Aspects mathématiques de la théorie des produits tensoriels déformés

©Thierry PERIAT, ISBN 978-2-36923-028-1, EAN 9782369230281

25 octobre 2019

Ce document en perpétuelle évolution reprend, systématise et étend les éléments mathématiques fondamentaux attachés à l'étude des produits tensoriels déformés puis éventuellement décomposés non-trivialement. Il tente d'asseoir la partie théorique sur des bases solides.

Contents

1 Outils

1.1 Données élémentaires

La discussion prend place sur un

Définition 1.1. ***Espace vectoriel***

Soit un corps K de caractéristique différente de deux et soit un ensemble E muni de deux opérations binaires internes (i.e. : deux opérations impliquant deux arguments dont le résultat est dans cet ensemble E) : (i) l'addition, notée "+", et le produit a gauche par un élément appartenant a K, noté : ".". Cet ensemble E est dit être doté d'une structure d'espace vectoriel sur K lorsque le cahier des charges suivants est réalisé : (E, +) est un groupe additif, etc... (voir abondante littérature académique sur le sujet).

Définition 1.2. ***Produit tensoriel déformé***

Soit E(D, K) un espace vectoriel de dimension entiere D supérieure ou égale a deux rapporté a sa base canonique Ω : $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_\alpha, ..., \mathbf{e}_{D-1})$; soit deux vecteurs quelconques de cet espace et enfin soit un cube d'éléments de K, noté A, je dis que le produit tensoriel habituel de ces deux vecteurs a été déformé par les éléments du cube A chaque fois que je peux calculer le nouveau vecteur :

$$\forall\,(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in E(D,\, K) \times E(D,\, K) \xrightarrow{\otimes_A} \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = A^k_{ij} \,.\, q^i_1 \,.\, q^j_2 \,.\, \mathbf{e}_k \in E(D,\, K)$$

Définition 1.3. ***Produit extérieur déformé***

Dans les mêmes conditions que celles qui viennent d'être exposées, le produit dit extérieur[1] des deux vecteurs précédents est, par définition le nouveau vecteur :

$$\forall\,(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\,\in\,E^2(D,\,K)\,:\,\wedge_A(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\,=\,\otimes_A(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)-\otimes_A(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1)\,=\,A^k_{ij}\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2-q^i_2\,.\,q^j_1)\,.\,\mathbf{e}_k$$

Les composantes de ce produit extérieur se laissent toujours décomposer en trois sous-ensembles :

$$\{\sum_{i<j}A^k_{ij}\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2\,-\,q^i_2\,.\,q^j_1)\}\,+\,\{\sum_{i=j}A^k_{ij}\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2\,-\,q^i_2\,.\,q^j_1)\}\,+\,\{\sum_{i>j}A^k_{ij}\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2\,-\,q^i_2\,.\,q^j_1)\}$$

De sorte que, si K est supposé être un corps commutatif : (i) le second terme de la somme précédente s'annule et (ii) puisque la série des termes suivants apparait :

$$A^k_{12}\,.\,(q^1_1\,.\,q^2_2\,-\,q^1_2\,.\,q^2_1)\,;\,A^k_{21}\,.\,(q^2_1\,.\,q^1_2\,-\,q^2_2\,.\,q^1_1)$$
$$A^k_{1j}\,.\,(q^1_1\,.\,q^j_2\,-\,q^1_2\,.\,q^j_1)\,;\,A^k_{j1}\,.\,(q^j_1\,.\,q^1_2\,-\,q^j_2\,.\,q^1_1)$$
$$A^k_{1D}\,.\,(q^1_1\,.\,q^D_2\,-\,q^1_2\,.\,q^D_1)\,;\,A^k_{D1}\,.\,(q^D_1\,.\,q^1_2\,-\,q^D_2\,.\,q^1_1)$$
$$etc.$$

Finalement :

$$\forall\,A,\,\forall\,(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\,\in\,E^2(D,\,K)\,:\,\wedge_A(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\,=\,\sum_{i<j}(A^k_{ij}\,-\,A^k_{ji})\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2\,-\,q^i_2\,.\,q^j_1)\,.\,\mathbf{e}_k$$

Le résultat de ce calcul est toujours un élément de l'espace vectoriel de départ : E(D, K). Chacune de ses D composantes est une somme de 1 + 2 + ... + (D - 1) = D.(D - 1)/2 termes ; au lieu des D^2 termes contenus dans chacune des D composantes du produit tensoriel déformé l'ayant généré.

Exemple 1.1. ***Dans un espace vectoriel de dimension trois***

Dans ce cas particulier :

$$\forall\,A,\,\forall\,(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\,\in\,E^2(3,\,K)\,:\,\wedge_A(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\,=\,\sum_{i<j}(A^k_{ij}\,-\,A^k_{ji})\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2\,-\,q^i_2\,.\,q^j_1)\,.\,\mathbf{e}_k$$

Chaque composante est une somme de trois termes[2] ; au lieu des neuf termes de chaque composante du produit tensoriel déformé l'ayant généré. Ce nouveau vecteur est en quelque sorte une version déformée du produit extérieur de deux vecteurs de E(3, K). Et c'est ce que je vais démontrer.

Remarque 1.1. ***Sur les cubes symétriques***

Tous les produits extérieurs déformés bâtis sur des cubes symétriques sont évidemment nuls.

Remarque 1.2. ***Sur l'existence des cubes antisymétriques***

Tout cube A contient un cube B anti-symétrique sur ses indices bas.

$$\forall\,A:\,\exists\,B\,|\,(i)\,B^k_{ij}\,=\,A^k_{ij}\,-\,A^k_{ji};\,(ii)\,B^k_{ji}\,=\,A^k_{ji}\,-\,A^k_{ij}\,=\,-(A^k_{ij}\,-\,A^k_{ji})\,=\,-B^k_{ij}$$

Définition 1.4. ***Produit de Lie déformé***

Soit E(D, K) un espace vectoriel de dimension entiere D supérieure ou égale a deux rapporté a sa base canonique Ω : $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_\alpha, ..., \mathbf{e}_{D-1})$; soit deux vecteurs quelconques de cet espace et enfin soit un cube d'éléments de K, anti-symétrique sur ses indices bas et noté A, je dis que le produit de Lie habituel de ces deux vecteurs a été déformé par les éléments du cube A chaque fois que je peux calculer le nouveau vecteur :

$$\forall\,A\,|\,A^k_{ji}\,+\,A^k_{ij}\,=\,0,\,\forall\,(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\,\in\,E^2(D,\,K)\,:$$
$$[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2]_A\,=\,\frac{1}{2}\,.\,\wedge_A\,(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\,=\,\sum_{i<j}A^k_{ij}\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2\,-\,q^i_2\,.\,q^j_1)\,.\,\mathbf{e}_k$$

---

[1]Cette appellation est trompeuse puisque contrairement au produit extérieur classique, le résultat d'un produit extérieur déformé est toujours dans l'ensemble de départ.

