©PERIAT, T. : Les dérivations dans la théorie des produits tensoriels déformés, ISBN 978-2-36923-066-3, EAN 9782369230663, v2, 14 septembre 2020

Mots clés : relation de Jacobi, relation de Leibniz, dérivations.

Table des matières

french

1 Outils élémentaires

Ce document s'ouvre sur une première section qui est la reprise d'un texte écrit en 2008. Son but est d'introduire de façon simplifiée, voire élémentaire et volontairement naïve, la relation de Jacobi ainsi que la notion de dérivation intérieure sur les espaces vectoriels munis d'un produit tensoriel (resp. de Lie) déformé.

1.1 Territoire de Jacobi

Définition 1.1. ***Elément isotropique***

Soit E(N, K) un espace vectoriel de dimension entière non nulle (N = 1, 2, ...) construit sur un corps commutatif K de caractéristique différente de deux ; par exemple celui des nombres réels et celui des nombres complexes. Il est muni d'un produit tensoriel déformé par un ensemble de cubes notés génériquement A dont les composantes sont choisies dans K ; soit V = {E(N, K), $\otimes_A$} cet ensemble générique.

Par définition, un élément de V est dit « isotropique » si son carré est nul ; l'ensemble des éléments isotropiques de l'ensemble V est noté i(V) :

$$i(V) = \{\mathbf{u} \in V \,:\, \otimes_A(\mathbf{u},\mathbf{u}) \,=\, \mathbf{0}\}$$

Note de l'auteur : L'adjectif « isotropique » est emprunté à la sémantique apparue dans l'ouvrage du mathématicien français E. Cartan consacré aux spineurs [[01]; en anglais]. Il n'a ici de commun avec le concept dont il s'inspire que le fait de décrire la nullité d'un « carré », c'est-à-dire d'une opération binaire appliquée à un même argument ; ici : le vecteur **u** de V. Dans l'ouvrage de Cartan, l'opération binaire est le produit scalaire euclidien défini sur les espaces vectoriels de dimension trois : $<..., ...>_{Id3}$. L'analogie est donc très lointaine et essentiellement formelle. Cette définition joue cependant un rôle important dans l'exploration consistant à construire une C*algèbre sur V ; voir [[a]].

Définition 1.2. ***Territoire de Jacobi***

Par définition, un territoire de Jacobi sur V est un sous-ensemble de l'ensemble V^3, noté J(V), et constitué par l'ensemble des triplés de celui-ci vérifiant la relation :

$$J(V)$$

$$=$$

$$\{X = (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) \in V^3 \,:\, \otimes_A(\mathbf{u},\, \otimes_A(\mathbf{v},\, \mathbf{w})) \,=\, \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{u},\, \mathbf{v}),\, \mathbf{w}) + \otimes_A(\mathbf{v},\, \otimes_A(\mathbf{u},\, \mathbf{w}))$$

Remarque 1.1. ***Elément isotropique et territoire de Jacobi***

Dans cette définition, rien ne s'oppose à ce qu'un élément précis de l'espace V *génère* un élément de J(V). Soit **u** un élément de V ; il suffit qu'il soit un élément isotropique pour qu'il puisse constituer un des éléments de J(V). En effet, quand tel est le cas, cet élément isotropique génère l'élément (**u**, **u**, **u**) qui est alors dans J(V) ; preuve :

1. étape :

$$\otimes_A(\mathbf{u},\, \otimes_A(\mathbf{v},\, \mathbf{w})) \,=\, \otimes_A(\mathbf{u},\, \otimes_A(\mathbf{u},\, \mathbf{u})) \,=\, \otimes_A(\mathbf{u},\, \mathbf{0}) \,=\, \mathbf{0}$$

2. étape

$$\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{u},\, \mathbf{v}),\, \mathbf{w}) \,+\, \otimes_A(\mathbf{v},\, \otimes_A(\mathbf{u},\, \mathbf{w}))$$

$$=$$

$$\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{u},\, \mathbf{u}),\, \mathbf{u}) \,+\, \otimes_A(\mathbf{u},\, \otimes_A(\mathbf{u},\, \mathbf{u}))$$

$$=$$

$$\otimes_A(\mathbf{u},\, \mathbf{0}) \,+\, \otimes_A(\mathbf{u},\, \mathbf{0}) \,=\, \mathbf{0}$$

Conclusion : Tout élément (**u**, **u**, **u**) de V^3 dans lequel **u** est un élément isotropique de V est un élément du territoire de Jacobi de V. Ceci ne signifie pas que J(V) se résume à i(V) et, à ce stade, il peut seulement être écrit :

$$i(V) \subset J(V)$$

Proposition 1.1. *Tout produit tensoriel déformé bâti sur un cube anti-symétrique est un crochet de Lie bâti sur ce cube.*

Démonstration. Soit un cube anti-symétrique A :

$$\forall\,(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in E^2(D,\,K),\, \forall\, A\,:\, A^k_{ij} \;+\; A^k_{ji} \,=\, 0$$

$$\otimes_A(\mathbf{a},\mathbf{b})$$
$$=$$
$$\sum_k (\sum_i \sum_j A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j)\,.\,\mathbf{e}_k$$
$$=$$
$$\sum_k (\sum_{i<j} A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j \;+\; \sum_{i=j} A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j \;+\; \sum_{i>j} A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j)\,.\,\mathbf{e}_k$$
$$=$$
$$\sum_k (\sum_{i<j} A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j \;+\; 0\,.\,a^i\,.\,b^j \;-\; \sum_{i<j} A^k_{ij}\,.\,a^j\,.\,b^i)\,.\,\mathbf{e}_k$$
$$=$$
$$\sum_k (\sum_{i<j} A^k_{ij}\,.\,(a^i\,.\,b^j \;-\; a^j\,.\,b^i)\,.\,\mathbf{e}_k$$

Mais, par ailleurs (rappel) nous avons connaissance de la

Définition 1.3. *Le produit extérieur déformé*

Poursuivant et extrapolant une démarche historique, je propose la définition suivante :

$$\forall\, A,\, \forall\,(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) \in E^2(D,\,K):$$
$$\wedge_A(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) \,=\, \otimes_A(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) \,-\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_1) \,=\, A^k_{ij}\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2 \,-\, q^i_2\,.\,q^j_1)\,.\,\mathbf{e}_k$$

Toutes les composantes de ce vecteur peuvent être organisées en trois sous-ensembles :

$$\{\sum_{i<j} A^k_{ij}\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2 - q^i_2\,.\,q^j_1)\} + \{\sum_{i=j} A^k_{ij}\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2 - q^i_2\,.\,q^j_1)\} + \{\sum_{i>j} A^k_{ij}\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2 - q^i_2\,.\,q^j_1)\}$$

Puisque K est supposé être équipé (par hypothèse de travail) d'une multiplication commutative : (i) le deuxième sous-ensemble disparaît (s'annule) et (ii) les termes des deux sous-ensembles restants satisfont les relations du genre suivant :

$$A^k_{12}\,.\,(q^1_1\,.\,q^2_2 \,-\, q^1_2\,.\,q^2_1)\,;\, A^k_{21}\,.\,(q^2_1\,.\,q^1_2 \,-\, q^2_2\,.\,q^1_1)$$
$$A^k_{1j}\,.\,(q^1_1\,.\,q^j_2 \,-\, q^1_2\,.\,q^j_1)\,;\, A^k_{j1}\,.\,(q^j_1\,.\,q^1_2 \,-\, q^j_2\,.\,q^1_1)$$
$$A^k_{1D}\,.\,(q^1_1\,.\,q^D_2 \,-\, q^1_2\,.\,q^D_1)\,;\, A^k_{D1}\,.\,(q^D_1\,.\,q^1_2 \,-\, q^D_2\,.\,q^1_1)$$
$$etc.$$

Les calculs livrent alors :

$$\forall\, A,\, \forall\,(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) \in E^2(D,\,K)\,:\, \wedge_A(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2) \,=\, \sum_{i<j}(A^k_{ij} \,-\, A^k_{ji})\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2 \,-\, q^i_2\,.\,q^j_1)\,.\,\mathbf{e}_k$$

Le résultat de ce calcul est toujours un élément de l'espace vectoriel de départ : E(N, K). Chacune de ses N composantes est une somme de 1 + 2 + ... + (N - 1) = N.(N - 1)/2 termes ; au lieu des N^2 termes contenus dans chacune des N composantes du produit tensoriel déformé l'ayant généré. Le cube impliqué dans cette définition est a priori quelconque. Quand, en particulier, le cube A est anti-symétrique, alors :

$$\forall A : \, A^k_{ij} \; + \; A^k_{ji} \; = \; 0, \, \forall \, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \, \in \, E^2(N, \, K) \, :$$

$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \; = \; 2. \sum_{i<j} A^k_{ij} \, . \, (q^i_1 \, . \, q^j_2 \; - \; q^i_2 \, . \, q^j_1) \, . \, \mathbf{e}_k$$

Dont il est possible de déduire :

$$\forall \, A : \, A^k_{ij} + A^k_{ji} \; = \; 0, \, \forall \, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \, \in \, E^2(D, \, K), \, \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \; = \; \frac{1}{2} \wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \; = \; [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_A$$

L'expression placée à droite de l'égalité la plus à droite n'est qu'une convention d'écriture. Mais elle symbolise bien un crochet de Lie déformé par le cube anti-symétrique A puisqu'elle permet de vérifier les deux propriété suivantes :

$$\forall \, A : \, A^k_{ij} \; + \; A^k_{ji} \; = \; 0, \, \forall \, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \, \in \, E^2(N, \, K)$$

$$\otimes_A \, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1) \; = \; \frac{1}{2} \wedge_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \; = \; [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1]_A \; = \; \mathbf{0} \tag{1}$$

$$\otimes_A \, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \; + \; \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) \tag{2}$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \wedge_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \; + \; \frac{1}{2} \wedge_A (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)$$

$$=$$

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_A \; + \; [\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1]_A$$

$$=$$

$$\mathbf{0}$$

□

Proposition 1.2. *Le crochet de Lie déformé satisfait la relation de Jacobi.*

Démonstration. **Première étape :** Il existe des conditions suffisantes (i) concernant uniquement les composantes d'un cube A quelconque et (ii) telles que la relation de Jacobi devient vraie pour tous les triplés d'éléments de V.

Soit un cube A et un triplé {**a**, **b**, **c**} ; ils permettent de définir le vecteur :

$$\mathbf{J} \; = \; \otimes_A(\mathbf{a}, \otimes_A(\mathbf{b}, \, \mathbf{c})) \; - \{\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{a}, \, \mathbf{b}), \, \mathbf{c}) \; + \; \otimes_A(\mathbf{b}, \otimes_A(\mathbf{a}, \, \mathbf{c}))\} \tag{3}$$

En détail, il s'agit d'une combinaison des termes suivants :

$$\otimes_A(\mathbf{a}, \, \otimes_A(\mathbf{b}, \, \mathbf{c})) \; = \; A^\epsilon_{\alpha\delta} \, . \, a^\alpha \, . \, (A^\delta_{\beta\gamma} \, . \, b^\beta \, . \, c^\gamma) \, . \, \mathbf{e}_\epsilon$$

$$\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{a}, \, \mathbf{b}), \, \mathbf{c}) \; = \; A^\epsilon_{\delta\gamma} \, . \, (A^\delta_{\alpha\beta} \, . \, a^\alpha \, . \, b^\beta) \, . \, c^\gamma \, . \, \mathbf{e}_\epsilon$$

$$\otimes_A(\mathbf{b}, \, \otimes_A(\mathbf{a}, \, \mathbf{c})) \; = \; A^\epsilon_{\beta\delta} \, . \, b^\beta \, . \, (A^\delta_{\alpha\gamma} \, . \, a^\alpha \, . \, c^\gamma) \, . \, \mathbf{e}_\epsilon$$

L'isomorphisme canonique entre V et V* permet de continuer avec les D (ϵ = 0, 1, ..., D - 1) relations :

$$J^\epsilon \; = \; A^\epsilon_{\alpha\delta} \, . \, a^\alpha \, . \, (A^\delta_{\beta\gamma} \, . \, b^\beta \, . \, c^\gamma) \; - \; \{A^\epsilon_{\delta\gamma} \, . \, (A^\delta_{\alpha\beta} \, . \, a^\alpha \, . \, b^\beta) \, . \, c^\gamma \; + \; A^\epsilon_{\beta\delta} \, . \, b^\beta \, . \, (A^\delta_{\alpha\gamma} \, . \, a^\alpha \, . \, c^\gamma)\}$$

Puisque K est équipé (par hypothèse de travail) d'une multiplication commutative :

$$J^\epsilon \;=\; \{A^\epsilon_{\alpha\delta}\,.\,A^\delta_{\beta\gamma} \;-\; (A^\epsilon_{\delta\gamma}\,.\,A^\delta_{\alpha\beta} \;+\; A^\epsilon_{\beta\delta}\,.\,A^\delta_{\alpha\gamma})\}\,.\,a^\alpha\,.\,b^\beta\,.\,c^\gamma$$

La relation de Jacobi est vérifiée si :

$$\forall\,\epsilon \;=\; 0,\,1,\,...,\,D \;-\; 1 \;:\; J^\epsilon \;=\; 0$$

Ou, équivalemment, quand :

$$\forall\,\epsilon \;=\; 0,\,1,\,...,\,D-1 \;:\; \{A^\epsilon_{\alpha\delta}\,.\,A^\delta_{\beta\gamma} - (A^\epsilon_{\delta\gamma}\,.\,A^\delta_{\alpha\beta} + A^\epsilon_{\beta\delta}\,.\,A^\delta_{\alpha\gamma})\}\,.\,a^\alpha\,.\,b^\beta\,.\,c^\gamma \;=\; 0 \quad (4)$$

Un territoire de Jacobi (rappel : voir Def.1.2 ci-dessus) est un sous-ensemble de triplés (**a**, **b**, **c**) pour lesquels la relation de Jacobi est vraie. Dans les faits, il existe donc bien des conditions :

— ne dépendant pas du tout des éléments du triplé considéré ;

— mais reliant les composantes du cube A de la manière suivante :

$$\forall\,\epsilon \;=\; 0,\,1,\,...,\,D \;-\; 1 \;:\; A^\epsilon_{\alpha\delta}\,.\,A^\delta_{\beta\gamma} \;-\; (A^\epsilon_{\delta\gamma}\,.\,A^\delta_{\alpha\beta} \;+\; A^\epsilon_{\beta\delta}\,.\,A^\delta_{\alpha\gamma}) \;=\; 0 \qquad (5)$$

— et validant la relation de Jacobi.

Seconde étape : Ces conditions suffisantes à valider la relation de Jacobi peuvent être réorganisées et condensées un peu plus. En inversant α et β, il suit que :

$$\forall\,\epsilon \;=\; 0,\,1,\,...,\,D \;-\; 1 \;:\; A^\epsilon_{\beta\delta}\,.\,A^\delta_{\alpha\gamma} \;-\; (A^\epsilon_{\delta\gamma}\,.\,A^\delta_{\beta\alpha} \;+\; A^\epsilon_{\alpha\delta}\,.\,A^\delta_{\beta\gamma}) \;=\; 0$$

Et cette relation est à comparer avec :

$$\forall\,\epsilon \;=\; 0,\,1,\,...,\,D \;-\; 1 \;:\; A^\epsilon_{\alpha\delta}\,.\,A^\delta_{\beta\gamma} \;-\; (A^\epsilon_{\delta\gamma}\,.\,A^\delta_{\alpha\beta} \;+\; A^\epsilon_{\beta\delta}\,.\,A^\delta_{\alpha\gamma}) \;=\; 0$$

Par addition, il vient alors :

$$\forall\,\epsilon \;=\; 0,\,1,\,...,\,D \;-\; 1 \;:\; A^\epsilon_{\delta\gamma}.(A^\delta_{\alpha\beta} \;+\; A^\delta_{\beta\alpha}) \;=\; 0 \qquad (6)$$

Ce formalisme condensé contient une information particulière mais importante : "Parmi toutes les conditions capables de valider la relation de Jacobi, il y a celles pour lesquelles le cube A est anti-symétrique". En d'autres mots, l'anti-symétrie d'un cube A est une condition suffisante à valider la relation de Jacobi sur {V, $\otimes_A$} :

$$A^\delta_{\alpha\beta} \;+\; A^\delta_{\beta\alpha} \;:\; \otimes_A(\mathbf{a},\,\otimes_A(\mathbf{b},\,\mathbf{c})) \;=\; \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{a},\,\mathbf{b}),\,\mathbf{c}) \;+\; \otimes_A(\mathbf{b},\,\otimes_A(\mathbf{a},\,\mathbf{c})) \qquad (7)$$

□

Théorème 1.1. *Existence des territoires de Jacobi.*

Tout cube antisymétrique A fait du produit tensoriel déformé par celui-ci un crochet de Lie vérifiant la relation de Jacobi. Par conséquent, L = {E(N, K), $\otimes_A$: A antisym.} est une algèbre de Lie. L'antisymétrie d'un cube n'est qu'une condition suffisante à faire de L une source pour J(V).

Exemple 1.1. *Cubes symétriques*

Quand un cube A est symétrique, le produit extérieur bâti sur lui s'annulle systématiquement ; mais le produit tensoriel, non. L'Equ.(6) définissant un territoire de Jacobi devient :

$$A^\delta_{\alpha\beta} \;=\; A^\delta_{\beta\alpha} \;:\; \forall\,\epsilon \;=\; 0,\,1,\,...,\,D \;-\; 1 \;:\; A^\epsilon_{\delta\gamma}.A^\delta_{\alpha\beta} \;=\; 0 \qquad (8)$$

Conclusion : Autrement dit, il existe des territoires de Jacobi sur V quand A est symétrique mais ce fait ne permet pas pour autant de doter alors V d'une structure d'algèbre de Lie.

Cet exemple laisse deviner l'existence de cas intermédiaires dans lesquels le cube A est quelconque. Il suggère aussi que si l'existence d'un territoire de Jacobi est la seule condition nécessaire à la définition d'une dérivation sur V parce qu'il existe une analogie forte entre la règle de Leibniz et le respect de la relation de Jacobi, alors l'existence d'une algébre de Lie n'est pas nécessaire à celle d'une dérivation.

1.2 Pré-dérivation

Définition 1.4. ***Pré-dérivation***

Soit $\mathbf{u}$ un élément quelconque de l'espace vectoriel E(N, K). Par définition, une *pré-dérivation intérieure par rapport au vecteur* $\boldsymbol{u}$ est l'application notée $\delta_{(A,u)}$ de E(N, K) dans V = {E(N, K), $\otimes_A$} définie par :

$$\mathbf{w} \in E(N,\, K) \xrightarrow{\delta_{(A,\,\mathbf{u})}} \delta_{(A,\,\mathbf{u})}(\mathbf{w}) \;=\; \otimes_A(\mathbf{u},\, \mathbf{w})$$

Elle est de facto équivalente à un opérateur pouvant se noter $\otimes_A(\mathbf{u}, ...)$ et agissant sur les éléments de l'espace E(N, K).

$$\delta_{(A,\,\mathbf{u})} \;\rightarrow\; \otimes_A(\mathbf{u},\, ...)$$

Remarque 1.2.

Il existe une application naturelle, notée δ_A, attribuant à chaque élément $\mathbf{u}$ de l'espace vectoriel E(N, K) une pré-dérivation agissant dans V = {E(N, K), $\otimes_A$} ; elle est définie symboliquement par l'écriture :

$$\delta_A \;:\; \forall\, \mathbf{u} \,\in\, E(N,K) \xrightarrow{\delta_A} \delta_A(\mathbf{u}) \;=\; \delta_{(A,\,\mathbf{u})} \;\rightarrow\; \otimes_A(\mathbf{u},\, ...)$$

Remarque 1.3.

