L'effet Thirring-Lense dans la théorie des produits vectoriels déformés – Introduction.

© Auteur : Thierry PERIAT

Table des matières :

Introduction d'un vecteur *qui sera dit* de Thirring-Lense.

Le contexte de la discussion.

Sur le plan mathématique.

Des explorations préalables ont permis de :

- Définir les déformations des produits : tensoriels, extérieurs et de Lie déformés ;
- Dire comment elles sont reliées les unes aux autres, [a ; §1. Outils] ;
- Montrer que, dans la réduction de la discussion théorique aux espaces vectoriels de dimension trois (D = 3), chaque décomposition non-triviale d'un produit déformé est associée avec une forme polynomiale de degré deux qui dépend des composantes du projectile [b ; théorème initial] ;
- Préciser que, pour le cas où cette polynomiale est une conique propre, alors il existe une méthode algébrique dite intrinsèque permettant de découvrir le formalisme de la partie principale d'une décomposition du produit vectoriel déformé -voir [b]- mais pas encore celui de sa partie résiduelle. Celle-ci n'est accessible que grâce à l'usage d'une méthode extrinsèque de décomposition, [b], puis à un calibrage, [b] et [c].

Sur le plan physique

Il est possible de constater que :

- Le carré de chaque solution de la théorie de la relativité générale, [01], in extenso : l'élément de longueur (le ds ; voir [02]), se laisse aisément mettre sous la forme d'une polynomiale écrite en fonction des composantes d'un vecteur d'un espace réel de dimension trois s'identifiant avec la vitesse spatiale du phénomène physique étudié ; en effet, la solution type se décompose de la manière suivante :

(01)

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta}.\ dx^{\alpha}.\ dx^{\beta} = g_{ab}.\ dx^a.\ dx^b + (g_{0a} + g_{a0}).\ dx^0.\ dx^a + g_{00}.\ (dx_0)^2$$

© Auteur : Thierry PERIAT, L'effet Thirring-Lense dans la théorie des produits vectoriels déformés,
ISBN 978-2-36923-038-0, EAN-9782369230380, version du 01 juillet 2021.

Elle peut ensuite se diviser par n'importe quel intervalle de temps, dx^0, non nul de telle sorte que :

(02)

$$\{dx^0 \neq 0\} \Rightarrow \{\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 = g_{ab}.\ v_0{}^a.\ v_0{}^b + (g_{0a} + g_{a0}).\ v_0{}^a + g_{00}\ ;\ \mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{x}}{dx^0} \in E(3, R) \equiv (v_0{}^1, v_0{}^2, v_0{}^3) \in R^3\}$$

- L'existence de cette polynomiale *signe éventuellement* celle d'un produit vectoriel déformé $[\ldots, \ldots]_{[A]}$ agissant sur l'espace E(3, R) de telle façon que la relation suivante devient plausible :

(03)

$$([A], \mathbf{w}) \in M(3, R) \times E(3, R) : \exists\ ([_0P], {}_0\mathbf{z}) \in M(3, R) \times E(3, R),\ |[\mathbf{v}_0, \mathbf{w}]_{[A]}> = [_0P].\ |\mathbf{w}> + |{}_0\mathbf{z}> \in R^3$$

Ici, [A] est un élément de M(3, R) déformant le produit vectoriel classique, $[_0P]$ est un élément de M(3, R) représentant la partie principale de la décomposition du produit vectoriel déformé et ${}_0\mathbf{z}$ est un élément de E(3, R) symbolisant le résidu de celle-ci. En effet (voir les détails techniques dans [b]) :

$$\{(03)\ \text{vraie}\}$$
$$\Downarrow$$
$$\{\exists\ \Lambda(\mathbf{v}_0) = |{}_{[A]}\Phi(\mathbf{v}_0) - [_0P]| = {}_0d_{ab}.\ v_0{}^a.\ v_0{}^b + {}_0d_a.\ v_0{}^a + {}_0d\ \text{avec}\ {}_0d_{ab} = \ldots,\ {}_0d_a = \ldots\ \text{et}\ {}_0d = -|{}_0P|\}$$

- Le critère transformant cette éventualité en réalité effective s'écrit donc tout simplement :

(04)

$$\Lambda(\mathbf{v}_0) = \left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2$$

Par la suite, je suppose que cette égalité est *a priori* vraie.

