P_2(\mathbf{u}_2) \,=\, \frac{1}{2}\,.\,<\mathbf{u}_2|\,.\,\{[HessP_2(\mathbf{0})]\,.\,|\mathbf{u}_2>\}+\,<\mathbf{Grad}_{(\mathbf{u}_2)}P_2(\mathbf{0})|\,.\,|\mathbf{u}_2>\,+P_2(\mathbf{0})$$

La méthode extrinsèque consiste à la comparer avec le scalaire associé avec ce second argument, à savoir et par définition avec :

$$s(\mathbf{u}_2) \,=<\mathbf{u}_2,\,\delta\mathbf{E}>_{[B]}$$

Les relations ci-dessus résultent simplement du fait de poser :

$$s(\mathbf{u}_2) \,=\, P_2(\mathbf{u}_2)$$

1.3 Réflexions sur les décompositions.

Cette méthodologie s'accompagne de beaucoup d'insatisfactions ; d'abord et avant tout parce qu'elle fournit un résultat approximatif. Ensuite parce qu'elle ne dit rien sur le nombre des solutions à la question (E).

Les rudiments des concepts concernant les produits tensoriels peuvent être lus dans [[07]] et ceux sur le théorème des accroissements finis et les développements de Taylor et Taylor Mac-Laurin dans [[08]]. Ils seront utiles pour reconnaitre que le formalisme de la partie principale d'une décomposition non-triviale exhibe une vague ressemblance avec le début d'un développement en série de la dérivée d'une fonction numérique. Cette intuition est renforcée par le fait que les décompositions triviales peuvent être des dérivations ; voir [[c]] et [[d]].

Cette analyse formelle confère au second membre de cette partie principale le rôle habituellement dévolu aux dérivées partielles secondes. La présence de la Hessienne ne fait que renforcer cette impression. La forme bilinéaire [B] semble ne faire que *distordre* ces termes du second degré. Toutes ces considérations amènent à proposer ce premier schéma :

$$\begin{array}{ccccc}
f(x) - f(0) & \xrightarrow{d} & (0(3), df(x)) & \xrightarrow{developp.} & f'(0).dx + 1/2.f''(0).dx^2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
|[\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_2]_A > & \xrightarrow{decomp.} & (\mathbf{z},\, [\,P\,]) & \xrightarrow{approx.} & {}_A\Phi(\mathbf{u}_1) - 1/2.[B]^{-1}\,.\,Hess_{\mathbf{u}_2}\,P_2(\mathbf{0})
\end{array}$$

et à l'expliquer comme suit.

— *Colonne de gauche* :
La représentation duale du produit de Lie déformé est l'équivalent extrapolé d'un accroissement. Elle ne signe plus ici une simple soustraction mais la mesure, dans un espace de dimension D = 4, de l'écart entre un produit tensoriel déformé par un cube antisymétrique et son opposé (la définition même du produit de Lie déformé). Cette mesure se substitue à celle du taux d'accroissement d'une fonction numérique et donne en échange une idée du degré d'anticommutativité d'une opération interne binaire.

— *Premier foncteur* :
La notion de différentielle, caractérisée par un passage à la limite -ici par une variable x tendant vers 0- est remplacée par le concept de décomposition extrinsèque de la représentation duale du produit de Lie déformé. Cette décomposition s'obtient elle aussi par un passage à la limite consistant à tenter d'annuler l'écart vectoriel $\delta\mathbf{E}$.

— *Colonne centrale* :
Cette colonne exhibe les formes génériques des objets mathématiques obtenus. Ce sont à chaque fois des paires : (l'erreur, la différentielle) dans le cas classique de l'étude des variations ; (le résidu vectoriel, la partie principale matricielle) dans le cadre de la théorie de la question (E).

— *Second foncteur* ;
Au développement limité à l'ordre deux inclus de la théorie classique correspond l'usage de la méthode extrinsèque dans la théorie de la question (E).

— *Colonne de droite* :
Elle expose simplement le résultat de l'usage du second foncteur. Elle fait ainsi clairement apparaître les ressemblances formelles entre les objets mathématiques impliquéa dans l'une et l'autre approche théorique.

1.4 Décompositions non-triviales équivalentes à la décomposition triviale.

Soit Φ l'ensemble de toutes les parties principales des décompositions non-triviales obtenues à l'aide de la méthode extrinsèque. De toute évidence, cet ensemble est un sous-ensemble de l'anneau non-commutatif des matrices de M(4, C).

$$\Phi \;\subset\; M(4,\, C)$$

Ceci étant dit, le formalisme même de la partie principale d'une décomposition non-triviale contient une sous-partie s'identifiant clairement à la partie principale d'une décomposition triviale. Il permet d'inférer l'hypothèse de l'existence de situations dans lesquelles une décomposition non-triviale peut s'identifier à une décomposition triviale :

1. *Type 1* = Les parties principales coincident :

$$[P] \,=\, {}_A\Phi(\mathbf{u}_1) \,-\, \frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,[Hess_{(\mathbf{u}_2)}\,P_2(\mathbf{0})] \,=\, {}_A\Phi(\mathbf{u}_1)$$

$$\Downarrow$$

$$[B]^{-1}\,.\,[Hess_{(\mathbf{u}_2)}\,P_2(\mathbf{0})] \,=\, [0]$$

Nullité du déterminant de la Hessienne de la polynomiale $\mathbf{P}_2$.
Comme la méthode extrinsèque ne fonctionne que pour des matrices [B] inversibles, donc dont le déterminant n'est pas nul, ce type de situations - s'il existe- correspond forcément à des polynomiales de degré deux dont le déterminant de la Hessienne est nul.

$$|B| \,\neq\, 0 \;\Rightarrow\; |Hess_{(\mathbf{u}_2)}\,P_2(\mathbf{0})| \,=\, 0$$

Lien avec les noyaux de type 2.
J'ai montré dans d'autres parties de mon oeuvre [[h]; pp. 18-27] que ces Hessiennes pouvaient être celles apparaissant dans les noyaux de type 2 des décompositions non-triviales des produits tensoriels déformés. J'en tire l'enseignement qu'elles apparaissent de même dans les noyaux de type 2 des décompositions non-triviales des produits de Lie déformés puisque ceux-ci sont équivalents aux précédents lorsque le cube sur lesquels ils sont bâtis sont antisymétriques sur leurs indices bas. Par conséquent, ces Hessiennes pourraient intervenir dans les décompositions non triviales des produits opposés $[\mathbf{u}_2,\, \mathbf{u}_1]$.