Il existe une seconde application naturelle, notée δ_u, attribuant à chaque cube A une pré-dérivation agissant dans V = {E(N, K), $\otimes_A$} ; elle est définie symboliquement par l'écriture :

$$\delta_{\mathbf{u}} \;:\; \forall\, A \xrightarrow{\delta_{\mathbf{u}}} \delta_{\mathbf{u}}(A) \;=\; \delta_{(A,\,\mathbf{u})} \;\rightarrow\; \otimes_A(\mathbf{u},\, ...)$$

Remarque 1.4.

Dans l'ensemble V, le cube A est supposé (i) exister, (ii) être donné même s'il peut varier. Il devient en quelque sorte un élément implicite des discussions et celles-ci peuvent se concentrer sur l'influence des projectiles [1] .

Proposition 1.3. ***Dérivation ordinaire et territoire de Jacobi*** *: Lorsqu'un vecteur* $\boldsymbol{u}$ *de l'espace E(N, K) définit grâce à* δ_A *une pré-dérivation se comportant comme une dérivation ordinaire vis-à-vis du produit tensoriel déformé de deux vecteurs* $\boldsymbol{w}_1$ *et* $\boldsymbol{w}_2$ *de l'espace V = {E(N, K),* $\otimes_A$*}, il constitue alors avec eux un élément du territoire de Jacobi définissable sur V.*

1. Rappel de la sémantique de cette théorie : un projectile est l'argument de gauche d'une paire impliquée dans un produit tensoriel déformé.

Démonstration : Soit w_1 et w_2 deux fonctions numériques de la variable réelle u. Il est connu que :

$$\frac{d(w_1 \,.\, w_2)}{du} = \frac{dw_1}{du} \,.\, w_2 + w_1 \,.\, \frac{dw_2}{du}$$

Supposons que l'opérateur $\otimes_A(\mathbf{u}, ...) \equiv \delta_{\mathbf{u}}$ joue vis-à-vis du produit tensoriel déformé $\otimes_A(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ un rôle tout à fait similaire à la dérivation ordinaire d/du vis-à-vis du produit $w_1.w_2$. Cette équivalence se traduit dans la présente théorie par la relation :

$$\delta_u(\otimes_A(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)) = \otimes_A(\delta_u(\mathbf{w}_1), \mathbf{w}_2) + \otimes_A(\mathbf{w}_1, \delta_u(\mathbf{w}_2))$$

Il suffit alors de remplacer le symbôle $\delta_{\mathbf{u}}$ par $\otimes_A(\mathbf{u}, ...)$ pour immédiatement réaliser que cette relation est une relation de Jacobi qui ne dit donc rien d'autre que : ($\mathbf{u}$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$) $\in$ J(V). □

La proposition inverse est vraie ; preuve : inversement, si un triplé ($\mathbf{u}$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$) est un des éléments du territoire J(V), alors le vecteur $\mathbf{u}$ de l'espace E(N, K) définit une pré-dérivation agissant comme une dérivation ordinaire sur le produit tensoriel déformé des deux vecteurs $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$; in extenso : la règle de Leibniz est respectée.

Théorème 1.2. *Pré-dérivation intérieure, règle de Leibniz et territoire de Jacobi.*

Dans cette théorie, une pré-dérivation $\delta_{\mathbf{u}} \equiv \otimes_A(\mathbf{u}, ...)$ qui respecte la règle de Leibniz avec un certain nombre de paires de vecteurs de V est considérée agir comme une dérivation intérieure ordinaire sur cette partie de V contenant $\mathbf{u}$ et ces paires. Son existence dessine une partie du territoire de Jacobi J(V).

Corollaire 1.1. *Antisymétrie et dérivation intérieure.*

Le théorème 1.1 dit que l'antisymétrie du cube définissant le produit tensoriel déformé dont l'espace E(N, K) est équipé est une condition suffisante mais pas forcément nécessaire pour assurer l'existence d'un territoire de Jacobi sur V.
Le théorème 1.2 confirme en quelque sorte cette non-nécessité en disant que le respect de la règle de Leibniz suffit à définir un territoire de Jacobi sur V même lorsque le produit tensoriel déformé n'est pas bâti sur un cube antisymétrique.
Définitivement, il faut comprendre que l'antisymétrie du cube définissant un produit tensoriel déformé n'est donc pas une condition absolument nécessaire à assurer l'existence d'un territoire de Jacobi sur V.

2 Dissertation sur la notion de dérivation

2.1 Exposé des motivations et de la démarche

La notion de dérivée, pas plus que celle d'intégrale, ne constituent une nouveauté. La première trouve ses origines en France avec Descartes et en Allemagne avec Leibniz. La seconde a été traitée d'un côté par Lebesgue et de l'autre par Riemann. On pourrait donc croire les sujets clos et vouloir les réduire à l'apprentissage des acquis.

Mes explorations sur les produits tensoriels déformés ainsi que diverses lectures sur les ensembles, les fonctions et les algèbres, en particulier de Lie, me poussent à rouvrir timidement la porte de ces thématiques.

Une autre raison, moins avouable, en est que les calculs d'intégration ont toujours constitué pour moi une sorte d'abomination. J'ai donc cherché, par paresse, à pouvoir en simplifier l'exécution. La manipulation de matrices parait infiniment plus aisée que la mémorisation de formules compliquées.

Je me suis donc demandé dans quelle mesure la multiplication par une matrice agissant sur le côté gauche d'un vecteur pouvait utilement se substituer à une dérivation agissant sur ledit vecteur ? Cette question peut grossièrement se symboliser dans un premier jet par :

$$\exists\,[D]\,\in\,M(D,\,K)?\,:\,\mathbf{x}\;E(D,\,K),\,t\,\in\,K\,:\,|\frac{d\mathbf{x}}{dt}>\equiv\,[D].\,|\mathbf{x}>\;ou\,\frac{d}{dt}\,\equiv\,[D]$$

L'interrogation trouve sa source dans une remarque simple : à un produit vectoriel défini sur E(3, R), il peut toujours être substitué une matrice rotation lorsque ce produit est représenté dans l'espace dual $E^*(3, R)$; les représentations précises des matrices de rotation sont par exemple données dans [[01]].

Pour pouvoir étendre ce constat à toutes sortes d'opération, il semble donc nécessaire de pouvoir d'abord définir une application entre une opération et sa représentations dans M(D = 1, 2, 3, ... ; K = R, C, ...).

Par exemple et pour revenir sur l'exemple pédagogique du produit vectoriel, la série d'applications suivante peut être définie :

$$\mathbf{u}\wedge\mathbf{x}\,\rightarrow\,|\mathbf{u}\wedge\mathbf{x}>\rightarrow\,_{[J]}\Phi(\mathbf{u}).\,|\mathbf{x}>$$

Elle suggère de pouvoir associer l'opération *produit vectoriel agissant par la gauche* avec la matrice *rotation générique* :

$$\mathbf{u}\wedge\,...\,\rightarrow\,_{[J]}\Phi(...)$$

Ou encore plus abstrait :

$$\wedge\,\rightarrow\,_{[J]}\Phi$$

L'objectif du document consiste donc à rationaliser et à généraliser cette démarche intuitive. Le but est de la reconsidérer dans des espaces de dimension supérieure à trois pour d'autres opérations que le produit vectoriel. Notamment je souhaite l'appliquer à la notion de produit tensoriel, extérieur ou de Lie déformé.

L'idée directrice étant que les parties principales des décompositions des produits tensoriels (resp. extérieurs, de Lie) déformés sont parfois des dérivations d'un certain type (à déterminer). Il se trouve par exemple qu'elles représentent parfois l'équivalent de propagateurs ; un concept fort utile en physique, voir les explorations [[b]] et [[c]].

2.2 Réflexion sur la notion d'écart, de différence

Le concept de dérivée ordinaire fait historiquement référence à ceux d'écart, de différence, de variation et de mesure des quantités impliquées dans les problématiques mathématiques abordées. Elles revêtent une importance cruciale dans l'ensemble des discussions réalisées sur les fonctions. Elles apparaissent par exemple dans les travaux de Darboux [[02]] et de Baire [[03]] sur la question de la discontinuité des fonctions.

Dans le cadre de la théorie des produits tensoriels (resp extérieurs, de Lie) déformés puis décomposés, éventuellement non-trivialement (en bref : la TQE), il existe une différence importante : c'est celle qui sépare une décomposition non-triviale (quand elle existe ; [P]) et une décomposition triviale (il en existe toujours au moins une :

${}_A\Phi(\mathbf{projectile}))$.

La question de la mesure qui peut, au départ, sembler évidente ou futile quand il s'agit de faire une simple soustraction mérite en réalité toute attention. Au sein de la TQE, la mesure de la différence entre deux décompositions :

$$|{}_A\Phi(\mathbf{projectile}) - [P]| - |P|$$

joue un rôle primordial.

Par ailleurs, les premières réflexions sur le calcul des accroissements finis, puis sur le calcul infinitésimal, ne concernaient initialement que des différences sur des nombres réels.

Les développements des idées initiales a permis d'étendre ces cogitations aux vecteurs et aux fonctions numériques à plusieurs variables réelles puis complexes. Chemin faisant, il a été compris que les transformations linéaires pouvaient, à leur manière, rendre compte d'évolutions concernant les variables sur lesquelles elles agissaient. Si bien que, in fine, il se pose la question de savoir si et quand un élément [D] quelconque d'un ensemble de matrices carrées peut symboliser un opérateur de dérivation agissant sur une variable placée à ses côtés.

Plus précisément, poussé par les remarques déja faites dans [[c]], c'est le point que je souhaite approfondir pour ce qui concerne les résultats (intrinsèques ou extrinsèques) des décompositions des produits tensoriels (resp. de Lie) déformés.

2.3 Quelques exemples pédagogiques

Le premier indice poussant à commencer cette étude est la forme même des décompositions. Commemt ne pas voir dans leur formalisme l'équivalent formel du résultat d'une dérivation ordinaire faite sur une fonction numérique à une seule variable par rapport à cette variable.

Exemple 2.1. *En guise d'introduction*

Plus précisément, soit par exemple R l'ensemble des nombres réels et, f, une fonction différentiable de la variable réelle générique x telle que :

$$f(x) = a\,.\,x^2 + b\,.\,x + c$$

où les paramàtres réels a, b et c ne dépendent absolument pas de x ; alors il est bien connu que :

$$\frac{df(x)}{dx} = 2.a\,.\,x + b$$

Si, au lieu de ne considérer qu'une seule fonction, nous avions choisi trois fonctions similaires telles que :

$$f_1(x) = a_1\,.\,x^2 + b_1\,.\,x + c_1$$
$$f_2(x) = a_2\,.\,x^2 + b_2\,.\,x + c_2$$
$$f_3(x) = a_3\,.\,x^2 + b_3\,.\,x + c_3$$

nous aurions obtenu de même :

$$\frac{df_1(x)}{dx} = 2.a_1\,.\,x + b_1$$

$$\frac{df_2(x)}{dx} = 2.a_2\,.\,x + b_2$$

$$\frac{df_3(x)}{dx} = 2.a_3 \,.\, x + b_3$$

Tout ceci aurait pu se résumer simplement sur V* de la façon suivante :

$$|\mathbf{f}(x)>= \left| \begin{array}{c} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{a}>= \left| \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{b}>= \left| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{c}>= \left| \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{array} \right\rangle ;$$

Et :

$$|\frac{d\mathbf{f}(x)}{dx}>= 2. <\mathbf{a}|. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .\, x + |\mathbf{b}>= 2. <\mathbf{a}|.Id_3 \,.\, x + |\mathbf{b}>$$

Une vague analogie formelle avec la décomposition d'un produit tensoriel (resp. de Lie) déformé apparaît, pour peu que l'existence d'un isomorphisme entre l'ensemble des dérivations ordinaires d'un vecteur (ici **f**) par rapport à la variable x et un produit tensoriel (resp. de Lie) déformé puisse être prouvée.

$$\left| \begin{array}{ccc} \frac{d\mathbf{f}}{dx} & \rightarrow & representation\, de\, la\, derivee\ :\ 2. <\mathbf{a}|.Id_3 \\ \uparrow & & \uparrow \\ equivalent\, formel\, du\, produit & \rightarrow & sa\, decomposition\ :\ (2. <\mathbf{a}|.Id_3, \mathbf{b}) \end{array} \right|$$

Exemple 2.2. *Extension à plusieurs variables*

Dans le même état d'esprit, si -au lieu de considérer trois fonctions d'une seule variable réelle, nous avions choisi une seule fonction de trois variables réelles totalement indépendantes telles que :

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 \,.\, x_1^2 + b_1 \,.\, x_1 + a_2 \,.\, x_2^2 + b_2 \,.\, x_2 + a_3 \,.\, x_3^2 + b_3 \,.\, x_3 + c$$

nous aurions obtenu :

$$\frac{\delta f(x_1, x_2, x_3)}{\delta x_1} = 2.a_1 \,.\, x_1 + b_1$$

$$\frac{\delta f(x_1, x_2, x_3)}{\delta x_2} = 2.a_2 \,.\, x_2 + b_2$$

$$\frac{\delta f(x_1, x_2, x_3)}{\delta x_3} = 2.a_3 \,.\, x_3 + b_3$$

et tout ceci aurait pu se résumer simplement sur V* de la façon suivante :

$$|\mathbf{x}>= \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{a}>= \left| \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\rangle ; |\mathbf{b}>= \left| \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right\rangle$$

Et :

$$|\mathbf{grad_x} f(\mathbf{x})>= \begin{pmatrix} 2.a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2.a_3 \end{pmatrix} .\, |\mathbf{x}> + |\mathbf{b}>$$

L'analogie formelle avec la décomposition d'un produit tensoriel (resp. de Lie) déformé saute à nouveau aux yeux, pour peu que l'existence d'un isomorphisme entre l'ensemble des dérivations partielles ordinaires par rapport aux diverses variables -regroupées sous le concept de "gradient d'une fonction numérique" et un produit tensoriel (resp. de Lie) déformé puisse être prouvée.

Exemple 2.3. *Généralisation*

L'exemple précédent se laisse généraliser en considérant juste l'ensemble des formes polynomiales réelles de degré deux ; soit en effet :

$$f(x_1, x_2, x_3) \, = \, a_{ij} \, . \, x_i \, . \, x_j \, + \, a_i \, . \, x_i \, + \, a$$

alors :

$$\frac{\delta f(x_1, x_2, x_3)}{\delta x_k} \, = \, a_{ij} \, . \, (x_i \, . \, \delta_{jk} \, + \, \delta_{ik} \, . \, x_j) \, + \, a_i \, . \, \delta_{ik}$$

soit, plus précisément :

$$\frac{\delta f(x_1, x_2, x_3)}{\delta x_1} \, = \, a_{ij} \, . \, (x_i \, . \, \delta_{j1} \, + \, \delta_{i1} \, . \, x_j) \, + \, a_1 \, = \, a_{i1} \, . \, x_i \, + \, a_{1j} \, . \, x_j \, + \, a_1$$

$$\frac{\delta f(x_1, x_2, x_3)}{\delta x_2} \, = \, a_{ij} \, . \, (x_i \, . \, \delta_{j2} \, + \, \delta_{i2} \, . \, x_j) \, + \, a_2$$

$$\frac{\delta f(x_1, x_2, x_3)}{\delta x_3} \, = \, a_{ij} \, . \, (x_i \, . \, \delta_{j3} \, + \, \delta_{i3} \, . \, x_j) \, + \, a_3$$

Il apparaît bien vite qu'en posant :

$$|\mathbf{x} >= \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\rangle \, ; \, |\mathbf{a} >= \left| \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right\rangle \, ; \, [a] \, = \, [a_{ij}]$$

et en suivant une procédure analogue à celle exposée dans les deux exemples précédents :

$$|\mathbf{grad_x} f(\mathbf{x}) >= \, \{[a] \, + \, [a]^t\} \, . \, |\mathbf{x} > \, + |\mathbf{b} >$$

L'analogie formelle avec la décomposition d'un produit tensoriel (resp. de Lie) déformé saute à nouveau aux yeux, pour peu que l'existence d'un isomorphisme entre l'ensemble des dérivations partielles ordinaires par rapport aux diverses variables -regroupées sous le concept de "gradient d'une fonction numérique" et un produit tensoriel (resp. de Lie) déformé puisse être prouvée.

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{grad_x} f & \rightarrow & representation\, du\, gradient \, : \, [a] \, + \, [a]^t \\ \uparrow & & \uparrow \\ equivalent\, formel\, d'un\, produit & \rightarrow & sa\, decomposition \, : \, ([a] \, + \, [a]^t, \mathbf{b}) \end{array} \right|$$

Remarque 2.1. ***Stratégie pour la définition de dérivations***

Après l'exposé de ces trois exemples, l'établissement d'un lien formel mais général entre un produit tensoriel (resp. de Lie) déformé et la notion de dérivation devient tentant. Une fois ce lien établi dans les règles de l'art mathématique, il sera plus aisé de conceptualiser son corollaire : je veux parler de la correspondance entre cette dérivation et sa représentation matricielle. La chose apparaît encore plus clairement lorsque la dérivation -qui s'apparente alors à une décomposition- n'a pas de "reste" (synonyme : résidu) ; ce qui correspond évidemment aux décompositions triviales et concerne au premier chef les éléments exacts de V*.

Remarque 2.2. ***Note historique***

L'idée consistant à penser les produits de Lie (en général) comme une des représentations possibles du concept de dérivation n'est pas neuve. Une recherche bibliographique permet de s'en apercevoir. En 1993, [[04] ; p. 271, §1] évoque cette vision sur les algèbres de Leibniz "droites" en prenant soin de remarquer que ces dernières sont équivalentes aux algèbres de Leibniz "gauches" et que la relation de

Leibniz est semblable à celle de Jacobi, que l'algèbre de Leibniz soit droite ou gauche. Ici, l'algèbre de Lie est présentée pour ce qu'elle est vraiment : un cas particulier des algèbres de Leibniz pour lequel le produit est anti-commutatif [[04] ; p. 272, §2].

Nota bene - 01 : Le lien déjà connu entre relation (territoire) de Jacobi et relation (règle) de Leibniz est bien été rappelé dans la première section de cette exploration consacrée aux dérivations.

Bien plus tôt dans l'histoire des mathématiques, en 1950 (voir [[05] ; §1, p. 64]), la notion de dérivation est introduite de façon plus générale sur les algèbres ; in extenso : l'algèbre considérée n'est pas forcément de Lie.

Nota bene - 02 : Ce point revêt une importance particuliere au sein de la TQE.

La première partie a bien confirmé que l'antisymétrie des indices bas du cube A définissant le produit tensoriel déformé fait de facto de celui-ci un produit de Lie déformé et valide la relation de Jacobi.

Mais elle a aussi mis le doigt sur le fait que la règle de Leibniz seule définit une dérivation intérieure et peut permettre de valider la relation de Jacobi, même si le cube n'est pas antisymétrique.

La définition proposée dans [05] nécessite certes de disposer d'une algèbre, mais encore d'un automorphisme involutif sur cette algèbre. Dans ce contexte, est une dérivation : tout endomorphisme linéaire qui commute avec l'automorphisme involutif disponible et qui satisfait la règle de Leibniz.

