© Thierry PERIAT : Les équations de Lorentz – Einstein comme opérateur différentiel
ISBN 978-2-36923-016-8, EAN 9782369230168, v2 du document initial écrit le 14.09.2004
04 décembre 2018

Les équations de Lorentz-Einstein

Système de relations permettant d'interpréter les équations de Lorentz-Einstein comme des opérateurs différentiels.

Plan du document

1. Introduction

Nous poursuivons ici notre tentative de lire les équations de Lorentz - Einstein pour une particule chargée comme une série de d'opérateurs vectoriels différentiels. Les diverses explorations entreprises précédemment nous invitent à définir le changement de variable nécessaire à cette interprétation de la manière suivante :

(01)

$$A^\theta = \sum_\lambda \sum_\mu \ {}_\theta q_{\lambda\mu}.\ x^\lambda.\ x^\mu + \sum_\kappa q_{\theta\kappa}.\ x^\kappa$$

Dont nous allons maintenant montrer tout l'intérêt.

2. Système des équations induit par le changement de variable proposé

La dérivée première par rapport à un élément de trajectoire ds des nouvelles composantes s'écrit :

(02)

$$dA^\theta/ds = \sum_\lambda \sum_\mu (d_\theta q_{\lambda\mu}.\ /ds).\ x^\lambda.\ x^\mu + \sum_\kappa (dq_{\theta\kappa}./ds).\ x^\kappa + \sum_\lambda [\sum_\mu ({}_\theta q_{\lambda\mu} + {}_\theta q_{\kappa\mu\lambda}).\ x^\mu + q_{\theta\lambda}].\ u^\lambda$$

La dérivée seconde par rapport à un élément de trajectoire ds des nouvelles composantes s'écrit :

(03)

$$d^2A^\theta/d^2s$$
$$=$$
$$\sum_\lambda [\sum_\mu ({}_\theta q_{\lambda\mu} + {}_\theta q_{\mu\lambda}).\ x^\mu + q_{\theta\lambda}].\ (du^\lambda/ds) + 2.\ \sum_\lambda \sum_\mu {}_\theta q_{\lambda\mu}.\ u^\lambda.\ u^\mu$$
$$+ \sum_\lambda 2.\ \{[\sum_\mu (d_\theta q_{\lambda\mu}/ds) + (d_\theta q_{\mu\lambda}/ds)].\ x^\mu + (dq_{\theta\lambda}/ds)\}.\ u^\lambda + \sum_\lambda \sum_\mu (d^2{}_\theta q_{\lambda\mu}/d^2s).\ x^\lambda.\ x^\mu$$
$$+ \sum_\kappa (d^2q_{\theta\kappa}/d^2s).\ x^\kappa$$

Nous proposons de montrer que le changement de variable proposé doit permettre d'aboutir au système vectoriel d'équations différentielles du second ordre suivant :

(04)

$$[{}_0P].\ d^2\mathbf{A}/d^2s + [{}_1P].\ d\mathbf{A}/ds + [{}_2P].\ \mathbf{A} = \mathbf{L}[\mathbf{A}(s)]$$

qui se traduit dans le langage des composantes locales par :

(04.θ)

$$p_{0\phi\theta}.\ d^2A^\theta/d^2s + p_{1\phi\theta}.\ dA^\theta/ds + p_{2\phi\theta}.\ A^\theta = L_\phi [A^\theta(s)]$$

Nous calculons donc les 4 relations (4.θ) pour θ = 0, 1, 2 et 3 en utilisant (01) (02) et (03). Ce qui fournit :

(05.θ)

$$\sum_\theta p_{0\phi\theta}.\ \{\sum_\lambda [\sum_\mu ({}_\theta q_{\lambda\mu} + {}_\theta q_{\mu\lambda}).\ x^\mu + q_{\theta\lambda}].\ (du^\lambda/ds) + 2.\ \sum_\lambda \sum_\mu {}_\theta q_{\lambda\mu}.\ u^\lambda.\ u^\mu$$

