Equation de Klein-Gordon, produits tensoriels déformés, loi de Lorentz covariante.

©by Thierry PERIAT

8 - 30 avril 2021

Ce document démontre que l'équation de Klein-Gordon se laisse analyser dans le cadre de la théorie des produits tensoriels déformés. Il montre l'intérêt pratique de méthodes mathématiques mises au point pour décomposer ces produits de façon non triviale. Il définit les conditions de leur applicabilité. De plus, il établit les prémisses d'un lien profond entre cette équation et la formulation covariante de la loi de Lorentz.

Mots clés : Equation de Klein-Gordon, produits tensoriels déformés, loi de Lorentz covariante.

Table des matières

french

1 Introduction

L'analyse de l'équation de propagation des ondes massives, également appelée de Klein-Gordon [06 ; p. 133, p. 337 et p. 557] est depuis longtemps un sujet de préoccupation mettant les théoriciens face à de nombreux défis. Elle est par exemple au centre d'une intense discussion concernant notre compréhension de ce qu'est une particule matérielle. A ce titre, il est juste de dire qu'elle occupe une place stratégique entre diverses autres relations essentielles en physique ; parmi elles : la relation de dispersion des ondes [07 ; p. 272, (7.10.a)], l'équation de Dirac dont elle est en quelque sorte la mère. Il faut attendre les travaux de l'approche quantique de la réalité (De Broglie, Feynmann, Dyson [01], Dirac et beaucoup d'autres) pour en dévoiler toutes les richesses et comprendre un peu mieux comment l'interpréter.

Le document qui suit se pique de la réanalyser à l'aune d'une théorie dont il est permis de dire qu'elle donne aux surfaces en évolution le rôle principal. Depuis les travaux d'E. Cartan, nous savons qu'elles permettent de déterminer des métriques [03]. Il n'y a pas non plus de problème conceptuel majeur à les identifier avec un front d'ondes en déplacement. Elles semblent donc être les objets idéaux pour représenter la dualité onde-particule. Sachant par ailleurs que les espaces temps vides peuvent s'assimiler à des régions infinitisimalement polarisées, il devient tentant de rechercher un moyen technique liant l'équation de Klein-Gordon à celle de Lorentz dans sa version covariante. C'est ce que réalise l'exploration menée dans ce document.

2 Analyse dans le cadre de la décomposition de type ADM.

2.1 Lien avec la théorie des produits vectoriels déformés.

Proposition 2.1. *L'équation de Klein-Gordon [01 ; p. 4, (2)], peut être intégrée à l'étude des produits vectoriels déformés.*

Démonstration. En considérant la formulation suivante de l'équation de Klein-Gordon [02 ; § 2.1, p. 10, (2.1)] :

$$g^{\alpha\beta} \, . \, \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x},\, t)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \, + \, m^2 \, . \, \phi(\mathbf{x},\, t) \, = \, 0$$

et ses solutions habituelles, à savoir [02 ; § 2.1, p. 11, (2.5)] :

$$\phi(\mathbf{x},\, t) \, = \, \phi(\mathbf{0}, 0) \, . \, e^{i.(\mathbf{k}\,.\,\mathbf{x} \, - \, \omega\,.\,t)}$$

où $\mathbf{x}$ représente la position spatiale, t l'époque, ω la pulsation et $\mathbf{k}$ le vecteur d'onde, il est possible de montrer que :

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x},\, t)}{\partial x^a} \, = \, i \, . \, k_a \, . \, \phi(\mathbf{x},\, t) \, et \, \frac{\partial \phi(\mathbf{x},\, t)}{\partial x^0} \, = \, -i \, . \, \omega \, . \, \phi(\mathbf{x},\, t)$$

puis :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^a \partial x^b} \, &= \, - \, k_a \, . \, k_b \, . \, \phi(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^a \partial x^0} \, &= \, \omega \, . \, k_a \, . \, \phi(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial^2 x^0} \, &= \, - \, \omega^2 \, . \, \phi(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

En réinjectant ces résultats dans l'équation de Klein-Gordon, il vient :

$$\{g^{ab} \, . \, k_a \, . \, k_b \, - \, (g^{a0} \, + \, g^{0a}) \, . \, \omega \, . \, k_a \, + \, g^{00} \, . \, \omega^2 \, - \, m^2\} \, . \, \phi \, = \, 0$$