La raison d'être de cet automorphisme involutif n'est pas donnée dans les premiers paragraphes de [05] et, de ce fait, il est légitime de s'interroger sur la nécessité de sa présence au sein de cette définition. La réponse à cette question repose sur des considérations anciennes ayant trait au fait que nombre de cours parlant de morphismes, d'endomorphismes et d'automorphismes le font en introduisant cette notion via deux outils : les applications linéaires agissant sur les espaces vectoriels et la composition de ces applications. Une explication plus précise est fournie plus loin dans le document [05].

Nota bene - 03 : Dans le cadre de la TQE, j'ai prouvé que l'espace V = {E(N, K), $\otimes_A$} pouvait être doté d'une structure de C*algèbre ; voir [[a]]. Ce constat devrait faciliter la définition de dérivations sur cet espace particulier. En préalable et en conformité avec l'approche pronée dans [05], ma prochaine exploration se consacrera à la recherche d'involutions sur cet espace V.

3 Dérivations et décompositions des produits tensoriels déformés

3.1 Le cadre de la discussion

Définition 3.1. ***Polynomiale de degré deux à N variables***

Soit P(2, E(N, K)), l'ensemble des polynomiales de degré deux impliquant N variables choisies dans un corps K de caractéristique différente de deux (in extenso : $1 + 1 \neq 0$). Les éléments de cet ensemble s'appellent des surfaces d'ordre deux. Il est coutûme de décrire cet ensemble de la façon suivante (exemple emprûnté à la littérature internationale [Broecker, p. 163]) :

$$\{\Lambda \,:\, E(N,\, K) \,\rightarrow\, K \,|\, \Lambda(\mathbf{q}_1) \,=<\mathbf{q}_1| \,.\, \{[D] \,.\, |\mathbf{q}_1>\} + <\mathbf{d}| \,.\, |\mathbf{q}_1> + d\} \tag{9}$$

Remarque 3.1. ***Association possible : polynomiale - matrice carrée***

Cette description met bien en exergue le fait que chaque élément Λ de cet ensemble est essentiellement associé avec un triplé ([D], **d**, d) de M(N, K) $\times$ E(N, K) $\times$ K. Ce fait permet d'associer conventionnellement une matrice de M(D + 1, K) à chaque élément ; par exemple :

$$[\Lambda] \,=\, \begin{bmatrix} d & \mathbf{d} \\ \mathbf{d} & [D] \end{bmatrix} \tag{10}$$

Remarque 3.2. ***Dérivations ordinaires d'ordre un d'une polynomiale de degré deux à N variables***

Il est en général simple de dériver cet élément générique de manière ordinaire et partielle par rapport à chacune des N variables ; en effet, en partant de :

$$\Lambda(\mathbf{q}_1) \,=\, d_{\alpha\beta} \,.\, q_1^{\alpha} \,.\, q_1^{\beta} \,+\, d_{\alpha} \,.\, q_1^{\alpha} \,+\, d \tag{11}$$

lorsque le triplé ([D], **d**, d) *ne dépend pas des variables*, il est aisé d'obtenir :

$$\forall\, \gamma \,=\, 0,\, 1,\, ...\, N-1 \,:\, \frac{\partial \Lambda(\mathbf{q}_1)}{\partial q_1^{\gamma}} \,=\, d_{\alpha\beta} \,.\, \delta_{\gamma}^{\alpha} \,.\, q_1^{\beta} \,+\, d_{\alpha\beta} \,.\, q_1^{\alpha} \,.\, \delta_{\gamma}^{\beta} \,+\, d_{\alpha} \,.\, \delta_{\gamma}^{\alpha} \,+\, d$$

C'est-à-dire :

$$\forall\, \gamma \,=\, 0,\, 1,\, ...\, N-1 \,:\, \frac{\partial \Lambda(\mathbf{q}_1)}{\partial x^{\gamma}} \,=\, (d_{\gamma\alpha} \,+\, d_{\alpha\gamma}) \,.\, q_1^{\alpha} \,+\, d_{\gamma}$$

Ou encore, sous une forme synthétique et dans l'espace dual E*(N, K) :

$$|\mathbf{Grad}_{\mathbf{q}_1} \Lambda(\mathbf{q}_1)> = \{[D] \,+\, [D]^t\} \,.\, |\mathbf{q}_1> + |\mathbf{d}> \tag{12}$$

3.2 Le cas des espaces de dimension trois

Remarque 3.3. ***Intuition formelle***

Lorsque la dimension de l'espace vectoriel vaut trois (i. e. : N = 3), le formalisme du gradient d'un élément de P(2, E(3, K)), l'Equ.(12) ci-dessus, évoque très fortement celui d'une décomposition non-triviale d'un produit vectoriel du genre $\mathbf{q}_2 \wedge \mathbf{q}_1$.

En effet, le document [[d]] a permis de montrer de façon générale que les produits vectoriels déformés par une matrice [A] de M(3, C), les $[\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1]$[A], peuvent parfois accepter des décompositions non-triviales dont la partie principale vaut :

$$[P]_{|A|} \,=\, |A| \,.\, [A]^t \,.\, [J] \,.\, \{\frac{1}{2} \,.\, [Hess_{(\mathbf{q}_2,0)} \Psi(\mathbf{q}_2)] \,+\, \frac{1}{|A|} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}_{\Psi}\mathbf{s})\},\; |A| \,=\, \pm 1$$

Avec (voir [[e] ; formule p. 8]) :

$$|[\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1]_{[A]}> = [A]^t \,.\, [J] \,.\, |\mathbf{q}_2 \,\wedge\, \mathbf{q}_1> = [P]_{|A|} \,.\, |\mathbf{q}_1> + |\mathbf{z}>$$

Ainsi, comme la matrice $[A]^t$.[J] est inversible (parce que |A| = $\pm$ 1 et |J| = -1), il vient dans le cadre des circonstances autorisant ces décompositions non-triviales :

$$|\mathbf{q}_2 \,\wedge\, \mathbf{q}_1> = \{\frac{|A|}{2} \,.\, [Hess_{(\mathbf{q}_2,0)} \Psi(\mathbf{q}_2)] \,+\, {}_{[J]}\Phi({}_{\Psi}\mathbf{s})\} \,.\, |\mathbf{q}_1> + \{[A]^t \,.\, [J]\}^{-1} \,.\, |\mathbf{z}> \tag{13}$$

L'analogie formelle entre les Equ.(12) et (13) commence à devenir acceptable si - dans ces circonstances- *réaliser le produit vectoriel entre un vecteur* $\mathbf{q}_2$ *et un vecteur* $\mathbf{q}_1$ *de E(3, K) pris dans cet ordre* est équivalent au calcul du gradient d'une fonction polynomiale de degré deux Λ impliquant l'argument placé à droite dans ce produit ; ici : $\mathbf{q}_1$. L'acceptabilité de l'intuition est liée au fait de pouvoir raisonnablement écrire l'équivalence logique :

$$\mathbf{q}_2 \wedge ... \equiv \mathbf{Grad}_{...}\Lambda(...) \tag{14}$$

accompagnée ici des relations de cohérence :

$$[Hess_{(\mathbf{q}_1,0)}\Lambda(\mathbf{q}_1)] = [D] + [D]^t \equiv \frac{|A|}{2} . [Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)] + {}_{[J]}\Phi({}_{\Psi}\mathbf{s}) \tag{15}$$

et :

$$\mathbf{d} \equiv \{[A]^t . [J]\}^{-1} . |\mathbf{z} > \tag{16}$$

Autrement dit : lorsque l'intuition est recevable, calculer les variations ordinaires d'ordre un d'une polynomiale $\Lambda(\mathbf{q}_1)$ de P(2, E(3, K)) devient équivalent à associer un vecteur $\mathbf{q}_2$ à cette polynomiale pour chaque valeur possible de $\mathbf{q}_1$ et à calculer le produit vectoriel classique $\mathbf{q}_2 \wedge \mathbf{q}_1$. Toute la question consiste à savoir quel vecteur $\mathbf{q}_2$ lui associer et comment.

Remarque 3.4. ***Caractérisations de l'équivalence***

Reprenons depuis le début. Un élément $\Lambda(\mathbf{q}_1)$ de P(2, E(3, K)) étant donné au départ, son gradient est calculé. Il apparait que celui-ci peut parfois s'identifier avec un produit vectoriel classique $\mathbf{q}_2 \wedge \mathbf{q}_1$ s'il existe un élément $\mathbf{q}_2$ de E(3, K) tel que les Equ.(12) et (13) sont satisfaites simultanément. A ce stade de l'investigation, ceci suppose essentiellement deux choses :

1. Reconsidérant l'équivalence donnée par l'Equ.(14) et donc le fait que celle-ci établit l'existence d'une décomposition non-triviale d'un produit vectoriel classique, il faut que l'élément $\mathbf{q}_2$ soit l'argument d'une polynomiale propre Ψ de classe au moins égale à C_2 (différentiable deux fois). Cette affirmation découle directement du théorème initial démontré dans [[d]].

   Lemme 3.1. *Si la polynomiale* $\Lambda(\mathbf{q}_1)$ *donnée au départ est continue, la polynomiale* Ψ *dont* $\mathbf{q}_2$ *devrait être l'argument n'est continue que si son vecteur propre est nul.*

   Preuve - Par transposition de l'Equ.(15) :

$$(15)^t \Rightarrow [Hess_{(\mathbf{q}_1,0)}\Lambda(\mathbf{q}_1)]^t \equiv \frac{|A|}{2} . [Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)]^t - {}_{[J]}\Phi({}_{\Psi}\mathbf{s})$$

   Si la polynomiale Λ est continue en $\mathbf{q}_1$, alors :

$$[Hess_{(\mathbf{q}_1,0)}\Lambda(\mathbf{q}_1)] = [Hess_{(\mathbf{q}_1,0)}\Lambda(\mathbf{q}_1)]^t$$

   Et, puisque lorsque l'équivalence (14) est vérifiée l'Equ.(15) l'est aussi, ceci implique :

$$\frac{|A|}{2} . [Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)]^t - {}_{[J]}\Phi({}_{\Psi}\mathbf{s}) = \frac{|A|}{2} . [Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)] + {}_{[J]}\Phi({}_{\Psi}\mathbf{s})$$

   Pour que la polynomiale Ψ soit également continue en $\mathbf{q}_2$, il faut pouvoir écrire :

$$[Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)]^t = [Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)]$$

Si elle était effectivement continue en $\mathbf{q}_2$, alors il en résulterait que :

$$_{[J]}\Phi(_{\Psi}\mathbf{s}) = [0]$$

Ce qui ne serait possible que si :

$$_{\Psi}\mathbf{s} = \mathbf{0}$$

□

2. Reconsidérant l'Equ.(16), que la matrice déformante locale, [A], soit connue et que le reste (syn. : résidu) de la décomposition non-triviale soit donné par :

$$\mathbf{z} \equiv \{[A]^t \,.\, [J]\} \,.\, |\mathbf{d} > \tag{17}$$

Lemme 3.2. *Dans un espace de dimension trois E(3, K) équipé d'un produit vectoriel classique (non déformé) où K représente un corps commutatif de caractéristique différente de deux, si le gradient d'une polynomiale Λ de P(2, E(3, K)) peut s'identifier avec un produit vectoriel classique décomposé non-trivialement, alors le résidu de cette décomposition se confond avec un élément de E(3, K) dont les composantes coincident avec les coefficients de degré un de la polynomiale Λ. Il en résulte en particulier que, dans ces circonstances, la décomposition est triviale chaque fois que la polynomiale Λ se réduit à une forme quadratique.*

Preuve - Si l'espace E(3, K) est équipé d'un produit vectoriel classique, alors [A] = [J]. Si, en plus, l'équivalence (14) est vérifiée, alors forcément l'Equ.(16) l'est :

$$\mathbf{z} \equiv \{[A]^t \,.\, [J]\} \,.\, |\mathbf{d} >= \{[J]^t \,.\, [J]\} \,.\, |\mathbf{d} >= |\mathbf{d} >$$

Lorsque la polynomiale Λ est une forme quadratique, alors -par définition- $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ et il devient évident que $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. □

Remarque 3.5. ***Evocation des liens entre les deux polynomiales***

En principe, telle que la question de l'équivalence entre un gradient et un produit vectoriel clasique vient d'être posée, il est nécessaire de découvrir les polynomiales Ψ compatibles avec les Equ.(12) et (13). Or, le document [[d]] a aussi permis de découvrir (le théorème initial et son corollaire immédiat) que l'existence d'une décomposition non-triviale d'un produit vectoriel défini et déformé dans un espace de dimension trois implique automatiquement celle d'une polynomiale de degré deux, un élément de P(2, E(3, K)) tel que :

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in E(3,\, K) \times E(3,\, K) \,:\, |[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >= [P]_{|A|} \,.\, |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

$$\downarrow$$

$$|_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1) - [P]_{|A|}| = \sum_{m,\,n} d_{mn} \,.\, q_1^m \,.\, q_1^n + \sum_{m} d_m \,.\, q_1^m - |P_{|A|}|$$

Il est donc raisonnable de penser que la polynomiale Λ donné au début de cette investigation pourrait résulter d'une telle décomposition non-triviale.

$$\Lambda(\mathbf{q}_1) = |_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1) - [P]_{|A|}|$$

Et si tel est bien le cas, puisque le produit vectoriel déformé est une opération antisymétrique, le produit vectoriel déformé opposé existe et peut se calculer. S'il se décompose non-trivialement, il devient possible de trouver une polynomiale $\Psi(\mathbf{q}_2)$.

Plus concrètement, l'Equ.(15) est le seul point de départ utilisable. Lorsque la polynomiale Ψ est un élément propre de P(2, E(3, K)), il s'agit de résoudre :

$$[Hess_{(\mathbf{q}_1,0)}\Lambda(\mathbf{q}_1)] \;=\; \frac{|A|}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)] \;-\; {}_{[J]}\Phi([Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)]^{-1}\,.\,|\mathbf{q}_2>)$$

Pour alléger l'écriture, tout en tenant compte du fait que les polynomiales pourraient éventuellement être discontinues, je définis :

$$[Hess_{(\mathbf{q}_1,0)}\Lambda(\mathbf{q}_1)] \;=\; [_\Lambda H] \;=\; \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$[Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)] \;=\; [_\Psi H] \;=\; \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$|\mathbf{q}_1> = \left| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\rangle \; ; \; |\mathbf{q}_2> = \left| \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \right\rangle \tag{20}$$

Chaque fois que ceci est possible, il convient de calculer l'inverse de $[_\Psi \mathrm{H}]$. Il s'agit de :

$$[_\Psi H]^{-1} \tag{21}$$

$$=$$

$$\frac{1}{|_{Psi}H|}\,.\,\begin{bmatrix} H_{22}\,.\,H_{33} \,-\, H_{32}\,.\,H_{23} & H_{32}\,.\,H_{13} \,-\, H_{12}\,.\,H_{33} & H_{12}\,.\,H_{23} \,-\, H_{22}\,.\,H_{13} \\ H_{23}\,.\,H_{31} \,-\, H_{33}\,.\,H_{21} & H_{33}\,.\,H_{11} \,-\, H_{13}\,.\,H_{31} & H_{13}\,.\,H_{21} \,-\, H_{23}\,.\,H_{11} \\ H_{21}\,.\,H_{32} \,-\, H_{31}\,.\,H_{22} & H_{31}\,.\,H_{12} \,-\, H_{11}\,.\,H_{32} & H_{11}\,.\,H_{22} \,-\, H_{21}\,.\,H_{12} \end{bmatrix}$$

A partir de là, il est aisé de calculer les composantes du vecteur :

$$[_\Psi H]^{-1}\,.\,|\mathbf{q}_2>$$

$$=$$

$$\left| \begin{matrix} (H_{22}\,.\,H_{33} \,-\, H_{32}\,.\,H_{23})\,.\,X \,+\, (H_{32}\,.\,H_{13} \,-\, H_{12}\,.\,H_{33})\,.\,Y \,+\, (H_{12}\,.\,H_{23} \,-\, H_{22}\,.\,H_{13})\,.\,Z \\ (H_{23}\,.\,H_{31} \,-\, H_{33}\,.\,H_{21})\,.\,X \,+\, (H_{33}\,.\,H_{11} \,-\, H_{13}\,.\,H_{31})\,.\,Y \,+\, (H_{13}\,.\,H_{21} \,-\, H_{23}\,.\,H_{11})\,.\,Z \\ (H_{21}\,.\,H_{32} \,-\, H_{31}\,.\,H_{22})\,.\,X \,+\, (H_{31}\,.\,H_{12} \,-\, H_{11}\,.\,H_{32})\,.\,Y \,+\, (H_{11}\,.\,H_{22} \,-\, H_{21}\,.\,H_{12})\,.\,Z \end{matrix} \right\rangle \tag{22}$$

$$=$$

$$\left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \chi \end{matrix} \right\rangle$$

Ces trois composantes $(\alpha,\, \beta,\, \chi)$ peuvent ensuite être replacées au sein de la matrice de décomposition triviale. Il en résulte finalement un système sophistiqué de neuf équations :

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$=$$

$$\frac{|A|}{2}\,.\,\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \;-\; \begin{bmatrix} 0 & -\chi & \beta \\ \chi & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque 3.6. ***La question de la discontinuité***

Le problème des discontinuités n'existe pas lorsque le vecteur $\mathbf{q}_2$ est nul :

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow [{}_{\Lambda}H(\mathbf{q}_1)] = \frac{|A|}{2} . [{}_{\Psi}H(\mathbf{0})] \tag{24}$$

Mais, envisager un vecteur $\mathbf{q}_2$ nul dans la procédure d'équivalence décrite symboliquement par l'Equ.(14), entre le calcul d'un gradient et celui d'un produit vectoriel classique impliquant ce vecteur $\mathbf{q}_2$, n'est cohérent que si le gradient est nul ; en l'occurence ici : si $\mathbf{Grad}\Lambda(\mathbf{q}_1) = \mathbf{0}$. Il reste à se demander si l'annulation de ce gradient ne s'accompagne pas forcément de celle de la Hessienne de la polynomiale Λ ?

Exemple 3.1. *Oscillations énergétiques atomiques et moléculaires.*

Fort heureusement pour la suite du développement de cette investigation, l'existence simultanée d'un gradient nul et d'une Hessienne qui ne l'est pas forcément coincide avec les conditions rencontrées en physique :

— Dans la description des oscillations énergétiques moléculaires (voir par exemple : [[06] ; p. 395]).
— Dans l'approximation de Born-Oppenheimer (voir par exemple : [06 ; pp. 421-422]).
— Dans l'étude des oscillations des réseaux cristallins (voir par exemple : [06 ; pp. 423-436]).

Pour autant, il est facile de comprendre que ce sous-ensemble de situations validant les Equ.(15), (16) et (14) représente un cas logique limite dépouillant l'investigation de la majeure partie de son intérêt. Il faut donc s'attaquer à l'étude du cas général.