- Cette théorie définit implicitement et de façon générique une sorte de foncteur lié à la vitesse vectorielle du phénomène étudié qui transcrit *les circonstances d'une interaction* -la paire ([A], **w**)- en *une manifestation tangible* -la paire ([P], **z**) :

(05)

$$\mathfrak{I} : \mathbf{v}_0 \in E(3, R) \xrightarrow{\mathfrak{I}} \mathfrak{I}_{\mathbf{v}0} : ([A], \mathbf{w}) \in M(3, R) \times E(3, R) \xrightarrow{\mathfrak{I}_v} \mathfrak{I}_{\mathbf{v}}([A], \mathbf{w}) = ([_0P], {}_0\mathbf{z}) \in M(3, R) \times E(3, R)$$

- Les cônes de lumière correspondent aux valeurs (vectorielles) $\mathbf{v}_0$ de la vitesse spatiale du phénomène étudié annulant la polynomiale Λ lors d'une interaction de celui-ci dans des circonstances définies par la paire ([A], **w**) ; la quantité mathématique **w** *n'a pas encore d'interprétation physique*.

(06)

$$\{ds = 0\} \Rightarrow \{\Lambda(\mathbf{v}_0) = 0\}$$

Dans ces cas :

(07)

$$|{}_{[A]}\Phi(\mathbf{v}_0) - [_0P]| = 0$$

Les manifestations tangibles triviales, synonyme : les paires $({}_{[A]}\Phi(\mathbf{v}), \mathbf{0})$, peuvent correspondre à l'existence d'un cône de lumière :

(08)

$$\{[_0P] = {}_{[A]}\Phi(\mathbf{v}_0)\} \Rightarrow \{(07)\ \text{vraie}\}$$

… mais elles ne sont pas les seules à avoir cette propriété.

- L'ensemble des métriques se répartit naturellement en deux sous-ensembles disjoints. Le premier génère des coniques Λ propres (type 1) ; il fait l'objet de ce document. Le second génère toutes les autres coniques Λ (impropres ou de type 2). Le critère d'appartenance à un sous-ensemble ou à un autre est donné par l'équation caractéristique de la conique Λ ; pour les métriques symétriques, il s'écrit simplement :

(09)

$$\text{Type 1: } 8.\, g_{11}.\, g_{22}.\, g_{33} + 2.\, g_{12}.\, g_{23}.\, g_{13} - 2.\, g_{11}.\, (g_{23})^2 - 2.\, g_{22}.\, (g_{13})^2 - 2.\, g_{33}.\, (g_{12})^2 \neq 0$$
$$\text{Type 2: } 8.\, g_{11}.\, g_{22}.\, g_{33} + 2.\, g_{12}.\, g_{23}.\, g_{13} - 2.\, g_{11}.\, (g_{23})^2 - 2.\, g_{22}.\, (g_{13})^2 - 2.\, g_{33}.\, (g_{12})^2 = 0$$

- Pour les coniques propres, la partie principale de la décomposition obtenue grâce à la méthode intrinsèque s'écrit [b] :

(10)

$$[{}_0P]_{|A|} = |A|.\, \{[A]^t.\, [J]\}.\, \{½.\, \mathrm{Hess}_{v0}\, \Lambda(\mathbf{v}_0) + \frac{1}{|A|}.\, {}_{[J]}\Phi(\mathrm{Hess}^{-1}{}_{v0}\, \Lambda(\mathbf{v}_0)).\, |{}_0\mathbf{d}>);\ |A| = \pm 1$$

Cette formule générale prend ici un formalisme spécifique dû au fait que la métrique a été supposée symétrique au sein de la théorie de la relativité générale [01] :

(11)

$$½.\, \mathrm{Hess}_{\mathbf{v}}\, \Lambda(\mathbf{v}_0) = {}^{(3)}[G]$$
$$½.\, {}_0\mathbf{d} \equiv (g_{01}, g_{02}, g_{03})$$

