Les moments cinétiques dans la théorie des produits vectoriels déformés.

24 novembre 2021

Les explorations respectives des produits tensoriels déformés, des produits extérieurs déformés et des produits de Lie déformés ont permis de mettre en évidence deux méthodes de décomposition de ces produits. La méthode intrinsèque, [[a]], ne fonctionne pour l'heure que dans les espaces mathématiques de dimension trois et uniquement pour les produits vectoriels déformés. La méthode extrinsèque, [[b]], revêt un aspect beaucoup plus universel mais s'accompagne d'insuffisances. Ce document complète l'analyse des résultats obtenus par cette méthode au travers d'une étude des moments cinétiques.

Table des matières

1 La notion de classe d'équivalence dans la théorie des produits déformés. 1
1.1 Introduction du concept. 1

2 Analyse en dimension trois. 3
2.1 La notion de moment cinétique. 4
2.2 Le traitement mathématique des décompositions. 4
2.3 Introduction d'un vecteur topologique. 7
2.4 Formalisation de l'écart à la trivialité. 9
2.5 Application à la propagation de la lumière dans le vide. 9

3 Etude des écarts à la trivialité. 10
3.1 Positionnement de la problématique. 10
3.2 La classe des déformations pseudo-triviales. 12

4 Bibliographie 15
4.1 Oeuvres internationales. 15
4.2 Contributions personnelles. 16
French

1 La notion de classe d'équivalence dans la théorie des produits déformés.

1.1 Introduction du concept.

Remarque 1.1. ***Rappels concernant la méthode extrinsèque.***

La méthode de décomposition extrinsèque :

1. implique l'existence implicite d'une forme bilinéaire inversible agissant sur les éléments d'un espace vectoriel E(D, K) ; par exemple, dans une discussion se concentrant sur les espaces de dimension trois (D = 3), cette forme se laisse représenter par un élément [B] de M(3, K) tel que $|B| \neq 0$.
2. définit un produit scalaire permettant de construire un scalaire dont il est supposé qu'il s'annule en même temps que la décomposition tend à être exacte.

Dans ce document, K représente n'importe quel corps commutatif.

Remarque 1.2. ***L'essence de la méthode extrinsèque.***

Soit $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$ deux éléments de l'espace vectoriel E(D, K), et un cube quelconque A. Il est supposé que la relation suivante est vérifiée sur l'espace dual E*(D, K) :

$$| \otimes_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) >= [P] \, . \, |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

La paire ([P], $\mathbf{z}$) de M(D, K) × E(D, K) est une décomposition du produit (tensoriel) déformé.

La méthode extrinsèque consiste à construire un scalaire :

$$s = < \mathbf{q}_2, \{| \otimes_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) > - [P] \, . \, |\mathbf{q}_2 > - |\mathbf{z} >\} >_B$$

et à rechercher les situations l'annulant.

Cette méthodologie intuitive se justifie par le fait indéniable que plus la décomposition envisagée devient exacte, plus le scalaire associé avec elle tend vers zéro. Malheureusement, l'inverse est faux car la nullité du scalaire associé à une décomposition peut aussi signifier l'orthogonalité entre le défaut de réalisation de la décomposition présumée et l'argument du produit utilisé pour calculer ce scalaire associé (ici, la cible $\mathbf{q}_2$).

Nonobstant cette faiblesse, un moyen usuel et simple de découvrir les situations annulant le scalaire est de le comparer chaque fois que possible avec le développement limité (d.l.) à l'ordre deux inclus (trois exclus) d'une fonction numérique de D variables choisies dans K. Soit $\Lambda(\mathbf{q}_1)$ cette fonction admettant un tel d.l. :

$$\Lambda(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)$$

$$=$$

$$\Lambda(\mathbf{q}_1) + < \mathbf{Grad}_{\mathbf{q}_1} \Lambda(\mathbf{b}), \, \mathbf{q}_2 >_{Id_D} + \frac{1}{2} \, . < \mathbf{q}_2, \{[Hess_{\mathbf{q}_1} \Lambda(\mathbf{q}_1)] \, . \, |\mathbf{q}_2 >\} >_{Id_D}$$

En posant :

$$s = \Lambda(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) - \Lambda(\mathbf{q}_1)$$

Il devient possible d'en déduire les relations approximatives :

$$-[B] \, . \, |\mathbf{z} >= |\mathbf{Grad}_{\mathbf{q}_1} \Lambda(\mathbf{q}_1) >$$

$$\frac{1}{2} \, . \, [Hess_{\mathbf{b}} \Lambda(\mathbf{q}_1)] = [B] \, . \, \{{}_A\Phi(\mathbf{q}_1) - [P]\}$$

qui livrent les arguments de la décomposition sans difficulté puisque la matrice [B] est inversible :

$$|\mathbf{z} >= -[B]^{-1} \, . \, |\mathbf{Grad}_{\mathbf{q}_1} \Lambda(\mathbf{q}_1) >$$

$$[P] = {}_A\Phi(\mathbf{q}_1) - \frac{1}{2} \, . \, [B]^{-1} \, . \, [Hess_{\mathbf{q}_1} \Lambda(\mathbf{q}_1)]$$

Ceci ayant été rappelé, il est facile de montrer l'interdépendance entre la partie principale de la décomposition, son résidu et la forme bilinéaire puisque :

$$[Hess_{\mathbf{q}_1}\Lambda(\mathbf{q}_1)] \,=\, -T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}_1},\, [B]\,.\,|\mathbf{z}>)$$

entraîne que :

$$[P] \,=\, {}_A\Phi(\mathbf{q}_1) \,+\, \frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}_1},\, [B]\,.\,|\mathbf{z}>)$$

Remarque 1.3. ***Existence de situations équivalentes.***

Soit le raisonnement intuitif et imagé suivant ; tous les systèmes physiques ont une propension naturelle à rester dans, ou à évoluer vers, un état d'équilibre correspondant en général avec une minimisation du niveau d'énergie pour y être et pour l'atteindre.

Un pendule qui aurait été éloigné de sa position de repos tend naturellement à y revenir après un certain nombre d'oscillations dont l'amplitude décroit progressivement jusqu'à s'annuler.

A supposer que la partie principale de la décomposition la plus triviale d'un produit (tensoriel) déformé est la matrice ${}_A\Phi$ et que celle-ci soit associée à l'état d'équilibre, alors le second terme dans l'expression générique de la décomposition de ce produit correspond à des états situés hors de l'équilibre.