2. *Type 2* = Les décompositions toutes entières coincident :

$$[P]\,.\,|\mathbf{u}_2> \,+|\mathbf{z}>=\, {}_A\Phi(\mathbf{u}_1)\,.\,|\mathbf{u}_2>$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,[Hess_{(\mathbf{u}_2)}\,P_2(\mathbf{0})]\,.\,|\mathbf{u}_2> \,+|\mathbf{z}>=\, |\mathbf{0}>$$

Les situations du type 1 peuvent être comprises comme un sous-ensemble de celles du type 2 caractérisées par la nullité de la partie résiduelle. Les situations de type 2 ont été débroussaillées une première fois dans le document [[i]; pp. 1-13].

1.5 Partie principale nulle.

Contrairement à ce qui se passe pour Φ_0, l'ensemble des décompositions triviales, l'appartenance de la matrice nulle de M(4, C) à Φ ne va pas de soi. Ecrire que la partie principale d'une décomposition non-triviale est nulle contient implicitement un grand nombre d'informations importantes :

1. Le produit de Lie déformé étudié se décompose génériquement comme suit :

$$[P] \,=\, [0] \;\Rightarrow\; |[\mathbf{u}_1,\, \mathbf{u}_2]_A> \,=\, |\mathbf{z}> \,=\, {}_A\Phi(\mathbf{u}_1)\,.\,|\mathbf{u}_2>$$

Ces situations sont celles pour lesquelles la partie résiduelle de la décomposition coincide avec le produit de Lie déformé qui était à décomposer. En termes de logique pure, elles sont donc celles pour lesquelles ce produit n'a finalement pas été décomposé. Je pourrais dire qu'elles sont celles pour lesquelles ce produit est *indivisible* parce qu'il s'identifie avec son reste après une tentative de division.

2. Dans le cadre de l'usage de la méthode extrinsèque, ces situations sont également celles pour lesquelles :

$$_A\Phi(\mathbf{u}_1) \,=\, \frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,[Hess_{(\mathbf{u}_2)}\,P_2(\mathbf{0})]$$

   (a) Compte tenu de l'analogie décrite au cours de la sous-section 1.3, il faut s'attendre à ce que ces situations décrivent l'équivalent d'une *zone en selle de cheval.*

   (b) Compte tenu de la propriété spécifique des décompositions triviales des produits de Lie déformé établie au cours de la remarque 1.1, le déterminant de la Hessienne de la polynomiale P_2 est également nul :

$$\{|_A\Phi(\mathbf{a})| \,=\, 0,\, |B| \,\neq\, 0\} \;\Rightarrow\; |Hess_{(\mathbf{u}_2)}\,P_2(\mathbf{0})| \,=\, 0$$

   (c) La relation ci-dessus établit une dépendance claire entre les composantes du premier argument impliqué dans le produit de Lie déformé et des données qui lui sont complètement extérieures : une forme bilinéaire non-dégénérée représentée par l'inverse de la matrice [B] et la Hessienne d'une polynomiale dont dépendent les composantes du second argument impliqué dans le produit de Lie déformé étudié. Ces situations seront donc qualifiées de *situations de voisinage.*

Définition 1.4. *Voisinage d'un point.*

Dans cette théorie, le voisinage d'un point est l'élément de l'ensemble des parties de M(D, C) constitué par (synonyme : contenant tous) les écarts matriciels entre la partie principale des diverses décompositions, [P], et la décomposition la plus triviale $_A\Phi(...)$ d'un produit tensoriel déformé donné du type $\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{...})$.

$$Voisin(_A\Phi(\mathbf{a}))$$

$$=$$

$$\{[P] \,-\, {_A\Phi(\mathbf{a})} \,\in\, M(D,\, C) \,:\, |\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) >= [P]\,.\,|\mathbf{b}> \,+\, |\mathbf{z}>\} \,\subset\, P(M(D,\, C))$$

Remarque 1.3. *Sur la matrice nulle de M(D, C).*

La décomposition la plus triviale d'un produit tensoriel déformé donné est bien une des décompositions possibles de ce produit et elle détermine un écart matriciel nul avec elle même. La matrice nulle de M(D, C) est donc un des éléments du voisinage de cette décomposition la plus triviale. Cette remarque vaut pour tous les voisinages ; par conséquent, la matrice nulle appartient à tous les voisinages.

$$\forall\,(A,\, \mathbf{a}),\, (B,\, \mathbf{b}) \,:\, [0] \,\in\, Voisin(_A\Phi(\mathbf{a})) \,\cap\, Voisin(_B\Phi(\mathbf{b}))$$

$$\downarrow$$

$$\forall\,(A,\, \mathbf{a}),\, (B,\, \mathbf{b}) \,:\, Voisin(_A\Phi(\mathbf{a})) \,\cap\, Voisin(_B\Phi(\mathbf{b})) \,\neq\, \emptyset$$

Il en résulte que l'espace des points de cette théorie n'est pas de type *Hausdorff* (synonyme : séparé) ; voir [[01] ; déf. 7, p. 3], [[02] ; déf. 1.2].

Définition 1.5. *Envergure d'un élément d'un voisinage d'un point.*

L'envergure d'un élément d'un voisinage d'un point est le déterminant de l'écart matriciel caractérisant cet élément. Concrètement, cette envergure coincide avec la valeur de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$ caractérisant l'existence de cet écart :

$$\Lambda(\mathbf{a}) = |[P] - {}_A\Phi(\mathbf{a})|$$

Dans cette théorie, des polynomiales de degré au plus égal à D, écrites en fonction des composantes du premier argument impliqué dans le produit tensoriel déformé étudié, caractérisent l'envergure des éléments d'un voisinage. Une envergure n'est pas une distance et encore moins une norme. Elle est, dans mon esprit, une région de l'espace des discussions dans laquelle le premier argument engagé dans un produit tensoriel déformé définit des décompositions a priori non triviales. Pour autant, si les discussions ont lieu sur le corps K = R des réels, l'envergure est un nombre réel et les valeurs peuvent donc être ordonnées. Si les discussions prennent place sur le corps K = C des nombres complexes, l'envergure est un nombre complexes et les valeurs peuvent être ordonnées au travers de la notion de module (norme) de ce nombre complexe.