Remarque 3.7. ***La diagonale dans le cas général***

Dans les circonstances les plus générales, les Equ.(15), encore reformulables par les Equ.(23), forcent à écrire en ce qui concerne les termes diagonaux :

$$h_{11} = \frac{|A|}{2} . H_{11} \equiv \frac{\partial^2 \Lambda(x, y, z)}{\partial^2 x} = \frac{|A|}{2} . \frac{\partial^2 \Psi(X, Y, Z)}{\partial^2 X} \tag{25}$$

$$h_{22} = \frac{|A|}{2} . H_{22} \equiv \frac{\partial^2 \Lambda(x, y, z)}{\partial^2 y} = \frac{|A|}{2} . \frac{\partial^2 \Psi(X, Y, Z)}{\partial^2 Y} \tag{26}$$

$$h_{33} = \frac{|A|}{2} . H_{33} \equiv \frac{\partial^2 \Lambda(x, y, z)}{\partial^2 z} = \frac{|A|}{2} . \frac{\partial^2 \Psi(X, Y, Z)}{\partial^2 Z} \tag{27}$$

Les termes diagonaux situés de part et d'autre du signe de l'égalité sont proportionnels. J'ai considéré au début de cette investigation que les coefficients de la polynomiale Λ étaient indépendants des variables x, y et z. Si ces variables sont également indépendantes des X, Y, Z, alors les composantes de la Hessienne $[{}_{\Lambda}\mathrm{H}]$ peuvent, à la limite et dans une première approche, être vues comme des constantes ne dépendant pas non plus des X, Y, Z. Ce fait autorise une tentative d'intégration des composantes diagonales de la Hessienne $[{}_{\Psi}\mathrm{H}]$; par exemple :

$$\int_X \frac{|A|}{2} . \frac{\partial^2 \Psi(X, Y, Z)}{\partial^2 X} . dX = \int_X h_{11} . dX = h_{11} . \int_X dX = h_{11} . X + f(Y, Z)$$

De sorte qu'apparemment :

$$\frac{|A|}{2} . \frac{\partial \Psi(X, Y, Z)}{\partial X} = h_{11} . X + f(Y, Z) \tag{28}$$

De même :

$$\frac{|A|}{2} . \frac{\partial \Psi(X, Y, Z)}{\partial Y} = h_{22} . Y + g(X, Z) \tag{29}$$

$$\frac{|A|}{2} . \frac{\partial \Psi(X, Y, Z)}{\partial Z} = h_{33} . Z + h(X, Y) \tag{30}$$

Jusque là, tout va bien. Je remarquerai aussi ici que la question de l'intégrabilité de la polynomiale Ψ est considérée comme acquise, évidente. Ce ne devrait en réalité pas toujours et systématiquement être le cas. Mais peu importe, les situations compliquées seront examinées plus tard. Il faut maintenant calculer les dérivées partielles des expressions ci-dessus ; il vient successivement :

$$\frac{|A|}{2} . \frac{\partial^2 \Psi(X, Y, Z)}{\partial Y \partial X} = \frac{\partial f(Y, Z)}{\partial Y} \tag{31}$$

$$\frac{|A|}{2} . \frac{\partial^2 \Psi(X, Y, Z)}{\partial X \partial Y} = \frac{\partial g(X, Z)}{\partial X} \tag{32}$$

et :

$$\frac{|A|}{2} . \frac{\partial^2 \Psi(X, Y, Z)}{\partial Z \partial Y} = \frac{\partial g(X, Z)}{\partial Z} \tag{33}$$

$$\frac{|A|}{2} . \frac{\partial^2 \Psi(X, Y, Z)}{\partial Y \partial Z} = \frac{\partial h(X, Y)}{\partial Y} \tag{34}$$

et :

$$\frac{|A|}{2} . \frac{\partial^2 \Psi(X, Y, Z)}{\partial X \partial Z} = \frac{\partial h(X, Y)}{\partial X} \tag{35}$$

$$\frac{|A|}{2} . \frac{\partial^2 \Psi(X, Y, Z)}{\partial Z \partial X} = \frac{\partial f(Y, Z)}{\partial Z} \tag{36}$$

Définition 3.2. ***Hessienne comme table de Pythagore pour la composition des fonctions***

De manière à éviter certaines imprécisions dont les conséquences sur les calculs peuvent s'avérer fâcheuses, je rappelle que l'Equ.(19) doit conventionnellement se comprendre comme suit :

$$[_{\Psi}H] = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Psi(X,Y,Z)}{\partial^2 X} & \frac{\partial^2 \Psi(X,Y,Z)}{\partial Y \partial X} & \frac{\partial^2 \Psi(X,Y,Z)}{\partial Z \partial X} \\ \frac{\partial^2 \Psi(X,Y,Z)}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 \Psi(X,Y,Z)}{\partial^2 Y} & \frac{\partial^2 \Psi(X,Y,Z)}{\partial Z \partial Y} \\ \frac{\partial^2 \Psi(X,Y,Z)}{\partial X \partial Z} & \frac{\partial^2 \Psi(X,Y,Z)}{\partial Y \partial Z} & \frac{\partial^2 \Psi(X,Y,Z)}{\partial^2 Z} \end{bmatrix}$$

Cette convention a l'avantage de permettre d'interpréter n'importe quelle Hessienne comme une forme particulière de table de Pythagore. En effet, à condition de définir :

— Un *opérateur dérivation partielle par rapport au* triplé de variables (X, Y, Z) qui se trouve être les composantes du vecteur $\mathbf{q}_2$ et de le noter :

$$\partial_{\mathbf{q}_2} : (\frac{\partial}{\partial X}, \frac{\partial}{\partial Y}, \frac{\partial}{\partial Z})$$

— Le gradient classique, par exemple de la polynomiale Ψ, par :

$$\mathbf{Grad}_{\mathbf{q}_2} \Psi(\mathbf{q}_2) : (\frac{\partial \Psi(X, Y, Z)}{\partial X}, \frac{\partial \Psi(X, Y, Z)}{\partial Y}, \frac{\partial \Psi(X, Y, Z)}{\partial Z})$$

Toute Hessienne peut se concevoir comme le résultat du calcul d'une table de Pythagore pour la composition des fonctions notée :

$$[Hess_{(\mathbf{q}_2, 0)} \Psi(\mathbf{q}_2)] = T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}_2}, \mathbf{Grad}_{\mathbf{q}_2} \Psi(\mathbf{q}_2)) \tag{37}$$

Ces conventions et ces écritures peuvent s'affiner et se généraliser (voir la littérature scientifique). Pour l'heure, elles permettent de redécouvrir aisément une relation remarquable connue ; à savoir :

$$[Hess_{(\mathbf{q}_2, 0)} \Psi(\mathbf{q}_2)] - [Hess_{(\mathbf{q}_2, 0)} \Psi(\mathbf{q}_2)]^t = {}_{[J]}\Phi(\mathbf{Rot}(\mathbf{Grad}_{\mathbf{q}_2} \Psi(\mathbf{q}_2))) \tag{38}$$

Cette relation permet de comprendre que l'existence d'une discontinuité s'accompagne de l'apparition d'un rotationnel (tenseur tourbillon des espaces de dimension trois) du gradient de la polynomiale considérée.

Remarque 3.8. ***Une propriété du vecteur singulier de la polynomiale inconnue*** Ψ

Tout ceci ayant été précisé, les composantes hors-diagonale de l'Equ.(15) apportent de nouvelles informations dont il convient de tenir compte ; par exemple :

$$h_{12} \,=\, \frac{|A|}{2}\,.\,H_{12} \,+\, \chi \,=\, \frac{\partial f(Y,\,Z)}{\partial Y} \,+\, \chi \tag{39}$$

$$h_{21} \,=\, \frac{|A|}{2}\,.\,H_{21} \,-\, \chi \,=\, \frac{\partial g(X,\,Z)}{\partial X} \,-\, \chi$$

$$h_{13} \,=\, \frac{|A|}{2}\,.\,H_{13} \,-\, \beta \,=\, \frac{\partial h(X,\,Y)}{\partial X} \,-\, \beta$$

$$h_{31} \,=\, \frac{|A|}{2}\,.\,H_{31} \,+\, \beta \,=\, \frac{\partial f(Y,\,Z)}{\partial Z} \,+\, \beta$$

$$h_{23} \,=\, \frac{|A|}{2}\,.\,H_{23} \,+\, \alpha \,=\, \frac{\partial g(X,\,Z)}{\partial Z} \,+\, \alpha$$

$$h_{32} \,=\, \frac{|A|}{2}\,.\,H_{32} \,-\, \alpha \,=\, \frac{\partial h(X,\,Y)}{\partial Y} \,-\, \alpha$$

avec, rappel de l'Equ.(22) :

$$\alpha = (H_{22}\,.\,H_{33} - H_{32}\,.\,H_{23})\,.\,X + (H_{32}\,.\,H_{13} - H_{12}\,.\,H_{33})\,.\,Y + (H_{12}\,.\,H_{23} - H_{22}\,.\,H_{13})\,.\,Z$$

$$\beta = (H_{23}\,.\,H_{31} - H_{33}\,.\,H_{21})\,.\,X + (H_{33}\,.\,H_{11} - H_{13}\,.\,H_{31})\,.\,Y + (H_{13}\,.\,H_{21} - H_{23}\,.\,H_{11})\,.\,Z$$

$$\chi = (H_{21}\,.\,H_{32} - H_{31}\,.\,H_{22})\,.\,X + (H_{31}\,.\,H_{12} - H_{11}\,.\,H_{32})\,.\,Y + (H_{11}\,.\,H_{22} - H_{21}\,.\,H_{12})\,.\,Z$$

Il est maintenant possible de remplacer les composantes de $[_\Psi \mathrm{H}]$ par celles, supposées constantes, de $[_\Lambda \mathrm{H}]$. Le résultat de cette substitution est que ce système de trois combinaisons linéaires écrites en fonction des composantes du vecteur $\mathbf{q}_2$ devient un système de trois polynomiales de degré deux établissant en réalité une condition de cohérence sur les composantes du vecteur singulier de la polynomiale Ψ. Une fois les injections faites, ce système se métamorphose en trois formes finslériennes écrites en fonction des coordonnées du vecteur singulier de la polynomiale Ψ. Tous les coefficients de ces formes dépendent de la Hessienne constante et présumée connue au départ, $[_\Lambda \mathrm{H}]$, et du vecteur $\mathbf{q}_2$:

$$_\Psi\mathbf{s}\,:\,(\alpha,\,\beta,\chi) \,=\, (\alpha_1,\,\alpha_2,\alpha_3) \tag{40}$$

$$k \,=\, 1,\,2,\,3\,:$$

$$\sum_{j\geq i}\,{}_k c_{ij}([_\Lambda H],\,\mathbf{q}_2)\,.\,\alpha_i\,.\,\alpha_j \,+\, {}_k c_i([_\Lambda H],\,\mathbf{q}_2)\,.\,\alpha_i \,+\, {}_k c([_\Lambda H],\,\mathbf{q}_2) \,=\, 0$$

Remarque 3.9. ***La polynomiale inconnue*** Ψ

Ici, les vraies difficultés commencent. Quatre cas peuvent se présenter, *en théorie* :

1. Le cas de deux polynomiales continues ; il a été examiné ci-dessus au niveau du premier alinéa de la remarque 3.4 et du lemme 3.1.
2. Le cas où Λ est continue ($\mathrm{h}_{ij} = \mathrm{h}_{ji}$) mais Ψ est discontinue.
3. Le cas où Λ est discontinue mais Ψ est continue ($\mathrm{H}_{ij} = \mathrm{H}_{ji}$).
4. Le cas où les deux polynomiales sont discontinues.

Compte tenu des premiers éléments obtenus ci-dessus, il n'est pas stupide de proposer que cette polynomiale est elle aussi une forme finslérienne :

$$\Psi(X,\, Y,\, Z) \,=\, \sum_{j \geq i} c_{ij} \,.\, q_2^i \,.\, q_2^j \,+\, c_i \,.\, q_2^i \,+\, c \tag{41}$$

Dans ce cas, et à supposer que les coefficients ne dépendent pas des composantes de $\mathbf{q}_2$:

$$\begin{aligned}
\frac{|A|}{2} \,.\, \frac{\partial \Psi(X,\, Y,\, Z)}{\partial X} \,&=\, h_{11} \,.\, X \,+\, f(Y,\, Z) \,=\, \frac{|A|}{2} \,.\, \{2.c_{11} \,.\, X \,+\, c_{12} \,.\, Y \,+\, c_{13} \,.\, Z \,+\, c_1\} \\
\frac{|A|}{2} \,.\, \frac{\partial \Psi(X,\, Y,\, Z)}{\partial Y} \,&=\, h_{22} \,.\, Y \,+\, g(X,\, Z) \,=\, \frac{|A|}{2} \,.\, \{2.c_{22} \,.\, Y \,+\, c_{12} \,.\, X \,+\, c_{23} \,.\, Z \,+\, c_2\} \\
\frac{|A|}{2} \,.\, \frac{\partial \Psi(X,\, Y,\, Z)}{\partial Z} \,&=\, h_{33} \,.\, Z \,+\, h(X,\, Y) \,=\, \frac{|A|}{2} \,.\, \{2.c_{33} \,.\, Z \,+\, c_{13} \,.\, X \,+\, c_{23} \,.\, Y \,+\, c_3\}
\end{aligned} \tag{42}$$

D'où il semble découler :

$$\begin{aligned}
i \,=\, 1,\, 2,\, 3 \,:\, h_{ii} \,&=\, |A| \,.\, c_{ii} \\
f(Y,\, Z) \,&=\, \frac{|A|}{2} \,.\, \{c_{12} \,.\, Y \,+\, c_{13} \,.\, Z \,+\, c_1\} \\
g(X,\, Z) \,&=\, \frac{|A|}{2} \,.\, \{c_{12} \,.\, X \,+\, c_{23} \,.\, Z \,+\, c_2\} \\
h(X,\, Y) \,&=\, \frac{|A|}{2} \,.\, \{c_{13} \,.\, X \,+\, c_{23} \,.\, Y \,+\, c_3\}
\end{aligned} \tag{43}$$

Puis :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(Y,\, Z)}{\partial Y} \,&=\, |A| \,.\, c_{12} \,=\, h_{12} \,-\, \chi \\
\frac{\partial f(Y,\, Z)}{\partial Z} \,&=\, |A| \,.\, c_{13} \,=\, h_{31} \,-\, \beta \\
\frac{\partial g(X,\, Z)}{\partial X} \,&=\, |A| \,.\, c_{12} \,=\, h_{21} \,+\, \chi \\
\frac{\partial g(X,\, Z)}{\partial Z} \,&=\, |A| \,.\, c_{23} \,=\, h_{23} \,-\, \alpha \\
\frac{\partial h(X,\, Y)}{\partial X} \,&=\, |A| \,.\, c_{13} \,=\, h_{13} \,+\, \beta \\
\frac{\partial h(X,\, Y)}{\partial Y} \,&=\, |A| \,.\, c_{23} \,=\, h_{32} \,+\, \alpha
\end{aligned} \tag{44}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}
\alpha \,&=\, \frac{1}{2} \,.\, (h_{32} \,-\, h_{23}) \\
\beta \,&=\, \frac{1}{2} \,.\, (h_{31} \,-\, h_{13}) \\
\chi \,&=\, \frac{1}{2} \,.\, (h_{12} \,-\, h_{21})
\end{aligned} \tag{45}$$

Lemme 3.3. ***Vecteur singulier de la polynomiale*** Ψ *: Lorsque la polynomiale inconnue* Ψ *est une forme finslérienne présumée propre (équiv. : elle accepte un vecteur singulier) décrite par une équation générique du type Equ.(41), et que l'Equ.(14) est vérifiée, les composantes de son vecteur singulier sont celles du rotationnel du gradient de la polynomiale connue* $\Lambda(\boldsymbol{q}_1)$*.*

De sorte que si la polynomiale Λ est continue en $\mathbf{q}_1$, le vecteur singulier de la polynomiale inconnue Ψ est nul. Ainsi, dans le cadre de cette investigation et de la proposition symbolisée par l'Equ.(14), le vecteur singulier de la polynomiale Ψ peut être calculé. In fine, grâce aux Equ.(22) et (45), il devient possible d'en déduire les composantes du vecteur $\mathbf{q}_2$ sensé se substituer au gradient de la polynomiale Λ.

$$|\mathbf{q}_2 > \tag{46}$$

$$=$$

$$[_\Psi H] \,.\, |_\Psi \mathbf{s} >$$

$$=$$

$$\frac{1}{|A|} \,.\, \begin{bmatrix} h_{11} & \frac{1}{2} \,.\, (h_{12} \,+\, h_{21}) & \frac{1}{2} \,.\, (h_{31} \,+\, h_{13}) \\ \frac{1}{2} \,.\, (h_{12} \,+\, h_{21}) & h_{22} & \frac{1}{2} \,.\, (h_{23} \,+\, h_{32}) \\ \frac{1}{2} \,.\, (h_{13} \,+\, h_{31}) & \frac{1}{2} \,.\, (h_{32} \,+\, h_{23}) & h_{33} \end{bmatrix} \,.\, \left| \begin{matrix} h_{32} \,-\, h_{23} \\ h_{31} \,-\, h_{13} \\ h_{12} \,-\, h_{21} \end{matrix} \right\rangle$$

Le problème que je me suis posé au début de cette section est donc pratiquement résolu et je propose d'énoncer le :

Théorème 3.1. ***du produit vectoriel équivalent à un gradient***

Soit une polynomiale $\Lambda(\mathbf{q}_1)$ de P(2, E(3, K)) de classe au moins égale à C_2 *qui n'est pas forcément continue partout.* Il est toujours possible de substituer au calcul du gradient de cette polynomiale par rapport aux composantes de son argument $\mathbf{q}_1$ le calcul d'un produit vectoriel classique entre un vecteur $\mathbf{q}_2$ de E(3, K) par cet argument, à condition de définir le vecteur de substitution $\mathbf{q}_2$ par :

$$|\mathbf{q}_2 >= \frac{1}{2.|A|} \,.\, \{[_\Lambda Hess] \,+\, [_\Lambda Hess]^t\} \,.\, |\mathbf{Rot}(\mathbf{Grad}_{\mathbf{q}_1} \Lambda(\mathbf{q}_1)) > \tag{47}$$

Définition 3.3. *Le vecteur associé à une matrice.*

S'il est bien clair que, dans cette section, la matrice $[_\Lambda \mathrm{H}]$ est une Hessienne, je ne peux m'empêcher de remarquer que l'Equ.(46) pourrait être définie formellement pour n'importe quel élément $[\mathrm{h}_{ij}]$ de M(3, K) ; sous-entendu : sans pour autant que cette matrice ait obligation d'être une Hessienne.

Ainsi, à l'instar d'une idée dûe à E. Cartan dans [[01]], je propose d'associer systématiquement un élément **h** de E(3, K) à n'importe quelle matrice carrée $[\mathrm{h}_{ij}]$ de M(3, K) à l'aide de l'Equ.(46). Par convention du langage, ce vecteur sera appelé *le vecteur associé à la matrice* [h].

Définition 3.4. *Le vecteur "écart à la symétrie d'une matrice".*

A tout élément matriciel de M(3, K) peut également être associé un deuxième vecteur mesurant, au moins indirectement, l'écart à la symétrie de cette matrice. Par convention il s'agit du vecteur :

$$|\mathbf{E}([h]) >= \left| \begin{matrix} h_{32} \,-\, h_{23} \\ h_{31} \,-\, h_{13} \\ h_{12} \,-\, h_{21} \end{matrix} \right\rangle$$

Par convention du langage, ce vecteur sera appelé *l'écart à la symétrie* de la matrice [h].