[2]D = 3 → D.(D - 1)/2 = 3.

Proposition 1.1. ***Un lien entre produit extérieur et produit de Lie***

Tout produit extérieur déformé bâti sur un quelconque cube A est aussi un produit de Lie déformé construit sur le cube anti-symétrique B implicitement contenu dans le cube A.

$$\forall A, \forall (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in E^2(D, K) : \exists B \,|\, B^k_{ij} + B^k_{ji} = 0;\ B^k_{ij} = A^k_{ij} - A^k_{ji}$$

$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \sum_{i<j} (A^k_{ij} - A^k_{ji}) \,.\, (q^i_1 \,.\, q^j_2 - q^i_2 \,.\, q^j_1) \,.\, \mathbf{e}_k = \sum_{i<j} B^k_{ij} \,.\, (q^i_1 \,.\, q^j_2 - q^i_2 \,.\, q^j_1) \,.\, \mathbf{e}_k = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_B$$

□

Remarque 1.3. ***Un lien évident avec la notion de différentiation extérieure***

Je remarque la similitude formelle entre le concept de *covariant bilinéaire* introduit par Darboux [[21]; 1882] et celui de produit extérieur déformé introduit ci-dessus (cf. définition 1.3). Ce concept de covariant bilinéaire a été rebaptisé depuis en : *différentiation extérieure*; il est lié a l'étude des variations de la forme différentielle Θ_d(X) :

$$\Theta_d(X) = \sum_\alpha X_\alpha \,.\, dx^\alpha$$

Une différentiation extérieure de cette forme est :

$$\delta\Theta_d(X) = \sum_\alpha \delta(X_\alpha \,.\, dx^\alpha)$$

L'utilité de ce concept tient a ses liens avec un vieux probleme d'integration (volumes dans un espace de dimension quelconque). Dans [[22]; 1899], E. Cartan réalise une synthese des travaux de Pfaff, Grassmann, Natani, Clebsch, Lie, Frobenius et Darboux. En utilisant la regle de Leibnitz :

$$\delta\Theta_d(X) = \sum_\alpha \delta X_\alpha \,.\, dx^\alpha + X_\alpha \,.\, \delta dx^\alpha$$

Le développement du premier terme a droite du signe de l'égalité ne pose aucun probleme. Ce n'est pas le cas pour le second car nous ne savons pas calculer δd. Darboux propose de contourner cette difficulté en remarquant la chose suivante :

- en intervertissant le rôle de d et δ:

$$d\Theta_\delta(X) = \sum_\alpha dX_\alpha \,.\, \delta x^\alpha + X_\alpha \,.\, d\delta x^\alpha$$

- et en supposant *sans démonstration* que :

$$\delta d = d\delta,$$

il est possible d'obtenir :

$$\delta\Theta_d(X) - d\Theta_\delta(X) = \sum_{\alpha<\beta} \left(\frac{\partial X_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial X_\beta}{\partial x^\alpha}\right) . \,(dx^\alpha \,.\, \delta x^\beta - dx^\beta \,.\, \delta x^\alpha)$$

C'est l'endroit précis pour remarquer qu'en répétant la manoeuvre avec D formes différentielles différentes (formes de Pfaff) :

$$\chi = 0, 1, ..., D-1 : \ \Theta^\chi_d(X) = \sum_\alpha X^\chi_\alpha \,.\, dx^\alpha$$

alors :

$$\delta\Theta^\chi_d(X) - d\Theta^\chi_\delta(X) = \sum_{\alpha<\beta} \left(\frac{\partial X^\chi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial X^\chi_\beta}{\partial x^\alpha}\right) . \,(dx^\alpha \,.\, \delta x^\beta - dx^\beta \,.\, \delta x^\alpha)$$

Autrement dit j'ai le :

Lemme 1.1. ***Formes de Pfaff et produits extérieurs déformés***

L'existence d'un ensemble de D formes différentielles $\Theta^\chi(X)$ ($\chi = 0, 1, ..., D - 1$) engendre celle d'un produit tensoriel déformé bâti sur un cube A qui, dans le référentiel $(\mathbf{x}, \Omega)$, vaut :

$$A^\chi_{\alpha\beta} = \frac{\partial X^\chi_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x^\beta}$$

Avec ce cube et avec l'aide de la remarque 1.2 , je peux construire un produit extérieur déformé tel que :

$$d\mathbf{x},\, \delta\mathbf{x} \in E(4,\, R) : \wedge_A(d\mathbf{x},\, \delta\mathbf{x}) = \sum_\chi (\delta\Theta^\chi_d(X) - d\Theta^\chi_\delta(X))\,.\,\mathbf{e}_\chi;\; \forall\, A^\chi_{\alpha\alpha} = \frac{\partial X^\chi_\alpha}{\partial x^\alpha}$$

Exemple 1.2. ***Les tétrades dans un espace vectoriel de dimension quatre***

Pour éviter les confusions, j'utilise ici les notations introduites et expliquées dans [[23]]. Dans ce cas particulier mais important parce qu'il impacte la compréhension de la théorie de la relativité générale, les $\mathrm{e}_\mu{}^a(\mathbf{x})$ sont seize (16) fonctions définies localement et portant avec elles les informations nécessaires sur la transformation locale entre une métrique quelconque et la métrique de Minkowski [23 ; p. 5, (16) et (17)] :

Supposer que ces fonctions peuvent varier dans le système des coordonnées locales qui coincident par choix arbitraire avec les composantes d'un vecteur $\mathbf{x}$, revient à admettre l'existence d'un cube :

$$A^a_{\mu\nu} = \frac{\partial e_\mu{}^a(\mathbf{x})}{\partial x^\nu}$$

à partir duquel il est possible de concocter un cube anti-symétrique :

$$B^a_{\mu\nu} = A^a_{\mu\nu} - A^a_{\nu\mu} = \frac{\partial e_\mu{}^a(\mathbf{x})}{\partial x^\nu} - \frac{\partial e_\nu{}^a(\mathbf{x})}{\partial x^\mu}$$

sur lequel peut se construire le produit extérieur déformé :

$$\sum_a \delta\Theta_d(e^a) - d\Theta_\delta(e^a)\,.\,\mathbf{e}_a = \sum_a \sum_{\mu<\nu} (\frac{\partial e_\mu{}^a}{\partial x^\nu} - \frac{\partial e_\nu{}^a}{\partial x^\mu})\,.\,(dx^\mu\,.\,\delta x^\nu - dx^\nu\,.\,\delta x^\mu)\,.\,\mathbf{e}_a$$

Ce vecteur est toujours un élément de l'espace vectoriel E(4, R). Chacune de ses D = 4 composantes est une somme de D.(D - 1)/2 = 6 termes ; au lieu des $4^2 = 16$ termes contenus dans chacune des 4 composantes du produit tensoriel déformé l'ayant généré. D'une façon générale, l'étude de la représentation de ce vecteur dans l'espace vectoriel dual $E^*(4, R)$ peut se révéler instructive.