Définition 1.6. *Point déterminé par son voisinage.*

Un point est déterminé par son voisinage lorsqu'il existe une forme bilinéaire non dégénérée représentée par un élément [B] et une fonction de classe au moins égale à deux notée P_2 tels que :

$${}_A\Phi(\mathbf{u}_1) = \frac{1}{2} \,.\, [B]^{-1} \,.\, [Hess_{(\mathbf{u}_2)}\, P_2(\mathbf{0})]$$

Définition 1.7. *Produit déformé indivisible.*

Un point déterminé par son voisinage correspond à un produit déformé indivisible.

1.6 Caractérisation fonctionnelle de l'équivalence.

Remarque 1.4. *Caractérisation proprement dite.*

La sous-section 2.5 a montré l'existence, pour un produit tensoriel déformé donné, de décompositions non-triviales équivalentes à sa décomposition la plus triviale. Elles se caractérisent au travers de deux relations :

$$|\mathbf{z}> = -[B]^{-1} \,.\, |\mathbf{Grad}_{(\mathbf{u}_2)}\, P_2(\mathbf{0})>$$

$$-\frac{1}{2} \,.\, [B]^{-1} \,.\, [Hess_{(\mathbf{u}_2)}\, P_2(\mathbf{0})] \,.\, |\mathbf{u}_2> + |\mathbf{z}> = |\mathbf{0}>$$

Elles en induisent une troisième :

$$[B]^{-1} \,.\, \{\frac{1}{2} \,.\, [Hess_{(\mathbf{u}_2)}\, P_2(\mathbf{0})] \,.\, |\mathbf{u}_2> + |\mathbf{Grad}_{(\mathbf{u}_2)}\, P_2(\mathbf{0})>\} = |\mathbf{0}>$$

Comme la méthode extrinsèque ne fonctionne que pour des matrices [B] inversibles, donc dont le déterminant n'est pas nul, cette relation en impose une quatrième :

$$\forall\, [B] \in M(D, C) - \{[0]\} : \frac{1}{2} \,.\, [Hess_{(\mathbf{u}_2)}\, P_2(\mathbf{0})] \,.\, |\mathbf{u}_2> + |\mathbf{Grad}_{(\mathbf{u}_2)}\, P_2(\mathbf{0})> = |\mathbf{0}>$$

Or, par choix, la polynomiale utilisée dans le cadre de la méthode extrinsèque est le développement de Taylor Mac-Laurin limité à l'ordre trois exclu d'une C^∞-fonction

$\mathrm{P}_2(\mathbf{u}_2) : \mathrm{C}^D \to \mathrm{C}$, dans le voisinage immédiat du vecteur nul ; in extenso les composantes du vecteur $\mathbf{u}_2$ introduit ici doivent se comprendre comme de toutes petites variations autour de zéro, en sorte que la polynomiale peut encore s'écrire plus en détail [[09] ; p. 156, (3.207)] :

$$P_2(\mathbf{u}_2) \,=\, \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\beta} \,.\, u_2^\alpha \,.\, u_2^\beta \,+\, \frac{\partial P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha} \,.\, u_2^\alpha \,+\, P_2(\mathbf{0})$$

En conséquence logique de quoi :

1. La condition imposée par l'équivalence entre une décomposition non-triviale et une décomposition triviale concerne les fonctions P_2 telles que :

$$P_2(\mathbf{u}_2) \,=\, P_2(\mathbf{0}) \,=\, 0(3)$$

Les fonctions compatibles avec la mise en oeuvre de la méthode extrinsèque et assurant l'existence d'une équivalence entre diverses décompositions, éventuellement non-triviales, sont des zéros invariants au troisième ordre près.

2. Les dérivées partielles premières suivantes en résultent (les sommations se font selon la convention d'Einstein sur les indices répétés ; ici sur α et β) :

$$\frac{\partial P_2(\mathbf{u}_2)}{\partial u_2^\lambda}$$
$$=$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^3 P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\beta \partial u_2^\lambda} \,.\, u_2^\alpha \,.\, u_2^\beta \,+\, \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\beta} \,.\, (\delta_\lambda^\alpha \,.\, u_2^\beta \,+\, u_2^\alpha \,.\, \delta_\lambda^\beta)$$
$$+\, \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\lambda} \,.\, u_2^\alpha \,+\, \frac{\partial P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha} \,.\, \delta_\lambda^\alpha$$
$$=$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^3 P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\beta \partial u_2^\lambda} \,.\, u_2^\alpha \,.\, u_2^\beta \,+\, \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\lambda \partial u_2^\beta} \,.\, u_2^\beta \,+\, \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\lambda} \,.\, u_2^\alpha$$
$$+\, \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\lambda} \,.\, u_2^\alpha \,+\, \frac{\partial P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\lambda}$$

Ce qui permet d'aboutir à, dans le cadre de l'étude des fonctions P_2 continues et compte tenu du fait que l'indice devient parfois muet :

$$\frac{\partial P_2(\mathbf{u}_2)}{\partial u_2^\lambda} \,=\, \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^3 P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\beta \partial u_2^\lambda} \,.\, u_2^\alpha \,.\, u_2^\beta \,+\, 2 \,.\, \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\lambda} \,.\, u_2^\alpha \,+\, \frac{\partial P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\lambda}$$

En injectant à cet endroit la condition rendant compte de l'équivalence entre diverses décompositions, éventuellement non-triviales, il vient :

$$\frac{\partial P_2(\mathbf{u}_2)}{\partial u_2^\lambda} \,=\, \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^3 P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\beta \partial u_2^\lambda} \,.\, u_2^\alpha \,.\, u_2^\beta \,-\, 3 \,.\, \frac{\partial P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\lambda}$$

De cette condition découle également :

$$\frac{\partial P_2(\mathbf{u}_2)}{\partial u_2^\lambda} \,=\, \frac{\partial P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\lambda}$$

