Mots clés : Problème de Cauchy ; déformations ; dérivations.

Table des matières

french

1 Champs électromagnétiques et géométrie

1.1 Le problème de Cauchy

La théorie de la relativité développée par A. Einstein [[01]] s'accompagne irrémédiablement d'un problème de Cauchy. Les amoureux de l'histoire des mathématiques retrouveront les traces du traitement de celui-ci dans [[B1] ; chapitre II, pp. 27-58].

De quoi s'agit-il ? Au niveau du principe : soit un système d'équations, S, valide sur un domaine d'un type donné (*par exemple : celui du champ de gravitation sur une hypersurface*), quelles sont les conditions assurant la validité de ce système après qu'une déformation du domaine l'ait transformé en un domaine du même type ? Ce problème s'intéresse en quelque sorte à ce qui pourrait s'appeler *le déterminisme* du système des équations initiales. Il se décompose naturellement en deux parties d'égale importance : (i) celui des conditions initiales et (ii) celui de l'évolution du systéme [B1 ; chapitre II, p. 32].

Dans le cadre de la théorie de la gravitation, le traitement usuel consiste souvent à faire subir un changement de référentiel (ex : [B1 ; chapitre II, p. 30]) au système initial d'équations, (S1), et à vérifier les contraintes devant être injectées dans la discussion pour que le système transformé, (S2), ait bien le même formalisme que celui dont il est issu.

Cette méthode pose immanquablement la question de la légitimité des changements de référentiels utilisés. De fait, il existe forcément un lien logique entre un type de changements de référentiels et la famille de contraintes qui l'accompagne. Les *meilleurs changements* étant de facto ceux qui nécessitent le moindre nombre, voire l'absence, de contraintes surajoutées.

Dans le cadre de la théorie de la relativité, la question de la légitimité des changements de référentiels se pose avec d'autant plus d'acuité que les prémisses de cette approche exigent a priori la validité universelle du formalisme type du systéme d'équations S ; autrement dit, qu'il soit exprimé dans (S1) ou dans (S2) ne devrait avoir aucune influence sur ses apparences formelles.

Cette exigence représente un défi redoutable parce que, du point de vue des mathématiques pures, personne ne connait le type exact de géométrie de notre univers même s'il peut toujours être rapporté à une géométrie de Minkowski dans n'importe quelle région terrestre dimensionnée de telle sorte que sa courbure devienne négligeable.

Le constat tiré des mesures cosmologiques plaide pour un univers globalement sans courbure [[02]] mais chacun sait que cette vérité moyenne n'est pas crédible dans la proximité de fortes concentrations d'énergies (étoiles, trous noirs, etc.).

Par ailleurs, l'absence de courbure (tenseur de Ricci nul ; $\mathrm{R}_{\alpha\beta} = 0$) ne met pas à l'abri d'une diversité topographique sous-jacente (classification de A. S. Petrov) : [[B2] ; §92, pp. 315-319, en allemand] tandis que l'homogénéité apparente d'une région n'implique pas non plus que cette région soit forcément d'un type unique donné (classification de Bianchi) : voir par exemple le cas des espaces de dimension trois dans [[B2] ; §116, pp. 454-461, en allemand]. Tout ceci justifie d'ailleurs et par exemple que des recherches récentes s'intéressent à l'existence de géométries inhomogènes ne laissant aucune trace détectable [[03] ; en anglais].

Pour conclure ce rapide survol des thématiques entourant le problème de Cauchy et son traitement pratique, l'approche adoptée dans la thèse [[04] ; chapitre 3, pp. 63-103, en anglais] et son résultat préliminaire stratégique (le théorème 3.1) ont particulièrement retenu mon attention. J'en donne ici la traduction française en rétablissant la notation symbolique [A] pour désigner une matrice générique.