Une décomposition générique complète obtenue par la méthode extrinsèque s'écrit :

$$|\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)>=\, \{{}_A\Phi(\mathbf{q}_1) \,+\, \frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}_1},\, [B]\,.\,|\mathbf{z}>)\}\,.\,|\mathbf{q}_2> +|\mathbf{z}>$$

Elle diffère de la décomposition générique présumée être la plus triviale :

$$|\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)>=\, {}_A\Phi(\mathbf{q}_1)\,.\,|\mathbf{q}_2>$$

La différence étant :

$$\begin{gathered}\mathbf{D}\\ =\\ |\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)> -\, {}_A\Phi(\mathbf{q}_1)\,.\,|\mathbf{q}_2>\\ =\\ \frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}_1},\, [B]\,.\,|\mathbf{z}>)\,.\,|\mathbf{q}_2> +|\mathbf{z}>\end{gathered}$$

A ce stade, il est facile de comprendre que :

1. Toutes les différences vectorielles nulles correspondent à des situations finalement analogues à la décomposition la plus triviale ;
2. Cet état de fait peut potentiellement servir à définir un ensemble de classes d'équivalence sur la base de critères qui sont encore à préciser mais concernent le formalisme éventuellement attendu pour la différence.

2 Analyse en dimension trois.

Cette sous-section se propose d'illustrer la discussion théorique par un exemple concernant les espaces de dimension trois (D = 3).

2.1 La notion de moment cinétique.

Remarque 2.1. ***Le moment cinétique en physique.***

Si les mathématiques peuvent *en théorie* se permettre de triturer les objets presque sans limite, par exemple et pourquoi pas les moments cinétiques, la physique restreind cette apparente liberté en imposant des contraintes tirées de l'observation. Une très instructive introduction à la thématique du moment cinétique en physique quantique peut se lire dans [[01]; chapitre VI, §A., pp. 647-648].

Précisément : un moment cinétique, $\mathbf{J}$, ne peut pas être déformé continuement puisqu'il est quantifié et la notion de produit cinétique déformé ne devrait en principe même pas pouvoir s'envisager.

Pour autant, pour pouvoir s'assurer de la préservation du moment cinétique totale, la physique nucléaire est obligée d'introduire la notion complémentaire et non classique de spin intrinsèque. Il vient s'ajouter à celle, plus usuelle, de moment cinétique orbital [1], $\mathbf{L}$, [[02]; §2.5, p. 15, (42)] :

$$\hbar\,.\,\mathbf{J} \,=\, \mathbf{L} \,+\, \frac{1}{2}\,.\,\hbar\,.\,\sigma$$

Question : "Comment la théorie des produits déformés peut-elle rendre compte de cette réalité physique ?"

2.2 Le traitement mathématique des décompositions.

Remarque 2.2. ***Les résultats issus de la méthode intrinsèque.***

Un long cheminement mathématique permet de justifier, sinon les déformations, au minimum la partition du moment cinétique en deux entités distinctes. La procédure consiste à :

1. montrer d'abord qu'un produit tensoriel déformé bâti sur un cube A antisymétrique sur ses indices bas est un produit de Lie déformé par ce cube ; cette démonstration s'appuie sur les définitions consignées dans [[c]] :

$$\forall\,(\mathbf{a},\mathbf{b}) \,\in\, E^2(D,\,K),\,\forall\,A\,:\,A^k_{ij} \,+\, A^k_{ji} \,=\, 0$$

$$\otimes_A(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

$$=$$

$$\sum_k\,(\sum_i\,\sum_j\,A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j)\,.\,\mathbf{e}_k$$

$$=$$

$$\sum_k\,(\sum_{i<j}\,A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j \,+\, \sum_{i=j}\,A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j \,+\, \sum_{i>j}\,A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j)\,.\,\mathbf{e}_k$$

$$=$$

$$\sum_k\,(\sum_{i<j}\,A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j \,+\, 0\,.\,a^i\,.\,b^j \,-\, \sum_{i<j}\,A^k_{ij}\,.\,a^j\,.\,b^i)\,.\,\mathbf{e}_k$$

$$=$$

1. C'est par exemple le moment associé avec le parcours d'une particule orbitant autour d'un noyau atomique. Contrairement à la quantité de mouvement ce cette particule, il n'est pas une constante du mouvement. La constance du moment angulaire total, $\hbar.\mathbf{J}$, est assurée par l'adjonction du spin intrinsèque.

$$\sum_k (\sum_{i<j} A^k_{ij} \,.\, (a^i \,.\, b^j \;-\; a^j \,.\, b^i) \,.\, \mathbf{e}_k$$

Ce n'est rien d'autre que la définition d'un produit de Lie déformé par le cube anti-symétrique A :

$$\forall\, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \,\in\, E^2(D,\, K) :$$

$$\forall\, A \,:\, A^k_{ij} \;+\; A^k_{ji} \;=\; 0,\, \otimes_A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \;=\; [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_A$$

2. à constater ensuite que, dans le cas particulier où l'espace vectoriel des discussions est de dimension trois (D = 3), le cube A se réduit à une matrice carrée (3-3) de M(3, K) et le produit de Lie déformé à un produit vectoriel déformé :
$$\{A^k_{ij} \;+\; A^k_{ji} \;=\; 0\} \;\Rightarrow\; \{A \,\rightarrow\, [A] \,\in\, M(3,\, K)\}$$
3. à préciser le formalisme de la déformation agissant sur un produit vectoriel classique ; la question a été élucidée dans [[d] ; remarque 1.7, p.8, sans numéro] :
$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >=\, [A]^t \,.\, [J] \,.\, |\mathbf{q}_1 \,\wedge\, \mathbf{q}_2 > \,;\; |A| \;=\; \pm 1$$
Avec :
$$[J] \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \;;\; [J]^t \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
4. à remarquer que les matrices [J] et [A] sont toutes les deux inversibles et que ce fait permet d'écrire :
$$|\mathbf{q}_1 \,\wedge\, \mathbf{q}_2 >=\, \{[A]^t \,.\, [J]\}^{-1} \,.\, |[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >$$
5. à en déduire que si les produits vectoriels déformés peuvent se décomposer non-trivialement :
$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >=\, [P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > +|\mathbf{z} >$$
Il en est forcément de même des produits vectoriels classiques :
$$|\mathbf{q}_1 \,\wedge\, \mathbf{q}_2 >=\, \{[A]^t \,.\, [J]\}^{-1} \,.\, \{[P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > +|\mathbf{z} >\}$$
6. à donner un visage précis aux décompositions génériques des produits vectoriels. Il existe en fait deux types de noyaux selon que la polynomiale associée avec une décomposition donnée est propre (type I) ou dégénérée (type II) :
$$[P_{I\,ou\,II\,|A|}] \;=\; \{[A]^t \,.\, [J]\} \,.\, [K_{I\,ou\,II\,|A|}]$$
En dimension trois, exceptionellement, la méthode intrinsèque vient en renfort de la méthode extrinsèque et il est possible de démontrer que :
— Pour un noyau de type I associé avec la polynomiale κ ; voir [[e] ; p. 25] :
$$[_{\kappa(\mathbf{q}_1)}K]_{|A|} \;=\; \frac{1}{2} \,.\, [Hess_{\mathbf{q}_1}\kappa(\mathbf{q}_1)] \;+\; \frac{1}{|A|} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}_\kappa\mathbf{s}) \,;\; |A| \;=\; \pm 1$$
— Pour un noyau type II associé avec une polynomiale dégénérées, il existe une paire de vecteurs ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$) dans E(3, C) × E(3, C) telle que :
$$[K_{II}] \;=\; \frac{1}{2} \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \;+\; T^t_2(\otimes)(\mathbf{a},\, \mathbf{b})\} \;+\; {}_{[J]}\Phi(\frac{1}{2} \,.\, ({}^{(3)}\mathbf{a} \,\wedge\, \mathbf{b}))$$