Visiblement, cette formulation contient un facteur (la somme entre les parenthèses) qui est une polynomiale de degré deux écrite en fonction des trois composantes spatiales du vecteur d'onde $\mathbf{k}$. L'étude des produits vectoriels déformés permet d'avancer l'idée selon laquelle cette polynomiale peut éventuellement être la signature de l'existence des produits suivants (voir [[a]] et son complément indispensable dans [[b]]) :

$$\exists\,([P],\,\mathbf{z})\,in\,M(3,\,C)\,\times\,E(3,\,C)\,:\,|[\mathbf{k},...]_{[A]}>=\,[P]\,.\,|\mathbf{k}>\,+\,|\mathbf{z}>$$

□

2.2 L'apport de la méthode intrinsèque.

En supposant que la métrique spatiale est inversible, les résultats de base de la théorie des produits vectoriels déformés livrent :

$$\Lambda(\mathbf{k})\,=\,det\{[P]\,-\,_{[A]}\Phi(\mathbf{k})\}\,=\,\{g^{ab}\,.\,k_a\,.\,k_b\,-\,(g^{a0}\,+\,g^{0a})\,.\,\omega\,.\,k_a\,+\,g^{00}\,.\,\omega^2\,-\,m^2\}$$

1. Les coefficients de degré deux de la polynomiale valent en général :

   $$Hess_{(\mathbf{k})}\Lambda(\mathbf{k})\,=\,^{(3)}[G]^{-1}\,+\,(^{(3)}[G]^{-1})^t$$

   De sorte que lorsque la métrique est symétrique :

   $$\frac{1}{2}\,.\,Hess_{(\mathbf{k})}\Lambda(\mathbf{k})\,=\,^{(3)}[G]^{-1}$$

   Dans ce cas, il est légitime d'interpréter la métrique spatiale dans le cadre des travaux réalisés par E. Cartan dans [[03]].

2. En général, le vecteur singulier de la polynomiale Λ vaut :

   $$|_{\Lambda}\mathbf{s}>=\,-\,Hess^{-1}_{(\mathbf{k})}\Lambda(\mathbf{k})\,.\,|_{\Lambda}\mathbf{d}*>$$

   avec :

   $$|_{\Lambda}\mathbf{d}*>=\,-\omega\,.\,|g^{10}\,+\,g^{01},\,g^{20}\,+\,g^{02},\,g^{30}\,+\,g^{03}>$$

   Lorsque la métrique est symétrique :

   $$|_{\Lambda}\mathbf{s}>=\,-\frac{1}{2}\,.\,[G]\,.\,|_{\Lambda}\mathbf{d}*>$$

   avec :

   $$|_{\Lambda}\mathbf{d}*>=\,-2\,.\omega\,.\,|g^{01},\,g^{02},\,g^{03}>$$

3. Enfin :

   $$|^{(3)}P|\,=\,m^2\,-\,g^{00}\,.\,\omega^2$$

   A l'approche d'une géométrie de Minkowski avec la signature (+ - - -), ce déterminant prend la forme :

   $$|^{(3)}P|\,=\,m^2\,-\,\omega^2\,=\,-^{(3)}\mathbf{p}^2$$

   Il coincide, au signe moins près, avec le carré euclidien de la quantité de mouvement spatiale.

La partie principale de la décomposition du produit vectoriel déformé associable à une expression particulière de l'équation de Klein-Gordon vaut en général :

$$[P]\,=\,([A]^t\,.\,[J])\,.\,(\frac{1}{2}\,.\,|A|\,.\,Hess_{(\mathbf{k})}\Lambda(\mathbf{k})\,+\,_{[J]}\Phi(_{\Lambda}\mathbf{s}))$$

Lorsque la métrique est symétrique :

$$[P]\,=\,([A]^t\,.\,[J])\,.\,(|A|\,.\,^{(3)}[G]^{-1}\,+\,_{[J]}\Phi(_{\Lambda}\mathbf{s}))$$

avec un vecteur singulier qui vaut alors :

$$|_{\Lambda}\mathbf{s}>=\,\omega\,.\,[G]\,.\,|g^{01},\,g^{02},\,g^{03}>$$

Il s'annule lorsque la métrique est Minkowski. Ce n'est par contre plus le cas lorsque la métrique est celle d'un corps massif en rotation ; par exemple la Terre. Il convient alors de tenir compte de l'effet Thirring Lense.