Remarque 1.4. ***Représentation duale du produit extérieur déformé***

Soit le résultat général obtenu à la fin de la définition 1.3 . Chacune des D composantes s'écrit :

$$\forall\, A,\, \forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in E^2(D,\, K) : (\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2))^k = \sum_{i<j} (A^k_{ij} - A^k_{ji})\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2 - q^i_2\,.\,q^j_1)$$

C'est une somme de D.(D - 1)/2 termes. Chacun de ces termes est le produit de deux sous-termes. Celui de droite correspond à la composante (i, j) pour i plus petit que j (= 2, ..., D) du produit extérieur classique des vecteurs $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$.

$$q^i_1\,.\,q^j_2 - q^i_2\,.\,q^j_1 \equiv (\wedge(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2))^{ij}$$

Celui de gauche correspond à une pondération de celui de droite ; elle est exercée par la composante (i, j) pour i plus petit que j de la k-ième matrice carrée (D-D) anti-symétrique contenue dans le cube anti-symétrique B issu du cube géniteur A. Rien n'interdit de penser que ces composantes pourraient également être celles d'un bivecteur (synonyme : d'un produit extérieur classique de deux vecteurs de E(D, K)).

$$Cube\,B\,antisymetrique \equiv \{(\wedge({}_k\mathbf{p}_1,\, {}_k\mathbf{p}_2))^{ij},\, k = 1, 2, ..., D\}$$

La difficulté technique tient au fait qu'il n'est pas évident d'identifier les bivecteurs en partant des composantes du cube B. Cette première analyse montre que la représentation duale dans E*(D, K) d'un produit extérieur déformé de deux vecteurs de E(D, K) fait intervenir D + 1 bivecteurs. Chacun d'eux se laisse représenter dans E(D.(D - 1)/2, K). Le sujet sera approfondi au niveau des remarques 1.7 et 1.8 .

Définition 1.5. ***Cube réduit***

Un cube réduit est un cube dont les composantes satisfont:

$$A_{ij}^{k} = A_{ik}^{j}$$

Définition 1.6. ***Cube anti-réduit***

Un cube anti-réduit est un cube dont les composantes satisfont:

$$A_{ij}^{k} + A_{ik}^{j} = 0$$

Proposition 1.2. ***Cube symétrique réduit***

Un cube symétrique peut être réduit ; preuve :

$$A_{ij}^{k} = A_{ji}^{k} = A_{jk}^{i} = A_{kj}^{i} = A_{ki}^{j} = A_{ik}^{j} = A_{ij}^{k}$$

□

Proposition 1.3. ***Cube anti-symetrique anti-reduit***

Un cube anti-symétrique peut être anti-réduit ; preuve :

$$A_{ij}^{k} = -A_{ji}^{k} = A_{jk}^{i} = -A_{kj}^{i} = A_{ki}^{j} = -A_{ik}^{j} = A_{ij}^{k}$$

□

Remarque 1.5. ***Représentation des cubes***

Tout cube A d'éléments choisis dans K peut toujours se lire comme une superposition dans l'espace physique réel de D matrices de M(D, K).

Il y a ainsi, dans notre espace euclidien tridimensionnel habituel, trois façons de décomposer un cube donné.

Remarque 1.6. ***Dénombrement des composantes des cubes***

1. Les cubes symétriques sont constitués de D matrices comportant chacune (i) au plus D termes diagonaux et (ii) au plus (D^2 - D)/2 termes non-diagonaux différents ; soit : D.(D + 1)/2 termes. Le cube contient donc au plus D^2.(D + 1)/2 termes différents au lieu des D^3 théoriques pour un cube quelconque.
2. Les cubes anti-symétriques sont constitués de D matrices ne comportant chacune (i) aucun terme diagonal différent de zéro et (ii) au plus (D^2 - D)/2 termes non-diagonaux différents; soit : D.(D - 1)/2 termes. Le cube contient donc au plus D^2.(D - 1)/2 termes différents au lieu des D^3 théoriques pour un cube quelconque.
3. Concernant les cubes anti-symétriques et anti-réduits, toute composante du cube plein initial dont un des trois indices est répété s'annule. De tels cubes ne peuvent donc plus contenir comme composantes non nulles que celles dont tous les indices diffèrent les uns des autres, dans un ordre ou dans l'autre par rapport aux trois positionnements possibles.

$$i \neq j \neq k \neq i \Rightarrow A_{ij}^{k} = -A_{ji}^{k} = A_{jk}^{i} = -A_{kj}^{i} = A_{ki}^{j} = -A_{ik}^{j} = A_{ij}^{k} \neq 0$$

Il y a $C_D{}^3$ façons de choisir trois indices différents parmi D ; C'est le nombre maximum de termes différents contenus dans ces cubes (exemples : 1 si D = 3, 4 si D = 4, 10 si D = 5, 20 si D = 6, etc.). D'où il ressort que le représentant d'un cube anti-symétrique et anti-réduit dans un espace de dimension (i) D = 3 est un scalaire de K, (ii) D = 4 est vecteur **a** de E(4, K), (iii) D = 5 est une paire de vecteurs de E(5, K) pouvant se laisser matérialiser sous la forme d'une matrice anti-symétrique à diagonale nulle de M(5, K), (iv) D = 6 est éventuellement l'ensemble des composantes d'un tenseur présentant les mêmes propriétés que le tenseur de courbure de Riemann. Je n'approfondirai pas le sujet ici mais j'y reviendrai au moment de la remarque 1.7 .

Proposition 1.4. ***Représentation matricielle d'un cube anti-symetrique***

Il existe au moins une dimension (i.e. une valeur de D) autorisant à représenter un cube anti-symétrique sous la forme d'un élément de M(N, K) où N est un entier naturel positif et plus grand ou égal à trois ($N \geq 3$).