Commentaires :

a) La partie spatiale de la métrique, ${}^{(3)}[G]$, coïncide avec la moitié de la Hessienne classique de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{v}_0)$ associée avec la décomposition du produit vectoriel déformé ;

b) La moitié des composantes du vecteur ${}_0\mathbf{d}$ bâti à partir des coefficients de degré un de cette même polynomiale coïncide avec les composantes des ailes de la métrique spatio-temporelle :

(12)

$$\{{}^{(4)}[G] = {}^{(4)}[G]^t\} \Rightarrow {}^{(4)}[G] = \begin{bmatrix} g_{00} & <\mathbf{g}| \\ |\mathbf{g}> & {}^{(3)}[G] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -|\,{}_0P| & \frac{1}{2}.<\ {}_0\mathbf{d}\,| \\ \frac{1}{2}.|\ {}_0\mathbf{d}> & \frac{1}{2}.\,{}^{(3)}[\mathrm{Hess}_{\mathbf{v}_0}\Lambda(\mathbf{v}_0)] \end{bmatrix}$$

c) Le vecteur **g** joue un rôle important dans le cadre de l'effet Thirring-Lense, [03] et [04] ; je le nommerai par conséquent : *le vecteur de Thirring-Lense*.

(13)

$$\mathbf{g} = ½.\, {}_0\mathbf{d} \equiv (g_{01}, g_{02}, g_{03})$$

In fine, il ressort donc de cette analyse particulière de l'élément de longueur que la partie principale d'une décomposition associée avec une polynomiale de type 1 s'écrit :

(14)

$$[{}_0P]_{|A|} = |A|.\, \{[A]^t.\, [J]\}.\, \{{}^{(3)}[G] + \frac{1}{|A|}.\, {}_{[J]}\Phi([G]^{-1}.\, |\mathbf{g}>)\ ;\ |A| = \pm 1$$

Ainsi, l'existence de la forme quadratique décrivant le carré de l'élément de longueur spatio-temporel autorise parfois à envisager celle de la relation non-triviale :

(15)

$$|[\mathbf{v}_0, \mathbf{w}]_{[A]}> = |A|.\, \{[A]^t.\, [J]\}.\, \{{}^{(3)}[G] + \frac{1}{|A|}.\, {}_{[J]}\Phi([G]^{-1}.\, |\mathbf{g}>).\, |\mathbf{w}> + |\mathbf{z}>\ ;\ |A| = \pm 1$$

Elle diffère drastiquement de la relation triviale attendue :

(16)

$$|[\mathbf{v}_0, \mathbf{w}]_{[A]}> = {}_{[A]}\Phi(\mathbf{v}_0).\, |\mathbf{w}>$$

ISBN 978-2-36923-038-0, EAN-9782369230380, version du 01 juillet 2021.

Avec laquelle elle ne s'identifie algébriquement que lorsque :
(17)

$$_{[A]}\Phi(\mathbf{v}_0).\ |\mathbf{w}> = |A|.\ \{[A]^t.\ [J]\}.\ \{^{(3)}[G] + \frac{1}{|A|}.\ _{[J]}\Phi([G]^{-1}.\ |\mathbf{g}>).\ |\mathbf{w}> + |\mathbf{z}>\ ;\ |A| = \pm 1$$

La multiplicité incontournable des décompositions de l'espace-temps.

Remarque de principe.

Le concept de découpe (synonyme : décomposition) de l'espace-temps a ceci d'embêtant que sa réalisation pratique n'a aucune raison d'être unique.
Le paragraphe précédent a choisi d'examiner d'abord la décomposition intuitive dite 3 + 1 parce qu'elle parle aux sens humains et parce qu'elle est aussi celle que le trio de physicien A.D.M. a rendu célèbre [03].
Pour autant, un mathématicien considérant la relation (01) aurait pu isoler l'abscisse, l'ordonnée ou la hauteur et obtenir pour chacun de ces trois autres choix une polynomiale de degré trois écrites en fonction d'un vecteur $^{(3)}d\mathbf{x}_\alpha$ obtenu à partir du vecteur $^{(4)}d\mathbf{x}$ privé de sa $\alpha^{\text{-ème}}$ composante :

$$^{(3)}d\mathbf{x}_0 : (dx^1, dx^2, dx^3)$$
$$^{(3)}d\mathbf{x}_1 : (dx^0, dx^2, dx^3)$$
$$^{(3)}d\mathbf{x}_2 : (dx^0, dx^1, dx^3)$$
$$^{(3)}d\mathbf{x}_3 : (dx^0, dx^1, dx^2)$$