$$
\begin{gathered}
+ \sum_\lambda 2.\ \{[\sum_\mu (d_\theta q_{\lambda\mu.}/ds) + (d_\theta q_{\mu\lambda.}/ds)].\ x^\mu + (dq_{\theta\lambda.}/ds)\}.\ u^\lambda \\
+ \sum_\lambda \sum_\mu (d^2{}_\theta q_{\lambda\mu.}/d^2s).\ x^\lambda.\ x^\mu + \sum_\kappa (d^2q_{\theta\kappa}/d^2s).\ x^\kappa\} \\
+ \sum_\theta p_{1\phi\theta}.\ \{\sum_\lambda \sum_\mu (d_\theta q_{\lambda\mu}/ds).\ x^\lambda.\ x^\mu + \sum_\kappa (dq_{\theta\kappa}/ds).\ x^\kappa \\
+ \sum_\lambda [\sum_\mu ({}_\theta q_{\lambda\mu} + {}_\theta q_{\kappa\mu\lambda}).\ x^\mu + q_{\theta\lambda}].\ u^\lambda\} \\
+ \sum_\theta p_{2\phi\theta}.\ \{\sum_\lambda \sum_\mu {}_\theta q_{\lambda\mu}.\ x^\lambda.\ x^\mu + \sum_\kappa q_{\theta\kappa}.\ x^\kappa\} - L_\phi [A^\theta(s)] \\
= \\
0
\end{gathered}
$$

Ces relations doivent être l'expression des équations de Lorentz – Einstein :
(06.θ)

$$\sum_\lambda \sum_\mu \Gamma_\lambda{}^\theta{}_\mu .\ u^\lambda.\ u^\mu - k.\ \sum_\lambda F^\theta{}_\lambda .\ u^\lambda + du^\theta/ds = 0\ ;\ \theta = 0, 1, 2, 3.$$

L'identification, coordonnée par coordonnée, est possible à condition de poser et pouvoir résoudre le système suivant d'équations :
(07.a)

$$\sum_\theta p_{0\phi\theta}.\ [\sum_\mu ({}_\theta q_{\lambda\mu} + {}_\theta q_{\mu\lambda}).\ x^\mu + q_{\theta\lambda}] = \delta^\phi{}_\lambda$$

(07.b)

$$2.\ \sum_\theta p_{0\phi\theta}.\ {}_\theta q_{\lambda\mu} = \Gamma_\lambda{}^\phi{}_\mu$$

(07.c)

$$
\begin{gathered}
\sum_\theta p_{0\phi\theta}.\ \{2.\ \{[\sum_\mu (d_\theta q_{\lambda\mu}/ds) + (d_\theta q_{\mu\lambda}/ds)].\ x^\mu + (dq_{\theta\lambda}/ds)\}\} + \sum_\theta p_{1\phi\theta}.\ [\sum_\mu ({}_\theta q_{\lambda\mu} + {}_\theta q_{\mu\lambda}).\ x^\mu + q_{\theta\lambda}] \\
= \\
- k.\ F^\phi{}_\lambda
\end{gathered}
$$

(07.d)

$$
\begin{gathered}
\sum_\theta p_{0\phi\theta}.\ \{\sum_\lambda \sum_\mu (d^2{}_\theta q_{\lambda\mu}/d^2s).\ x^\lambda.\ x^\mu + \sum_\kappa (d^2q_{\theta\kappa}/d^2s).\ x^\kappa\} \\
+ \sum_\theta p_{1\phi\theta}.\ \{\sum_\lambda \sum_\mu (d_\theta q_{\lambda\mu}/ds).\ x^\lambda.\ x^\mu + \sum_\kappa (dq_{\theta\kappa}/ds).\ x^\kappa\} \\
+ \sum_\theta p_{2\phi\theta}.\ \{\sum_\lambda \sum_\mu {}_\theta q_{\lambda\mu}.\ x^\lambda.\ x^\mu + \sum_\kappa q_{\theta\kappa}.\ x^\kappa\} - L[A^\phi(s)] \\
= \\
0
\end{gathered}
$$

3. Conséquences du système d'équations

Nous voulons maintenant examiner la cohérence du système des équations (07) induit par notre tentative de vouloir interpréter les équations de Lorentz – Einstein comme une forme déguisée d'un opérateur différentiel de second ordre.

3.1. Les symboles de Christoffel

3.1.1. Premières identifications

Les explorations précédentes avaient fortement suscité la proposition (01) de cette section. Elle a été énoncée avec le secret espoir de pouvoir obtenir la définition même des symboles de Christoffel dans l'une des 4 équations résultant obligatoirement de l'identification souhaitée.