Théorème 1.1. *Soit un sous-ensemble Ω d'ouverts connectés et simplement connectés de R^d, x^0 un point de ce domaine et une matrice $[Y^0]$ de $M^{q,l}$* [1]*. Soit $[_\alpha A]$ un champ de matrices dans ${L^\infty}_{Loc}(\Omega\,;\,M^l)$ et un autre, $[_\alpha B]$ dans ${L^\infty}_{Loc}(\Omega\,;\,M^{q,l})$ qui satisfont les relations :*

$$\partial_\alpha[_\beta A] + [_\alpha A]\,.\,[_\beta A] = \partial_\beta[_\alpha A] + [_\beta A]\,.\,[_\alpha A] \in D(\Omega; M^l) \tag{1}$$

$$\partial_\alpha[_\beta B] + [_\alpha B]\,.\,[_\beta A] = \partial_\beta[_\alpha B] + [_\beta B]\,.\,[_\alpha A] \in D(\Omega; M^{q,l}) \tag{2}$$

Alors le problème de Cauchy suivant :

$$\partial_\alpha[Y] = [Y]\,.\,[_\alpha A] + [_\alpha B] \tag{3}$$

$$[Y(x^0)] = [Y^0]$$

a toujours une solution unique dans l'espace de Sobolev ${W^{1,\infty}}_{Loc}(\Omega\,;\,M^{q,l})$.

Remarque 1.1. *Commentaires spontanés.*

Le formalisme des conditions devant être préalablement satisfaites par les champs de matrices invite à en trouver une application dans le cadre de l'électromagnétisme.

Proposition 1.1. *Ce théorème est applicable aux représentations matricielles du tenseur champ électromagnétique sous sa forme (2, 0)* [2] *.*

Preuve : **Etape 1** - La théorie dite de la question (E) démarre son analyse du monde physique avec un point de vue se distinguant légèrement de celui de la théorie de la relativité générale par rapport à ce qui devrait être préservé au cours des changements de référentiels. A l'exigence bien connue de la préservation de l'élément de longueur, elle ajoute celui de ce que j'ai nommé la *limite quantique* ; autrement

1. Convention lignes-colonnes
2. (deux fois covariante, ...)

dit : l'invariance de la constante de Plamck.

Elle y parvient par l'usage d'une procédure clairement expliquèe dans [[a]] (i) en impliquant une méthode mathématique expliquée dans [[b] ; en anglais] ou dans [[c]] et en partant de l'hypothèse que la version covariante de la loi de Lorentz est au moins approximativement vraie. Ceci permet d'introduire le concept nouveau de *métrique quantique* représentée par l'élément $[\omega]$ de $M^4 = M(4, R)$ et de poser :

$$< d^{(4)}\mathbf{R},\, d^{(4)}\mathbf{R} >_{[\omega]} = \frac{h}{4\pi} \;;\; [\omega] \,=\, [\omega_{\alpha\beta}] \tag{4}$$

Une équation dans laquelle $\mathbf{R}$ désigne n'importe quel évènement ($x^0 = c.t$, $\mathbf{r} : x^1, x^2, x^3$) et que je m'évertue à interpréter ensuite avec le regard d'E. B. Christoffel exposé dans [[05]]. J'y parviens en introduisant une condition qui permet de retrouver la contrainte relativiste (i. e. : la préservation de l'élément de longueur) :

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\chi}} \,.\, u^{\chi} \,.\, u^{\alpha} \,.\, u^{\beta} \,=\, 0 \tag{5}$$

Une équation dans laquelle $\mathbf{u}$ représente la quadri-vitesse de d'un événement et dans laquelle apparaissent les dérivées partielles premières (d'ordre un) des composantes de la métrique ; elle-même représentée par l'élément $[G]$ de $M(4, R)$. Il en résulte la relation :

$$[\omega_{\alpha\beta}] \,=\, [\Phi_{\Gamma(1)}({}^{(4)}\mathbf{p})] \,-\, \frac{m}{2} \,.\, Hess_{(\delta\mathbf{l},\,0)}\, s(\delta\mathbf{l}) \,-\, [F_{\alpha\beta}] \tag{6}$$

Une équation telle que, par convention :

$${}^{(4)}\mathbf{p} \,=\, m \,.\, {}^{(4)}\mathbf{u} \,;\; [G] \,.\, [F] \,=\, [F_{\alpha\beta}] \,;\; [F] \,=\, [F^{\alpha}{}_{\beta}]$$

$$[\Phi_{\Gamma(1)}({}^{(4)}\mathbf{u})] \,=\, [G] \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi \,;\; {}_{\Gamma(2)}\Phi \,=\, [\Phi_{\Gamma(2)}({}^{(4)}\mathbf{u})]$$

$$s(\delta\mathbf{l}) \,=\, \frac{\delta t \,.\, \delta W}{m} \,\sim\, \frac{h}{4\pi \,.\, m}$$

et dans laquelle $\Gamma(i)$, $i = 1$ ou 2 représente respectivement le cube symétrique des symboles de Christoffel de la première ou de la seconde espèce.