Concrètement, la forme quadratique fondamentale admet quatre décompositions :
(18-α)

$$(ds)^2 = \Sigma_{a\neq\alpha}\,\Sigma_{b\neq\alpha}\, g_{ab}.\ dx^a.\ dx^b + \Sigma_{a\neq\alpha}\,(g_{\alpha a} + g_{a\alpha}).\ dx^\alpha.\ dx^a + g_{\alpha\alpha}.\ (dx_\alpha)^2$$

Réitération du raisonnement dit « inverse ».

Partant de là, pourquoi ne pas alors tenter d'associer un produit vectoriel déformé à chacune de ces quatre polynomiales ? Le raisonnement dit *inverse* qui a été réalisé précédemment peut être répété en commençant par écrire :
(19-α)

$$\forall\ \alpha = 0, 1, 2, 3 : dx^\alpha \neq 0$$
$$\Downarrow$$
$$\left(\frac{ds}{dx^\alpha}\right)^2 = \Sigma_{a\neq\alpha}\,\Sigma_{b\neq\alpha}\, g_{ab}.\ v_\alpha{}^a.\ v_\alpha{}^b + \Sigma_{a\neq\alpha}\,(g_{\alpha a} + g_{a\alpha}).\ v_\alpha{}^a + g_{\alpha\alpha}\ ;\ \mathbf{v}_\alpha \equiv (\dots, \frac{dx^a}{dx^\alpha}, \dots) \in R^3,\ a, b \neq \alpha$$

La question consiste ensuite à se demander si et quand chacune de ces polynomiales révèle l'existence des relations du type générique suivant dans lesquelles il est supposé arbitrairement que la déformation du produit vectoriel classique dépend de la dimension isolée ; ce qui se traduit par l'apparition des quatre matrices déformantes $[_\alpha A]$ dans la discussion théorique :
(20-α)

$$\forall\ \alpha = 0, 1, 2, 3,\ ([_\alpha A], \mathbf{w}) \in M(3, R) \times E(3, R) :$$
$$\exists\ ([_\alpha P], {_\alpha}\mathbf{z}) \in M(3, R) \times E(3, R),\ |[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{w}]_{[A(\alpha)]}> = [_\alpha P].\ |\mathbf{w}> + |_\alpha\mathbf{z}> \in R^3$$

Dans les circonstances physiques simples pour lesquelles cette dépendance directionnelle disparaît, il est possible de poser :
(21)

$$\forall\ \alpha = 0, 1, 2, 3 : [_\alpha A] = [A] \in M(3, R)$$

Et il faut s'interroger sur la plausibilité des propositions :
(21-α)

$$\exists\ ([{}_\alpha P],\ {}_\alpha\mathbf{z}) \in M(3, R) \times E(3, R) : |[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{w}]_{[A]} > = [{}_\alpha P].\ |\mathbf{w} > +\ |{}_\alpha\mathbf{z} > \in R^3$$

Le critère de plausibilité s'écrit là encore :
(22-α)

$$\forall\ \alpha = 0, 1, 2, 3 : \Lambda(\mathbf{v}_\alpha) = \left(\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dx}^\alpha}\right)^2$$

Dans les cas encore plus favorables où les quatre polynomiales sont propres (de type 1), alors :
(23-α)

$$\forall\ \alpha = 0, 1, 2, 3 : \exists\ [{}_\alpha P]_{|A|} = |A|.\ \{[A]^t.\ [J]\}.\ \{½.\ \mathrm{Hess}_{\mathbf{v}\alpha}\ \Lambda(\mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{|A|}.\ {}_{[J]}\Phi(\mathrm{Hess}^{-1}{}_{\mathbf{v}\alpha}\ \Lambda(\mathbf{v}_\alpha).\ |{}_\alpha\mathbf{d} >)$$
$$|A| = \pm 1$$

Et la discussion dispose des quatre relations :

$$\forall\ \alpha = 0, 1, 2, 3 : |[\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{w}]_{[A]} > = [{}_\alpha P].\ |\mathbf{w} > +\ |{}_\alpha\mathbf{z} >$$

Il reste ensuite à rechercher la présence de redondances, c'est-à-dire l'existence de relations de dépendances entre les diverses décompositions de l'espace-temps.