Preuve : si une telle valeur N existe, alors -voir point 2 de la remarque 1.6, elle satisfait à :

$$N^2 = D^2 \, . \, \frac{(D - 1)}{2}; \; N = 3, 4, ...$$

Ce problème d'arithmétique possède au moins une solution évidente pour D = 3 qui livre N = 3 aussi. □

De manière plus large, ce problème consiste à tenter de résoudre un polynôme de degré trois en D sur l'ensemble des entiers naturels positifs plus grands ou égaux à trois:

$$D^3 - D - 2 \, . \, N^2 = 0; \; N = 3, 4, ...$$

Une résolution manuelle artisanale, effectuée en remontant progressivement l'ensemble N depuis la valeur quatre, montre que D = 7 loupe la validation à une unité près et encourage à impliquer une méthode de résolution plus sytématique. Je vais donc essayer avec la méthode de Tartaglia-Cardan [[24] ; p. 81]. Celle-ci suppose de pouvoir poser ab initio :

$$D = U + V$$

et de choisir U et V pour faire en sorte que :

$$3 \, . \, U \, . \, V = 2 \, . \, N^2$$

Ce sont les deux prérequis permettant de mettre la méthode en oeuvre. Ils limitent le choix des paires (U, V) puisque la discussion doit se faire ici avec des nombres entiers. Par exemple, V ne peut pas être choisi égal à U parce que le lien entre N et U passerait par un nombre irrationnel (racine de trois sur racine de deux). En poursuivant sur cette voix, il est tentant de proposer V = 6.U, ce qui fournira D = 7.U et N = 3.U. Sans passer par le reste de la méthode proposée par Tartaglia et Cardan, mais en injectant directement ces suppositions dans le polynôme, je trouve alors :

$$343 \, . \, U^3 - 7 \, . \, U - 18 \, . \, U^2 = 0; \; U = 0, 1, 2, ...$$

La valeur U = 0 n'ayant aucun intérêt ici, je peux réduire mon problème à la résolution de :

$$343 \, . \, U^2 - 18 \, . \, U - 7 = 0; \; U = 1, 2, ...$$

Malheureusement, le discriminant de ce trinôme n'est pas un entier naturel puisque :

$$\Delta = 18^2 - 4 \, . \, 343 \, . \, (-7) = 324 + 9604 = 9928 \sim (99,64)^2$$

Il est possible de faire d'autres tentatives du même genre en posant :

$$V = 2 \, . \, m \, . \, U \, ; \, 3 \, . \, m = N^2$$

La première de cette série correspond au cas infructueux précédent pour lequel m = 3. La seconde contrainte permet de retenir les valeurs m = 3, 12, 27, ... qui donneront :

$$m = 3 \, ; \, V = 6 \, . \, U \, ; \, D = 7 \, . \, U \, ; \, N = 3 \, ;$$

$$m = 12 \, ; \, V = 24 \, . \, U \, ; \, D = 25 \, . \, U \, ; \, N = 6 \, ;$$

$$m = 27 \, ; \, V = 54 \, . \, U \, ; \, D = 55 \, . \, U \, ; \, N = 9 \, ;$$

$$m \, | \, 3 \, . \, m = N^2 \, ; \, V = 2 \, . \, m \, . \, U \, ; \, D = (2 \, . \, m + 1) \, . \, U$$

Cette série livre les trinômes :

$$(2 \, . \, m + 1)^3 \, . \, U^2 - (6 \, . \, m) \, . \, U - (2 \, . \, m + 1) = 0; \; U = 1, 2, ...$$

Le discriminant générique vaut :

$$\Delta = 9 \,.\, m^2 + (2 \,.\, m + 1)^4$$

Les premiers éléments de cette série permettent de comprendre que N = 3. k et donc que m = 3.k^2 avec k = 1, 2, 3, ... Le problème revient ainsi à découvrir des discriminants

$$\Delta = 81 \,.\, k^2 + (6 \,.\, k^2 + 1)^4$$

qui sont des carrés parfaits. Mes premières recherches montrent qu'il faut aller au delà de k = 13 pour obtenir un carré parfait au troisième chiffre près après la virgule. Ce pseudo-carré parfait vaut alors déjà 1.030.225, 0066 ; avec k = 17, ce pseudo-carré vaut 3.010.225, 003 et avec k = 34, il vaut 48.121.969, 0009... . Elles laissent augurer du fait que s'il existe un tel carré parfait, c'est forcément un nombre trés grand.

Pour avoir une petite chance de trouver une solution au problème posé (à supposer qu'elle existe), il faut donc (i) soit pousser les calculs numériques à l'aide d'ordinateurs ; (ii) soit en passer par une approche encore plus sytématique et appliquer la méthode de Tartaglia Cardan intégralement.

En ce qui concerne le point (i), je suis limité par les capacités de mon ordinateur personnel. Pour ce qui est du point (ii), la méthode commande de résoudre :

$$t^2 - 2 \,.\, N^2 \,.\, t - \frac{(U \,.\, V)^3}{27} = 0$$

Son discriminant vaut :

$$\Delta = N^4 + \frac{(U \,.\, V)^3}{27}$$

Une fois encore, il convient de chercher les configurations faisant de ce discriminant un carré parfait. Son formalisme invite à focaliser l'attention sur les cas où U.V = 3.k, ce qui ramenerait la résolution à la recherche de carrés parfaits ayant le formalisme N^4 + k^3. Mais comme de toute façon, 3.U.V = 2.N^2, les discriminants de Tartaglia-Cardan valent ici Δ = N^4 + 8/729. N^6. Pour qu'ils soient des entiers, il faut au moins poser que N = 3.k. Dans ce cas, ces discriminants ont le formalisme Δ = k^4.(81 + 8. k^2).

Utilité: Quoiqu'il en soit, il est permis de douter de l'utilité de vouloir résoudre ce problème... sauf, par exemple, à vouloir modéliser un champ de spin dans un volume cristallin de type cubique contenant un très grand nombre de noeuds à l'aide d'une matrice carrée.

Remarque 1.7. ***Représentation duale du produit déformé d'une paire de vecteurs de E(3, K)***

Je reviens maintenant sur la remarque 1.4 . Une première analyse a montré que la représentation duale dans E*(3, K) d'un produit extérieur déformé de deux vecteurs de E(3, K) fait en fait intervenir (3 + 1 =) quatre bivecteurs. Les trois premiers sont implicitement contenus dans le cube anti-symétrique B généré par le cube A (voir remarque 1.2) ; et le quatrième coincide avec la paire de vecteurs impliquée dans le produit extérieur déformé par le cube B. Chacun de ces bivecteurs se laisse représenter dans E(3, K). C'est là une propriété caractéristique des espaces de dimension trois qui se retrouve en particulier dans l'étude des produits vectoriels classiques. Ici (voir exemple 1.1) :

$$\forall \, A, \forall \, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in E^2(3, K), \, k = 1, \, 2, \, 3 \, :$$

$$(\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2))^k = B^k_{12} \,.\, (q^1_1 \,.\, q^2_2 - q^1_2 \,.\, q^2_1) + B^k_{23} \,.\, (q^2_1 \,.\, q^3_2 - q^2_2 \,.\, q^3_1) + B^k_{13} \,.\, (q^1_1 \,.\, q^3_2 - q^1_2 \,.\, q^3_1)$$