Lorsque la fonction vectorielle $s(\delta\mathbf{l})$ est continue, l'Equ.(6) permet facilement de parvenir à :

$$[F_{\alpha\beta}] \,=\, \frac{1}{2} \,.\, \{[G] \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi \,-\, {}_{\Gamma(2)}\Phi^{t} \,.\, [G]^{t} \,+\, [\omega] \,-\, [\omega]^{t}\} \tag{7}$$

L'anti-symétrie naturelle des représentations matricielles du tenseur champ électromagnétique sous sa forme (2, 0) induit l'existence de champs génériques :

$$[F_{\alpha\beta}] \,=\, [G] \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi \,+\, [\omega] \tag{8}$$

dont le formalisme rappelle celui de l'Equ.(3) décrivant un problème de Cauchy. La comparaison visuelle permet d'identifier les deux équations chaque fois que les circonstances physiques et mathématiques autorisent à écrire simultanément :

$$[Y] \,=\, [G] \tag{9}$$

$${}_{\Gamma(2)}\Phi \,=\, [A] \;;\; [\omega] \,=\, [B] \tag{10}$$

$$[F_{\alpha\beta}] \,\equiv\, \delta[G] \tag{11}$$

Etape 2 - J'ai déjà montré depuis plusieurs années dans [[d] ; en anglais] que les travaux d'E. Cartan sur les spineurs [[B3] ; en anglais] permettaient de valider les identifications précédentes dans certaines conditions physiques très précises.

$$[G] = [G]^t \tag{12}$$

$$\Gamma(2)\Phi = -(\Gamma^0_{\mu 3} . u^\mu) . \gamma_2 \; ; \; \Gamma(2)\Phi = -(\Gamma^0_{\mu 3} . u^\mu) . \gamma_5 \tag{13}$$

La métrique doit être symétrique. La dilatation triviale de la vitesse est proportionnelle à l'une des deux matrices de Dirac : γ_2 ou γ_5 ; voir les conventions d'écriture dans [[B4] ; §2.13, pp. 29-31]. □

1.2 Les potentiels de Liénard-Wiechert

Dans une approche classique, les champs électromagnétiques dérivent d'un potentiel vecteur **A** :

$$[F_{\alpha\beta}] = [\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}] = [\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha] \; ; \; \alpha, \, \beta = 0, \, 1, \, 2, \, 3. \tag{14}$$

Les particules électriquement chargées *ressentent* ce potentiel et ce dernier détermine, au moins en partie, le mouvement de ces particules. Une manière simple d'en rendre compte est donnée par :

$$\mathbf{A} = \mu . \mathbf{u} \tag{15}$$

Cette dépendance n'interdit pas d'imaginer que le mouvement en résultant s'effectue en respectant le principe de Fermat, c'est-à-dire le long de géodésiques :

$$\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x^\beta} + \Gamma^\epsilon_{\lambda\beta} . u^\lambda = 0 \tag{16}$$

En injectant l'Equ.(15) dans l'Equ.(14) :

$$F_{\alpha\beta} = \mu . (\frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta}) + \mu . (\frac{\partial \mu}{\partial x^\alpha} . g_{\beta\lambda} - \frac{\partial \mu}{\partial x^\beta} . g_{\alpha\lambda}) . u^\lambda \tag{17}$$

Puisque :

$$u_\beta = g_{\beta\epsilon} . u^\epsilon \Rightarrow \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial (g_{\beta\epsilon} . u^\epsilon)}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g_{\beta\epsilon}}{\partial x^\alpha} . u^\epsilon + g_{\beta\epsilon} . \frac{\partial u^\epsilon}{\partial x^\alpha}$$

A cause de l'Equ.(16) :

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial g_{\beta\epsilon}}{\partial x^\alpha} . u^\epsilon - g_{\beta\epsilon} . \Gamma^\epsilon_{\lambda\alpha} . u^\lambda$$