3 Analyse dans le cadre des espaces de dimension quatre.

3.1 Les objectifs de cette section.

Je vais maintenant examiner les propositions suivantes :

1. L'équation de Klein-Gordon se laisse intégrer dans le cadre de la théorie des produits tensoriels déformés et décomposés, éventuellement non-trivialement.
2. Quand le point 1 est réalisé, certaines décompositions non-triviales peuvent être des représentation de la version covariante de la loi de Lorentz.
3. Dans le cadre de l'analyse faite au point 1, il est possible de retrouver la relation de dispersion "relativiste".

3.2 Analyse habituelle dans le cadre de la théorie quantique des champs.

L'analyse tridimensionnelle de l'équation de Klein-Gordon (EKG) s'inscrit de facto dans le contexte d'une découpe plus ou moins arbitraire de l'espace dans un mode dit 3 + 1 (ou ADM pour les américanophones [[05]]). Elle fait appel à la méthode au demeurant incomplète et dite intrinsèque exposée dans [[a]].

Ici je propose d'en faire une analyse dans un contexte quadridimensionnel à l'aide de la méthode extrinsèque de décomposition des produits tensoriels déformés ; voir [c].

Avant celà, je rappelle -pour la pédagogie- la manière dont la théorie quantique des champs traite cette équation à la suite des travaux de Dyson. La discussion débute avec la relation de dispersion [01 ; p. 4, (5)], [07 ; p. 272, (7.10.a)] :

$$E^2 \,=\, m^2 \,.\, c^4 \,+\, c^2 \,.\, p^2$$

Les relations de passage suivantes y sont injectées [01 ; p. 4, (1)] :

$$E \,\rightarrow\, i.\hbar \,.\, \frac{\partial}{\partial t} \,;\, \forall\, a \,=\, 1,\, 2,\, 3 :\, p_a \,\rightarrow\, -i.\hbar \,.\, \frac{\partial}{\partial x^a}$$

La manoeuvre permet de retrouver l'équation de Klein-Gordon, par exemple dans sa formulation [01 ; chapitre 1, p. 4, (6)], [07 ; p. 211, (5.46.a)], où le symbole Δ représente un opérateur de Laplace classique agissant dans un espace de dimension trois euclidien via des dérivations partielles par rapport aux positions :

$$\forall\, \psi :\, \frac{1}{c^2} \,.\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 t} \,-\, \Delta\psi \,=\, -\frac{m^2 \,.\, c^2}{\hbar^2} \,.\, \psi ;\, \Delta\psi \,=\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x^1} \,+\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x^2} \,+\, \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x^3} \,=\, \nabla^2 \psi$$

Inversement, soit les solutions génériques proposées dans [[01] ; chapitre 2, §2.6, p. 16, (43)], [07 ; p. 182, (5.4.a)] pour cette équation :

$$\forall\, (\mathbf{x}, t) :\, \psi(\mathbf{x}, t) \,=\, u \,.\, exp\{\frac{2.\pi.i}{h} \,.\, (\mathbf{p} \,.\, \mathbf{x} \,-\, E \,.\, t)\} ;\, \mathbf{p} \,.\, \mathbf{x} \,=\, \sum_{a=1}^{a=3} p^a.x^a$$

Ici u représente un spineur invariant, E une énergie et **p** une quantité de mouvement. Les dérivées partielles premières de ces solutions sont :

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^a} \,=\, \frac{2.\pi.i}{h} \,.\, p^a \,.\, \psi(\mathbf{x}, t) \,;\, \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \,=\, -\frac{2.\pi.i}{h} \,.\, E \,.\, \psi(\mathbf{x}, t)$$

Les dérivées partielles secondes en sont :

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial^2 x^a} = -\frac{4.\pi^2}{h^2} . (p^a)^2 . \psi(\mathbf{x}, t)$$

$$\frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial^2 t} = -\frac{4.\pi^2}{h^2} . E^2 . \psi(\mathbf{x}, t)$$