Toute cette démarche permet de décomposer tous les produits vectoriels classiques selon la formule générique :

$$|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2> = [K] \,.\, |\mathbf{q}_2> + \{[A]^t \,.\, [J]\}^{-1} \,.\, |\mathbf{z}>$$

dans laquelle il est toujours possible de faire apparaître la décomposition la plus triviale ; par exemple, pour un noyau de type I :

$$|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2> = \{\frac{1}{|A|} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}_{\kappa}\mathbf{s}) + \frac{1}{2} \,.\, [Hess_{\mathbf{q}_1}\kappa(\mathbf{q}_1)]\} \,.\, |\mathbf{q}_2> + \{[A]^t \,.\, [J]\}^{-1} \,.\, |\mathbf{z}>$$

Cette formulation mène alors à :

$$|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2> = \frac{1}{|A|} \,.\, |{}_{\kappa}\mathbf{s} \wedge \mathbf{q}_2> + \{\frac{1}{2} \,.\, [Hess_{\mathbf{q}_1}\kappa(\mathbf{q}_1)] \,.\, |\mathbf{q}_2> + \{[A]^t \,.\, [J]\}^{-1} \,.\, |\mathbf{z}>\}$$

Ici, le vecteur ${}_{\kappa}\mathbf{s}$ est le vecteur singulier (unique à chaque instant) de la polynomiale propre κ. Il ne se condond a priori pas avec l'argument $\mathbf{q}_1$ du produit vectoriel étudié.

Remarque 2.3. ***Calibrage des méthodes.***

Les résultats de la méthode intrinsèque ne peuvent coincider avec ceux de la méthode extrinsèque que sous certaines conditions. Par exemple, pour les noyaux de type I, il faut pouvoir comparer de manière cohérente les parties principales et supposer que la méthode intrinsèque a donné le même résidu que son homologue extrinsèque ; précisément il faut pouvoir valider :

$$[P_{I,\,|A|}]_{intrins.} = [P]_{extrins.}$$

Sachant que :

$$[P_{I,\,|A|}]_{intrins.} = \{[A]^t \,.\, [J]\} \,.\, \{\frac{1}{2} \,.\, [Hess_{\mathbf{q}_1}\kappa(\mathbf{q}_1)] + \frac{1}{|A|} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}_{\kappa}\mathbf{s})\} \,;\, |A| = \pm 1$$

$$[P]_{extrins.} = {}_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1) + \frac{1}{2} \,.\, [B]^{-1} \,.\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}_1}, [B] \,.\, |\mathbf{z}>)$$

J'ai abordé ce sujet à plusieurs reprises, notemment dans [[d] ; remarque 2.9], et mis en évidence au moins deux grandes familles de situations validant l'égalité des parties principales. Une de ces familles se caractérise par le fait de devoir poser :

$$[A]^t \,.\, [J] = [B]^{-1}$$

$$\frac{1}{|A|} \,.\, \{[A]^t \,.\, [J]\} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}_{\kappa}\mathbf{s}) = {}_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1)$$

$$[Hess_{\mathbf{q}_1}\kappa(\mathbf{q}_1)] = T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}_1}, [B] \,.\, |\mathbf{z}>)$$

Cette éventualité équivaut à dire que :

1. Soit la déformation [A] (si elle est connue) détermine la forme bilinéaire représentée par la matrice [B] inversible devant être utilisée pour mettre en oeuvre la méthode extrinsèque ; soit la forme bilinéaire représentée par la matrice [B] inversible (si elle est connue) détermine la déformation subie localement à un instant donné par le produit vectoriel étudié.
2. L'argument $\mathbf{q}_1$ et le vecteur singulier ${}_{\kappa}\mathbf{s}$ de la polynomiale propre κ permettant de mettre en oeuvre la méthode intrinsèque sont reliés de manière très précise entre eux ; ce qui permettra a priori de préciser la décomposition générique du produit vectoriel étudié.
3. Les hessiennes des polynomiales κ et Λ sont les mêmes.

Quelle que soit la famille retenue pour résoudre la question du calibrage des deux méthodes, la relation générique :

$$\frac{1}{|A|} \,.\, \{[A]^t \,.\, [J]\} \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{s}) = {}_{[A]}\Phi(\mathbf{q})$$

reste obligatoire. C'est donc vers elle que se porte mon attention.

2.3 Introduction d'un vecteur topologique.

Pour rappel :

$$[A] = \begin{bmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{bmatrix} \in M(3,\, K)$$

Et :

$$[J]^t \,.\, [A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ -A^1_{13} & -A^2_{13} & -A^3_{13} \\ A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \end{bmatrix}$$

ou encore :

$$[A]^t \,.\, [J] = \begin{bmatrix} A^1_{23} & -A^1_{13} & A^1_{12} \\ A^2_{23} & -A^2_{13} & A^2_{12} \\ A^3_{23} & -A^3_{13} & A^3_{12} \end{bmatrix}$$