En inversant α et β :

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\epsilon}}{\partial x^\beta} . u^\epsilon - g_{\alpha\epsilon} . \Gamma^\epsilon_{\lambda\beta} . u^\lambda$$

En soustrayant :

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} = (\frac{\partial g_{\beta\epsilon}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\epsilon}}{\partial x^\beta}) . u^\epsilon + (g_{\alpha\epsilon} . \Gamma^\epsilon_{\lambda\beta} - g_{\beta\epsilon} . \Gamma^\epsilon_{\lambda\alpha}) . u^\lambda$$

Puisque ϵ est un indice muet, cette relation peut aussi se réécrire :

$$\frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} = \{(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial u^\beta}) + (g_{\alpha\epsilon} . \Gamma^\epsilon_{\lambda\beta} - g_{\beta\epsilon} . \Gamma^\epsilon_{\lambda\alpha})\} . u^\lambda$$

Un retour sur l'Equ.(17) fournit :

$$F_{\alpha\beta} \,=\, \mu\,.\,\{(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}}) + (\frac{\partial \mu}{\partial x^{\alpha}}\,.\,g_{\beta\lambda} - \frac{\partial \mu}{\partial x^{\beta}}\,.\,g_{\alpha\lambda}) + (g_{\alpha\epsilon}\,.\,\Gamma^{\epsilon}_{\lambda\beta} - g_{\beta\epsilon}\,.\,\Gamma^{\epsilon}_{\lambda\alpha})\}\,.\,u^{\lambda}$$

Ainsi, même avec le scénario simplifié contenu implicitement dans l'Equ.(15) décrivant l'interaction d'une particule avec le champ potentiel sous-jacent, j'obtiens le formalisme suivant pour le champ électromagnétique :

$$[F_{\alpha\beta}] \tag{18}$$

$$=$$

$$\mu\,.\,\{G\,.\,{}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \,-\, {}_{\Gamma(2)}\Phi^{t}(\mathbf{u})\,.\,G^{t} \,+\, [(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \,-\, \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} \,+\, \frac{\partial \mu}{\partial x^{\alpha}}\,.\,g_{\beta\lambda} \,-\, \frac{\partial \mu}{\partial x^{\beta}}\,.\,g_{\alpha\lambda})\,.\,u^{\lambda}]\}$$

Ce formalisme (i) est très voisin de celui de l'Equ.(7) et (ii) il suggère un visage concret pour la métrique quantique ; précisément puisque :

$$[\omega] \,-\, [\omega]^{t} \,=\, \mu\,.\,[(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \,-\, \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\beta}} \,+\, \frac{\partial \mu}{\partial x^{\alpha}}\,.\,g_{\beta\lambda} \,-\, \frac{\partial \mu}{\partial x^{\beta}}\,.\,g_{\alpha\lambda})\,.\,u^{\lambda}]$$

Pourquoi ne pas proposer :

$$[\omega] \,=\, \mu\,.\,[(\frac{\partial g_{\beta\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \,+\, \frac{\partial \mu}{\partial x^{\alpha}}\,.\,g_{\beta\lambda})\,.\,u^{\lambda}] \tag{19}$$

La cohésion avec l'Equ.(5) mène alors à :

$$<\mathbf{u}<\,.\,\{[\omega]\,.\,|\mathbf{u}>\} \,=\, \mu\,.\,(\frac{\partial \mu}{\partial x^{\alpha}}\,.\,u^{\alpha})\,.\,(g_{\beta\lambda}\,.\,u^{\lambda}\,.\,u^{\beta}) \,=\, \frac{1}{2}\,.\,\frac{d(\mu^{2})}{ds}\,.\,(ds)^{2} \tag{20}$$

Et l'adéquation avec l'Equ.(4) aboutit à :

$$<d\mathbf{R}<\,.\,\{[\omega]\,.\,|d\mathbf{R}>\} \,=\, \frac{1}{2}\,.\,\frac{d(\mu^{2})}{ds}\,.\,(ds)^{4} \,=\, \frac{h}{4\pi}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}\,.\,d(\mu^{2})\,.\,(ds)^{3} \,=\, \frac{h}{4\pi} \tag{21}$$