L'injection de ces dérivées partielles dans l'EKG redonne la relation de dispersion (Ce qui peut se vérifier dans [[01] ; p. 4, (5)]) :

$$\forall \psi : -\frac{E^2}{c^2} + {}^{(3)}\mathbf{p}^2 = -m^2 . c^2$$

En supposant que cette relation de dispersion s'exprime dans un espace de dimension quatre rapporté à une géométrie de Minkowski de signature (+ - - -) et en adoptant la convention d'écriture utilisée dans [01 ; §2.9, p. 19, (61)], elle n'est rien d'autre qu'un produit scalaire de E(4, R) × E(4, R) vers R ou de E(4, C) × E(4, C) vers R :

$$\forall \psi : <^{(4)} \mathbf{p},^{(4)} \mathbf{p} >_{[\eta]} = (m . c)^2$$

Cette relation induit l'existence de deux sous-ensembles de situations :

— La particule est sans masse ; m = 0 :

$$\forall \psi : <^{(4)} \mathbf{p},^{(4)} \mathbf{p} >_{[\eta]} = 0 \qquad (1)$$

Auquel cas la quantité de mouvement est un vecteur isotropique, au sens donné à ce qualificatif par E. Cartan dans [04].

— La particule a une masse non nulle ; m $\neq$ 0. Provided, ${}^4\mathbf{p}$ = m.${}^4\mathbf{u}$ and ${}^4\mathbf{u}$/c = ${}^4\mathbf{V}$:

$$\forall \psi : <^{(4)} \mathbf{V},^{(4)} \mathbf{V} >_{[\eta]} = 1 \qquad (2)$$

La relation de dispersion dite *relativiste* représente une sphère unitaire de dimension quatre. Il est possible de la traiter à l'aide de la relation d'Euler-Rodrigues.

3.3 Equation de Klein-Gordon et formes finslériennes.

Rembobinons le film au début et laissons-nous inspirer par une représentation de la relation de Klein-Gordon dans un espace de dimension quatre sans courbure telle qu'elle figure dans [02 ; p. 10, (2.1)] :

$$g^{\lambda\mu} . \frac{\partial^2 \phi({}^{(4)}\mathbf{x})}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{m^2 . c^2}{\hbar^2} . \phi({}^{(4)}\mathbf{x}) = 0$$

Proposition - Cette relation se laisse encore réécrire comme suit :

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{x}, {}^{(4)}\mathbf{p}, [G], \frac{\partial[G]}{\partial x^\lambda}, \frac{\partial^2[G]}{\partial x^\lambda \partial x^\mu}) . \phi({}^{(4)}\mathbf{x}) = 0$$

Démonstration. Soit les prolongations naturelles de la position spatiale et de la quantité de mouvement spatiale :

$${}^{(4)}\mathbf{x} : (c . t, {}^{(3)}\mathbf{x})$$

$${}^{(4)}\mathbf{p} : (\frac{E}{c}, {}^{(3)}\mathbf{p})$$

Soit le produit scalaire :

$$<^{(4)} \mathbf{p}, {}^{(4)}\mathbf{x} >_{[G]} = \sum_{\alpha, \beta = 0,1,2,3} g_{\alpha\beta} . p^\alpha . x^\beta$$

Soit les solutions génériques présupposées :

$$\psi({}^{(4)}\mathbf{x}) \;=\; u\,.\,exp\{\frac{2.\pi.i}{h}\,.\,<^{(4)}\,\mathbf{p},\,{}^{(4)}\mathbf{x}>_{[G]}\}$$

Ces solutions redonnent bien les expressions habituelles lorsque [G] = [η] et que la signature géométrique est du type (- + + +). Soit enfin les calculs successifs des dérivées partielles :

$$\frac{\partial\psi({}^{(4)}\mathbf{x})}{\partial x^{\lambda}} \;=\; \frac{2.\pi.i}{h}\,.\,\frac{\partial(g_{\alpha\beta}\,.\,p^{\alpha}\,.\,x^{\beta})}{\partial x^{\lambda}}\,.\,\psi({}^{(4)}\mathbf{x})$$

et :

$$\frac{\partial^2\psi({}^{(4)}\mathbf{x})}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}$$

$$=$$

$$\frac{2.\pi.i}{h}\,.\,\{(\frac{\partial^2(g_{\alpha\beta}\,.\,p^{\alpha}\,.\,x^{\beta})}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}) \;+\; \frac{2.\pi.i}{h}\,.\,\frac{\partial(g_{\alpha\beta}\,.\,p^{\alpha}\,.\,x^{\beta})}{\partial x^{\lambda}}\,.\,\frac{\partial(g_{\alpha\beta}\,.\,p^{\alpha}\,.\,x^{\beta})}{\partial x^{\mu}}\}\,.\,\psi({}^{(4)}\mathbf{x})$$