Remarque 3.10. ***Sur la construction du vecteur associé à une matrice.***

Les deux définitions précédentes permettent d'affirmer que l'image duale dans $E^*(3, K)$ du *vecteur associé à une matrice* de M(3, K) est le résultat du produit de la moitié de la partie symétrique de cette matrice par *l'écart à la symétrie* de cette matrice.

$$|\mathbf{h}([h]) >= \frac{1}{2} . \{[h] + [h]^t\} . |\mathbf{E}([h]) >$$

Exemple 3.2. *Le groupe de Heisenberg $H_3(K)$*

Par convention, un élément du groupe de Heisenberg est défini par [[12]] :

$$H_3(K) = \{ \begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, a, b, c \in K\}$$

Il est facile de constater que :

$$\forall [h] \in H_3(K) : |\mathbf{E}([h]) >= \left| \begin{matrix} h_{32} - h_{23} \\ h_{31} - h_{13} \\ h_{12} - h_{21} \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} 0 - b \\ 0 - c \\ a - 0 \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} -b \\ -c \\ a \end{matrix} \right\rangle$$

Par ailleurs :

$$\forall [h] \in H_3(K) : [h] + [h]^t = \begin{bmatrix} 2 & a & c \\ a & 2 & b \\ c & b & 2 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, le vecteur associé à un élément [h] de $H_3(K)$ lorsque K est un corps commutatif a toujours le formalisme :

$$\forall [h] \in H_3(K) : |\mathbf{h}([h]) >= \frac{1}{2} . \begin{bmatrix} 2 & a & c \\ a & 2 & b \\ c & b & 2 \end{bmatrix} . \left| \begin{matrix} -b \\ -c \\ a \end{matrix} \right\rangle = \left| \begin{matrix} -b \\ -c \\ -b.c + a \end{matrix} \right\rangle$$

Remarque 3.11. ***Sur la nullité du vecteur associé à une matrice.***

Il ressort facilement de la remarque 3.10 ci-dessus que le vecteur associé aux matrices entièrement anti-symétriques ($[h]^t$ = -[h]) ou entièrement symétriques ($\mathbf{E}$([h]) = $\mathbf{0}$) est le vecteur nul de E(3, K).

En particulier, si la matrice [h] est la Hessienne d'une fonction de trois variables évoluant dans K, il ne peut lui être associé un vecteur non-nul que si cette fonction présente des discontinuités. Ainsi, le théorème précédent et l'équivalence représentée par l'Equ.(6) n'ont un réel intérêt que pour la description de discontinuités. Plus précisément, pour chaque polynomiale réputée être continue à l'intérieur de son domaine de définition, la discussion menée dans cette section doit être revue de manière beaucoup plus subtile. Ce point stratégique est analysé dans la section suivante.

3.3 Commentaires

Cette section a étudié la possibilité de comparer, dans la représentation duale d'un espace vectoriel de dimension trois, la décomposition d'un produit vectoriel $\mathbf{q}_2 \wedge \mathbf{q}_1$ et la représentation du gradient d'une fonction polynomiale de trois variables, noté : $\mathbf{Grad}_{\mathbf{q}_1}\Lambda(\mathbf{q}_1)$. Il entr'ouvre la porte des possibles (équiv. : l'ensemble des situations pour lesquelles le vecteur $\mathbf{q}_2$ n'est pas systématiquement nul) à condition de se pencher à nouveau sur la notion de discontinuité des fonctions. Un sujet dont les prémisses ont été traitées dès 1875 par Darboux [[02]] puis en 1905 par Baire [[03]] mais qui connait de très nombreux développements dont les passionnés trouveront par exemple des traces récentes dans [[13]].

4 Le cas des fonctions vectorielles

4.1 Rappel succinct des acquis

Je poursuis ici patiemment la recherche de représentations matricielles pour la notion de dérivation. Bien que limitée aux espaces vectoriels de dimension trois, la troisième section a permis de progresser un peu en ce sens qu'elle a, pour la première fois, formaliser le débat. La problématique y a consisté à découvrir un élément $\mathbf{q}_2$ de E(3, K) tel que son produit vectoriel classique par un vecteur de E(3, K) dont les composantes coincident avec les variables d'une fonction polynomiale Λ de degré deux, soit $\mathbf{q}_1$ ce vecteur, vale le gradient de cette fonction.
De manière synthétique j'ai examiné (i) s'il était possible de et (ii) ce qu'impliquait le fait de vouloir écrire la correspondance :

$$\Lambda(\mathbf{q}_1) \to \mathbf{q}_2 \,:\, |\mathbf{q}_2 \wedge \mathbf{q}_1 >= \mathbf{Grad}_{\mathbf{q}_1}\Lambda(\mathbf{q}_1)$$

Pour y parvenir, j'ai dû accepter d'introduire le concept de produit vectoriel décomposé non-trivialement (même quand ce produit est classique) et me soumettre à l'évidence : le vecteur recherché, $\mathbf{q}_2$, n'est pas nul si le vecteur $\mathbf{q}_1$ est solution d'une fonction caractérisée par des dérivées partielles secondes non continues.

Comme une polynomiale est réputée être continue sur son domaine de définition et que le calcul du gradient réalisé dans la troisième section concerne une polynomiale de degré deux, la démarche logique aboutit à un résultat négatif.

Mais elle suggère aussi de ne pas renoncer et d'aborder la même problématique de manière plus subtile. Par exemple, elle invite à se demander de façon plus abstraite : “Quand les éléments d'une décomposition (éventuellement non-triviale) d'un produit tensoriel/de Lie (éventuellement déformé) sont-ils comparables aux éléments d'un développement limité à l'ordre deux près ?”

Visuellement, et pour les produits tensoriels déformés, la question consiste à savoir quand et comment les deux lignes suivantes :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} . dx + 0(2)$$

$$| \otimes_A (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) >= [P] . |\mathbf{q}_1 > + |\mathbf{z} >$$

peuvent être rendues équivalentes et de façon à permettre de formellement écrire :

$$f(x) - f(x_0) \equiv \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \equiv [P]$$

$$dx \equiv \mathbf{q}_1$$

$$0(2) \equiv \mathbf{z}$$

La seconde ligne décrit une décomposition quelconque et implique des vecteurs de l'espace dual E*(D, K) ; elle me sert de référence. Il faut donc préciser la première ligne. J'ai la possibilité de faire le choix d'une fonction vectorielle dont chacune des D composantes est une fonction numérique simple dépendant de D variables choisies dans K. Dans ce cas, il est préférable d'écrire :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0), \, \mathbf{x}, \, \mathbf{x}_0 \in E(D, K)$$

Ceci correspond dans l'espace dual à :

$$\begin{bmatrix} f_0(\mathbf{x}) \,-\, f_0(\mathbf{x}_0) \\ \dots \\ f_\alpha(\mathbf{x}) \,-\, f_\alpha(\mathbf{x}_0) \\ \dots \\ f_{D-1}(\mathbf{x}) \,-\, f_{D-1}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_\beta \frac{\partial f_0(\mathbf{x})}{\partial x^\beta} \, . \, dx^\beta \,+\, 0_0(2) \\ \dots \\ \sum_\beta \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x^\beta} \, . \, dx^\beta \,+\, 0_\alpha(2) \\ \dots \\ \sum_\beta \frac{\partial f_{D-1}(\mathbf{x})}{\partial x^\beta} \, . \, dx^\beta \,+\, 0_{D-1}(2) \end{bmatrix}$$

et, par une simple remise en forme, à :

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) \,-\, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) >= [\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x^\beta}] \, . \, |d\mathbf{x} > \, + \mathbf{0}(2)$$

L'écriture peut même être condensée un cran de plus en réintroduisant la notion de table de Pythagore pour la composition des fonctions apparue au cours de la section 03.

$$[\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x^\beta}] \,=\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \,\in\, M(D, \, K)$$

In fine, la question posée est mieux formulée de la manière suivante :

$$\exists \, \mathbf{q}_2 \,\in\, E(D, \, K) \,:\, |\mathbf{f}(\mathbf{x}) \,-\, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) >= T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \, . \, |d\mathbf{x} > \, + \mathbf{0}(2)$$

$$\equiv$$

$$\otimes_A(\mathbf{q}_2, \, \mathbf{q}_1) \, ?$$

Deux informations complémentaires :
(i) le terme placé à droite de l'équivalence peut aussi être un produit de Lie déformé. Il suffit de focaliser par exemple la discussion sur des cubes A antisymétriques comme ceci a bien été démontré dans la section 01. Tout dépend le type de problème traité :

$$\exists \, \mathbf{q}_2 \,\in\, E(D, \, K) \,:\, |\mathbf{f}(\mathbf{x}) \,-\, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) >= T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \, . \, |d\mathbf{x} > \, + \mathbf{0}(2)$$

$$\equiv$$

$$[\mathbf{q}_2, \, \mathbf{q}_1]_A \, ?$$

(ii) l'approche ci-dessus se distingue heureusement de celle proposée au cours de la troisième section parce qu'elle dédouane de l'obligation de travailler avec des Hessiennes.

Pour finir de pouvoir comparer les variations d'une fonction vectorielle et les décompositions d'un produit tensoriel (resp. de Lie), il reste à poser :

$$d\mathbf{x} \,\equiv\, \mathbf{q}_1$$

$$\mathbf{0}(2) \,\equiv\, \mathbf{z}$$

4.2 Retour sur les produits vectoriels déformés

Muni de ces prémisses, je propose de réexaminer la question posée au cours de la troisième section et de poser : “Existe-t-il un élément $\mathbf{q}_2$ de E(3, K) tel que :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \,-\, \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \,=\, \mathbf{q}_2 \,\wedge\, d\mathbf{x} \, ?$$

Compte tenu des connaissances acquises préalablement, il revient au même de se demander si le fait d'écrire :

$$[A]^t \, . \, [J] \, . \, \{T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \, . \, |d\mathbf{x} > \, + \mathbf{0}(2)\}$$

$$=$$
$$[A]^t \,.\, [J] \,.\, |\mathbf{q}_2 \wedge d\mathbf{x}> = [P]_{|A|} \,.\, |d\mathbf{x}> + |\mathbf{z}>$$

est plausible ? Lorsque la réponse est positive, il vient :

$$[A]^t \,.\, [J] \,.\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \;=\; [P]_{|A|} \,;\, [A]^t \,.\, [J] \,.\, |\mathbf{0}(2)> \equiv \mathbf{z}$$

Lorsque la partie principale est de type I :

$$[P]_{|A|} \;=\; |A| \,.\, [A]^t \,.\, [J] \,.\, \{\frac{1}{2} \,.\, [Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)] \;+\; \frac{1}{|A|} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}_{\Psi}\mathbf{s})\},\; |A| \;=\; \pm 1$$

Comme la matrice $[A]^t.[J]$ est inversible (parce que |A| = ± 1 et |J| = -1), il vient dans le cadre des circonstances autorisant ces décompositions non-triviales :

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\, \mathbf{f}(\mathbf{x})) \;=\; |A| \,.\, \{\frac{1}{2} \,.\, [Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)] \;+\; \frac{1}{|A|} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}_{\Psi}\mathbf{s})\},\; |A| \;=\; \pm 1$$

La table de Pythagore symbolisant les variations d'ordre un de la fonction vectorielle s'identifie avec le noyau de la partie principale de la décomposition non triviale. Le résidu de cette décomposition est le résultat de l'action de la matrice déformante sur un zéro d'ordre deux. Etant maintenant débarassé du problème handicapant de la question des discontinuités, les raisonnements menés au cours de la troisième section peuvent être reproduits. La fonction Ψ -dont le vecteur recherché $\mathbf{q}_2$ est solution- est une polynomiale donnée grâce au théorème initial démontré dans [[d]]. Quand le noyau est de type I, c'est qu'elle est propre. Je peux donc à nouveau écrire :

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\, \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$
$$=$$
$$|A| \,.\, \{\frac{1}{2} \,.\, [Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)] \;-\; {}_{[J]}\Phi([Hess_{(\mathbf{q}_2,0)}\Psi(\mathbf{q}_2)]^{-1} \,.\, |\mathbf{q}_2>)\}$$

Les Equ.(13), (14) de la section 03 restent vraies et inchangées. L'Equ.(15), reformulée en Equ.(23) devient ici :

$$[\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{x})}{\partial x^\beta}]$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix}$$
$$=$$
$$\frac{|A|}{2} \,.\, \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\chi & \beta \\ \chi & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Les Equ.(25), (26) et (27) de la troisième section, remarque 3.7, s'écrivent :

$$h_{11} \;=\; \frac{|A|}{2} \,.\, H_{11} \;=\; \frac{|A|}{2} \,.\, \frac{\partial^2\Psi(X,\, Y,\, Z)}{\partial^2 X}$$
$$h_{22} \;=\; \frac{|A|}{2} \,.\, H_{22} \;=\; \frac{|A|}{2} \,.\, \frac{\partial^2\Psi(X,\, Y,\, Z)}{\partial^2 Y}$$
$$h_{33} \;=\; \frac{|A|}{2} \,.\, H_{33} \;=\; \frac{|A|}{2} \,.\, \frac{\partial^2\Psi(X,\, Y,\, Z)}{\partial^2 Z}$$

En partant du principe que la fonction vectorielle $\mathbf{f}$ ne dépend pas des composantes de $\mathbf{q}_2$, les Equ.(28), (29) et (30) de la troisième section restent valables et elles engendrent à nouveau les Equ.(31) à (36). De sorte que les relations contenues dans l'Equ.(39) demeurent inchangées. Poursuivant le cheminement exposé au travers des Equ.(41) à (44), il en résulte cette fois-ci sans équivoque et sans limitation sur la généralité que :

— Le vecteur propre de la polynomiale propre à laquelle doit appartenir le vecteur recherché $\mathbf{q}_2$ est défini par :

$$_{\Psi}\mathbf{s} \;=\; \frac{1}{2}\,.\,\mathbf{Rot}_{\mathbf{x}}\,\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

— Le vecteur recherché est le vecteur associé à la table de Pythagore défini ci-dessus ; il vaut :

$$|\mathbf{q}_2> = \frac{1}{2}\,.\,\{T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))\,+\,T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{x}},\,\mathbf{f}(\mathbf{x}))\}\,.\,|\mathbf{Rot}_{\mathbf{x}}\,\mathbf{f}(\mathbf{x})>$$

4.3 Exemple de l'effet Thirring-Lense

Il existe en physique théorique et également, depuis la vérification réalisée au travers de la mission Gravity Probe B, désormais en physique appliquée, une situation où un champ vectoriel rotationnel apparait. Je veux parler de l'effet de la précession dite de Thirring-Lense [[07] ; en allemand, chapitre 30 ; p. 167, (30,20)] :

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}) \;=\; -\frac{c}{2}\,.\,\mathbf{Rot}_{\mathbf{x}}\,\mathbf{h}(\mathbf{x})$$

Cet effet accompagne n'importe quel corps massif (masse M, rayon R) en rotation (vitesse angulaire ω) ; en particulier : la Terre. Il s'explique actuellement dans le cadre de la relativité générale (A. Einstein) en disant que la rotation déforme la géométrie environnante de la façon suivante [[07] ; en allemand, chapitre 30 ; p. 166, (30,12)] en entrainant avec lui le système local inertiel (d'où le vecteur Ω ci-dessus) :

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \;=\; -\frac{4\,.\,G\,.\,M\,.\,R^2}{5\,.\,c^3}\,.\,\frac{\omega\,\wedge\,\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}$$

Ici, c représente la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, G est la constante universelle de gravitation (Newton) et $\mathbf{x}$ est le vecteur indiquant le positionnement spatial par rapport au centre de la source massique en rotation.

Comparaison n'est pas raison dit l'adage : "Comment peut-il alors être vérifié que la précession Ω est éventuellement le vecteur propre d'une polynomiale $\Psi(\mathbf{q}_2)$ dont l'argument est donné par la relation du paragraphe précédent ?"

Le moyen le plus simple est sans doute de raisonner par l'absurde. Si tel était le cas, alors il existerait un vecteur :

$$|\mathbf{q}_2> = \frac{1}{2}\,.\,\{T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\,\mathbf{h}(\mathbf{x}))\,+\,T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{x}},\,\mathbf{h}(\mathbf{x}))\}\,.\,|\mathbf{Rot}_{\mathbf{x}}\,\mathbf{h}(\mathbf{x})>$$

Que représenterait-il physiquement ? En reprenant la démarche logique exposée au début de cette quatrième section, il devrait satisfaire :

$$|\mathbf{h}(\mathbf{x})\,-\,\mathbf{h}(\mathbf{x}_0)> = T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\,\mathbf{h}(\mathbf{x}))\,.\,|d\mathbf{x}>\,+\mathbf{0}(2) \;=\; |\mathbf{q}_2\,\wedge\,d\mathbf{x}>$$

Ou encore, dans le contexte étudié ici :

$$-\frac{4\,.\,G\,.\,M\,.\,R^2}{5\,.\,c^3}\,.\,|\frac{\omega\,\wedge\,d\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}> = T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\,\mathbf{h}(\mathbf{x}))\,.\,|d\mathbf{x}>\,+\mathbf{0}(2) \;=\; |\mathbf{q}_2\,\wedge\,d\mathbf{x}>$$

Il faut donc calculer la table de Pythagore plus précisément. Avant cela, quelques remarques utiles peuvent êtres faites. Si la décomposition du produit vectoriel classique pouvait vraiment se faire trivialement, alors il faudrait écrire simplement :

$$-\frac{4\,.\,G\,.\,M\,.\,R^2}{5\,.\,c^3\,.\,|\mathbf{x}|^3}\,.\,_{[J]}\Phi(\omega)\;\sim\;T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\,\mathbf{h}(\mathbf{x}))\;\sim\;_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_2)$$

Il serait aisé d'en déduire que (i) le champ vectoriel $\mathbf{h}$ est forcément un produit vectoriel :

et (ii) le vecteur recherché $\mathbf{q}_2$ est juste quasiment nul tout en étant colinéaire au vecteur vitesse angulaire ω :

$$-\frac{4\,.\,G\,.\,M\,.\,R^2}{5\,.\,c^3\,.\,|\mathbf{x}|^3}\,.\,\omega\;\sim\;\mathbf{q}_2\;\sim\;\mathbf{0}$$

Il convient maintenant d'affiner ces premiers résultats et de s'interroger sur leur signification physique ; en particulier : sur le sens des décompositions non-triviales.

4.4 Conclusion de la quatrième section

Cette section a étudié la possibilité de comparer, dans la représentation duale d'un espace vectoriel de dimension trois, la décomposition non-triviale d'un produit vectoriel $\mathbf{q}_2 \wedge \mathbf{q}_1$ et les variations d'une fonction vectorielle dépendant de trois variables. Les difficultés rencontrées dans la troisième partie ont disparu. Les variations d'ordre un de cette fonction sont entiérement décrites par une table de Pythagore. Cette table peut être identifiée avec le noyau des décompositions non-triviales du produit vectoriel classique et ces faits suffisent à découvrir le vecteur associé équivalemment à ces variations.

5 Le rôle des surjections

5.1 Spécialisation sur les cubes antisymétriques

Les définitions essentielles se trouvent dans [[e]] mais sont également rappelées dans ce document consacré aux dérivations. La construction d'une C*-algèbre sur {E(D, K = R ou C), $\otimes_A$} a été conduite dans [[f]]. La découverte des conditions autorisant la construction d'une algèbre de Lie sur {E(3, K = R ou C), $[...,\,...]_{[A]}$} a été menée dans [[c]].

Mon objectif consiste maintenant à définir une dérivation intérieure sur L = {E(D, K = R ou C), $\wedge_A$} quand A représente un cube antisymétrique. La notion d'algèbre de Lie abstraite est examinée comme dans [[08] ; §1.4].