Les lecteurs peuvent interroger la légitimité de l'Equ.(15). Les doutes doivent cependant être écartés puisqu'elle ne fait que décrire des potentiels de Liénard-Wiechert associés à des électrons [[B2] ; §63, p. 192-195, (63,3)] :

$$\mathbf{A} \,=\, \frac{e}{<^{(4)}\,\delta\mathbf{R}\,.\,^{(4)}\mathbf{u}>_{G}}\,.\,^{(4)}\mathbf{u}\;;\;^{(4)}\delta\mathbf{R} : \,(c\,.\,(t\,-\,t'),\,^{(3)}\mathbf{r}\,-\,^{(3)}\mathbf{r}') \tag{22}$$

De fait l'Equ.(15) est retrouvée en posant :

$$\mu \,=\, \frac{e}{<^{(4)}\,\delta\mathbf{R}\,.\,^{(4)}\mathbf{u}>_{G}} \tag{23}$$

La contrainte de cohérence contenue dans l'Equ.(21) prend ici le visage particulier :

$$d(\frac{1}{\{<^{(4)}\,\delta\mathbf{R}\,.\,^{(4)}\mathbf{u}>_{G}\}^{2}})\,.\,(ds)^{3} \,=\, \frac{1}{2\pi}\,.\,\frac{h}{e^{2}} \tag{24}$$

Il apparait à droite de l'égalité un ratio évocateur de l'effet Hall quantique. Ce fait n'est pas totalement surprenant dans un contexte s'appuyant délibérément sur la validité de la version covariante de la loi de Lorentz ; voir les explications données au début de l'étape 1 démontrant la Prop.1.1.

Remarque 1.2. *L'effet Hall quantique*

L'effet Hall classique a été découvert en 1879 [[06]] ; l'effet Hall quantique a été découvert il y a quarante ans, c'est-à-dire un siècle plus tard. Cette aventure moderne a commencé en mesurant, à basse température et en présence d'intenses champs magnétiques, la résistance électrique de fins échantillons cristallins semi-conducteurs divers, contenant des impuretés distribuées au hasard, ayant des formes géométriques quelconques et présentant même parfois des contacts avec des alliages métalliques. Les résultats, tout à fait inattendus à l'époque, montrent que cette résistance est forcément un multiple du rapport h/e^2 [[07]] et valent le prix Nobel à von Klitzing en1985.

La découverte expérimentale donne naissance à de nouvelles théories dont les conséquences pavent encore le cheminement actuel des équipes de recherche. Elle justifie par exemple une modification du système international des mesures entrée en vigueur en 2019 dans le monde entier. Parmi les théories nées à la suite de cette révélation expérimentale : les travaux de Thouless [[08]], prix Nobel 2016, introduisant la topologie en physique fondamentale et concrétisant ainsi un peu plus la prédiction (spéculative) faite en 1939 par Dirac sur la convergence entre les mathématiques pures et la physique en général.

Ces travaux, poursuivis et améliorés en 2015 par Michalakis et Hastings, démontrent désormais de façon limpide les liens entre l'effet Hall quantique et la topologie [[09]]. D'autres équipes [[10]], [11], estiment que la découverte de cet effet a eu de profonds retentissements sur notre façon de comprendre l'organisation de la matière, notamment celle des niveaux électroniques et de leurs interactions.

1.3 Discussion

Ce document rappelle le point de vue adopté dans [[a]] et poursuit l'étude de ses conséquences. Cette vision avait dans un premier temps mené à la prédiction d'un formalisme original pour les représentations matricielles du tenseur champ électromagnétique sous sa forme (2, 0) ; voir [[e]]. L'exploration exposée ici précise le formalisme générique de ces champs exotiques ; voir l'Equ.(7).

Celui-ci permet cette fois-ci d'envisager des fonctions $s(\delta\mathbf{l})$ continues, de se passer des Hessiennes et d'aboutir à l'Equ.(8) que je suis en mesure de repositionner au sein d'un problème de Cauchy exposé en détail dans [[04]]. Un travail effectué dès 2016, [[d]], me permet aujourd'hui de préciser le domaine de définition de ce repositionnement. La démarche fait appel à une interprétation spécifique des travaux d'E. Cartan sur les spineurs [[B3]]. Plus précisément, ces champs exotiques sont des variations asymétriques d'une géométrie symétrique ; Equ.(11).