Ce qui laisse deviner l'existence sous-jacente de la relation de cohérence :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^3 P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\beta \partial u_2^\lambda} \,.\, u_2^\alpha \,.\, u_2^\beta \,-\, 4 \,.\, \frac{\partial P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\lambda} \,=\, 0$$

Il est possible de poser :

$$\frac{\partial P_2(\mathbf{0})}{\partial u_2^\lambda} = Q_2^\lambda(\mathbf{0})$$

Ce qui la transforme en :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 Q_2^\lambda(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\beta} \cdot u_2^\alpha \cdot u_2^\beta - 4 \cdot Q_2^\lambda(\mathbf{0}) = 0$$

Remarque 1.5. *Tentatives de résolution.*

Il s'agit d'une équation homogène d'un *type apparenté* à celui donné dans [[10] ; § 9.1, p. 483, (9.1)] puisqu'elle peut aussi s'écrire symboliquement :

$$p_{0\alpha\beta}(\mathbf{0}) \cdot \frac{\partial^2 Q_2^\lambda(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha \partial u_2^\beta} + p_{1\alpha}(\mathbf{0}) \cdot \frac{\partial Q_2^\lambda(\mathbf{0})}{\partial u_2^\alpha} + p_2(\mathbf{0}) \cdot Q_2^\lambda(\mathbf{0}) = 0$$

Avec :

$$p_{0\alpha\beta}(\mathbf{0}) = \frac{1}{2} \cdot u_2^\alpha \cdot u_2^\beta$$

$$p_{1\alpha}(\mathbf{0}) = 0$$

$$p_2(\mathbf{0}) = -4$$

Elle ne se confond cependant pas avec le formalisme cité puisqu'elle implique D variables (les D composantes du vecteur $\mathbf{u}_2$) et non pas une seule. Les coefficients de degré deux correspondent à la surface d'un triangle rectangle plat de petite taille dont les côtés orthogonaux ont pour longueur euclidienne deux des D composantes du vecteur $\mathbf{u}_2$. Ils permettent de générer des tables de Pythagore :

$$[p_{0\alpha\beta}(\mathbf{0})] = \frac{1}{2} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2)$$

Les coefficients de degré un et zéro sont constants, valant respectivement zéro et moins quatre.

Soit l'application de R^3 vers R définie par la relation suivante dans laquelle la quantité $\mathrm{Q}_2(0, 0, 0)$ est un invariant :

$$Q_2(x, y\, z) = Q_2(0, 0, 0) \cdot x \cdot y \cdot z$$

Il est aisé de calculer :

$$\frac{\partial Q_2(x, y, z)}{\partial x} = Q_2(0, 0, 0) \cdot y \cdot z$$

$$\frac{\partial^2 Q_2(x, y, z)}{\partial x \partial y} = Q_2(0, 0, 0) \cdot z$$

En dehors des axes et de l'origine, il est permis de calculer :

$$x, y, z \neq 0 : \frac{\partial^2 Q_2(x, y, z)}{\partial x \partial y} = Q_2(0, 0, 0) \cdot \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot y} = \frac{Q_2(x, y, z)}{x \cdot y}$$

Ce qui livre :

$$\frac{\partial^2 Q_2(x, y, z)}{\partial x \partial y} \cdot x \cdot y - Q_2(x, y, z) = 0$$

dont le formalisme s'approche beaucoup de celui des équations qu'il conviendrait de résoudre. Cet échauffement peut se généraliser en posant :

$$Q_2 : R^D \to R,\ Q_2(u^0, u^1, ...) = Q_0 \cdot \Pi_\lambda\, u^\lambda$$

Il est aisé de calculer :

$$\frac{\partial Q_2(\mathbf{u})}{\partial u^\alpha} = \frac{Q_2(\mathbf{u})}{u^\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 Q_2(\mathbf{u})}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \frac{Q_2(\mathbf{u})}{u^\alpha \, . \, u^\beta}$$

Ce qui fournit, *sans qu'il y ait une sommation sur les indices répétés* :

$$\frac{\partial^2 Q_2(\mathbf{u})}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \, . \, u^\alpha \, . \, u^\beta - Q_2(\mathbf{u}) = 0$$

Là encore, une expression voisine de celle qu'il conviendrait de résoudre.

Cependant une remarque complémentaire importante s'impose ici : Q_2 semble pouvoir s'exprimer de D^2 façons en fonction de ses diverses dérivées partielles secondes ; ce fait introduit donc une imprécision gênante sur la manière de définir Q_2.

$$\forall \alpha, \, \beta \, : \, Q_2(\mathbf{u}) = \frac{\partial^2 Q_2(\mathbf{u})}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \, . \, u^\alpha \, . \, u^\beta$$

$$\downarrow$$

$$Q_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{D^2} . \sum_{\alpha, \, \beta} \frac{\partial^2 Q_2(\mathbf{u})}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \, . \, u^\alpha \, . \, u^\beta \, ?$$

Ou bien :

$$Q_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{D^2} . \sum_{\alpha, \, \beta} m(\alpha, \, \beta) \, . \, \frac{\partial^2 Q_2(\mathbf{u})}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \, . \, u^\alpha \, . \, u^\beta$$

avec :

$$\sum_{\alpha, \, \beta} m(\alpha, \, \beta) = D^2 \, ?$$

Remarque 1.6. *Une autre expression pour la Hessienne de la fonction* P_2 *:*

Il est facile de montrer que :

$$[Hess P_2(\mathbf{0})] = T_2(o)(\partial_{\mathbf{u_2}}, \, \mathbf{Grad}_{(\mathbf{u_2})} \, P_2(\mathbf{0})) = -T_2(o)(\partial_{\mathbf{u_2}}, \, [B] \, . \, |\mathbf{z} >)$$

D'où il devient possible de poser la :

Définition 1.8. *Ensemble de décompositions équivalentes à une décomposition triviale.*

Synthétisant les réflexions faites au préalable, il est permis de dire qu'il existe un ensemble de situations mathématiques (i) impliquant les conditions auxquelles est soumis le second argument du produit tensoriel déformé étudié [3] et (ii) ayant pour conséquence la détermination de décompositions non-triviales égales à la décomposition la plus triviale pour ce produit là.

$$C\{_A\Phi(\mathbf{u}_1)\} = \{([B], \mathbf{z}) \, : \, \frac{1}{2} \, . \, [B]^{-1} \, . \, T_2(o)(\partial_{\mathbf{u_2}}, \, [B] \, . \, |\mathbf{z} >) \, . \, |\mathbf{u}_2 > + |\mathbf{z} > = |\mathbf{0} >\}$$

3. via la Hessienne d'une polynomiale P_2 à la quelle les composantes de cet argument doivent satisfaire.