Tout comme dans la procédure habituelle, injectons ces calculs dans la représentation de l'EKG :

$$\{\frac{2.\pi.i}{h}\,.\,g^{\lambda\mu}\,.\,\{(\frac{\partial^2(g_{\alpha\beta}\,.\,p^{\alpha}\,.\,x^{\beta})}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}})+\frac{2.\pi.i}{h}\,.\,\frac{\partial(g_{\alpha\beta}\,.\,p^{\alpha}\,.\,x^{\beta})}{\partial x^{\lambda}}\,.\,\frac{\partial(g_{\alpha\beta}\,.\,p^{\alpha}\,.\,x^{\beta})}{\partial x^{\mu}}\}+\frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}\}$$

$$.\,\phi({}^{(4)}\mathbf{x})$$

$$=$$

$$0$$

Il s'agit bien du formalisme subodoré dans la proposition faite ci-dessus ; la fonction P_2 vaut :

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{x},\,{}^{(4)}\mathbf{p},\,[G],\,\frac{\partial[G]}{\partial x^{\lambda}},\,\frac{\partial^2[G]}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}})$$

$$=$$

$$\frac{2.\pi.i}{h}\,.\,g^{\lambda\mu}\,.\,\{(\frac{\partial^2(g_{\alpha\beta}\,.\,p^{\alpha}\,.\,x^{\beta})}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}}) + \frac{2.\pi.i}{h}\,.\,\frac{\partial(g_{\alpha\beta}\,.\,p^{\alpha}\,.\,x^{\beta})}{\partial x^{\lambda}}\,.\,\frac{\partial(g_{\alpha\beta}\,.\,p^{\alpha}\,.\,x^{\beta})}{\partial x^{\mu}}\} + \frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}$$

□

Remarque : Comme l'opinion en a été émise fort judicieusement par A. Einstein, il n'y a de bonne physique expérimentale que celle faite localement ; par conséquent, la discussion sera réduite au voisinage de l'origine des évènements et se concentrera à partir de maintenant sur :

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\,{}^{(4)}\mathbf{p},\,[G],\,\frac{\partial[G]}{\partial x^{\lambda}},\,\frac{\partial^2[G]}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}})$$

Dans le voisinage de l'origine :

$$\frac{\partial(g_{\alpha\beta}\,.\,p^{\alpha}\,.\,x^{\beta})}{\partial x^{\mu}}$$

$$=$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}}\,.\,p^{\alpha}\,.\,x^{\beta} \;+\; g_{\alpha\beta}\,.\,\frac{\partial p^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}\,.\,x^{\beta} \;+\; g_{\alpha\beta}\,.\,p^{\alpha}\,.\,\delta^{\beta}_{\mu}$$

$$=$$

$$g_{\alpha\mu}\,.\,p^{\alpha}$$

Remarque : Si la métrique est symétrique, alors :

$$\frac{\partial(g_{\alpha\beta} \,.\, p^{\alpha} \,.\, x^{\beta})}{\partial x^{\mu}} \;=\; g_{\mu\alpha} \,.\, p^{\alpha} \;=\; p_{\mu}$$

En ce qui concerne les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2(g_{\alpha\beta} \,.\, p^{\alpha} \,.\, x^{\beta})}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} \;=\; \frac{\partial(g_{\alpha\lambda} \,.\, p^{\alpha})}{\partial x^{\mu}} \;=\; \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} \,.\, p^{\alpha} \;+\; g_{\alpha\lambda} \,.\, \frac{\partial p^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}$$