Quand K est un corps commutatif, il est aisé de noter que cette composante s'écrit aussi :

$$(\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2))^k = B^k_{23} \,.\, (q^2_1 \,.\, q^3_2 - q^3_1 \,.\, q^2_2) - B^k_{13} \,.\, (q^3_1 \,.\, q^1_2 - q^1_1 \,.\, q^3_2) + B^k_{12} \,.\, (q^1_1 \,.\, q^2_2 - q^2_1 \,.\, q^1_2)$$

Soit encore puisque le cube B est antisymétrique :

$$(\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2))^k = B^k_{23} \,.\, (\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^1 + B^k_{31} \,.\, (\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^2 + B^k_{12} \,.\, (\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^3$$

Cette formulation permet d'introduire une matrice (3-3) que je noterai :

$$[B^*] = \begin{pmatrix} B^1_{23} & B^1_{31} & B^1_{12} \\ B^2_{23} & B^2_{31} & B^2_{12} \\ B^3_{23} & B^3_{31} & B^3_{12} \end{pmatrix} \in M(3,\, K)$$

Elle est telle que les trois composantes du produit extérieur déformé peuvent encore s'écrire sur $E^*(3, K)$ de la manière suivante :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_B > = [B^*]\,.\,|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2 >$$

Cette formulation ne vaut que dans les espaces de dimension trois mais elle fait apparaitre en quoi le produit extérieur déformé défini dans ces espaces est bien une *déformation* du produit vectoriel classique. Dans les versions antérieures de ce travail, m'appuyant sur le constat fait au cours de la démonstration de la proposition 1.4, j'ai formalisé le fait qu'un cube de composantes antisymétriques sur leurs indices bas devait forcément se représenter sous la forme d'une matrice :

$$[B] = \begin{pmatrix} B^1_{12} & B^2_{12} & B^3_{12} \\ B^1_{23} & B^2_{23} & B^3_{23} \\ B^1_{13} & B^2_{13} & B^3_{13} \end{pmatrix} \in M(3,\, K)$$

et :

$$[J] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} ;\ [J]^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A partir de ces conventions, il est facile de démontrer que :

$$[J]^t\,.\,[B] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} B^1_{12} & B^2_{12} & B^3_{12} \\ B^1_{23} & B^2_{23} & B^3_{23} \\ B^1_{13} & B^2_{13} & B^3_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^1_{23} & B^2_{23} & B^3_{23} \\ -B^1_{13} & -B^2_{13} & -B^3_{13} \\ B^1_{12} & B^2_{12} & B^3_{12} \end{pmatrix}$$

En tenant compte de l'antisymétrie des composantes du cube B et des règles habituelles de transposition lorsque K est un corps commutatif :

$$\{[J]^t\,.\,[B]\}^t = [B]^t\,.\,[J] = [B^*]$$

D'ou il ressort la possibilité conventionnelle d'écrire aussi que :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_B > = [B]^t\,.\,[J]\,.\,|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2 >$$

Je retiendrai cette seconde formulation parce qu'elle fait apparaitre la matrice [J] dont les propriétés sont tout à fait remarquables et nous revèlent peut-être quelques aspects insoupçonnés des espaces tridimensionnels.

Théorème 1.1. ***des déformations dans les espaces de dimension trois***

Dans les espaces de dimension trois, un produit extérieur déformé bâti sur un cube quelconque A est une déformation du produit vectoriel classique. Celle-ci est représentée par le produit matriciel $[B]^t.[J]$, un élément de M(3, K) dans lequel : (i) la matrice [B] est obtenue par un regroupement selon un positionnement conventionnel des composantes non-nulles du cube antisymétrique B généré par le cube A ; et (ii) la matrice [J] est un générateur du groupe cyclique C6.

Proposition 1.5. ***Représentation duale non déformée du produit extérieur dans les espaces de dimension trois***

Dans les espaces de dimension trois, il existe au moins deux situations dans lesquelles le produit extérieur déformé coincide en fait avec le produit vectoriel classique : (i) [B] = [J]; (ii) le cube antisymétrique B est, en plus, anti-réduit et la composante non-nulle restante vaut 1_K.

Preuve : le point (i) est assez évident à démontrer puisque $[J]^t.[J] = Id_3$; la démonstration du point (ii) fait appel aux arguments de comptage exposés au point 3 de la remarque

1.6 . Grâce a eux, il apparait qu'un cube antisymétrique et anti-réduit n'a qu'une seule composante non nulle qui s'écrit indifféremment $B_{12}{}^3 = B_{23}{}^1 = B_{31}{}^2 = b$. En replaçant cette valeur dans la matrice déformante, celle-ci devient $[B^*] = b.\ Id_3$. Par suite, si b = 1, la proposition est démontrée. □

Définition 1.7. ***Ensemble des matrices déformantes des espaces de dimension trois***

Dans cette théorie, l'ensemble des matrices déformantes des espaces de dimension trois est implicitement compris comme le sous-ensemble des matrices [B] de M(3, K) permettant de créer une déformation d'un produit vectoriel classique à l'aide du générateur [J] du groupe cyclique C6. Les éléments de cet ensemble sont donc des représentations matricielles (3-3) de transformations linéaires agissant sur les éléments de l'algebre extérieure Λ(3, K). Par convention d'écriture, je note cet ensemble de déformations : D(3, K).

$$D(3,\,K)\;=\;\{[B]\;\in\;M(3,\,K)\,|\,|[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2]_B >= [B]^t\,.\,[J]\,.\,|\mathbf{q}_1\,\wedge\,\mathbf{q}_2 >\}$$

Corollaire 1.1. ***Lien avec le groupe orthogonal des espces euclidiens***

Soit γ, une forme bilinéaire fondamentale agissant sur les vecteurs de E(3, K) et soit [G] la représentation dans M(3, K) de cette forme. Il est connu que le groupe orthogonal associé à celle-ci est l'ensemble des automorphismes de E(3, K) représentés par les éléments [A] de M(3, K) tels que : $[A]^t.[G].[A] = [G]$.

Dans les espaces euclidiens tridimensionnels, la forme fondamentale est représentée par la matrice identité Id_3 et la condition d'appartenance au groupe orthogonal se résume à $[A]^t.[A] = Id_3$.