C'est bien le cas puisque nous savons que si $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ définit la transformation vectorielle qui à tout vecteur position $\mathbf{x}$ d'un quelconque phénomène physique φ (un événement) repéré dans un espace de Minkowski fait correspondre son vecteur position $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ dans l'espace de Riemann, alors *lorsque les symboles de Christoffel sont définis dans ce dernier par* :
(08)

$$\Gamma_\lambda{}^\phi{}_\mu = (\partial x^\phi/\partial \xi^\theta).\ (\partial^2 \xi^\theta/\partial x^\lambda \partial x^\mu)$$

Il nous suffit de réécrire trivialement :
(09)

$$\Gamma_\lambda{}^\phi{}_\mu = (\partial x^\phi/\partial \xi^\theta).\ (\partial^2 \xi^\theta/\partial x^\lambda \partial x^\mu) = 2.\ (\partial x^\phi/\partial \xi^\theta)\ ½.\ (\partial^2 \xi^\theta/\partial x^\lambda \partial x^\mu)$$

et de proposer les premières identifications simples suivantes :
(10)

$$2.\ p_{0\phi\theta} = 2.\ (\partial x^{\phi}/\partial \xi^{\theta})$$

(11)

$${}_{\theta}q_{\ \lambda\mu} = ½.\ (\partial^2\xi^{\theta}/\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu})$$

pour retrouver la relation (07.b) qui devient dès lors une sorte d'évidence.

3.1.2.Définition : table de Pythagore

Par définition, dans l'ensemble de la théorie, le concept de « table de Pythagore » est une extrapolation de celui de table de multiplication enseigné dès les classes primaires. Elle matérialise l'interaction de deux objets mathématiques (par exemple : deux vecteurs de l'espace E = E(4, R) sur lequel nous discutons actuellement) reliés entre eux par une fonction (par exemple : la fonction « multiplication de deux scalaires réels » ou « composition de deux arguments »). Ce concept permet de représenter la relation (10) par une matrice carrée mettant en jeu (i) le vecteur gradient (dérivation partielle par rapport aux diverses composantes d'un vecteur donné ; par exemple ici le vecteur $\boldsymbol{\xi}$) ∂_{ξ}**,**, le vecteur x et la composition de l'un par l'autre. De sorte que :

$$[\partial x^{\phi}/\partial \xi^{\theta}] = T_2(o)(\partial_{\xi}, \mathbf{x})$$

Bref, si -à partir de la relation (10), nous introduisons le concept de Table de Pythagore et nous posons :
(12)

$$[{}_0P] = T_2(o)(\partial_{\xi}, \mathbf{x})$$

et si nous identifions le cube $\blacktriangledown$q avec l'ensemble des dérivées partielles secondes des composantes de $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$, nous sommes assurés que la relation (07.b) est satisfaite en même temps que le terme matriciel précédant $d^2\mathbf{A}/d^2s$ est clairement identifié.

Nous remarquons que la relation (09) n'est qu'une des possibilités parmi une infinité de « factoriser » les symboles de Christoffel. Par conséquent et en théorie, il existe également une infinité d'identifications du genre décrit par (10) et (11). En fait l'idée qui en ressort reste cependant la même : « Le terme matriciel précédant $d^2\mathbf{A}/d^2s$ est proportionnel à la matrice $T_2(o)(\partial_{\xi}, \mathbf{x})$ et le cube $\blacktriangledown$q est proportionnel avec l'ensemble des dérivées partielles secondes des composantes de $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})$ ».

3.1.3. Existence de circonstances particulières permettant d'identifier le changement de variable avec un développement de Taylor Mac Laurin

Nous maintenons donc notre proposition (09) parce qu'elle a un autre avantage. En effet, supposons que nous puissions poser parfois :
(13)

$$[Q] = T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\xi})$$

ce qui équivaut à :

$$q_{\theta\kappa} = (\partial \xi^{\theta}/\partial x^{\kappa})$$

Alors le changement de variable proposé pour parvenir à nos fins s'écrit encore :
(14)

$$A^{\theta} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} ½.\ (\partial^2\xi^{\theta}/\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu})\ x^{\lambda}.\ x^{\mu} + \sum_{\kappa} (\partial \xi^{\theta}/\partial x^{\kappa}).\ x^{\kappa}$$

Où nous reconnaissons le début d'un développement limité au troisième ordre près de la fonction $\xi^{\theta}(\mathbf{x})$ autour de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Nous pourrons donc dans ce cas écrire à la limite :
(15)

$$\mathbf{A} \approx \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) + \mathbf{0}(3)$$