Remarque : une première relation de dépendance.

A remarquer, les quatre vecteurs ${}^{(3)}\mathrm{d}\mathbf{x}_\alpha$ peuvent être prolongés dans l'espace de dimension quatre en posant :

$$\begin{aligned}
{}^{(4)}\mathrm{d}\mathbf{x}_0 &: (0, \mathrm{dx}^1, \mathrm{dx}^2, \mathrm{dx}^3) \\
{}^{(4)}\mathrm{d}\mathbf{x}_1 &: (\mathrm{dx}^0, 0, \mathrm{dx}^2, \mathrm{dx}^3) \\
{}^{(4)}\mathrm{d}\mathbf{x}_2 &: (\mathrm{dx}^0, \mathrm{dx}^1, 0, \mathrm{dx}^3) \\
{}^{(4)}\mathrm{d}\mathbf{x}_3 &: (\mathrm{dx}^0, \mathrm{dx}^1, \mathrm{dx}^2, 0)
\end{aligned}$$

Ce qui génère une relation de dépendance :

$${}^{(4)}\mathrm{d}\mathbf{x} = \frac{1}{3}.\ \Sigma_\alpha\ {}^{(4)}\mathrm{d}\mathbf{x}_\alpha$$

Il n'est pas possible d'en faire quelque chose pour le moment. En revanche, en manipulant de manière subtile les ${}^{(3)}\mathrm{d}\mathbf{x}_\alpha$, il est peut-être possible de trouver d'autres relations de dépendance plus manipulables dans un espace de dimension trois.

Conclusion

Ce document analyse d'abord les conséquences d'une décomposition de type 3 + 1 de la forme quadratique fondamentale de l'espace-temps dans le cadre d'une théorie des produits vectoriels déformés.
Il établit la possibilité d'associer un sous-ensemble de ces produits aux formes quadratiques dont la décomposition de type 3 + 1 livre une polynomiale propre.
Les décompositions non-triviales des produits de ce sous-ensemble font apparaitre le vecteur dit de Thirring-Lense.
L'exploration note ensuite la multiplicité incontournable des découpes de l'espace-temps. Celle-ci invite à incorporer les résultats de la première partie dans une étude plus générale intégrant la problématique compliquée de l'immersion des espaces de dimension trois dans un espace de dimension quatre. Ce qui sera l'objet d'autres documents.

ISBN 978-2-36923-038-0, EAN-9782369230380, version du 01 juillet 2021.

Travaux personnels préalables :

[a] PERIAT, T. : Aspects mathématiques de la théorie des produits tensoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-028-1, version 2, écrite du 2 au 6 juin 2021.
[b] PERIAT, T. : Décompositions intrinsèques des produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-036-6, version du 14 août 2018.
[c] PERIAT, T. : Variations des fonctions vectorielles et décompositions de Helmholtz ; ISBN 978-2-36923-098-4, version 1 du 25 octobre 2020.

Bibliographie :

[01] Einstein, A.: Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7, pp. 769-822.
[02] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme ; collection d'ouvrage à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. Darmois et A. Lichnerowicz, © 1955 chez Masson and Cie. éditeurs.
[03] C.W. Misner, K. S. Thorne and J.A. Wheeler: Gravitation; © W. H. Freeman and Company, New-York, 1973, 1279 pages.
[04] Fliessbach, T.: Allgemeine Relativitätstheorie, 4. Auflage, Spektrum Lehrbuch, ISBN 3-8274-1356-7, © 2003, 1998, 1995, Springer Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg, Berlin, 2003; 343 S.