Pour que, dans ces espaces euclidiens, une déformation $[B]^t.[J]$ soit un élément du groupe orthogonal, il suffit donc que : $[J]^t.[B].[B]^t.[J] = Id_3$. Pour que cette condition soit satisfaite, il suffit que la matrice déformante [B] soit elle même un élément du groupe orthogonal. En effet, dans ce cas : $[B]^t.[B] = Id_3$ et la condition est vérifiée trivialement puisque $[J].[J]^t = Id_3$. Je note au passage que [J] est un élément trivial du groupe orthogonal.

Inversement, si une matrice déformante est élément du groupe orthogonal, la déformation qu'elle engendre l'est aussi.

Utilité: Il en résulte que les parties principales des décompositions intrinsèques non-triviales mises en évidence dans [[a]] peuvent être des éléments du groupe orthogonal euclidien O(3).

Remarque 1.8. ***Les trois produits vectoriels classiques implicites dans les matrices déformamtes de M(3, K)***

Je reviens maintenant sur l'affirmation énoncée au début de la remarque 1.7 et qui n'est elle-même en réalité que l'application aux espaces de dimension trois d'une affirmation plus générale faite au niveau de la remarque 1.4 . Celle-ci laisse sous-entendre que le cube antisymétrique B généré par le cube quelconque A contient implicitement trois bivecteurs. Il est donc légitime de rechercher une maniere permettant d'expliciter ces trois bivecteurs. La solution formelle surgit en observant attentivement le formalisme de chaque combinaison linéaire située à droite du signe de l'égalité exprimant une composante k (= 1, 2, 3) d'un produit vecoriel déformé.

Soit trois couples de vecteurs de E(3, K) ; respectivement: $({}_1\mathbf{q}_1,\ {}_1\mathbf{q}_2)$, $({}_2\mathbf{q}_1,\ {}_2\mathbf{q}_2)$ et $({}_3\mathbf{q}_1,\ {}_3\mathbf{q}_2)$. Rien n'interdit d'expliciter les composantes du produit vectoriel classique de chacune de ces trois paires dans la base canonique de l'espace vectoriel E(3, K), puis de les ordonner sous la forme d'une matrice (3-3) en notant par exemple :

$$[B^*]$$

$$=$$

$$\begin{pmatrix} B^1_{23} & B^1_{31} & B^1_{12} \\ B^2_{23} & B^2_{31} & B^2_{12} \\ B^3_{23} & B^3_{31} & B^3_{12} \end{pmatrix}$$
$$=$$
$$\begin{pmatrix} ({}_1q_1^2 \cdot {}_1q_2^3 \,-\, {}_1q_1^3 \cdot {}_1q_2^2) & ({}_1q_1^3 \cdot {}_1q_2^1 \,-\, {}_1q_1^1 \cdot {}_1q_2^3) & ({}_1q_1^1 \cdot {}_1q_2^2 \,-\, {}_1q_1^2 \cdot {}_1q_2^1) \\ ({}_2q_1^2 \cdot {}_2q_2^3 \,-\, {}_2q_1^3 \cdot {}_2q_2^2) & ({}_2q_1^3 \cdot {}_2q_2^1 \,-\, {}_2q_1^1 \cdot {}_2q_2^3) & ({}_2q_1^1 \cdot {}_2q_2^2 \,-\, {}_2q_1^2 \cdot {}_2q_2^1) \\ ({}_3q_1^2 \cdot {}_3q_2^3 \,-\, {}_3q_1^3 \cdot {}_3q_2^2) & ({}_3q_1^3 \cdot {}_3q_2^1 \,-\, {}_3q_1^1 \cdot {}_3q_2^3) & ({}_3q_1^1 \cdot {}_3q_2^2 \,-\, {}_3q_1^2 \cdot {}_3q_2^1) \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier la cohérence de cette écriture ; en particulier : de l'antisymétrie sur les indices bas qui coincide ici avec le numéro de la composante d'un vecteur. Les composantes de la déformation s'écrivent de façon générique :

$$B^{\alpha}_{\beta\gamma} \,=\, {}_{\alpha}X^{\beta} \cdot {}_{\alpha}Y^{\gamma} \,-\, {}_{\alpha}X^{\gamma} \cdot {}_{\alpha}Y^{\beta}$$

En vertu de la remarque 1.2, tout cube antisymétrique sur ses indices bas peut n'être que le résultat de la soustraction de chaque composante d'un cube quelconque A avec la composante dont l'ordre des indices bas est inversé. Ainsi, dans les espaces de dimension trois, un cube antisymétrique B peut se résumer à une matrice déformante [B*] qui pourrait aussi se concevoir comme le résultat de la soustraction :

$$[B^*]$$
$$=$$
$$\begin{pmatrix} {}_1q_1^2 \cdot {}_1q_2^3 & {}_1q_1^3 \cdot {}_1q_2^1 & {}_1q_1^1 \cdot {}_1q_2^2 \\ {}_2q_1^2 \cdot {}_2q_2^3 & {}_2q_1^3 \cdot {}_2q_2^1 & {}_2q_1^1 \cdot {}_2q_2^2 \\ {}_3q_1^2 \cdot {}_3q_2^3 & {}_3q_1^3 \cdot {}_3q_2^1 & {}_3q_1^1 \cdot {}_3q_2^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} {}_1q_1^3 \cdot {}_1q_2^2 & {}_1q_1^1 \cdot {}_1q_2^3 & {}_1q_1^2 \cdot {}_1q_2^1 \\ {}_2q_1^3 \cdot {}_2q_2^2 & {}_2q_1^1 \cdot {}_2q_2^3 & {}_2q_1^2 \cdot {}_2q_2^1 \\ {}_3q_1^3 \cdot {}_3q_2^2 & {}_3q_1^1 \cdot {}_3q_2^3 & {}_3q_1^2 \cdot {}_3q_2^1 \end{pmatrix}$$

Et cette soustraction peut suggérer l'existence d'un cube A quelconque dont les composantes seraient :

$$A^c_{ab} \,=\, {}_cq_1^a \cdot {}_cq_2^b$$

Utilité: Cette suggestion donne naissance à l'intuition m'ayant conduit à inventer et introduire les tables de Pythagore dans mes mathématiques.