1.7 Le cas des formes bilinéaires invariantes.

Proposition 1.2. *L'invariance de la forme bilinéaire [B] utilisée pour la mise en oeuvre de la méthode extrinsèque par rapport au vecteur* $\mathbf{u}_2$ *a pour conséquence de faire disparaitre cette forme de la relation caractérisant la classe d'équivalence considérée.*

Démonstration.

$$[B] \neq [B(\mathbf{u}_2)],\ \frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}_2},\,[B]\,.\,|\mathbf{z}>)\,.\,|\mathbf{u}_2> + |\mathbf{z}> = |\mathbf{0}>$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}\,.\,b^{\alpha\chi}\,.\,\partial_{u_2^\beta}(b_{\chi\psi}\,.\,z^\psi)\,.\,u_2^\beta \,+\, z^\alpha \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}\,.\,b^{\alpha\chi}\,.\,b_{\chi\psi}\,.\,\partial_{u_2^\beta} z^\psi\,.\,u_2^\beta \,+\, z^\alpha \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}\,.\,\delta^\alpha_\psi\,.\,\partial_{u_2^\beta} z^\psi\,.\,u_2^\beta \,+\, z^\alpha \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}\,.\,\partial_{u_2^\beta} z^\alpha\,.\,u_2^\beta \,+\, z^\alpha \,=\, 0$$

□

Lemme 1.1. *Des formes bilinéaires non dégénérées invariantes.*

Lorsque la mise en oeuvre de la méthode extrinsèque se fait à l'aide d'une forme bilinéaire non dégénérée invariante, la classe d'équivalence d'une décomposition triviale se caractérise par une relation ne faisant plus intervenir cette forme :

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}_2},\,\mathbf{z})\,.\,|\mathbf{u}_2> + 2\,.\,|\mathbf{z}> = |\mathbf{0}>$$

Définition 1.9. *Table de Pythagore - rappel.*

Le symbole $\mathrm{T}_2(\mathrm{o})(...,\ ...)$ désigne ce que j'ai nommé une "table de Pythagore" pour l'opération binaire (d'où le "2") de composition des fonctions ; pour rappel, sa définition générique s'exprime au travers du tableau :

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{u}},\,\mathbf{z}) \,=\, \begin{pmatrix} \partial_{u^0} z^0 & \partial_{u^1} z^0 & \partial_{u^2} z^0 & \partial_{u^3} z^0 \\ \partial_{u^0} z^1 & \partial_{u^1} z^1 & \partial_{u^2} z^1 & \partial_{u^3} z^1 \\ \partial_{u^0} z^2 & \partial_{u^1} z^2 & \partial_{u^2} z^2 & \partial_{u^3} z^2 \\ \partial_{u^0} z^3 & \partial_{u^1} z^3 & \partial_{u^2} z^3 & \partial_{u^3} z^3 \end{pmatrix}$$

L'objectif est évidemment de découvrir comment exprimer $\mathbf{z}$ en fonction de $\mathbf{u}_2$ et, éventuellement de ses dérivées partielles successives. Dans ce contexte, il faut remarquer que le résidu $\mathbf{z}$ semble dépendre de la cible $\mathbf{u}_2$; grossièrement : $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{u}_2)$.

Remarque 1.7. ***Présence d'une Hessienne.***

La relation caractérisant la classe d'équivalence a une étrange propriété. En effet, en injectant la valeur proposée pour $\mathbf{z}$ une première fois, il vient :

$$1/2.\sum_\beta \partial_{u_2^\beta}[\sum_\gamma \partial_{u_2^\gamma} z^\alpha \,.\, u_2^\gamma]\,.\, u_2^\beta \,+\, 2\,.\, z^\alpha \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$1/2.\sum_\beta \sum_\gamma \partial^2_{u_2^\beta u_2^\gamma} z^\alpha \,.\, u_2^\gamma \,.\, u_2^\beta \,+\, 1/2.[\sum_\gamma \partial_{u_2^\gamma} z^\alpha \,.\, \sum_\beta \partial_{u_2^\beta} u_2^\gamma]\,.\, u_2^\beta \,+\, z^\beta \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$1/2.\sum_\beta \sum_\gamma \partial^2_{u_2^\beta u_2^\gamma} z^\alpha \,.\, u_2^\gamma \,.\, u_2^\beta \,+\, 1/2.[\sum_\gamma \partial_{u_2^\gamma} z^\alpha \,.\, \sum_\beta \delta^\gamma_\beta]\,.\, u_2^\beta \,+\, z^\beta \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$1/2.\sum_\beta \sum_\gamma \partial^2_{u_2^\beta u_2^\gamma} z^\alpha \,.\, u_2^\gamma \,.\, u_2^\beta \,+\, 1/2.\sum_\beta \partial_{u_2^\beta} z^\alpha \,.\, u_2^\beta \,+\, z^\beta \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$1/2.\sum_\beta \sum_\gamma \partial^2_{u_2^\beta u_2^\gamma} z^\alpha \,.\, u_2^\gamma \,.\, u_2^\beta \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$<\mathbf{u}_2|\,.\,\{[Hess_{(\mathbf{u}_2,\,0)} z^\alpha(\mathbf{u}_2)]\,.\,|\mathbf{u}_2>\} \,=\, 0$$

Deux constats :

1. J'ai déjà démontré dans [[i]] comment ces relations permettaient de faire intervenir les spineurs de Cartan [[06]] dans cette discussion et d'en induire l'existence d'une forme quadratique de degré deux.
2. Après comparaison avec les réflexions faites au cours de la sous-section 1.6, le résultat qui vient d'être obtenu suggère d'identifier les composantes du résidu avec les dérivées partielles correspondantes de la polynomiale P_2 :

$$z^\alpha \,\sim\, \frac{\partial P_2(\mathbf{u}_2)}{\partial u_2^\alpha}\,?$$

1.8 Caractérisations des parties principales des décompositions équivalentes

Soit le formalisme des parties principales des décompositions non-triviales ; il permet d'écrire (voir sous-section 1.2) :