Ainsi la relation liant **q** et **s** se traduit par :

$$_A\Phi(\mathbf{q})$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} A^1_{p1} \,.\, q^p & A^1_{p2} \,.\, q^p & A^1_{p3} \,.\, q^p \\ A^2_{p1} \,.\, q^p & A^2_{p2} \,.\, q^p & A^2_{p3} \,.\, q^p \\ A^3_{p1} \,.\, q^p & A^3_{p2} \,.\, q^p & A^3_{p3} \,.\, q^p \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} A^1_{21} \,.\, q^2 \,+\, A^1_{31} \,.\, q^3 & A^1_{12} \,.\, q^1 \,+\, A^1_{32} \,.\, q^3 & A^1_{13} \,.\, q^1 \,+\, A^1_{23} \,.\, q^2 \\ A^2_{21} \,.\, q^2 \,+\, A^2_{31} \,.\, q^3 & A^2_{12} \,.\, q^1 \,+\, A^2_{32} \,.\, q^3 & A^2_{13} \,.\, q^1 \,+\, A^2_{23} \,.\, q^2 \\ A^3_{21} \,.\, q^2 \,+\, A^3_{31} \,.\, q^3 & A^3_{12} \,.\, q^1 \,+\, A^3_{32} \,.\, q^3 & A^3_{13} \,.\, q^1 \,+\, A^3_{23} \,.\, q^2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} A^1_{23} & -A^1_{13} & A^1_{12} \\ A^2_{23} & -A^2_{13} & A^2_{12} \\ A^3_{23} & -A^3_{13} & A^3_{12} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le détail des calculs fournit les neufs relations suivantes ; pour la première colonne :

$$A^1_{21} \,.\, q^2 \,+\, A^1_{31} \,.\, q^3 \,=\, -A^1_{13} \,.\, s_3 \,-\, A^1_{12} \,.\, s_2$$

$$A^2_{21} \,.\, q^2 \,+\, A^2_{31} \,.\, q^3 \,=\, -A^2_{13} \,.\, s_3 \,-\, A^2_{12} \,.\, s_2$$

$$A^3_{21} \,.\, q^2 \,+\, A^3_{31} \,.\, q^3 \,=\, -A^3_{13} \,.\, s_3 \,-\, A^3_{12} \,.\, s_2$$

Deuxième colonne :

$$A^1_{12} \,.\, q^1 \,+\, A^1_{32} \,.\, q^3 \,=\, -A^1_{23} \,.\, s_3 \,+\, A^1_{12} \,.\, s_1$$

$$A^2_{12} \,.\, q^1 \,+\, A^2_{32} \,.\, q^3 \,=\, -A^2_{23} \,.\, s_3 \,+\, A^2_{12} \,.\, s_1$$

$$A^3_{12} \,.\, q^1 \,+\, A^3_{32} \,.\, q^3 \,=\, -A^3_{23} \,.\, s_3 \,+\, A^3_{12} \,.\, s_1$$

Troisième colonne

$$A^1_{13} \,.\, q^1 \,+\, A^1_{23} \,.\, q^2 \,=\, A^1_{23} \,.\, s_2 \,+\, A^1_{13} \,.\, s_1$$

$$A^1_{13} \,.\, q^1 \,+\, A^1_{23} \,.\, q^2 \,=\, A^2_{23} \,.\, s_2 \,+\, A^2_{13} \,.\, s_1$$

$$A^1_{13} \,.\, q^1 \,+\, A^1_{23} \,.\, q^2 \,=\, A^3_{23} \,.\, s_2 \,+\, A^3_{13} \,.\, s_1$$

Il est toujours possible de considérer que la matrice [A] est constituée (i) soit de trois vecteurs rangés dans une colonne dont les composantes sont disposées en ligne ; (ii) soit de trois vecteurs rangés en ligne dont les composantes sont disposées en colonne. En effet, par construction, chaque matrice (3-3) contient implicitement six vecteurs parce que de toute évidence :

$$[A] \,=\, \begin{bmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{bmatrix}$$

peut toujours se lire (se décoder) comme une juxtaposition de trois colonnes :

$$[A] \,=\, [|\mathbf{a}_1 >,\, |\mathbf{a}_2 >,\, |\mathbf{a}_3 >]$$

en posant :

$$|\mathbf{a}_\eta > \equiv \left| \begin{matrix} A^\eta_{12} \\ A^\eta_{23} \\ A^\eta_{13} \end{matrix} \right\rangle ;\ \eta \,=\, 1,\, 2,\, 3.$$

ou comme une superposition de trois lignes :

$$[A] \,=\, \begin{bmatrix} |\mathbf{a}^3 > \\ |\mathbf{a}^1 > \\ |\mathbf{a}^2 > \end{bmatrix}$$

Les composantes de ces six vecteurs sont toutes des éléments de K. Toutes ces composantes appartiennent à au moins deux vecteurs ; d'où la notion d'intrication concernant ces six vecteurs. Ceci étant dit, j'ajouterai la :

Définition 2.1. ***Somme des composantes d'un vecteur***

L'application "somme des composantes d'un vecteur" est une application de E(3, K) dans K qui, comme son nom l'indique, fait correspondre à un vecteur la somme de ses composantes :

$$\forall\, \mathbf{v} \,\in\, E(3,\, K) \xrightarrow{\oplus} \oplus(\mathbf{v}) \,=\, \mathbf{v}^\oplus \,=\, \sum_{p\,=\,1}^{3} v^p \,\in\, K$$

et je constaterai que les neufs relations écrites ci-dessus permettent d'obtenir les trois suivantes :

$$\begin{aligned} -\mathbf{a}^{3\oplus} \,.\, q^2 \,-\, \mathbf{a}^{2\oplus} \,.\, q^3 \,&=\, -\mathbf{a}^{3\oplus} \,.\, s_2 \,-\, \mathbf{a}^{2\oplus} \,.\, s_3 \\ \mathbf{a}^{3\oplus} \,.\, q^1 \,-\, \mathbf{a}^{1\oplus} \,.\, q^3 \,&=\, \mathbf{a}^{3\oplus} \,.\, s_1 \,-\, \mathbf{a}^{1\oplus} \,.\, s_3 \\ \mathbf{a}^{2\oplus} \,.\, q^1 \,+\, \mathbf{a}^{1\oplus} \,.\, q^2 \,&=\, \mathbf{a}^{1\oplus} \,.\, s_2 \,+\, \mathbf{a}^{2\oplus} \,.\, s_1 \end{aligned}$$

Définition 2.2. ***Vecteur topologique.***

Il est clair que les sommes $\mathbf{a}^{1\oplus}$, - $\mathbf{a}^{2\oplus}$, $\mathbf{a}^{3\oplus}$ peuvent constituer -dans cet ordre- les composantes d'un vecteur ${}_{[A]}\mathbf{a}$ qui sera baptisé de *topologique*.