Corollaire 1.2. ***Lien avec l'ensemble H des quaternions***

L'ensemble H des quaternions, c'est bien connu, n'est pas équipé d'une multiplication commutative ; en d'autres mots : H n'est pas un corps commutatif. Pour preuve, par exemple, celle-ci :

$$\forall\, q_1,\, q_2 \,\in\, H \,:\, \frac{1}{2} \,.\, (q_1 \,.\, q_2 \,-\, q_2 \,.\, q_1) \,=\, i \,.\, (\mathbf{q}_1 \,\wedge\, \mathbf{q}_2)^1 \,+\, j \,.\, (\mathbf{q}_1 \,\wedge\, \mathbf{q}_2)^2 \,+\, k \,.\, (\mathbf{q}_1 \,\wedge\, \mathbf{q}_2)^3$$

où i, j, et k représente ici les nombres imaginaires générant les quaternions ; in extenso :

$$q_1 \,=\, q_1^0 \,+\, i \,.\, q_1^1 \,+\, j \,.\, q_1^2 \,+\, k \,.\, q_1^3 \,;\, (q_1^0,\, q_1^1,\, q_1^2,\, q_1^3) \,\in\, R^4 \,\equiv\, (q_1^0,\, \mathbf{q}_1)$$
$$q_2 \,=\, q_2^0 \,+\, i \,.\, q_2^1 \,+\, j \,.\, q_2^2 \,+\, k \,.\, q_2^3 \,;\, (q_2^0,\, q_2^1,\, q_2^2,\, q_2^3) \,\in\, R^4 \,\equiv\, (q_2^0,\, \mathbf{q}_2)$$

Cette relation signe la non-commutativité des quaternions et elle se laisse généraliser avec la nouvelle relation impliquant trois paires de quaternions :

$$\forall\, a \,=\, 1,\, 2\,;\, \forall\, \alpha,\, \beta \,=\, 1,\, 2,\, 3\,;\,,\, \forall\, {}_aq_{\alpha},\, {}_aq_{\beta} \,\in\, H \,:$$

$$({}_a\mathbf{q}_{\alpha} \,\wedge\, {}_a\mathbf{q}_{\beta})^1 \,.\, i \,+\, ({}_a\mathbf{q}_{\alpha} \,\wedge\, {}_a\mathbf{q}_{\beta})^2 \,.\, j \,+\, ({}_a\mathbf{q}_{\alpha} \,\wedge\, {}_a\mathbf{q}_{\beta})^3 \,.\, k \,=\, \frac{1}{2} \,.\, ({}_aq_{\alpha} \,.\, {}_aq_{\beta} \,-\, {}_aq_{\beta} \,.\, {}_aq_{\alpha}) \,\in\, H$$

Compte tenu de tout ce qui a été dit au cours de la remarque 1.8, il semble possible d'interpréter la non-commutativité des quaternions dans le cadre de la théorie des produits vectoriels déformés. Il faut pour cela : (i) impliquer au moins quatre produits vectoriels classiques réalisés sur des vecteurs de E(3, H) et (ii) supposer que l'un d'entre eux a pour résultat un vecteur **h** ayant pour composantes (i, j, k), les générateurs imaginaires de H. Pour rappel, ces générateurs sont tels que [[24] ; p. 72] :

$$\begin{pmatrix} . & 1 & i & j & k \\ 1 & 1 & i & j & k \\ i & i & -1 & k & -j \\ j & j & -k & -1 & i \\ k & k & i & -j & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.9. ***Le vecteur h comme résultat d'un produit vectoriel classique sur E(3, H)***

La question posée par le préalable (ii) du corollaire 1.2 est donc celle de savoir s'il existe des produits vectoriels classiques réalisés sur E(3, H) dont le résultat soit le vecteur **h**? Soit :

$$|\mathbf{Q}_1 >= \left| \begin{array}{c} {}_1q_1 \\ {}_1q_2 \\ {}_1q_3 \end{array} \right\rangle \in H^3 \equiv E(3,\, H)\,;\, |\mathbf{Q}_2 >= \left| \begin{array}{c} {}_2q_1 \\ {}_2q_2 \\ {}_2q_3 \end{array} \right\rangle \in H^3 \equiv E(3,\, H)$$

Plus explicitement :

$$\begin{aligned}
{}_1q_1 &= {}_1q_1^0 + i\,.\,{}_1q_1^1 + j\,.\,{}_1q_1^2 + k\,.\,{}_1q_1^3\,;\, ({}_1q_1^0,\, {}_1q_1^1,\, {}_1q_1^2,\, {}_1q_1^3) \in R^4 \equiv ({}_1q_1^0,\, {}_1\mathbf{q}_1) \\
{}_1q_2 &= {}_1q_2^0 + i\,.\,{}_1q_2^1 + j\,.\,{}_1q_2^2 + k\,.\,{}_1q_2^3\,;\, ({}_1q_2^0,\, {}_1q_2^1,\, {}_1q_2^2,\, {}_1q_2^3) \in R^4 \equiv ({}_1q_2^0,\, {}_1\mathbf{q}_2) \\
{}_1q_3 &= {}_1q_3^0 + i\,.\,{}_1q_3^1 + j\,.\,{}_1q_3^2 + k\,.\,{}_1q_3^3\,;\, ({}_1q_3^0,\, {}_1q_3^1,\, {}_1q_3^2,\, {}_1q_3^3) \in R^4 \equiv ({}_1q_3^0,\, {}_1\mathbf{q}_3) \\
{}_2q_1 &= {}_2q_1^0 + i\,.\,{}_2q_1^1 + j\,.\,{}_2q_1^2 + k\,.\,{}_2q_1^3\,;\, ({}_2q_1^0,\, {}_2q_1^1,\, {}_2q_1^2,\, {}_2q_1^3) \in R^4 \equiv ({}_2q_1^0,\, {}_2\mathbf{q}_1) \\
{}_2q_2 &= {}_2q_2^0 + i\,.\,{}_2q_2^1 + j\,.\,{}_2q_2^2 + k\,.\,{}_2q_2^3\,;\, ({}_2q_2^0,\, {}_2q_2^1,\, {}_2q_2^2,\, {}_2q_2^3) \in R^4 \equiv ({}_2q_2^0,\, {}_2\mathbf{q}_2) \\
{}_2q_3 &= {}_2q_3^0 + i\,.\,{}_2q_3^1 + j\,.\,{}_2q_3^2 + k\,.\,{}_2q_3^3\,;\, ({}_2q_3^0,\, {}_2q_3^1,\, {}_2q_3^2,\, {}_2q_3^3) \in R^4 \equiv ({}_2q_3^0,\, {}_2\mathbf{q}_3)
\end{aligned}$$

Leur produit vectoriel classique vaut :

$$|\mathbf{Q}_1 \wedge \mathbf{Q}_2 >= \left| \begin{array}{c} {}_1q_2\,.\,{}_2q_3 - {}_1q_3\,.\,{}_2q_2 \\ {}_1q_3\,.\,{}_2q_1 - {}_1q_1\,.\,{}_2q_3 \\ {}_1q_1\,.\,{}_2q_2 - {}_1q_2\,.\,{}_2q_1 \end{array} \right\rangle \in H^3 \equiv E(3,\, H)$$

Ce produit vectoriel classique possède des propriétés qui le font différer clairement de son homologue opérant sur le corps commutatif des nombres réels ou sur celui des nombres complexes.