Il existe donc bien au moins un changement de variable naturel (= qui possède une signification physique à peu près compréhensible et acceptable) (i) qui permette de transformer les équations de Lorentz – Einstein (06.θ) supposées écrites dans un espace de Minkowski en les équations (04.θ) et (ii) qui respecte la définition des symboles de Christoffel *dans certains référentiels* (la relation 08). Ce changement de variable nécessite le respect d'un système de quatre relations (les relations 07) et l'une d'entre elles, (07.b) peut s'identifier avec la relation définissant les symboles de Christoffel de la seconde espèce *dans ces référentiels-là*. Dans ce cas, l'équation différentielle du second ordre obtenue s'écrit approximativement :

(16)

$$T_2(o)(\partial_\xi, \mathbf{x}).\ d^2\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})/d^2s + [{}_1P].\ d\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})/ds + [{}_2P].\ \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{L}[\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})]$$

3.1.4. Le cube de Christoffel solution dans le cadre de ces circonstances particulières

Il reste cependant à vérifier que ce qui ne constitue pour le moment encore qu'une série d'identifications chanceuses est compatible avec les autres relations (07.a, c et d) du système (07) résultant de l'identification pratiquée. Notamment, nous allons pouvoir vérifier s'il existe bien au moins un cube de Christoffel compatible avec ce système (07). En repositionnant (07.b) dans (07.a) nous obtenons :

(17)

$$\sum_\theta p_{0\phi\theta}.\ [\sum_\mu ({}_\theta q_{\lambda\mu} + {}_\theta q_{\mu\lambda}).\ x^\mu + q_{\theta\lambda}] = \delta^\phi{}_\lambda$$
$$\downarrow$$
$$\sum_\theta \sum_\mu\ p_{0\phi\theta}.\ ({}_\theta q_{\lambda\mu} + {}_\theta q_{\mu\lambda}).\ x^\mu + \sum_\theta p_{0\phi\theta}.\ q_{\theta\lambda} = \delta^\phi{}_\lambda$$
$$\downarrow$$
$$\sum_\mu (\Gamma_\lambda{}^\phi{}_\mu + \Gamma_\mu{}^\phi{}_\lambda).\ x^\mu + \sum_\theta p_{0\phi\theta}.\ q_{\theta\lambda} = \delta^\phi{}_\lambda$$

Nous considérons ensuite une base canonique de l'espace vectoriel E des discussions, soit ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) cette base (Elle est un élément de E x E x E x E = E^4) pour laquelle nous savons en réalité que $\mathbf{e}_\alpha = \sum_\lambda (\mathbf{e}_\alpha)^\lambda.\ \mathbf{e}_\lambda = \sum_\lambda \delta^\lambda{}_\alpha\ .\ \mathbf{e}_\lambda$; α = 0, 1, 2 et 3, la somme étant faite sur λ de 0 à 3. Ce qui permet de poursuivre avec, pour ces vecteurs :

(18)

$$\sum_\mu (\Gamma_\lambda{}^\phi{}_\mu + \Gamma_\mu{}^\phi{}_\lambda).\ \delta^\mu{}_\alpha + \sum_\theta p_{0\phi\theta}.\ q_{\theta\lambda} = \delta^\phi{}_\lambda \Rightarrow \Gamma_\lambda{}^\phi{}_\alpha + \Gamma_\alpha{}^\phi{}_\lambda + \sum_\theta p_{0\phi\theta}.\ q_{\theta\lambda} = \delta^\phi{}_\lambda$$

Si nous persistons à faire les identifications (12) et (13), nous obtenons :

(19)

$$\Gamma_\lambda{}^\phi{}_\alpha + \Gamma_\alpha{}^\phi{}_\lambda + \sum_\theta (\partial x^\phi/\partial \xi^\theta).\ (\partial \xi^\theta/\partial x^\lambda) = \delta^\phi{}_\lambda$$

Pour rappel, la convention de sommation utilisée permet de développer la somme comme suit :

$$\sum_\theta (\partial x^\phi/\partial \xi^\theta).\ (\partial \xi^\theta/\partial x^\lambda)$$
$$=$$
$$(\partial x^\phi/\partial \xi^0).\ (\partial \xi^0/\partial x^\lambda) + (\partial x^\phi/\partial \xi^1).\ (\partial \xi^1/\partial x^\lambda) + (\partial x^\phi/\partial \xi^2).\ (\partial \xi^2/\partial x^\lambda) + (\partial x^\phi/\partial \xi^3).\ (\partial \xi^3/\partial x^\lambda)$$