Définition 5.1. *Produit de Lie déformé*

Soit E(D, K) un espace vectoriel de dimension entiere D supérieure ou égale à deux rapporté à sa base canonique Ω : ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_\alpha$, ..., $\mathbf{e}_{D-1}$) ; soit deux vecteurs quelconques de cet espace et enfin soit un cube d'éléments de K, anti-symétrique sur ses indices bas et noté A, je dis que le produit de Lie habituel de ces deux vecteurs a été déformé par les éléments du cube A chaque fois que je peux calculer le nouveau vecteur :

$$\forall\, A\,|\,A^k_{ji}\,+\,A^k_{ij}\;=\;0,\,\forall\,(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\,\in\,E^2(D,\,K)\;: \tag{48}$$

$$[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2]_A\;=\;\frac{1}{2}\,.\,\wedge_A(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\;=\;\sum_{i<j}A^k_{ij}\,.\,(q^i_1\,.\,q^j_2\;-\;q^i_2\,.\,q^j_1)\,.\,\mathbf{e}_k$$

5.2 Le foncteur "Produit de Lie déformé"

Proposition 5.1. *Tous les produits de Lie déformés se laissent représenter et décomposer trivialement dans l'espace dual $E^*(D,\,K)$.*

Preuve : il existe un isomorphisme naturel d'espace vectoriel entre E(D, K) et son dual E*(D, K) ; voir [[09] ; pp. 18-27]. Il autorise à représenter n'importe quel produit de Lie déformé par un élément de K^D :

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_A \in E(D, K) \to |\sum_{i<j} A^k_{ij} \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 - q^i_2 \cdot q^j_1) > \in E^*(D, K) \equiv K^D$$

Il est ensuite possible de constater que chaque composante de la représentation duale est une somme du type suivant :

$$\sum_{i<j} A^k_{ij} \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 - q^i_2 \cdot q^j_1) = \sum_{i<j} \frac{1}{2}.(A^k_{ij} + A^k_{ij}) \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 - q^i_2 \cdot q^j_1)$$

Mais, puisque le cube est antisymétrique, il s'agit de :

$$\sum_{i<j} A^k_{ij} \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 - q^i_2 \cdot q^j_1) = \sum_{i<j} \frac{1}{2}.(A^k_{ij} - A^k_{ji}) \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 - q^i_2 \cdot q^j_1)$$

Et, comme il était facile de s'en douter d'emblée en réexaminant les définitions des divers produits déformés :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_A > = \frac{1}{2}.| \wedge_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) > = \frac{1}{2}.|A^k_{ij} \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 - q^i_2 \cdot q^j_1) >$$

L'analyse peut se poursuivre quelques crans plus loin grâce aux faits suivants : (i) K (= R ou C) est un corps commutatif ; (ii) le cube est antisymétrique et (iii) les indices i et j sont muets :

$$\begin{gathered} |[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_A > \\ = \\ \frac{1}{2}.|A^k_{ij} \cdot q^i_1 \cdot q^j_2 - A^k_{ij} \cdot q^i_2 \cdot q^j_1 > \\ = \\ \frac{1}{2}.|A^k_{ij} \cdot q^i_1 \cdot q^j_2 + A^k_{ji} \cdot q^i_2 \cdot q^j_1 > \\ = \\ \frac{1}{2}.|A^k_{ij} \cdot q^i_1 \cdot q^j_2 + A^k_{ji} \cdot q^j_1 \cdot q^i_2 > \\ = \\ \frac{1}{2}.|A^k_{ij} \cdot q^i_1 \cdot q^j_2 + A^k_{ij} \cdot q^i_1 \cdot q^j_2 > \\ = \\ |(A^k_{ij} \cdot q^i_1) \cdot q^j_2 > \\ = \\ [A^k_{ij} \cdot q^i_1] \cdot |q^j_2 > \end{gathered}$$

Finalement :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_A > = {}_A\Phi(\mathbf{q}_1) \cdot |\mathbf{q}_2 > \tag{49}$$

Ainsi, le fait que le cube A soit antisymétrique ne change rien à la possibilité de pouvoir exprimer un produit de Lie déformé dans l'espace dual E*(D, K) sous la forme d'un produit *mixte* entre la décomposition triviale de ce produit, i. e. : la matrice ${}_A\Phi(\mathbf{q}_1)$, et la représentation duale de la cible : $|\mathbf{q}_2>$. L'antisymétrie des coefficients du cube A n'a d'influence effective que sur le détail des composantes de la décomposition triviale, en ce sens qu'elle y fait apparaître un certain nombre de signes négatifs. □

Définition 5.2. *Foncteur : Produit de Lie déformé*

Le constat précédent invite à définir la notion de foncteur "*produit de Lie déformé*". Il est une application de E(D, K) vers l'ensemble E des fonctions endogènes [2] sur E(D, K) telle que :

$$\mathbf{q}_1 \in E(D,\, K) \xrightarrow{A} A(\mathbf{q}_1) \,:\, [\mathbf{q}_1, ...]_A \in E \tag{50}$$

Il peut s'appliquer à n'importe quel vecteur de E(D, K), se définit finalement au travers de l'ensemble des cubes de dimension entière (D - D - D) à composantes dans K et se laisse toujours représenter par au moins un élément de M(D, K), à savoir la décomposition triviale du produit de Lie déformé particulier qu'il génère.

$$[\mathbf{q}_1, ...]_A \in E \xrightarrow{\Phi} {}_A\Phi(\mathbf{q}_1) \in M(D,\, K) \tag{51}$$

Définition 5.3. *Dilatation triviale d'un vecteur*

La composition, dans cet ordre, de l'application A puis de l'application Φ s'appelle par convention du langage *dilatation triviale du vecteur ...* :

$$\mathbf{q}_1 \in E(D,\, K) \xrightarrow{A} A(\mathbf{q}_1) \in E \xrightarrow{\Phi} \Phi(A(\mathbf{q}_1)) \,=\, {}_A\Phi(\mathbf{q}_1) \in M(D,\, K)$$

Je la note conventionnellement :

$$A\, o\, \Phi \,=\, \Phi(A) \,=\, {}_A\Phi \,=\, \hat{d}_A$$

5.3 Surjection et dilatation triviale

Remarque 5.1. ***La question posée***

Le concept précédent de foncteur étant admis, et se trouvant face à un quelconque élément [M] de M(D, K), il semble légitime de se demander s'il peut être la représentation d'une décomposition triviale d'au moins un produit de Lie déformé ?

$$[M] \in M(D,\, K) \,:\, \exists?\, (A,\, \mathbf{q}_1) \,|\, [M] \,=\, [m_{\lambda\mu}] \,=\, [A^{\lambda}_{\chi\mu} \cdot q_1^{\chi}] \,=\, {}_A\Phi(\mathbf{q}_1)$$

Exemple 5.1. *Illustration*

Soit la famille de projectiles dont les composantes covariantes sont définies par :

$${}_1q_{\epsilon} \,=\, \frac{1}{2} \cdot \sum_{\lambda} \sum_{\mu} A^{\lambda}_{\epsilon\mu} \cdot m_{\lambda\mu} \tag{52}$$

Soit à supposer que l'espace E(D, K) est muni d'une métrique non-dégénérée représentée génériquement par un élément [G] de M(D, K) ; alors :

$${}_1q^{\delta} \,=\, \sum_{\epsilon} g^{\delta\epsilon} \cdot {}_1q_{\epsilon} \,=\, \frac{1}{2} \cdot \sum_{\epsilon} g^{\delta\epsilon} \cdot \sum_{\lambda} \sum_{\mu} A^{\lambda}_{\epsilon\mu} \cdot m_{\lambda\mu}$$

Les produits suivants peuvent alors être calculés :

$$\sum_{\delta} A^{\gamma}_{\delta\beta} \cdot {}_1q^{\delta} \,=\, \frac{1}{2} \cdot \sum_{\delta} A^{\gamma}_{\delta\beta} \cdot \sum_{\epsilon} g^{\delta\epsilon} \cdot \sum_{\lambda} \sum_{\mu} A^{\lambda}_{\epsilon\mu} \cdot m_{\lambda\mu}$$

2. Une fonction endogène sur un ensemble E quelconque est une application interne de E, équivalemment de E vers E.

Ils se laissent identifier avec les composantes de la matrice [M] chaque fois qu'il est possible de vérifier :

$$m_{\gamma\beta} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\delta} A^{\gamma}_{\delta\beta} \cdot \sum_{\epsilon} g^{\delta\epsilon} \cdot \sum_{\lambda} \sum_{\mu} A^{\lambda}_{\epsilon\mu} \cdot m_{\lambda\mu}$$

Pour préciser un peu cette condition, je remarque que :

$$m_{\gamma\beta} = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \delta^{\lambda}_{\gamma} \cdot \delta^{\mu}_{\beta} \cdot m_{\lambda\mu}$$

Compte tenu du fait que la discussion implique des scalaires d'un corps K commutatif, la condition se laisse réécrire :

$$\delta^{\lambda}_{\gamma} \cdot \delta^{\mu}_{\beta} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\delta} \sum_{\epsilon} A^{\gamma}_{\delta\beta} \cdot g^{\delta\epsilon} \cdot A^{\lambda}_{\epsilon\mu} \tag{53}$$

Lemme 5.1. ***Surjection - 01***

Soit un espace vectoriel E de dimension D :
(i) bâti sur un corps commutatif K de caractéristique différente de deux,
(ii) équipé d'une métrique non-dégénérée représentée par l'élément [G] de M(D, K) et
(iii) muni du foncteur *produit de Lie déformé* - ce qui sous-tend implicitement l'existence d'au moins un cube de dimension (D - D - D), A, de scalaire(s) pris dans K-tel que le cube A et l'inverse de la métrique sont liés par l'Equ.(53) précédente.

Toute représentation [M] dans M(D, K) du foncteur *produit de Lie déformé* peut s'interpréter comme la décomposition triviale d'un produit de Lie déformé $[\mathbf{q}_1, ...]_A$ dés le moment où le projectile $\mathbf{q}_1$ a pour composantes covariantes celles données par l'Equ.(52) ci-dessus.

5.4 Le cas des transformations de Lorentz

Remarque 5.2. ***Un lien avec les transformations de Lorentz - 01***

Un lectorat averti aura sans doute noté le lien formel entre l'illustration précédente et les exposants des représentations exponentielles des transformations de Lorentz lorsque la dimension de l'espace vectoriel des discussions vaut quatre : D = 4. De fait, dans sa représentation dite vectorielle, un élément générique du groupe de Lorentz, O(1, 3), est une matrice carrée (4-4) obtenue par une exponentiation pondérée des générateurs $[\mathrm{J}^{\mu\nu}]$:

$$[\Lambda] = exp^{-\frac{1}{2} \cdot \omega_{\mu\nu} \cdot [J^{\mu\nu}]} \tag{54}$$

La pondération est assurée par les composantes d'un tenseur antisymétrique ω. Plus précisément, bien qu'il puisse également se laisser repésenter par une matrice carrée (4-4) :

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 \\ -\beta^1 & 0 & -\theta^3 & \theta^2 \\ -\beta^2 & \theta^3 & 0 & -\theta^1 \\ -\beta^3 & -\theta^2 & \theta^1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{55}$$

ses composantes agissent comme des paramètres sur les générateurs. Ceci signifie que, dans une première approximation, les transformations de Lorentz peuvent s'écrire :

$$[\Lambda] = Id_4 - \frac{1}{2} \cdot \omega_{\mu\nu} \cdot [J^{\mu\nu}] + ... \tag{56}$$

Avec ce formalisme approché et en supposant qu'il existe au moins un référentiel dans lequel la transformation de Lorentz étudiée se laisse diagonaliser, il devient possible d'écrire dans ce référentiel hypothétique :

$$\forall \alpha = 0, 1, 2, 3 : \Lambda_\alpha - 1 = \frac{1}{2} . \sum_\mu \sum_\nu \omega_{\mu\nu} . J^{\mu\nu}_\alpha \tag{57}$$

La comparaison visuelle avec l'Equ.(52) devient alors plausible à condition de pouvoir valider les équivalences d'écriture suivantes :

$$J \equiv A \tag{58}$$

$$[\omega] \equiv [M] \tag{59}$$

L'équivalence entre les quatre composantes diagonales des six générateurs des transformations de Lorentz formant de facto un cube J ne contenant plus que au plus vingt-quatre composantes et un cube A de dimension (4 - 4 - 4) dont le nombre des composantes aurait été réduit à seulement vingt-quatre, est très facilement obtenue en supposant simplement que le cube A est antisymétrique sur ses indices bas.

L'équivalence entre l'ensemble des six composantes d'un tenseur antisymétrique ω pondérant les générateurs du groupe des transformations de Lorentz et leur disposition au sein d'une matrice antisymétrique $[\omega]$ de M(4, K) est pratiquement une question de convention d'écriture et elle est donc toujours possible.

Le doute sur la diagonalisation des éléments du groupe des transformations de Lorentz peut toujours être levé puisque, structurellement, ces transformations doivent préserver les métriques dans un changement de référentiel. Si ici, $[\Lambda] = [\lambda^\alpha{}_\beta]$ désigne une transformation de Lorentz agissant sur les composantes contravariantes des vecteurs impliqués dans la discussion (voir [[10]; p. 55, (3.22)]), alors (voir [[10]; p. 56, (3.31)], [[06]; p. 100 - en allemand]) :

$$[G] = [\Lambda]^t . [G] . [\Lambda] \tag{60}$$

Par conséquent, le lemme ci-dessus trouve ici une illustration particulière qui peut s'énoncer comme suit.

Lemme 5.2. ***des transformations de Lorentz***

Soit un espace vectoriel E de dimension quatre (D = 4) :
(i) bâti sur un corps commutatif K de caractéristique différente de deux,
(ii) équipé d'une métrique non-dégénérée représentée par l'élément [G] de M(4, R) et préservée au moyen des éléments du groupe des transformations de Lorentz selon la procédure symbolisée par l'Equ.(55).

Chaque fois que le cube antisymétrique J des composantes des générateurs du groupe de Lorentz et la métrique non-dégénérée de l'espace-temps sont liés par :

$$\delta^\lambda_\gamma . \delta^\mu_\beta = \frac{1}{2} . \sum_\delta \sum_\epsilon J^\gamma_{\delta\beta} . g^{\delta\epsilon} . J^\lambda_{\epsilon\mu} \tag{61}$$

toute représentation $[\omega]$ dans M(4, K) des paramètres pondérant les générateurs du groupe des transformations de Lorentz peut s'interpréter comme représentant un foncteur *produit de Lie déformé* au travers de sa visualisation sous la forme d'une décomposition triviale d'un produit de Lie déformé $[\mathbf{q}, ...]_J$ dés le moment où le projectile $\mathbf{q}$ a pour composantes covariantes celles données par :

$$\forall \epsilon = 0, 1, 2, 3 : q_\epsilon = \Lambda_\epsilon - 1 = \frac{1}{2} . \sum_\mu \sum_\nu \omega_{\mu\nu} . J^{\mu\nu}_\epsilon \tag{62}$$

$$[\omega] \,=\, {}_J\Phi(\mathbf{q}^*) \tag{63}$$

Remarque 5.3. ***Un lien avec les transformations de Lorentz - 02***

Mais il existe au moins encore une autre manière de comprendre les transformations de Lorentz. Par exemple, en poussant les calculs sur quelques crans de plus, il vient :

$$[\Lambda]$$
$$=$$
$$Id_4 \,-\, \frac{i}{2} \,.\, [\omega_{\mu\nu} \,.\, (g^{\mu\rho} \,.\, \delta^{\nu}_{\sigma} \,-\, g^{\nu\rho} \,.\, \delta^{\mu}_{\sigma})]$$
$$=$$
$$Id_4 \,-\, \frac{i}{2} \,.\, [\omega_{\mu\nu} \,.\, g^{\mu\rho} \,.\, \delta^{\nu}_{\sigma} \,-\, \omega_{\mu\nu} \,.\, g^{\nu\rho} \,.\, \delta^{\mu}_{\sigma}]$$
$$=$$
$$Id_4 \,-\, \frac{i}{2} \,.\, [\omega_{\mu\sigma} \,.\, g^{\mu\rho} \,-\, \omega_{\sigma\nu} \,.\, g^{\nu\rho}]$$

Et, à cause de l'antisymétrie de la matrice $[\omega]$ [3] :

$$[\Lambda]$$
$$=$$
$$Id_4 \,+\, \frac{i}{2} \,.\, [\omega_{\sigma\nu} \,.\, g^{\nu\rho} \,-\, \omega_{\mu\sigma} \,.\, g^{\mu\rho}]$$
$$=$$
$$Id_4 \,+\, i \,.\, \{[\omega] \,.\, [G]^{-1}\}^t$$
$$=$$
$$Id_4 \,-\, i \,.\, ([G]^{-1})^t \,.\, [\omega]$$

Or toute matrice du type représenté génériquement par la matrice $[\omega]$ peut s'interpréter comme une décomposition triviale d'un produit de Lie déformé $[\mathbf{u}, \ldots]_{\mathbf{J}}$ où $\mathbf{J}$: (j^0, j^1, j^2, j^3) est le vecteur de E(4, C) résultant de l'anti-réduction d'un cube antisymétrique J et où $\mathbf{u}$ représente n'importe quel élément de E(4, R) [[g] ; Sous-sec.2, Equ.(50)]. De sorte que, au moins en première approximation, toute transformation de Lorentz peut aussi se laisser exprimer de la façon suivante :

$$[\Lambda] \,-\, Id_4 \,=\, -i \,.\, ([G]^{-1})^t \,.\, {}_{\mathbf{J}}\Phi(\mathbf{u}) \tag{64}$$

avec, en accompagnement :

$$\Phi_{01} \,=\, j^0 \,.\, u^2 \,-\, j^1 \,.\, u^3 \,=\, \beta^1 \tag{65}$$
$$\Phi_{02} \,=\, -j^0 \,.\, u^1 \,+\, j^2 \,.\, u^3 \,=\, \beta^2$$
$$\Phi_{03} \,=\, -j^1 \,.\, u^1 \,-\, j^2 \,.\, u^2 \,=\, \beta^3$$
$$\Phi_{12} \,=\, j^0 \,.\, u^0 \,+\, j^3 \,.\, u^3 \,=\, -\theta^3$$
$$\Phi_{13} \,=\, -j^3 \,.\, u^2 \,+\, j^1 \,.\, u^0 \,=\, -\theta^2$$
$$\Phi_{23} \,=\, j^2 \,.\, u^0 \,-\, j^3 \,.\, u^1 \,=\, -\theta^1$$

3.
$$-\,\omega_{\mu\sigma} \,=\, \omega_{\sigma\mu};\; [\omega]^t \,=\, -[\omega]$$

Vouloir confronter les Equ.(57) et (64) semble légitime. Pour le faire, il convient de remarquer que le vecteur **q** est exprimé en fonction de ses composantes covariantes alors que le vecteur **u** l'est à l'aide de ses composantes contra-variantes. Ainsi, s'il s'agit du même vecteur, il convient de les relier au travers de la métrique. La relation de passage attendue prend ici la forme (voir [[10] ; p. 53, (3.9)]) :

$$|\mathbf{q}^* > = [G] \, . \, |\mathbf{u} > \equiv q_\epsilon \, = \, g_{\epsilon\phi} \, . \, u^\phi \, ; \, \epsilon, \, \phi \, = \, 0, \, 1, \, 2, \, 3. \tag{66}$$

De sorte que l'Equ.(–) devient en général :

$$[\omega] \, = \, {}_J\Phi(\mathbf{q}^*) \, = \, [J^{\alpha\beta}_\epsilon \, . \, q_\epsilon] \, = \, [(J^{\alpha\beta}_\epsilon \, . \, g_{\epsilon\phi}) \, . \, u^\phi]$$

Elle permet de construire un nouveau cube que je note $^+$J, également antisymétrique (sur les indices hauts), tel que :

$$\sum_\epsilon J^{\alpha\beta}_\epsilon \, . \, g_{\epsilon\phi} \, = \, {}^+ J^{\alpha\beta}_\phi \, ; \, \epsilon, \, \phi \, = \, 0, \, 1, \, 2, \, 3 \, ; \, \alpha, \, \beta \, = \, 1, \, 2, \, 3. \tag{67}$$

La matrice $[\omega]$ peut donc toujours se réécrire :

$$[\omega] \, = \, {}^+_J\Phi(\mathbf{u})$$

La poursuite de la confrontation exige de comparer maintenant :

$$-i \, . \, ([G]^{-1})^t \, . \, {}_\mathbf{J}\Phi(\mathbf{u}) \, et \, {}^+_J\Phi(\mathbf{u})$$

Elle consiste à se demander si et quand l'équivalence suivante a un sens :

$$-i \, . \, g^{\phi\beta} \, . \, j^\phi \, \equiv \, {}^+ J^{\alpha\beta}_\phi$$

Elle a de fait un sens lorsque le vecteur apparaisssant à gauche du signe de l'équivalence résulte de l'anti-réduction du cube antisymétrique $^+$J. Comparer les Equ.(57) et (64), c'est confronter une expression générale des transformations de Lorentz (dans un formalisme approché au second ordre près) et une expression simplifiée de celles-ci qui aurait été obtenue par diagonalisation. Le fait que cette comparaison semble possible suggère que la diagonalisation est en quelque sorte équivalente à la composition d'une antisymétrisation et d'une anti-réduction d'un cube initial. Un point technique intéressant qui mériterait d'être approfondi ultérieurement.