Remarque 2.4. ***Le lien entre le projectile et le vecteur singulier.***

Ceci étant compris, il devient évident que les trois relations précédentes s'écrivent en fait très simplement :

$${}_J\Phi({}_{[A]}\mathbf{a}) \,.\, |\mathbf{q} > = \,{}_J\Phi({}_{[A]}\mathbf{a}) \,.\, |\mathbf{s} >$$

D'où il est facile de déduire :

$${}_{[A]}\mathbf{a} \,\wedge\, \mathbf{q} \,=\, {}_{[A]}\mathbf{a} \,\wedge\, \mathbf{s}$$

Puis enfin, en tenant compte des propriétés élémentaires du produit vectoriel classique :

$$\mathbf{q} \,=\, \mathbf{s} \,+\, \mu \,.\, {}_{[A]}\mathbf{a},\ \forall \mu \,\in\, K$$

2.4 Formalisation de l'écart à la trivialité.

Les décompositions des produits vectoriels classiques associées avec des polynomiales propres se laissent donc écrire :

$$\frac{1}{|A|} \cdot |({}_{\kappa}\mathbf{s} + \mu \cdot {}_{[A]}\mathbf{a}) \wedge \mathbf{q}_2 >$$

$$=$$

$$\frac{1}{|A|} \cdot |{}_{\kappa}\mathbf{s} \wedge \mathbf{q}_2 > + \{\frac{1}{2} \cdot [Hess_{\mathbf{q}_1} \kappa(\mathbf{q}_1)] \cdot |\mathbf{q}_2 > + \{[A]^t \cdot [J]\}^{-1} \cdot |\mathbf{z} >\}$$

La logique interne de la théorie des produits vectoriels déformés amène à prédire que :

$$\frac{\mu}{|A|} \cdot |{}_{[A]}\mathbf{a} \wedge \mathbf{q}_2 >$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \cdot [Hess_{\mathbf{q}_1} \kappa(\mathbf{q}_1)] \cdot |\mathbf{q}_2 > + \{[A]^t \cdot [J]\}^{-1} \cdot |\mathbf{z} >$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \cdot T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}_1}, [B] \cdot |\mathbf{z} >) \cdot |\mathbf{q}_2 > + [B] \cdot |\mathbf{z} >$$

$$=$$

$$[B] \cdot |\mathbf{D} >$$

La matrice [B] ayant été d'emblée supposée inversible, cette logique interne donne une expression des différences entre une décomposition quelconque et la décomposition la plus triviale :

$$|\mathbf{D} > = \frac{\mu}{|A|} \cdot [B]^{-1} \cdot |{}_{[A]}\mathbf{a} \wedge \mathbf{q}_2 >$$

Ce résultat apparemment très général contient de surprenantes informations que je vais maintenant tenter de décoder en gardant la notion de moment cinétique comme fil conducteur.

2.5 Application à la propagation de la lumière dans le vide.

A cause de la célèbre relation de Planck-Einstein [[01] ; axiome (A-1)], le moment cinétique total, **J**, peut se définir comme étant le produit vectoriel entre un vecteur d'onde spatial, **k**, et une position **x** ; in extenso :

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{x}$$

Alors la physique enseigne que :

$$\hbar \cdot \mathbf{J} = \hbar \cdot (\mathbf{k} \wedge \mathbf{x}) = \mathbf{L} + \frac{1}{2} \cdot \hbar \cdot \sigma$$

Il est connu que le vecteur d'onde associé à la propagation de la lumière dans le vide obéit à la loi de Klein-Gordon en suivant a priori des géodésiques. J'ai prouvé par ailleurs dans [[e]] qu'il était possible d'associer une polynomiale de degré deux écrite en fonction des composantes spatiales du vecteur d'onde (soit par exemple κ cette polynomiale) et je peux raisonnablement penser que le vecteur singulier de cette polynomiale suit la géodésique le long de laquelle se propage la lumière.

Sachant désormais que le vecteur d'onde se décompose naturellement en deux parties dont l'une est *topologique* grâce aux investigations mathématiques précédentes :

$$\mathbf{k} = {}_{\kappa}\mathbf{s} + \mu \,.\, {}_{[A]}\mathbf{a}, \, \forall \mu \in K$$

Il semble logique de vouloir définir le moment cinétique orbital classique comme celui résultant du fait de suivre une géodésique ; de sorte que :

$$\mathbf{L} = \hbar \,.\, ({}_{\kappa}\mathbf{s} \wedge \mathbf{x})$$

En poursuivant cette logique, l'écart entre le moment cinétique total et le moment cinétique classique, c'est-à-dire le moment cinétique dit intrinsèque doit s'écrire de la façon suivante :

$$\mu \,.\, {}_{[A]}\mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = \frac{1}{2} \,.\, \sigma$$

qui laisse clairement penser que le vecteur $\mu.{}_{[A]}\mathbf{a}$ représente du coup l'équivalent d'une sorte de *quantité de mouvement topologique* inhérente à la présence de la déformation [A].

Une idée propre à la théorie que je développe consiste alors à penser que la différence entre un produit vectoriel et sa décomposition la plus triviale, le vecteur $\mathbf{D}$, coincide ici avec l'existence, l'apparition, d'un moment cinétique intrinsèque.

$$|\hbar \,.\, \mathbf{J} - \mathbf{L}> = \hbar \,.\, \mu \,.\, |{}_{[A]}\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}> = \frac{1}{2} \,.\, \hbar \,.\, |\sigma> \sim |\mathbf{D}> = \frac{\mu}{|A|} \,.\, [B]^{-1} \,.\, |{}_{[A]}\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}>$$

Autrement dit, le spin intrinsèque trouverait son origine, son explication, dans une propriété mathématique caractérisant les décompositions des produits vectoriels classiques.

L'observation de la relation symbolisant cette hypothèse indique qu'elle pourrait parfois s'écrire :

$$\{[B] - Id_3\} \,.\, |{}_{[A]}\mathbf{a} \wedge \mathbf{x}> = |\mathbf{0}>$$

Il suffirait pour celà de supposer que le symbole $\sim$ remplace un facteur de proportionalité ad hoc ; par exemple : $|A|.\hbar$. Quand tel est le cas, cette hypothèse ne peut être validée que dans deux grandes familles de situations ; soit (i) : la particule se déplace dans une direction fixée par le vecteur topologique, quelle que soit la déformation (resp. et équivalemment : quel que soit l'inverse de la forme bilinéaire [B]) ; ou bien (ii) : un est une valeur propre de l'inverse de la forme bilinéaire [B].

Ce type de relation trouve toute sa justification au sein d'une étude systématique de la notion d'involution dans un espace vectoriel E(3, K) muni d'un produit vectoriel déformé par la matrice [A] ; voir [[f]].