1. *Première caractéristique, dépendante de la Hessienne de P_2.*

$$[B]\,.\,[P] \,=\, [B]\,.\,{}_A\Phi(\mathbf{u}_1) \,-\, \frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{u}_2)}\, P_2(\mathbf{0})]$$

$$[P]\,.\,[B] \,=\, {}_A\Phi(\mathbf{u}_1)\,.\,[B] \,-\, \frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,[Hess_{(\mathbf{u}_2)}\, P_2(\mathbf{0})]\,.\,[B]$$

Ce qui fournit par soustraction :

$$[B]\,.\,[P] \,-\, [P]\,.\,[B]$$

$$=$$

$$[B]\,.\,{}_A\Phi(\mathbf{u}_1) \,-\, {}_A\Phi(\mathbf{u}_1)\,.\,[B]$$

$$+\,\frac{1}{2}\,.\,\{[B]^{-1}\,.\,[Hess_{(\mathbf{u}_2)}\, P_2(\mathbf{0})]\,.\,[B] \,-\, [Hess_{(\mathbf{u}_2)}\, P_2(\mathbf{0})]\}$$

2. *Seconde caractéristique, indépendante de la Hessienne de la fonction P_2.* Dans un état d'esprit voisin, il est possible de calculer :

$$\{[B]\,.\,[P]\}^t \;=\; \{[B]\,.\,{}_A\Phi(\mathbf{u}_1)\}^t \;-\; \frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{u}_2)}\,P_2(\mathbf{0})]^t$$

Dans le cadre de l'étude des fonctions P_2 continues et d'une discussion sur un espace vectoriel bâti sur un corps commutatif dont la caractéristique ne vaut pas deux lorsque le cube A est quelconque :

$$[P]^t\,.\,[B]^t \;=\; {}_A\Phi^t(\mathbf{u}_1)\,.\,[B]^t \;-\; \frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{u}_2)}\,P_2(\mathbf{0})]$$

Il en résulte :

$$[B]\,.\,[P] \;-\; [P]^t\,.\,[B]^t \;=\; [B]\,.\,{}_A\Phi(\mathbf{u}_1) \;-\; {}_A\Phi^t(\mathbf{u}_1)\,.\,[B]^t$$

Un des objectifs sous-jacents est la découverte d'une relation d'équivalence entre les diverses décompositions qui permettent de poursuivre l'exposé en introduisant des ensembles quotients et, plus généralement, toute la machinerie des structures mathématiques. Les deux relations précédentes donnent l'occasion d'atteindre ce but. Elle pose un problème de choix ; i. e. : laquelle des deux est-elle susceptible de définir une relation d'équivalence en accord avec la définition mathématique standard de ce concept ?

1.9 Une première relation d'équivalence.

Proposition 1.3. *La première relation caractéristique des décompositions non-triviales d'un produit tensoriel déformé devient une relation d'équivalence lorsque la forme bilinéaire introduite dans la mise en oeuvre de la méthode extrinsèque préserve la Hessienne de la polynomiale P_2 par une relation de jauge.*

Démonstration. - Supposons que la forme bilinéaire non-dégénérée [B] impliquée dans la réalisation de la méthode extrinsèque agisse comme une sorte de jauge préservant la Hessienne de la polynomiale P_2, alors :

$$[B]^{-1}\,.\,[Hess_{(\mathbf{u}_2)}\,P_2(\mathbf{0})]\,.\,[B] \;=\; [Hess_{(\mathbf{u}_2)}\,P_2(\mathbf{0})]$$

et la première relation caractéristique des décompositions non-triviales des produits de Lie déformés se réduit à :

$$[B]\,.\,[P] \;-\; [P]\,.\,[B] \;=\; [B]\,.\,{}_A\Phi(\mathbf{u}_1) \;-\; {}_A\Phi(\mathbf{u}_1)\,.\,[B]$$

Définition 1.10. *Relation d'équivalence avec la décomposition la plus triviale.*

Deux décompositions d'un produit tensoriel déformé sont dites équivalentes et, finalement, équivalentes à sa décomposition (la plus) triviale lorsqu'elle satisfont la forme tronquée de la première relation caractéristique des décompositions non-triviales de ces produits ; cette équivalence se note par convention :

$$[P] \;\sim\; {}_A\Phi(\mathbf{u}_1)$$

Partant de là, il devient clair que :

1. Une décomposition non-triviale coincidant avec une décomposition triviale (i. e. : $[\mathrm{P}] = {}_A\Phi(\mathbf{u}_1)$) satisfait à cette relation tronquée ; il revient au même de dire (i) qu'une décomposition triviale est équivalente à elle-même, ce qui est une évidence, et (ii) que la relation d'équivalence avec la décomposition la plus triviale est réflexive :

$$_A\Phi(\mathbf{u}_1) \;\sim\; {}_A\Phi(\mathbf{u}_1)$$

2. La relation d'équivalence avec la décomposition la plus triviale est symétrique :
$$[P] \sim {}_{A}\Phi(\mathbf{u}_1) \iff {}_{A}\Phi(\mathbf{u}_1) \sim [P]$$
3. La relation d'équivalence avec la décomposition la plus triviale est transitive :
$$\{[P] \sim {}_{A}\Phi(\mathbf{u}_1) \, ; \, [Q] \sim {}_{A}\Phi(\mathbf{u}_1)\} \Rightarrow [P] \sim [Q]$$
Si deux décompositions non-triviales sont séparément équivalentes à la décomposition la plus triviales, elles sont finalement équivalentes entre elles.