Comme la discussion a lieu sur le corps commutatif des nombres réels, R, cette somme s'écrit encore :

$$\sum_\theta (\partial \xi^\theta/\partial x^\lambda).\ (\partial x^\phi/\partial \xi^\theta)$$

Les propriétés générales et habituelles de la différentiation partielle permettent d'écrire :

$$\sum_\theta (\partial \xi^\theta/\partial x^\lambda).\ (\partial \ldots/\partial \xi^\theta) = \partial \ldots/\partial x^\lambda$$

Il en résulte que la somme apparaissant dans la relation (19) se laisse réécrire :

$$\partial x^\phi/\partial x^\lambda = \delta^\phi{}_\lambda$$

De sorte que :

(20)

$$\Gamma_{\lambda}{}^{\phi}{}_{\alpha} + \Gamma_{\alpha}{}^{\phi}{}_{\lambda} + \delta^{\phi}{}_{\lambda} = \delta^{\phi}{}_{\lambda} \Rightarrow \Gamma_{\lambda}{}^{\phi}{}_{\alpha} + \Gamma_{\alpha}{}^{\phi}{}_{\lambda} = 0$$

Le respect de l'œuvre historique de E.B. Christoffel (1869) [01] dans laquelle il étudie la préservation des formes différentielles du second degré oblige à écrire que les symboles homonymes de la seconde espèce sont symétriques sur leur indices bas (Il en existe une traduction française dans [02]) :
(21)

$$\Gamma_{\lambda}{}^{\phi}{}_{\alpha} = \Gamma_{\alpha}{}^{\phi}{}_{\lambda}$$

Ce qui conduit irrémédiablement à se rendre compte que l'ensemble des contraintes choisies au cours de cette démarche, en particulier les relations (08) et (13), n'est réalisé que lorsque les composantes de ce que j'appellerai désormais « le cube de Christoffel » (sous-entendu des symboles homonymes de la seconde espèce) est nul :
(22)

$$\Gamma_{\alpha}{}^{\phi}{}_{\lambda} = 0$$

Il n'existe au bout du compte qu'un seul cube de Christoffel qui satisfait (i) la définition de ces symboles *dans les référentiels où elles donnée par la relation* (08), (ii) les propositions (12) et (13) et (iii) la relation (07.a) imposée par notre tentative d'identification des équations de Lorentz – Einstein avec un opérateur différentiel d'ordre deux.

3. Conclusion

La démarche amorcée en 2004 avec ce document a été poursuivie depuis. En effet, dès cette époque, il était clair que si la relation (08) était quasiment incontournable dans le cadre de la construction habituelle de la théorie de la relativité générale, elle n'était pas la seule interprétation possible. Le document [03] prouve rationnellement cette intuition.

Le but poursuivi est clair. Une fois que nous aurons pu énoncer une forme complète de (16), nous pourrons en commencer la résolution à l'aide de la théorie de Sturm – Liouville. Nous savons que la Théorie de Sturm – Liouville nous permettra d'introduire enfin les questions de quantification dans notre approche théorique.

Du point de vue des mathématiques, ce travail introduit quelques concepts intéressants dont celle de table de Pythagore. Il est également remarquable que le changement de variable proposé consiste finalement à transformer une équation différentielle du premier ordre hétéroclite (les équations de Lorentz – Einstein) écrite en fonction des composantes de la vitesse propre de la particule dans un espace de Minkowski en une équation différentielle du second ordre écrite en fonction des composantes du vecteur position de cette même particule lorsqu'elle est observée dans un espace de Riemann. Nous pourrions, à la limite, imaginer que ce changement de variable s'apparente à une sorte d'intégration… des équations de Lorentz – Einstein.

3. Bibliographie

[01] E.B. Christoffel: Über die Transformationen der homogenen Differenzialausdrücke zweites Grades; in Journal für die reine und angewandte Mathematik, (pp. 46 - 70), Berlin 1826; 03.01.1869.
[02] Cotton, E. : Sur les variétés à trois dimensions ; annales de la faculté des sciences de Toulouse, 2ème série, tome 1, n°4 (1899), p. 385-438 ; accessible sur : [www.numdam.org/item?id=AFST_1899_2_1_4_385_0].
[03] PERIAT, T. : Etude approfondie de la loi de Lorentz-Einstein sous l'angle des décompositions des produits tensoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-112-7, EAN 9782369231127, 14 novembre – 07 décembre 2016.