3 Etude des écarts à la trivialité.

3.1 Positionnement de la problématique.

Cette section va approfondir l'étude du vecteur $\mathbf{D}$.

Definition 3.1. ***Table de Pythagore - principe.***

Le symbole $T_2(o)(\ldots,\ldots)$ désigne ce que j'ai nommé génériquement une "table de Pythagore" pour l'opération binaire (d'où le "2") de composition des fonctions. Lorsque cet opérateur assure la composition des éléments d'une paire générique du genre ($\partial_{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{Z}$) où le premier argument représente l'opérateur gradient de ... par rapport aux composantes du vecteur $\mathbf{u}$, le résultat de l'action d'une telle table de Pythagore doit se comprendre comme un élément de M(3, K) défini précisément par :

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{Q}},\, \mathbf{Z}) \,=\, \begin{pmatrix} \partial_{Q^1} Z^1 & \partial_{Q^2} Z^1 & \partial_{Q^3} Z^1 \\ \partial_{Q^1} Z^2 & \partial_{Q^2} Z^2 & \partial_{Q^3} Z^2 \\ \partial_{Q^1} Z^3 & \partial_{Q^2} Z^3 & \partial_{Q^3} Z^3 \end{pmatrix}$$

Cette définition, son principe, se laisse facilement extrapoler aux espaces vectoriels de dimension entière supérieure ou égale à deux (D $\geq$ 2).

Remarque 3.1. *Analyse de situation.*

L'observation des relations :

$$\frac{\mu}{|A|} \,.\, |_{[A]}\mathbf{a} \wedge \mathbf{q}_2 >$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \,.\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}_1},\, [B] \,.\, |\mathbf{z} >) \,.\, |\mathbf{q}_2 > \,+ [B] \,.\, |\mathbf{z} >$$

$$=$$

$$[B] \,.\, |\mathbf{D} >$$

montre que l'étude du vecteur $\mathbf{D}$ peut se rattacher à celle de la décomposition non-triviale du produit vectoriel classique entre le vecteur topologique $_{[A]}\mathbf{a}$ et la cible $\mathbf{q}_2$.

En effet :

1. un contexte déformant étant spécifié au départ par la donnée d'un élément [A] de M(3, K),
2. les relations assurant la cohérence entre les méthodes de décomposition étant supposées a priori vraies et réalisées, en particulier celle-ci :

$$[A]^t \,.\, [J] \,=\, [B]^{-1},\; |A| \,=\, \pm 1$$

alors :
— le vecteur topologique $_{[A]}\mathbf{a}$,
— la matrice [B],
— le vecteur [B].$|\mathbf{z}> \,=\, |\mathbf{Z}>$ résultant de l'action de la matrice [B] sur le résidu $\mathbf{z}$ de la décomposition non-triviale du produit vectoriel classique entre un projectile $\mathbf{Q} = \mathbf{q}_1$ et une cible $\mathbf{q}_2$
sont parfaitement définis.

Comme la donnée de la déformation [A] est équivalente à celle de la matrice [B] parce qu'il y a une correspondance bi-univoque entre elles, le vecteur topologique pourrait tout aussi bien être conventionnellement noté $_{[B]}\mathbf{a}$ sans rien changer au débat.

Ainsi :

Lemme 3.1. *Description objective d'un écart à la trivialité.*

Dans un contexte déformant spécifié au travers de la matrice [B] et -indirectement du coup- au travers du vecteur topologique $_{[B]}\mathbf{a}$, la décomposition non-triviale du produit vectoriel classique entre un projectile $\mathbf{Q} = \mathbf{q}_1$ et une cible $\mathbf{q}_2$ se traduit par l'apparition d'une différence avec la trivialité, le vecteur $\mathbf{D}$, telle que la représentation duale [B].$|\mathbf{D}>$ est une décomposition non-triviale du produit vectoriel classique entre le vecteur topologique ${}_{[B]}\mathbf{a}$ et la cible $\mathbf{q}_2$; elle s'écrit :

$$[B]\,.\,|\mathbf{D}>=\frac{\mu}{|A|}\,.\,|_{[A]}\mathbf{a}\,\wedge\,\mathbf{q}_2>=\frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{Q}},\,\mathbf{Z})\,.\,|\mathbf{q}_2>\,+|\mathbf{Z}>$$

Ses arguments en sont :

— la moitié de la hessienne de la fonction κ associée avec la décomposition non-triviale du produit $\mathbf{Q}\wedge\mathbf{q}_2$ et

— la déformation par la matrice [B] du résidu de cette décomposition non-triviale.

Tout cet exposé se laisse résumer dans le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Q}\wedge\mathbf{q}_2 & \xrightarrow{([B],\,\kappa)} & ([P_{I,\,|A|}],\,\mathbf{z}) & \xrightarrow{\quad diff \quad} & \mathbf{D} \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathbf{Q}\,=\,{}_{[B]}\mathbf{a};\,[B]} & & \Big\downarrow{\scriptstyle [B]} \\ & & (\frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{Q}},\,\mathbf{Z}),\mathbf{Z}) & \longleftarrow & {}_{[B]}\mathbf{a}\wedge\mathbf{q}_2 \end{array}$$

avec - pour rappel :

$$[P_{I,\,|A|}]_{intrins.}\;=\;[B]^{-1}\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{Q}},\,\mathbf{Z})\;+\;\frac{1}{|A|}\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{Q}\;-\;\mu\,.\,{}_{[B]}\mathbf{a})\}\,;\,|A|\;=\;\pm1$$

Il montre que la différence $\mathbf{D}$ à la trivialité de la décomposition du produit vectoriel initial, $\mathbf{Q}\wedge\mathbf{q}_2$, se calcule relativement aisément :

1. en ne considérant que la partie symétrique de la partie principale de cette décomposition (in extenso : la partie qui subsiste lorsque le projectile $\mathbf{Q}$ coincide avec le vecteur topologique induit par la déformation [B]) et
2. en déformant le résidu de cette décomposition triviale par la déformation [B].

En clair :

$$[P]\;\rightarrow\;[P(\mathbf{Q}\;=\;\mu\,.\,{}_{[B]}\mathbf{a})]\;=\;\frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{Q}},\,\mathbf{Z})$$

$$|\mathbf{z}>\rightarrow\;[B]\,.\,|\mathbf{z}>=\;|\mathbf{Z}>$$

Il apparaît donc que, dans cette théorie, un vecteur quelconque se comportant comme un projectile au sein d'un produit vectoriel peut osciller entre trois types d'états :

1. Il coincide avec le vecteur singulier d'une polynomiale ;
2. Il coincide avec le vecteur topologique d'un champ de déformations ;
3. Il n'est dans aucune des situations précédentes et il est donc quelconque.