Nous disposons donc en théorie d'une relation d'équivalence entre des décompositions non-triviales et la décomposition la plus triviale d'un produit tensoriel déformé. Pour autant, ce résultat formel conforme devrait être confronté avec les résultats acquis par la logique au cours de la sous-section 1.4 (le type 1 et le type 2). □

Définition 1.11. *Centre d'un ensemble de matrices - rappel.*

Soit l'ensemble des matrices inversibles de M(D, C) et [B] l'un de ses éléments. Soit Φ l'ensemble des décompositions d'un produit de Lie déformé obtenu par l'usage de la méthode extrinsèque et l'implication de l'élément [B]. Le centre de cet élément désigne l'ensemble des éléments de M(D, C) commutant avec lui :
$$Z([B]) = \{[M] \in M(D\,C) \, : \, [[B], [M]] = [0]\}$$

Proposition 1.4. *La première relation caractéristique des décompositions non-triviales d'un produit de Lie déformé est validée chaque fois que n'importe quelle décomposition de ce produit et la Hessienne de la polynomiale P_2 commutent avec la forme bilinéaire [B].*

Démonstration. - Il est évident que tous les acteurs impliqués dans la recherche d'une décomposition et que les décompositions elles-mêmes sont des éléments de M(D, C) :
$${}_{A}\Phi(\mathbf{u}_1), \, [P], \, Hess_{\mathbf{u}_2}P_2 \in M(D, C)$$
Si, tous ces acteurs sont éléments du centre de la représentation matricielle de la forme bilinéaire, alors :
$$[[B], {}_{A}\Phi(\mathbf{u}_1)] = [0] \iff [B] \, . \, {}_{A}\Phi(\mathbf{u}_1) - {}_{A}\Phi(\mathbf{u}_1) \, . \, [B] = [0]$$
$$[[B], [P]] = [0] \iff [B] \, . \, [P] - [P] \, . \, [B] = [0]$$
$$[[B], Hess_{\mathbf{u}_2}P_2] = [0] \iff [B] \, . \, Hess_{\mathbf{u}_2}P_2 - Hess_{\mathbf{u}_2}P_2 \, . \, [B] = [0]$$
Comme [B] est inversible, la troisième relation s'écrit aussi :
$$Hess_{\mathbf{u}_2}P_2 - [B]^{-1} \, . \, Hess_{\mathbf{u}_2}P_2 \, . \, [B] = [0]$$
La validité concomittente de ces trois relations fait de la première relation caractéristique des décompositions d'un produit de Lie déformé une tautologie. □

Remarque 1.8. *Centre.*

Tout élément de M(D, C) est centré sur lui même.
$$\forall \, [B] \in M(D, C) - \{[0]\}, \, [[B], [B]] = [B] \, . \, [B] - [B] \, . \, [B] = [0] \Rightarrow [B] \in Z([B])$$

1.10 Première relation caractéristique et adjoint algébrique.

Définition 1.12. *Elément algébrique adjoint.*

Soit la fonction de M(D, C) dans M(D, C) définie par :

$$[B] \in M(D, C) - \{[0]\}, \forall [M] \in M(D, C) \rightarrow ad_{[B]}([M]) = [[B], [M]]$$

Elle est notée $\mathrm{ad}_{[B]}$ et désigne l'adjoint algébrique de l'élément [M] relativement à l'élément [B]. Il convient de ne pas confondre cet adjoint algébrique avec la représentation adjointe définie dans les ouvrages universitaires, par exemple dans [[03] ; Kapitel VIII, §8]. Cette dernière a été introduite plus tôt dans ce document au niveau de l'exemple 1.1.

Remarque 1.9. *Adjoint algébrique d'une décomposition non-triviale.*

Soit la première relation caractéristique établie à la sous-section 1.8. Il est aisé de constater qu'elle s'écrit encore :

$$ad_{[B]}([P]) = ad_{[B]}({}_A\Phi(\mathbf{u}_1)) - \frac{1}{2} . [B]^{-1} . ad_{[B]}(Hess_{\mathbf{u}_2} P_2)$$

Remarque 1.10. *Conditions nécessaires.*

Pour que l'adjoint algébrique d'une décomposition non-triviale soit à son tour une décomposition non-triviale, les conditions suivantes doivent nécessairement être simultanément remplies :

1. L'adjoint algébrique d'une décomposition triviale doit être une décomposition triviale ; concrètement, il convient de trouver un cube A' et un vecteur $\mathbf{u'}_1$ tels que :
$$ad_{[B]}({}_A\Phi(\mathbf{u}_1)) = {}_{A'}\Phi(\mathbf{u}'_1)$$
2. L'adjoint algébrique de la Hessienne doit également être une Hessienne :
$$ad_{[B]}(Hess_{\mathbf{u}_2} P_2) = Hess_{\mathbf{u}'_2} P'_2$$

Remarque 1.11. *Obstruction à une double-condition suffisante.*

Intuitivement, il suffirait que ${}_A\Phi$ soit un morphisme de crochets de Lie et que la forme bilinéaire [B] soit elle-même la représentation d'une décomposition triviale pour que la première de ces conditions nécessaires soit vérifiée ; pour autant, la deuxième condition est incompatible avec l'implication de cette forme au sein de la procédure extrinsèque lorsque le produit tensoriel est bâti sur un cube antisymétrique.

Démonstration. - En effet, si :

$$\{A^{\alpha}_{\chi\beta} = A^{\alpha}_{\beta\chi}, \exists \mathbf{w} : [B] = {}_A\Phi(\mathbf{w})\}$$

alors, à cause de la propriété remarquable d'une décomposition triviale bâtie sur un cube antisymétrique (sous-section 1.4) :

$$|B| = |{}_A\Phi(\mathbf{u}_1)| = 0$$

La matrice [B] n'est pas inversible ; conséquence : elle ne peut être impliquée dans l'énoncé d'une décomposition non-triviale. □

Remarque 1.12. *Hessienne au centre de la forme bilinéaire.*

Si la Hessienne apparaissant dans une décomposition non-triviale appartient au centre de la forme bilinéaire [B] impliquée dans la découverte de cette décomposition alors l'adjoint algébrique de cette Hessienne est nul.