Par exemple, le produit vectoriel classique d'un trio de quaternions par lui-même ne s'annule pas nécessairement car du fait de la non-commutativité :

$$\frac{1}{2}\,.\,|\mathbf{Q}_1 \wedge \mathbf{Q}_1 >$$
$$=$$
$$\left| \begin{array}{c} {}_1q_2\,.\,{}_1q_3 - {}_1q_3\,.\,{}_1q_2 \\ {}_1q_3\,.\,{}_1q_1 - {}_1q_1\,.\,{}_1q_3 \\ {}_1q_1\,.\,{}_1q_2 - {}_1q_2\,.\,{}_1q_1 \end{array} \right\rangle$$
$$=$$
$$\left| \begin{array}{c} ({}_1\mathbf{q}_2 \wedge {}_1\mathbf{q}_3)^1\,.\,i + ({}_1\mathbf{q}_2 \wedge {}_1\mathbf{q}_3)^2\,.\,j + ({}_1\mathbf{q}_2 \wedge {}_1\mathbf{q}_3)^3\,.\,k \\ ({}_1\mathbf{q}_3 \wedge {}_1\mathbf{q}_1)^1\,.\,i + ({}_1\mathbf{q}_3 \wedge {}_1\mathbf{q}_1)^2\,.\,j + ({}_1\mathbf{q}_3 \wedge {}_a\mathbf{q}_1)^3\,.\,k \\ ({}_1\mathbf{q}_1 \wedge {}_1\mathbf{q}_2)^1\,.\,i + ({}_1\mathbf{q}_1 \wedge {}_1\mathbf{q}_2)^2\,.\,j + ({}_1\mathbf{q}_1 \wedge {}_1\mathbf{q}_2)^3\,.\,k \end{array} \right\rangle$$
$$=$$
$$\begin{pmatrix} ({}_1\mathbf{q}_2 \wedge {}_1\mathbf{q}_3)^1 & ({}_1\mathbf{q}_2 \wedge {}_1\mathbf{q}_3)^2 & ({}_1\mathbf{q}_2 \wedge {}_1\mathbf{q}_3)^3 \\ ({}_1\mathbf{q}_3 \wedge {}_1\mathbf{q}_1)^1 & ({}_1\mathbf{q}_3 \wedge {}_1\mathbf{q}_1)^2 & ({}_1\mathbf{q}_3 \wedge {}_1\mathbf{q}_1)^3 \\ ({}_1\mathbf{q}_1 \wedge {}_1\mathbf{q}_2)^1 & ({}_1\mathbf{q}_1 \wedge {}_1\mathbf{q}_2)^2 & ({}_1\mathbf{q}_1 \wedge {}_1\mathbf{q}_2)^3 \end{pmatrix} . \left| \begin{array}{c} i \\ j \\ k \end{array} \right\rangle$$

Les trois vecteurs de E(3, R) implicitement présents dans un trio de quaternions ne sont pas tous nécessairement toujours parallèles les uns aux autres. De sorte que les produits vectoriels classiques de ces vecteurs pris deux à deux donnent naissance à une matrice de M(3, R) qui déforme le vecteur **h** : (i, j, k) de E(3, H).

Pour le cas très particulier où les trois vecteurs coincident avec une base canonique d'un espace tridimensionnel euclidien, Ω : $(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3)$, il est possible d'écrire :

$${}_1\mathbf{q}_1 \wedge {}_1\mathbf{q}_2 = {}_1\mathbf{q}_3 = \mathbf{e}_3;\; {}_1\mathbf{q}_2 \wedge {}_1\mathbf{q}_3 = {}_1\mathbf{q}_1 = \mathbf{e}_1;\; {}_1\mathbf{q}_3 \wedge {}_1\mathbf{q}_1 = {}_1\mathbf{q}_2 = \mathbf{e}_2$$

La matrice qui déforme le vecteur **h** : (i, j, k) est tout simplement la matrice identité Id_3 et il vient juste :

$$|\frac{1}{\sqrt{2}}\,.\,\mathbf{Q}_1 \wedge \frac{1}{\sqrt{2}}\,.\,\mathbf{Q}_1 >= \mathbf{h}$$

Lemme 1.2. ***Existence de produits vectoriels classiques sur E(3, H) dont le résultat est un vecteur ayant pour composantes les générateurs imaginaires de H.***

Soit un vecteur **Q** de E(3, H) dont le produit vectoriel classique par lui-même fait apparaitre trois produits vectoriels classiques -sur les trois vecteurs de E(3, R) implicitement contenus dans la partie imaginaire de **Q**- coincidant de façon ad hoc avec une base canonique de E(3, R). Tout produit vectoriel classique de $1/\sqrt{2}$ fois ce vecteur **Q** de E(3, H) par lui-même est égal au vecteur **h**. L'ensemble des produits vectoriels classiques sur E(3, H) dont le résultat est un vecteur dont les composantes sont les générateurs imaginaires de H n'est donc pas vide.

Remarque 1.10. ***E(3, H) et représentation duale d'un produit vectoriel déformé sur E(3, R)***

La donnée d'un élément de E(3, H) suffit à doter une discussion de quatre vecteurs de E(3, R) : **T** : $(q_1{}^0, q_2{}^0, q_3{}^0)$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$. L'argumentation que je vais utiliser maintenant est formelle et elle devra être développée rationnellement. La particularité du produit vectoriel classique, sur E(3, R) donc, est de donner naissance à des bivecteurs qui sont à leur tour des éléments de E(3, R). Il se pose alors la question légitime de savoir si tout élément de E(3, R) est aussi un élément de Λ(3, R) : l'algèbre extérieure de E(3, R)? S'il s'avère que oui, alors la donnée de trois quaternions, c'est-à-dire d'un élément de E(3, H) équivaut à celle de quatre bivecteurs. En vertu de la remarque 1.7, ces quatre bivecteurs pourraient être ceux impliqués dans la représentation duale d'un produit déformé agissant sur E(3, R).

References

2 Bibliographie

2.1 Ouvrages et cours consultés

[21] Darboux, G. : Sur le problème de Pfaff, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, **VI** (1882), numéro 1, 14-36 et 49-68.

[22] Cartan, E. : Sur certaines équations différentielles et le problème de Pfaff, Ann. Ec. Norm. **16** (1899), 239-33 ; [Oeuvres compl. II, 1, 303-396]

[23] Einstein's vierbein field theory of curved space; arXiv:1106.2037v1 [gr-qc], 10 June 2011.

[24] Encyclopédie Bordas en 23 volumes ; Caratini, R. : les nombres et l'espace, ©Bordas Editeur 1972.

2.2 Mes contributions

[a] Periat, T.: Décompositions intrinsèques des produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, 14 août 2018.