Cette analyse peut se poursuivre bien plus profondément, par exemple en remarquant que le produit vectoriel topologique associé avec le produit vectoriel étudié initialement doit lui aussi forcément être relié à une polynomiale, je la noterai conventionnellement τ, telle que - si elle est propre :

$$\frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_{(\mu\,.\,{}_{[B]}\mathbf{a})},\,\mathbf{Z})\;=\;[B]^{-1}\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,[Hess_{({}_{[B]}\mathbf{a})}\tau({}_{[B]}\mathbf{a})]+\frac{1}{|A|}\,.\,{}_{[J]}\Phi({}_{\tau}\mathbf{s})\}\,;\,|A|\;=\;\pm1$$

3.2 La classe des déformations pseudo-triviales.

La conversation entâmée au niveau de la remarque 1.3 peut désormais être poursuivie.

Définition 3.1. ***Déformation pseudo-triviale.***

Une décomposition particulière d'un produit vectoriel donné est dite *pseudo-triviale* lorsque le vecteur signant l'écart à la trivialité est nul :

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}$$

Remarque 3.2. *Première caractérisation des décompositions pseudo-triviales.*

Il est aisé de constater que pour ces décompositions pseudo-triviales :

$$\mathbf{D} = \mathbf{0}$$
$$\downarrow$$
$$\forall\, [B] \,:\, [B]\,.\,|\mathbf{D}> = |\mathbf{0}>$$
$$\downarrow$$
$$\frac{\mu}{|A|}\,.\,|_{[A]}\mathbf{a} \wedge \mathbf{q}_2 > = \frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_{\mathbf{Q}},\,\mathbf{Z})\,.\,|\mathbf{q}_2> + |\mathbf{Z}> = |\mathbf{0}>$$

La cible $\mathbf{q}_2$ est *alignée* sur le vecteur topologique local et momentané :

$$\mathbf{q}_2 = \mu\,.\,_{[A]}\mathbf{a}$$

L'objectif consiste maintenant à exprimer $\mathbf{Z}$ en fonction des arguments de la paire $(\mathbf{Q} = \mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)$ de leurs dérivées partielles successives. Or j'ai montré au lemme précédent que le vecteur $\mathbf{D}$ doit être calculé comme si le projectile coincidait avec le vecteur topologique local et momentanné ; ce qui revient à vouloir expliciter avec plus de précision :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mu\,.\,_{[A]}\mathbf{a})$$

en résolvant de manière générique et générale :

$$\frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_{_{[A]}\mathbf{a}},\,\mathbf{Z})\,.\,|_{[A]}\mathbf{a}> + |\mathbf{Z}> = |\mathbf{0}>$$

Dans cette théorie, le résidu d'une décomposition d'un produit vectoriel classique dépend clairement du vecteur topologique local et momentanné ainsi que des variations de celui-ci.

Proposition 3.1. *Il n'existe pas de solution simple du genre :*

$$\mathbf{Z} = k\,.\,_{[A]}\mathbf{a}$$

Preuve 3.1. *En effet :*

Cette solution triviale reviendrait en effet à écrire dans le language des composantes :

$$Z^\alpha = k\,.\,a^\alpha$$

Par conséquent, la solution proposée -si elle était vraie- permettrait d'écrire :

$$k\,.\,\partial_{a^\beta}a^\alpha\,.\,a^\beta + 2\,.\,k\,.\,a^\alpha = 0 \to k\,.\,\delta^\alpha_\beta\,.\,a^\beta + 2\,.\,k\,.\,a^\alpha = 0 \to 3\,.\,k\,.\,a^\alpha = 0$$

Ce qui n'est possible que dans deux cas logiques : (i) si k $= 0$, quel que soit le vecteur topologique $\mathbf{a}$; et (ii) si ce vecteur topologique est nul, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, quelle que soit la valeur de k.

Le premier cas correspondrait tout simplement à une décomposition triviale du produit vectoriel topologique car le résidu $\mathbf{Z}$ serait alors forcément nul. La seconde éventualité n'aurait aucun sens ici puisque personne ne sait dériver par rapport au vecteur nul. □

Théorème 3.1. *Non alignement entre le résidu* $\boldsymbol{Z}$ *et le vecteur topologique* $\boldsymbol{a}$*.*

A l'intérieur de l'ensemble des décompositions pseudo-triviales d'un produit vectoriel classique initial, le résidu $\mathbf{Z}$, s'il n'est pas nul, ne peut pas être colinéaire au vecteur topologique local et momentanné.

$$\mathbf{Z} \neq k \,.\, {}_{[A]}\mathbf{a}$$

Proposition 3.2. *La relation suivante fournit des éléments de discussion acceptables :*

$$\exists\, [M({}_{[A]}\mathbf{a})] \,\in\, M(3,\, K) \,:\, |\mathbf{Z}>= \,[M({}_{[A]}\mathbf{a})]\,.\,|_{[A]}\mathbf{a}>$$

Preuve 3.2. *En injectant cette relation dans celle devant être résolu, il vient obligatoirement au niveau des composantes :*

$$Z^{\alpha} \,=\, \sum_{\gamma} m^{\alpha}_{\gamma}\,.\,a^{\gamma}$$

$$\downarrow$$

$$\partial_{a^{\beta}}(\sum_{\gamma} m^{\alpha}_{\gamma}\,.\,a^{\gamma})\,.\,a^{\beta} \,+\, 2.\sum_{\gamma} m^{\alpha}_{\gamma}\,.\,a^{\gamma} \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{\beta}(\sum_{\gamma} \partial_{a^{\beta}} m^{\alpha}_{\gamma}\,.\,a^{\gamma})\,.\,a^{\beta} \,+\, \sum_{\beta}\sum_{\gamma} m^{\alpha}_{\gamma}\,.\,\delta^{\gamma}_{\beta}\,.\,a^{\beta} \,+\, 2.\,\sum_{\beta} m^{\alpha}_{\beta}\,.\,a^{\beta} \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{\beta}(\sum_{\gamma} \partial_{a^{\beta}} m^{\alpha}_{\gamma}\,.\,a^{\gamma})\,.\,a^{\beta} \,+\, 3.\,\sum_{\beta} m^{\alpha}_{\beta}\,.\,a^{\beta} \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$|\otimes_{cube\,(\partial_{a^{\beta}} m^{\alpha}_{\gamma})}\,({}_{[A]}\mathbf{a},\, {}_{[A]}\mathbf{a})> \,+3\,.\,[M]\,.\,|_{[A]}\mathbf{a}>= \,|\mathbf{0}>$$