Démonstration. Si la Hessienne apparaissant dans une décomposition non-triviale appartient au centre de la forme bilinéaire [B] impliquée dans la découverte de cette décomposition, alors par définition de la notion de centre :

$$Hess_{\mathbf{u}_2}P_2 \in Z([B]) \Rightarrow [[B], Hess_{\mathbf{u}_2}P_2] = ad_{[B]}(Hess_{\mathbf{u}_2}P_2) = [0]$$

Ainsi, toutes les polynomiales de degré au plus égal à un (des droites) sont candidates à représenter cet adjoint nul. □

Définition 1.13. *Elément auto-adjoint.*

Un élément [M] de M(D, C) est auto-adjoint par rapport à l'élément [B] lorsqu'il vérifie la relation :

$$[B] \in M(D, C) - \{[0]\}, [M] \in M(D, C) : ad_{[B]}([M]) = [[B], [M]] = [M]$$

Soit $autad_{[B]}$ l'ensemble de ces éléments.

Définition 1.14. *Elément absorbé par adjonction algébrique.*

Un élément [M] de M(D, C) est absorbé par adjonction algébrique par rapport à l'élément [B] lorsqu'il vérifie la relation :

$$[B] \in M(D, C) - \{[0]\}, [M] \in M(D, C) : ad_{[B]}([M]) = [[B], [M]] = [B]$$

Soit $absad_{[B]}$ l'ensemble de ces éléments. Dans une image en creux facile à comprendre, [B] est l'élément absorbant pour l'ensemble des éléments contenus dans $absad_{[B]}$. Un élément absorbant pour une partie des éléments de M(D, C) ne peut pas appartenir à cette partie, sauf s'il coincide avec la matrice nulle et que cette partie se résume à la matrice nulle ; de sorte que :

$$absad_B : \{[B] \in M(D, C) - \{[0]\}, [M] \in M(D, C) : [[B], [M]] = [B]\}$$

$$[B] \notin absad_B$$

1.11 Structures mathématiques sous-jacentes.

Ces premiers éléments de topologie ont permis de définir une notion de point pour cette théorie, puis celles de taille et de voisinage pour chacun de ces points, enfin celle d'envergure des éléments d'un voisinage. Ils n'ont pas, à ce stade, permis de définir un concept de distance. Par conséquent, la théorie ne dispose pas encore d'une structure d'espace topologique.

En revanche, il a été constaté que les points résultant de la restriction de cette discussion aux produits de Lie déformés étaient de taille nulle ; ce qui rapproche le concept de point tel qu'il a été introduit dans de document de celui qui est communément utilisé en physique.

Pour chaque produit tensoriel déformé, un ensemble de décompositions non triviales équivalentes à la décomposition la plus triviale de ce produit a été défini et caractérisé. La connaissance de cet ensemble et de ses caractéristiques participe à celle de la notion de voisinage telle qu'elle a été précisée dans ce document.

Il est légitime de se demander si l'ensemble des parties principales des décompositions éventuellement non-triviales d'un produit déformé exhibe une (ou plusieurs) structure(s) mathématique(s) connue(s) ou intéressante(s) ?

2 Bibliographie

Références

2.1 Contributions personnelles

[a] PERIAT, T. : Produits tensoriels déformés et C^* algèbres ; ISBN-978-2-36923-137-0, EAN 9782369231370, 10 janvier 2019.

[b] PERIAT, T. : Les algèbres déformées de la théorie de la question (E) ; ISBN 978-2-36923-100-4, EAN 9782369231004, 5 mars 2021.

[c] PERIAT, T. : Dérivations ; ISBN 9782-36923-066-3, EAN 9782369230663, v2, 14 septembre 2020.

[d] PERIAT, T. : Matricial derivations, Part 01 and 02 ; ISBN 9782-36923-015-1, EAN 9782369230151, 20 March 2021.

[e] PERIAT, T. : Méthode extrinsèque ; ISBN-978-2-36923-028-1, EAN 9782369230281, 25 octobre 2019.

[f] PERIAT, T. : Méthode intrinsèque ; ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, version du 14 août 2018.

[g] PERIAT, T. : Variations des fonctions vectorielles et décomposition de Helmholtz, ISBN 978-2-36923-098-4, EAN-9782369230984, 25 octobre 2020.

[h] PERIAT, T. : Produits vectoriels déformés, involution, trous noirs satisfaisant aux solutions de Bowen-York pour le problème des données initiales et loi de dispersion des particules sans masse ; initiation à la thématique, ISBN 978-2-36923-115-8, EAN 9782369231158, 10 février 2021.

[i] PERIAT, T. : Etude approffondie de la loi de Lorentz-Einstein sous l'angle de la théorie des produits tensoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-112-7, EAN 978236923112-7, 14 novembre - 7 décembre 2016.

2.2 Ouvrages de référence

[01] Cours sur la topologie, université de Lyon, 2008, 40 pages.

[02] Kohler, D. : Groupes topologiques, Ecole Polytechnique Fédérale, Lausanne, hiver 2003-2004, 42 pages.

[03] Bröcker, T. : Lineare Algebra und analytische Geometrie ; ©2004 Birkhaüser Verlag Basel, ISBN 3-7643-7144-7, 366 S.

[04] Algèbres linéaires, Bachelor 1ère année, sections : matériaux et microtechniques, version septembre 2007 pour l'année 2008-2009, Ecole Polytechnique Fédérale, Lausanne, 180 pages.

[05] Wira, P. : Un rappel sur les matrices ; Université de Haute-Alsace, Faculté des sciences et techniques, année 2000-2001, 47 pages.

[06] Cartan, E. : The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966 ; translation of the "Lecons sur la théorie des spineurs (2 volumes)" ; Hermann, 1937.

[08] Mathématiques, volumes 50/51, Encyclopédie Bordas, ©Bordas-Éditeur 1972, 184 pages.

[07] Delachet, A. : Le calcul tensoriel, Collection Que sais-je, n° 1336, Paris, P.U.F, 1974.

[09] Waldmann, S. : Lineare Algebra 2, ISBN 978-3-662-53347, ©Springer-Verlag GmbH Deutschland 2017, 248 pages.

[10] Weber, H. J. and Arfken, G. B. : Essential mathematical, Methods for physicists, international edition, ISBN 0-12-059878-7, ©2004, Elsevier Science, Academic Press, printed in the USA, 932 pages.

[11] Borel, A. et Tits, J. : Groupes réductifs, ©Publications mathématiques de l'I.H.É.S., tome 27 (1965), 98 pages, accessible sur numdam.org.

[12] Ngô, B. C. : Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie, Université Paris Sud, Orsay, publié en ligne le 23 avril 2010, 169 pages.