6 La notion abstraite de dérivation.

6.1 Rappels

J'aborde maintenant la notion abstraite de dérivation sur {V = E(D, K = R ou C), $\wedge_A$} où A représente désormais un cube quelconque.

Définition 6.1. ***Algèbre de Lie***

Pour qu'un espace vectoriel E(N, K) soit équipé d'une structure d'algèbre de Lie, trois conditions doivent s'appliquer simultanément (voir définition par exemple dans [[08] ; p. 12], [[11] ; p. 9]) :

1. Un crochet de Lie doit y être défini - soit $[..., ...]_B$ ce crochet ;
2. Le produit d'un élément quelconque de E(N, K) par lui-même, via ce crochet de Lie, doit être nul. Dans le cas des produits de Lie déformés par un cube B :

$$\forall \, \mathbf{a} \, \in \, E(N, K) \, : \, [\mathbf{a} \, , \, \mathbf{a}]_B \, = \, \mathbf{0}$$

Il revient au même de dire que le crochet défini au 1. doit faire de chaque élément de L = {V, $[..., ...]_B$} un élément isotropique (voir Def–), donc un élément de i(L).

3. La relation de Jacobi doit être validée pour tous les triplés d'éléments de E(N, K) :

$$\forall\, \mathbf{a}\,,\, \mathbf{b}\,,\, \mathbf{c} \,\in\, E(N, K)\ :$$
$$[\mathbf{a}\,, [\mathbf{b}\,,\, \mathbf{c}]_B]_B \,+\, [\mathbf{b}\,, [\mathbf{c}\,,\, \mathbf{a}]_B]_B \,+\, [\mathbf{c}\,, [\mathbf{a}\,,\, \mathbf{b}]_B]_B \,=\, \mathbf{0}$$

6.2 Produit extérieur déformé et algèbre de Lie

Remarque 6.1. *La relation de Jacobi pour les produits extérieurs déformés d'un espace de dimension D.*

Par construction, le produit extérieur déformé $\wedge_A$ (Def. 1.3) définit de facto un crochet de Lie bâti sur un cube B agissant sur les éléments de E(N, K) :

$$\forall\, A,\, \forall\, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \,\in\, E^2(D,\, K)\ :\ \wedge_A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \,=\, [\mathbf{a}\,,\, \mathbf{b}]_B$$

Puisque :

$$\forall\, A,\, \forall\, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \,\in\, E^2(D,\, K)\ :\ \wedge_A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \,=\, \sum_{i<j} (A^k_{ij} \,-\, A^k_{ji})\,.\,(a^i\,.\,b^j \,-\, a^j\,.\,b^i)\,.\,\mathbf{e}_k$$

Le crochet de Lie s'obtient en définissant le cube B, cette fois-ci quelconque, par :

$$\forall\, A,\, B^k_{ij} \,=\, A^k_{ij} \,-\, A^k_{ji}$$

Ce crochet satisfait les deux premières conditions exigées pour l'obtention d'une structure d'algèbre de Lie (évident). Il ne reste donc qu'à explorer ce qui se passe avec la relation de Jacobi. Concrètement, il convient de généraliser le très long calcul réalisé dans [[f], pp. 3-6]. La relation de Jacobi concernant les produits extérieurs déformés de cette théorie s'écrit alors :

$$\begin{gathered}[\mathbf{a}\,,\, [\mathbf{b}\,,\, \mathbf{c}]_B]_B \\ = \\ [\mathbf{a}\,,\, \sum_{j<k} B^n_{jk}\,.\,(b^j\,.\,c^k \,-\, b^k\,.\,c^j)\,.\,\mathbf{e}_n]_B \\ = \\ \sum_{m<n} B^i_{mn}\,.\,\{a^m\,.\, \sum_{j<k} B^n_{jk}\,.\,(b^j\,.\,c^k \,-\, b^k\,.\,c^j) \,-\, a^n\,.\, \sum_{j<k} B^m_{jk}\,.\,(b^j\,.\,c^k \,-\, b^k\,.\,c^j)\}\,.\,\mathbf{e}_i\end{gathered} \tag{68}$$

qui, grâce aux permutations circulaires, permet là encore de poursuivre avec :

$$\begin{gathered}[\mathbf{a}\,,\, [\mathbf{b}\,,\, \mathbf{c}]_B]_B \,+\, [\mathbf{b}\,,\, [\mathbf{c}\,,\, \mathbf{a}]_B]_B \,+\, [\mathbf{c}\,,\, [\mathbf{a}\,,\, \mathbf{b}]_B]_B \\ = \\ \{B^i_{mn}\,.\,B^n_{jk}\,.\,a^m\,.\,(b^j\,.\,c^k \,-\, b^k\,.\,c^j) \,-\, B^i_{mn}\,.\,B^m_{jk}\,.\,a^n\,.\,(b^j\,.\,c^k \,-\, b^k\,.\,c^j)\}\,.\,\mathbf{e}_i \\ +\,\{B^i_{mn}\,.\,B^n_{jk}\,.\,b^m\,.\,(c^j\,.\,a^k \,-\, c^k\,.\,a^j) \,-\, B^i_{mn}\,.\,B^m_{jk}\,.\,b^n\,.\,(c^j\,.\,a^k \,-\, c^k\,.\,a^j)\}\,.\,\mathbf{e}_i \\ +\,\{B^i_{mn}\,.\,B^n_{jk}\,.\,c^m\,.\,(a^j\,.\,b^k \,-\, a^k\,.\,b^j) \,-\, B^i_{mn}\,.\,B^m_{jk}\,.\,c^n\,.\,(a^j\,.\,b^k \,-\, a^k\,.\,b^j)\}\,.\,\mathbf{e}_i\end{gathered} \tag{69}$$

Sur son principe, le calcul à faire est identique à celui qui a été mené dans les espaces de dimension trois. L'épreuve essentielle tient ici au nombre de facteurs impliquès. Ce nombre invite à trouver des ruses évitant de recommencer un développement in extenso. L'énonçé exhaustif des conditions faisant de L = {E(N, K), [..., ...]$_B$} une algèbre de Lie a déjà été donné pour le cas des espaces tridimensionnels (N = 3) dans [[c]]. Je vais maintenant tenter de les énoncer pour des espaces d'une dimension entière N quelconque égale ou supérieure à trois (N > 2).

Remarque 6.2. ***Dénombrement des termes dans une relation de Jacobi***

L'Equ.(22), prise isolément, permet déjà de faire quelques modestes constats.

Elle se laisse réorganiser facilement en :

$$[\mathbf{a}\,,\,[\mathbf{b}\,,\,\mathbf{c}]_B]_B \tag{70}$$

$$=$$

$$\sum_{m<n} B^i_{mn}\,.\,\sum_{j<k}(B^n_{jk}\,.\,a^m\,-\,B^m_{jk}\,.\,a^n)\,.\,(b^j\,.\,c^k\,-\,b^k\,.\,c^j)\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$=$$

$$\sum_{j<k}\sum_{m<n} B^i_{mn}\,.\,(B^n_{jk}\,.\,a^m\,-\,B^m_{jk}\,.\,a^n)\,.\,(b^j\,.\,c^k\,-\,b^k\,.\,c^j)\,.\,\mathbf{e}_i$$

— La seconde parenthèse *laisse fortement pressentir la présence* du produit extérieur (classique, non déformé) $\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}$. Celui-ci est visiblement déformé par un cube C dépendant du vecteur $\mathbf{a}$ et du cube quelconque B :

$$C^i_{jk}\,=\,\sum_{m<n} B^i_{mn}\,.\,(B^n_{jk}\,.\,a^m\,-\,B^m_{jk}\,.\,a^n)\,;\,j\,<\,k \tag{71}$$

— Le nombre n de termes dans chaque composante de ce cube C vaut :

$$n\,=\,(N-1)\,+\,(N-2)\,+\,...\,+\,2\,+\,1\,=\,(N-1).N/2$$

in extenso n = 1 quand N = 2, n = 3 quand N = 3, n = 6 quand N = 4, etc... puisque :

$$C^i_{jk}$$

$$=$$

$$B^i_{01}\,.\,(B^1_{jk}\,.\,a^0\,-\,B^0_{jk}\,.\,a^1)\,+\,...\,+\,B^i_{0\,D-1}\,.\,(B^{D-1}_{jk}\,.\,a^0\,-\,B^0_{jk}\,.\,a^{D-1})$$
$$+\,B^i_{12}\,.\,(B^2_{jk}\,.\,a^1\,-\,B^1_{jk}\,.\,a^2)\,+\,...\,+\,B^i_{1\,D-1}\,.\,(B^{D-1}_{jk}\,.\,a^1\,-\,B^{D-1}_{jk}\,.\,a^1)$$
$$+\,...$$
$$+\,B^i_{D-2\,D-1}\,.\,(B^{D-1}_{jk}\,.\,a^{D-2}\,-\,B^{D-1}_{jk}\,.\,a^{D-2})$$

Cette voie ne semble pas permettre d'aller bien loin et je vais donc passer à l'analyse de l'Equ.(69). Visiblement, lorsque m = j et n = k simultanément, l'expression suivante s'annule quel que soit le cube B :

$$\{B^i_{jk}\,.\,B^k_{jk}\,.\,a^j\,.\,(b^j\,.\,c^k\,-\,b^k\,.\,c^j)\,-\,B^i_{jk}\,.\,B^j_{jk}\,.\,a^k\,.\,(b^j\,.\,c^k\,-\,b^k\,.\,c^j)\}\,.\,\mathbf{e}_i \tag{72}$$

$$+\,\{B^i_{jk}\,.\,B^k_{jk}\,.\,b^j\,.\,(c^j\,.\,a^k\,-\,c^k\,.\,a^j)\,-\,B^i_{jk}\,.\,B^j_{jk}\,.\,b^k\,.\,(c^j\,.\,a^k\,-\,c^k\,.\,a^j)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+\,\{B^i_{jk}\,.\,B^k_{jk}\,.\,c^j\,.\,(a^j\,.\,b^k\,-\,a^k\,.\,b^j)\,-\,B^i_{jk}\,.\,B^j_{jk}\,.\,c^k\,.\,(a^j\,.\,b^k\,-\,a^k\,.\,b^j)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$=$$
$$\mathbf{0}$$

Ce constat prouve qu'une partie des termes de cette somme s'annule effectivement ; mais combien de fois ? et comment les autres termes s'ordonnent-ils ? Un comptage s'impose.

Dans un espace de dimension N, le sous-ensemble I_N = {0, 1, 2, ..., N - 1} de l'ensemble des entiers naturels est défini. Pour chaque valeur possible de i, le nombre de paires d'entiers naturels (m, n) $\in I_N \times I_N$ dans lesquelles m est strictement inférieur à n (m < n) vaut (N - 1).N/2. L'Equ.(69) peut encore se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} \{B^i_{mn} . B^n_{jk} . \{a^m . (b^j . c^k - b^k . c^j) + b^m . (c^j . a^k - c^k . a^j) + c^m . (a^j . b^k - a^k . b^j)\} \\ - B^i_{mn} . B^m_{jk} . \{a^n . (b^j . c^k - b^k . c^j) + b^n . (c^j . a^k - c^k . a^j) + c^n . (a^j . b^k - a^k . b^j)\}\} \\ . \mathbf{e}_i \end{aligned} \tag{73}$$

Il s'agit d'un ensemble de N relations ; autant que de composantes pour n'importe quel vecteur de l'espace E(N, K) : i = 0, 1, 2, ..., N - 1. Chacune d'elles se compose d'une différence de deux termes similaires. Dans chacun de ces deux termes il apparaît une somme de produits de deux composantes du cube A ; chaque somme de produits de deux composantes valant :

$$\sum_{n>m} B^i_{mn} . B^n_{jk} = B^i_{m\,m+1} . B^{m+1}_{jk} + B^i_{m\,m+2} . B^{m+2}_{jk} + ... + B^i_{m\,D-1} . B^{D-1}_{jk} \tag{74}$$

$$\sum_{n>m} B^i_{mn} . B^m_{jk} = B^i_{0\,n} . B^0_{jk} + B^i_{1\,n} . B^1_{jk} + ... + B^i_{n-1\,n} . B^{n-1}_{jk} \tag{75}$$

et pondérant une somme de six produits de trois composantes du type $a^m.b^j.c^k$. Le nombre de ces produits de deux composantes doit être trouvé. Pour mémoire mais peut-être sans intérêt ici, tout cube antisymétrique contient N. (N^2 - N)/2 composantes ; exemples : 9 quand N = 3, 24 quand N = 4, etc. Dans l'Equ.(28), si n = 1, m ne peut être choisi égal qu'à 0 ; pour autant, le nombre de paires d'entiers naturels (j, k) $\in I_N \times I_N$ dans lesquelles j est strictement inférieur à k (j < k) vaut (N - 1).N/2. Ceci reste vrai quelle que soit la valeur prise par n. Si n = 2, m ne peut valoir que 0 et 1 ; et ainsi de suite jusqu'à n = N - 1, auquel cas m peut prendre les N - 1 valeurs de 0 à N - 2. Au total, il peut donc exister 1 + 2 + ... + N - 1 = (N - 1).N/2 produits de deux composantes du cube B pour chaque valeur de i, j et k (j < k). Par suite, il existe $(N - 1)^2$. $N^2/4$ produits de deux composantes dans l'Equ.(28) pour chaque valeur de i. Finalement, sauf erreur de ma part, il y a au total $(N - 1)^2$. $N^2/2$ produits de deux composantes dans l'Equ.(73).

Il arrive (N - 1).N/2 fois que les paires (j, k) et (m, n) soient égales. C'est aussi le nombre de fois où la situation décrite par l'Equ.(72) est rencontrée et la réponse à la première question posée ci-dessus.

Il existe cependant d'autres configurations des paires d'indices (m, n) et (j, k) annulant au moins pour moitié l'Equ.(73) ; par exemple quand j = m < k :

$$\begin{gathered} \forall k : B^i_{mn} . B^n_{mk} \\ . \{a^m . (b^m . c^k - b^k . c^m) + b^m . (c^m . a^k - c^k . a^m) + c^m . (a^m . b^k - a^k . b^m)\} \\ = 0 \end{gathered} \tag{76}$$

Mais :

$$\begin{gathered} \forall k : B^i_{mn} . B^m_{mk} \\ . \{a^n . (b^m . c^k - b^k . c^m) + b^n . (c^m . a^k - c^k . a^m) + c^n . (a^m . b^k - a^k . b^m)\} \\ \neq 0 \end{gathered} \tag{77}$$

Et quand k = n :

$$\forall j : B^i_{mn} . B^n_{jn} \tag{78}$$

$$.\{a^m.(b^j.c^n - b^n.c^j) + b^m.(c^j.a^n - c^n.a^j) + c^m.(a^j.b^n - a^n.b^j)\}$$
$$\neq 0$$

Tandis que :

$$\forall j : B^i_{mn}.B^m_{jn} \tag{79}$$
$$.\{a^n.(b^j.c^n - b^n.c^j) + b^n.(c^j.a^n - c^n.a^j) + c^n.(a^j.b^n - a^n.b^j)\}$$
$$= 0$$

Par conséquent, le nombre de termes non forcément nuls est drastiquement réduit. Des deux fois (N - 1)^2.N^2/4 termes, il faut ôter les termes correspondant à j = m et ceux correspondant à k = n, séparément et simultanément ; mais combien sont-ils réellement ? Et finalement : combien reste t-il de termes qui ne sont pas systématiquement nuls ?
Quand k est donné dans l'Equ.(76), m = j ne peut prendre que k valeurs allant de 0 à k - 1 et k peut être choisi de 1 à N - 1 ; ce qui représente N - 1 choix possibles pour k. Quand k = 1, il y a une valeur de j annulant l'équation ; quand k = 2, il y en a deux ; quand k = 3, il y en a trois, etc. L'Equ.(76) est réalisée 1 + 2 + ... + N - 1 = N.(N - 1)/2 fois et elle annule donc N.(N - 1)/2 termes.
Quand j est donné dans l'Equ.(79), n = k ne peut prendre que les valeurs allant de j + 1 à N - 1 et j peut être choisi de 0 à N - 2 ; ce qui représente aussi N - 1 choix possibles pour j. Quand j = 0, il y a N - 1 valeurs de k annulant l'équation ; quand j = 2, il y en a N - 2 ; quand j = 3, il y en a N - 3, etc. L'Equ.(79) est également réalisée N - 1 + ... + 2 + 1 = N.(N - 1)/2 fois et elle annule donc N.(N - 1)/2 termes.
Enfin, comme indiqué précédemment, il arrive N.(N - 1)/2 fois que les paires (m, n) et (j, k) soient identiques lorsque m < n et i < j. Mais ces situations annulent le double de termes, soit N.(N - 1).
De sorte qu'au total et *pour chaque valeur de* i = 0, 1, 2, ..., N - 1, sauf erreur de dénombrement, 2.N.(N - 1) termes sur (N - 1)^2.N^2/2 s'annulent systématiquement [4] .Il reste en principe une somme de N.(N - 1).{N.(N - 1)/2 - 2} termes a priori non nuls ; exemples : si N = 4, il reste 48 termes a priori non nuls contre seulement 6 lorsque N = 3.

Remarque 6.3. ***Une autre factorisation de la relation de Jacobi.***

Quand elles ne sont pas nulles, les sommes de six produits de trois composantes du type a^m.b^j.c^k ont toute le formalisme :

$$a^\alpha.(b^j.c^k - b^k.c^j) + b^\alpha.(c^j.a^k - c^k.a^j) + c^\alpha.(a^j.b^k - a^k.b^j)$$

Par ailleurs, il existe un nombre fini et dénombrable de façons d'ordonner des produits de trois composantes indiciées lorsque les indices peuvent prendre au plus N valeurs. Ceci induit le fait que tous les termes restants non nuls peuvent être factorisés d'une autre manière.
Il y a N.(N - 1)/2 paires (j, k) telles que j < k. De plus, puisque m peut valoir de 0 à N - 2, que n peut valoir de 1 à N - 1 et que l'indice α vaut soit m, soit n, il en résulte la certitude qu'il n'existe au total que N valeurs possibles (de 0 à N - 1) pour cet indice là. D'après la remarque précédente, m ne doit pas être égal à j et k est différent de j ; de même n ne doit pas être égal à k qui est différent de j. Par conséquent les produits non nuls semblent aussi être ceux pour lesquels les trois indices diffèrent. D'après ce comptage, il y a donc au total N. (N - 1). (N - 2) types différents de

4. Ce qui permet bien de retrouver le résultat acquis dans [f ; pp. 4-5] où 12 = 2.3.(3 - 1) termes s'annulent sur les 18 = {(3 - 1)^2.3^2}/2 apparaissant dans l'équation équivalente à l'Equ.(23) ci-dessus.

produits de trois composantes ; ce qui veut dire : 6 quand N = 3, 24 quand N = 4, etc.