Dans les situations les plus simples, le produit tensoriel déformé par les dérivées partielles premières des composantes de la matrice [M] par rapport aux composantes de la vitesse topologique se décompose trivialement et autorise à écrire :

$$\{{}_{cube\,(\partial_{a^{\beta}} m^{\alpha}_{\gamma})}\Phi({}_{[A]}\mathbf{a}) \,+\, 3\,.\,[M]\}\,.\,|_{[A]}\mathbf{a}>= \,|\mathbf{0}>$$

qui, à cause de l'hypothèse faite au départ, devient simplement :

$$\{{}_{cube\,(\partial_{a^{\beta}} m^{\alpha}_{\gamma})}\Phi({}_{[A]}\mathbf{a})\}\,.\,|_{[A]}\mathbf{a}> \,+3\,.\,|\mathbf{Z}>= \,|\mathbf{0}>$$

Par conséquent, chaque fois que la relation suivante est vraie :

$$\frac{1}{3}\,\cdot{}_{cube\,(\partial_{a^{\beta}} m^{\alpha}_{\gamma})}\Phi({}_{[A]}\mathbf{a}) \,=\, \frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_{{}_{[A]}\mathbf{a}},\, \mathbf{Z})$$

La proposition :

$$\exists\, [M({}_{[A]}\mathbf{a})] \,\in\, M(3,\, K) \,:\, |\mathbf{Z}>= [M({}_{[A]}\mathbf{a})]\,.\,|_{[A]}\mathbf{a}>,\, {}_{[A]}\mathbf{a} \,\neq\, \mathbf{0}$$

résoud l'équation étudiée. $\square$

Lemme 3.2. *Première famille de décompositions pseudo-triviales.*

Il existe un sous-ensemble de l'ensemble des solutions résolvant l'équation signant l'appartenance à l'ensemble des décompositions triviales.
Il est caractérisé par la réalisation simultanée des deux relations précédentes.
Elles stipulent que :

1. le résidu **Z**, non forcément nul, est lié à la vitesse topologique **a** par une matrice [M(**a**)] :

$$\exists\,[M({}_{[A]}\mathbf{a})] \in M(3,\,K)\,:\,|\mathbf{Z}>=\,[M({}_{[A]}\mathbf{a})]\,.\,|_{[A]}\mathbf{a}>,\;{}_{[A]}\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

2. les dérivées partielles premières des composantes de cette matrice par rapport au composantes de la vitesse topologique détermine un cube, T, déformant le produit tensoriel classique carré de cette vitesse :

$$[M({}_{[A]}\mathbf{a})] \to T\,:\,\otimes({}_{[A]}\mathbf{a},\,{}_{[A]}\mathbf{a}) \to \otimes_T({}_{[A]}\mathbf{a},\,{}_{[A]}\mathbf{a})$$

3. la jacobienne des composantes du résidu par rapport aux composantes de la vitesse topologique (supposée non-nulle) vaut deux-tiers de la décomposition la plus triviale du produit tensoriel carré de la vitesse topologique déformé par le cube T :

$$\frac{2}{3}\cdot{}_T\Phi({}_{[A]}\mathbf{a}) \,=\, T_2(o)(\partial_{{}_{[A]}\mathbf{a}},\,\mathbf{Z})$$

Remarque 3.3. *Le cas des spineurs de Cartan.*

Lorsque la vitesse topologique **a** peut être considérée comme un spineur (au sens d'E. Cartan) dont les composantes sont déterminées par un système d'équations ad hoc (voir [[03] ; §IV, p. 93]), les matrices [M] représentant ce système génèrent des résidus nuls ($\mathbf{Z} = \mathbf{0}$). Comme la vitesse topologique ne peut pas être nulle, il faut que la décomposition triviale soit une matrice dégénérée (ce qui est obtenu dés le moment où le cube T est antisymétrique sur ses indices bas) et que, par conséquent la relation suivante soit vraie :

$$|{}_T\Phi({}_{[A]}\mathbf{a})| \,=\, |T_2(o)(\partial_{{}_{[A]}\mathbf{a}},\,\mathbf{Z})| \,=\, 0$$

Pour que ces résidus appartiennent à la première famille de décompositions pseudo-triviales, il faut alors que le déterminant de la hessienne de la polynomiale κ soit nul ; ce qui exclut les spineurs de Cartan de la première famille puisque toute cette discussion s'est construite sur des hessiennes non-dégénérées.

Références

4 Bibliographie

4.1 Oeuvres internationales.

[01] Cohen-Tanoudji, C., Diu B. et Laloe F. : Mécanique quantique tome I ; collection “Enseignement des sciences”, nouvelle édition revue, corrigée et augmentée de 1977, ISBN 2-7056-5733-9, v1, ©1973 Hermann Paris.

[02] Dyson, Freeman : Quantenfeld-theorie (Die Weltbekannte Einführung von einem der Väter der QED) ; Springer Spektrum, ISBN 978-3-642-37677-1, ©Springer Verlag Berlin Heidelberg 2014, 288 pages - en allemand.

[03] Cartan, E. The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966 ; translation of the “Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)” ; Hermann, 1937.

4.2 Contributions personnelles.

[a] PERIAT, T. : Décompositions intrinsèques des produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, v2, 14 août 2018, 27 pages.

[b] PERIAT, T. : The extrinsic method ; ISBN 978-2-36923-092-2, EAN 9782369230922, v6, 7 November 2020, 24 pages.

[c] PERIAT, T. : Aspects mathématiques de la théorie des produits tensoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-028-1, EAN 9782369230281, 6 juin 2021, 21 pages.

[d] PERIAT, T. : Variations des fonctions vectorielles et décomposition de Helmholtz ; ISBN 978-2-36923-098-4, EAN 9782369230984, v1, 13-25 octobre 2020, 29 pages.

[e] PERIAT, T. : Equation de Klein-Gordon, nouvelle analyse et identifications fondamentales (Gravitation quantique, tétraèdres et réalité) ; ISBN 978-2-36923-097-7, EAN 9782369230977, v6, 15 novembre 2021, 41 pages.

[f] PERIAT, T. : Produits vectoriels déformés, involution, trous noirs satisfaisant aux solutions de Bowen-York pour leproblème des données initiales et loi de dispersion des particules sans masse ; initiation à la thématique, ; ISBN 978-2-36923-115-8, EAN 9782369231158, v5, 10 février 2021, 68 pages.