Je montre enfin que les potentiels de Liénard-Wiechert, Equ.(22), permettent de faire apparaitre de tels champs, Equ.(18), et de donner un visage concret à la métrique quantique dont l'existence accompagne le point de vue adopté dans le document [a] ; voir l'Equ.(19). La cohérence avec les prémisses du point de vue promu dans [a] mène alors à une contrainte, l'Equ.(24), que je ne suis pas encore en mesure d'interpréter complètement mais qui évoque un lien possible avec l'effet Hall quantique.

Références

2 Bibliographie

2.1 Articles

[01] Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie ; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7, pp. 769-822.

[02] 7-year WMAP data.

[03] Toward physical cosmology : focus on inhomogeneous geometry and its non-perturbative effects ; arXiv :1103.2016v2 [gr-qc] 28 June 2011.

[04] Sur quelques problèmes de géométrie différentielle liés à la théorie de l'élasticité ; thèse de doctorat en mathématiques, Université Paris VI, tel-00270549, v1, 5 avril 2008. Son troisième chapitre est paru sous le titre : On isometric immersions of a Riemannian space under weak regularity assumptions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 337, 2003, 785-790.

[05] Christoffel, E. B. : Über die Transformation der homogenen Differentiale Ausdrücke zweiten Graden ; Journal für die reine und angewandte Mathematik, pp. 46-70, 3 Januar 1869. Ce document peut être consulté librement à l'Université de Göttingen (Allemagne) à condition de ne pas en faire un usage commercial.

[06] Hall, E. H. Am. J. Mathematics 2, 287-292 (1879).

[07] Klitzing, K. v., Dorda, G. and Pepper, M. Phys. Lett. 45, 494-497 (1980).

[08] Thouless, D.J., Kohmoto, M., Nightingale, M.P. and den Nijs, M. Phys. Rev. Lett. 49, 405-408 (1982).

[09] Hastings, M.B. and Michalakis, S. Commun. Math. Phys. 334, 433-471 (2015).

[10] Nature reviews, Physics, volume 2, August 2020, pp. 397-401.

[11] The quantum Hall effect continues to reveal its secrets to mathematicians and physicists ; Nature, editorial, 29 July 2020.

2.2 Livres

[B1] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme ; collection d'ouvrage à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. Darmois et A. Lichnerowicz. ©1955 by Masson and Cie, éditeurs.

[B2] Landau L.D., Lifschitz E.M. : Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II, Klassische Feldtheorie (German edition) ; 12. ueberarbeitete Auflage, in dt. Sprache hrsg. von Hans-Georg Schoepf [Uebers. aus dem russ. von Georg Dautcourt], - ISBN 3-05-501550-9, ©Akademie Verlag, Berlin, 1992, 480 S.

[B3] Cartan, E. The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966 ; translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)" ; Hermann, 1937 ; Dover Publications, Inc. New York. ©1966 by Hermann, Paris, ISBN 0-486-64070-1, 151 pages.

[B4] Freeman, D. : Quantenfeldtheorie ; die weltbekannte Einführung von einem der Väter der QED. Springer Spektrum, ©Springer Verlag Berlin Heidelberg 2014, ISBN 978-3-642-37677-1, 288 S.

2.3 Contributions personnelles

[a] PERIAT, T. : Principe d'incertitude sur les mesures de W. Heisenberg et théorie de la relativité générale d'A. Einstein, ISBN 978-2-36923-026-7 / EAN-9782369230267, 10 décembre 2019.

[b] PERIAT, T. : Decomposing deformed tensor products ; ISBN 978-2-36923-092-2, v2, March, 2016.

[c] PERIAT, T. : Les premières relations de Christoffel revisitées, ISBN 978-2-36923-051-9 / EAN-9782369230519, 8 septembre 2020.

[d] PERIAT, T. : Does the new formalism of the EM field tensor contain a bi-vector “à la E. Cartan” ? ISBN 978-2-36923-085-4 / EAN-9782369230854, v1, 10 February 2016.

[e] PERIAT, T. : Découverte d’un formalisme pour les champs électromagnétiques ; ISBN 978-2-36923-067-0 / EAN-9782369230670, v1, 30 mars 2020.