Bien que le raisonnement qui vient d'être tenu éclaire grandement la connaissance du nombre de termes contenus dans une relation de Jacobi concernant l'ensemble L, un point reste obscure. J'ai montré en dimension trois dans [[f]] que la somme des 6 produits de deux composantes restants et a priori non nuls constituait un facteur commun pour chacun des 6 produits de trois composantes. De sorte que la relation de Jacobi devenait le produit de la somme des 6 produits de deux composantes du cube A par une somme de 6 produits de trois composantes. Chaque somme étant de nature différente, j'avais ainsi pu en déduire l'existence de deux catégories de situations annulant la relation de Jacobi : (i) celles liées à la disposition des vecteurs **a**, **b** et **c** constituant le territoire de Jacobi et (ii) celles liées à la matrice des déformations [B].

Qu'en est-il pour un espace de dimension strictement supérieure à trois ? J'ai intuitivement tendance à penser que les N. (N - 1). (N - 2) types différents de produits de trois composantes doivent forcément être regroupés par paquet de six pour chaque valeur de la paire (j, k). Cette intuition expliquerait bien le résultat trouvé dans un contexte tridimensionnel. Elle suggère qu'en dimension quatre, il y aurait quatre paquets (sommes) de six produits de trois composantes. Chacun devrait *capter* de manière ad hoc (à découvrir) les 48 produits de deux composantes du cube A. La double question est (i) de savoir combien de sommes égales de produits de deux composantes du cube B peuvent être constituées puis (ii) de savoir combien chacune d'elle contient de produits de deux composantes. Lorsque N = 4, la répartition idéale permettant de retrouver un schéma équivalent à celui rencontré en dimension trois serait obtenue au travers de quatre sommes de douze termes... à suivre (très compliquè).

6.3 Dérivation sur l'algèbre de Lie

Muni de toutes ces connaissances, il devient possible de faire la proposition suivante :

Proposition 6.1. *Lorsque les conditions validant la relation de Jacobi sur* $L = \{V, \wedge_A \equiv [..., ...]_B\}$ *sont satisfaites, le produit extérieur déformé dont V est équipé définit une dérivation sur L.*

Preuve :
La démarche consiste (i) à comprendre que la notion de *foncteur produit de Lie déformé* peut s'étendre aux cas de cubes B quelconques et (ii) à valider l'intuition initiale poussant à croire que cette notion est une dérivation sur L. Pour le foncteur $[\mathbf{a}, ...]_B$, il faut donc prouver que la relation de Leibniz suivante (voir aussi [[08] ; §1.4.3, p. 12]) :

$$[\mathbf{a},\, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]_B]_B \;=\; [[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_B, \mathbf{c}]_B \;+\; [\mathbf{b},\, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]_B]_B$$

est équivalente à la relation de Jacobi. Or (Def.2.1) La relation de Jacobi s'écrit pour un cube B quelconque :

$$\forall\, \mathbf{a}\,,\, \mathbf{b}\,,\, \mathbf{c} \in L \;:$$

$$[\mathbf{a}\,, [\mathbf{b}\,,\, \mathbf{c}]_B]_B \,+\, [\mathbf{b}\,, [\mathbf{c}\,,\, \mathbf{a}]_B]_B \,+\, [\mathbf{c}\,, [\mathbf{a}\,,\, \mathbf{b}]_B]_B \;=\; \mathbf{0}$$

et le produit extérieur déformé est une opération interne antisymétrique sur L. Il n'y a donc aucune difficulté majeure à vérifier que, si la relation de Jacobi est vraie, alors le foncteur $[\mathbf{a}, ...]_B$ est une dérivation ; et inversement. La proposition est vérifiée. □

6.4 Associativité et morphisme

Il est connu que M(N, K = R ou C) est une algèbre associative mais non commutative. De même, voir [[08] ; §1.4.2, p. 12], il est su que le fait de munir M(N, K) du crochet [[$_1$M], [$_2$M]] = [[$_1$M]. [$_2$M] - [$_2$M]. [$_1$M]] suffit à révéler sa structure sous-jacente d'algèbre de Lie associative ; je la note gl_NK.

Le produit de Lie déformé n'est pas nécessairement associatif mais il m'a été possible de démontrer dans [[h] ; pp. 9 - 10] qu'un produit tensoriel déformé par un cube A quelconque qui serait associatif définirait un morphisme se traduisant par (avec ma notation modernisée et standardisée telle qu'elle est maintenant définie dans [[e]]) :

$$ {}_A\Phi(\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b})) \;=\; {}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,{}_A\Phi(\mathbf{b}) $$

et :

$$ A^{\epsilon}_{\alpha\delta}.A^{\delta}_{\beta\gamma} \;-\; A^{\epsilon}_{\delta\gamma}.A^{\delta}_{\alpha\beta} \;=\; 0 $$

Je souhaite généraliser ce résultat avec la proposition suivante :

Proposition 6.2. *L'associativité d'un produit extérieur déformé donné, $\wedge_A$, définit un morphisme entre {E(N, K), $\wedge_A$} et l'ensemble des dilatations triviales des vecteurs de E(N, K).*

Preuve :
Une premiére indication s'obtient à partir de la définition du produit extérieur déformé (voir ci-dessus Def 1.3). Il n'est somme toute que la différence entre un produit tensoriel déformé par un cube quelconque et son opposé. Je peux donc écrire en première intention que si un produit tensoriel déformé par un cube quelconque est associatif, il génère un morphisme tel que les deux relations précédentes sont vérifiées.

Un produit extérieur bâti sur ce produit tensoriel déformé admet la dilatation triviale :

$$ {}_A\Phi(\wedge_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b})) \;=\; {}_A\Phi(\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \;-\; \otimes_A(\mathbf{b},\, \mathbf{a})) $$

Mais comme la dilatation triviale est une application linéaire :

$$ {}_A\Phi(\wedge_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b})) \;=\; {}_A\Phi(\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b})) \;-\; {}_A\Phi(\otimes_A(\mathbf{b},\, \mathbf{a})) $$

Si ce produit tensoriel déformé par un cube quelconque est associatif, alors :

$$ {}_A\Phi(\wedge_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b})) \;=\; {}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,{}_A\Phi(\mathbf{b}) \;-\; {}_A\Phi(\mathbf{b})\,.\,{}_A\Phi(\mathbf{a}) $$

La matrice placée à droite du signe de l'égalité définit de facto un crochet de Lie sur l'ensemble des dilatations triviales. Il autorise à écrire de façon plus condensée :

$$ {}_A\Phi(\wedge_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b})) \;=\; [{}_A\Phi(\mathbf{a}),\, {}_A\Phi(\mathbf{b})] $$

Ce formalisme montre bien que l'associativité du produit tensoriel sous-jacent induit aussi une sorte particulière de morphisme concernant le produit extérieur déformé bâti à partir de ce produit tensoriel déformé. □

Lemme 6.1. *Morphisme induit par l'associativité d'un produit tensoriel déformé*

Si le produit tensoriel sur lequel repose implicitement un produit extérieur déformé est associatif, la dilatation triviale des éléments de {E(N, K), $\wedge_A$} est un morphisme de produits définis par des crochets.

§. Par conséquent, sous réserve que L soit une algèbre de Lie (ce qui n'a rien d'automatique ; voir les paragraphes précédents de la Sous-Sec.6.2), la dilatation triviale ${}_A\Phi$ dans laquelle A désigne un cube déformamt un produit tensoriel de manière associative, définit un morphisme entre algèbres de Lie ; précisément : entre L et gl_NK.

6.5 Dilatations triviales et dérivations

Remarque 6.4. ***Motivations, discussion sur le et définition du concept***

J'affiche depuis le début de cette exploration ISBN ...-066-3 l'objectif d'un paresseux souhaitant remplacer le calcul classique des dérivations par des matrices chaque fois que possible. L'idée n'est pas vraiment nouvelle et elle trouve de nombreuses illustrations en physique quantique depuis bien longtemps. J'arrive donc en retard pour un scoop mais ce fait ne me décourage pas d'analyser le sujet et de l'expliquer à ma façon. Peut-être en ressortira-t-il quelque chose de nouveau ; qui sait ?

Les paragraphes précédents

— ont fait naître la sensation qu'il doit parfois être équivalent de calculer le produit de Lie déformé suivant (acceptation du concept dans son extension à partir de la Def 1.3 et dans laquelle le cube A n'étant pas astreint à être antisymétrique permet toutefois de construire un cube B tel que décrit au début de la Rem.6.1) :

$$[\mathbf{a}\,,\mathbf{b}]_B$$

et sa représentation duale :

$${}_B\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{b}>$$

— ont convaincu du fait qu'il existe des circonstances pour lesquelles le foncteur $[\mathbf{a},\,...]_B$ est une dérivation agissant sur un territoire de Jacobi choisi dans L.

Je me demande donc maintenant dans quelle mesure la dilatation triviale ${}_B\Phi(\mathbf{a})$ peut aussi être interprétée comme un dérivation agissant sur des éléments de l'espace dual L* ? Plus concrètement, je me pose la question de savoir si et quand la dilatation triviale dans M(N, K) d'un vecteur **a** de L joue le rôle d'une dérivation ∂ sur le vecteur (sa représentation duale) placé à sa droite.

$${}_B\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{b}>\equiv\ |\partial\mathbf{b}>$$

Il s'agit de la poursuite de la discussion débutée au niveau de la Sous-sec.2.1. Il est évident que le symbôle ∂ est mal choisi, n'a qu'une ambition pédagogique limitée et qu'il doit être précisé. Il est également clair que si cette dilatation triviale est une machinerie algébrique en mesure de réaliser une dérivation, elle le fait en référence à la paire (B, **a**) et que ceci la distingue d'emblée d'une dérivation classique telle que les étudiants et professionnels la pratique ... par rapport à une variable réelle ou complexe, par rapport à un vecteur, etc. Ainsi, la notion de dérivation que je souhaite promouvoir ici revêt a priori un caractère bien plus général et sophistiqué.

$${}_B\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{b}>\equiv\ |d_{(B,\,\mathbf{a})}\mathbf{b}>$$

§. Plus généralement encore, s'il est souhaité qu'un élément supposé quelconque [M] dans M(N, K) joue le rôle d'une dérivation sur $L^* = \{E(N, K), [..., ...]_B\}^*$, il convient de savoir quand il peut être considéré comme une dilatation triviale d'un vecteur de L. Ce qui ramène le débat vers la notion de surjection des dilatations triviales traitée en partie au niveau de la Sec.5.

§. Enfin, le critère définissant une dilatation triviale donnée comme une dérivation agissant sur L* semble raisonnablement devoir être une variante de la relation de Leibniz écrite comme suit :

$$|d_{(B,\,\mathbf{a})}[\mathbf{b}\,,\,\mathbf{c}]_B >= |[d_{(B,\,\mathbf{a})}(\mathbf{b}),\,\mathbf{c}]_B > + |[\mathbf{b},\,d_{(B,\,\mathbf{a})}(\mathbf{c})]_B >$$

En toute logique, il se traduit par :

$${}_B\Phi(\mathbf{a})\,.\,|[\mathbf{b}\,,\,\mathbf{c}]_B >= |[{}_B\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{b}>,\,\mathbf{c}]_B > + |\,[\mathbf{b},\,{}_B\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{c}>]_B >$$

Comme tout produit de Lie déformé admet une décomposition triviale (voir ci-dessus la démonstration de la Prop.5.1 et l'Equ.(49)), la relation de Leibniz adaptée au concept de dérivation introduit ici peut se développer un cran plus loin avec :

$${}_B\Phi(\mathbf{a})\,.\,\{{}_B\Phi(\mathbf{b})\,.\,|\mathbf{c}>\} \;=\; {}_B\Phi({}_B\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{b}>)\,.\,|\mathbf{c}> + {}_B\Phi(\mathbf{b})\,.\,\{{}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{c}>\}$$

Une réorganisation fournit l'écriture équivalente :

$$\{[{}_B\Phi(\mathbf{a}),\,{}_B\Phi(\mathbf{b})] \;-\; {}_B\Phi({}_B\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{b}>)\}\,.\,|\mathbf{c}>= |\mathbf{0}>$$

Par conséquent, une condition suffisante à valider cette expression de la relation de Jacobi est que ${}_B\Phi$ définisse un morphisme de crochets de Lie :

$$[{}_B\Phi(\mathbf{a}),\,{}_B\Phi(\mathbf{b})] \;=\; {}_B\Phi({}_B\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{b}>) \;=\; {}_B\Phi([\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b}]_B)$$

Cette égalité, en tant que telle, traduit mathématiquement la validité de la relation de Leibniz. Je pourrais la traduire en termes littéraires en disant que le crochet classique liant la dilatation triviale (B, **a**) agissant sur **a** puis sur **b**, prises dans cet ordre, est la dilatation triviale (B, **a**) de la dilatation triviale (B, **a**) agissant sur **b**. Toujours est-il que la relation caractéristique :

$$[{}_B\Phi(\mathbf{a}),\,{}_B\Phi(\mathbf{b})] \;=\; {}_B\Phi([\mathbf{a},\,\mathbf{b}]_B)$$

signe l'existence d'un morphisme entre crochets.

Lemme 6.2. ***Dilatation triviale et dérivation***

Une condition suffisante à définir une dérivation basée sur la notion de dilatation triviale (B, **a**) est que cette dilatation triviale définit un morphisme de crochets de Lie entre L = {E(N, K), $[...,\,...]_B$} et un sous-ensemble de M(N, K).

Définition 6.2. *Territoire trivial d'un espace vectoriel E(N, K) pour un cube B.*

Le territoire trivial de L = {E(N, K), $[...,\,...]_B$} est le sous-ensemble de cet espace dont les éléments sont l'image par l'inverse de la dilatation triviale ${}_B\Phi$ d'un élément de M(N, K) ; je le note $\hat{E}$(N, K, B) et je le décris conventionnellement par :

$$\hat{E}(N,\,K,B) \;=\; \{\mathbf{a} \,\in\, L \,:\, \mathbf{a} \,=\, {}_B\Phi^{-1}([M]),\,[M] \,\in\, M(N,\,K)\}$$

Remarque 6.5. ***Territoire trivial et surjection des dilatations triviales***

Autrement dit $\hat{E}$(N, K, B) est le sous-ensemble de L = {E(N, K), $[...,\,...]_B$} sur lequel la dilatation triviale ${}_B\Phi$ est surjective. Il faut noter en marge de ce constat que, dans l'absolu, il n'y a aucune raison justifiant l'unicité ou l'invariance d'un cube B ; de sorte qu'il pourrait arriver que :

$$[M] \,\in\, M(D,\,K),\,\exists\,(B_\alpha,\,{}_\alpha\mathbf{a}) \,:\, [M] \,=\, {}_{B_\alpha}\Phi({}_\alpha\mathbf{a}),\,\alpha \,\in\, I_N \,=\, \{0,\,1,\,...,\,N\,-\,1\}$$

7 Bibliographie

Références

7.1 Contributions personnelles

[a] PERIAT, T. : Produits tensoriels déformés et C* algèbres ; ISBN-978-2-36923-137-0, EAN 9782369231370, 10 janvier 2019.

[b] PERIAT, T. : Les premières relations de Christoffel revisitées ; ISBN 9782-36923-051-9, EAN 9782369230519, v3, 8 septembre 2020.

[c] PERIAT, T. : Hessiennes et propagateurs dans la théorie des produits tensoriels déformés et décomposés - Introduction ; ISBN 9782-36923-089-2, EAN 9782369230892, v-06 février 2019.

[d] PERIAT, T. : Décompositions intrinsèques des produits vectoriels déformés ; ISBN 9782-36923-036-6, EAN 9782369230366, 14 août 2018.

[e] PERIAT, T. : Aspects mathématiques de la théorie des produits tensoriels déformés ; ISBN-978-2-36923-028-1, EAN 9782369230281, 25 octobre 2019.

[f] PERIAT, T. : Produits vectoriels déformés, algèbres de Lie et classification de Bianchi ; ISBN 9782-36923-136-3, EAN 9782369231363, version du 1 mai 2019.

[g] PERIAT, T. : Les champs électomagnétiques dans la théorie des produits tensoriels déformés, ISBN 978-2-36923-035-9 / EAN-9782369230359, 14 juin 2020.

[h] PERIAT, T. : Les mathématiques autour de la Théorie de la question (E) – Fondamentaux : partie 01, ISBN 978-2-36923-086-1 / EAN-9782369230861, 11 février 2016.

7.2 Ouvrages de référence

[01] CARTAN, Elie. : The theory of spinors : The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966 ; translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)" ; Hermann, 1937 ; Dover Publications, Inc. New York. ©1966 by Hermann, Paris, ISBN 0-486-64070-1.

[02] DARBOUX, G. : Mémoire sur les fonctions discontinues ; Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 4 (1875), p. 57-112, [[http ://www.numdam.org/item ?id=ASENS 1875 2 4 57 0]], 57 pages.

[03] BAIRE, R. : Sur la représentation des fonctions discontinues - première partie, 48 pages, Montpellier, 1903.

[04] LODAY, J.L. : Une version non-commutative des algèbres de Lie (dans l'enseignement des mathématiques, Volume 39, 1993 ; pp. 269-293)

[05] KOSZUL, J.L. : Homologie et cohomologie des algèbres de Lie ; Bulletin de la S. M. F., tome 78 (1950), pp. 65-127.

[06] Scherz, U. : Quantenmechanik ; eine Einführung mit Anwendungen auf Atome, Moleküle und Festkörper. ©B. G. Teubner Stuttgart, Leipzig : Teubner Studien Bücher, Physik, 1999, ISBN 3-519-03246-5, 669 pages.

[07] Fließbach, T. : Allgemeine Relativitätstheorie, 4. Auflage, ©2003, 1998, 1995, Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg, Berlin ; ISBN 3-8274-1356-7, 343 pages.

[08] DAT, J. F. : Groupes et algébres de Lie, cours introductif de M2, année 2012-2013, université Pierre et Marie Curie.

[09] LEBORGNE, G. : Mécanique : tenseurs 1ère partie - Algèbre linéaire : vecteurs et formes linéaires duales (contravariance et covariance), formules de changement de bases, tenseurs, contractions... ; note de cours de l'ISIMA, 13 mai 2013.

[10] RAYMOND, J. M. : Théorie classique des champs, Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Kastler Brossel, Département de Physique de l'Ecole Normale Supérieure, 12 septembre 2016.

[11] CHAMBERT-LOIR, A. : Introduction aux groupes et algèbres de Lie ; cours de Master 2, Université de Rennes I, (2004-2005).

[12] PANSU, P. : Géométrie du groupe d'Heisenberg ; cours de l'école Polytechnique, 24 avril 2018 ; basé sur un concours d'entrée à l'école (X 2014).

[13] BUSÉ, L. : Représentations matricielles en théorie de l'élimination et application à la géométrie. Mathématiques [math]. Université Nice Sofia Antipolos, 2011. tel-00593603.