Remarque : Si la métrique est symétrique, alors :

$$\frac{\partial^2(g_{\alpha\beta} \,.\, p^{\alpha} \,.\, x^{\beta})}{\partial x^{\lambda}\partial x^{\mu}} \;=\; \frac{\partial p_{\lambda}}{\partial x^{\mu}}$$

En injectant les calculs précédents dans l'expression de l'EKG :

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{p},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^{\lambda}})$$
$$=$$
$$\frac{2.\pi.i}{h} \,.\, g^{\lambda\mu} \,.\, \{(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} \,.\, p^{\alpha} \;+\; g_{\alpha\lambda} \,.\, \frac{\partial p^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}) \;+\; \frac{2.\pi.i}{h} \,.\, (g_{\alpha\lambda} \,.\, p^{\alpha}) \,.\, (g_{\beta\mu} \,.\, p^{\beta})\} \;+\; \frac{m^2 \,.\, c^2}{\hbar^2}$$

Remarque : Si la métrique est symétrique, alors :

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{p},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^{\lambda}})$$
$$=$$
$$\frac{2.\pi.i}{h} \,.\, g^{\lambda\mu} \,.\, \{\frac{\partial p_{\lambda}}{\partial x^{\mu}} \;+\; \frac{2.\pi.i}{h} \,.\, p_{\lambda} \,.\, p_{\mu}\} \;+\; \frac{m^2 \,.\, c^2}{\hbar^2}$$

Soit maintenant le cas des ondes massives de Klein-Gordon se propageant sans interaction avec leur environnement extérieur (absence de force) :

$$\frac{\partial p^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \;=\; 0$$
$$\downarrow$$
$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{p},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^{\lambda}})$$
$$=$$
$$\frac{2.\pi.i}{h} \,.\, g^{\lambda\mu} \,.\, \{\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} \,.\, p^{\alpha} \;+\; \frac{2.\pi.i}{h} \,.\, (g_{\alpha\lambda} \,.\, p^{\alpha}) \,.\, (g_{\beta\mu} \,.\, p^{\beta})\} \;+\; \frac{m^2 \,.\, c^2}{\hbar^2}$$

Dans le cadre de la théorie quantique des champs il peut être intéressant d'affubler la relation de De Broglie [07 ; p. 183, (5.5.e)] du facteur i ($i^2 + 1 = 0$) pour faire disparaitre autant que faire ce peut les composantes imaginaires des grandeurs physique :

$$\mathbf{p} \;=\; i.\hbar.\,\mathbf{k}$$

Ce stratagème mathématique est compatible avec la définition habituelle du vecteur d'onde qui peut comporter une partie imaginaire [08] ; la partie réelle étant liée à la vitesse de phase de l'onde tandis que la partie imaginaire se rapporte à des processus d'atténuation (ou d'amplification). Le fait de multiplier la relation historique de De Broglie par i devra s'accompagner d'un peu de vigilence dans l'interprétation de ce vecteur. L'injection de cette relation fournit alors l'expression :

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{k},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^{\lambda}}) \;=\; g^{\lambda\mu} \,.\, (g_{\alpha\lambda} \,.\, k^{\alpha}) \,.\, (g_{\beta\mu} \,.\, k^{\beta}) \;-\; g^{\lambda\mu} \,.\, \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} \,.\, k^{\alpha} \;+\; \frac{m^2 \,.\, c^2}{\hbar^2}$$

A noter au passage :

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{0},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^\lambda}) \,=\, \frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}$$

Remarque : Si la métrique est symétrique, alors :

$$\frac{\partial p_\lambda}{\partial x^\mu} \,=\, 0$$

$$\downarrow$$

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{p},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^\lambda}) \,=\, -\frac{1}{\hbar^2}\,.\,g^{\lambda\mu}\,.\,p_\lambda\,.\,p_\mu \,+\, \frac{1}{\hbar}\,.\,g^{\lambda\mu}\,.\,\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu}\,.\,p^\alpha \,+\, \frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}$$

C'est-à-dire :

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{k},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^\lambda}) \,=\, g^{\lambda\mu}\,.\,k_\lambda\,.\,k_\mu \,-\, g^{\lambda\mu}\,.\,\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu}\,.\,k^\alpha \,+\, \frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}$$

Et, à nouveau :

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{0},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^\lambda}) \,=\, \frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}$$

Remarque : Je note, pour les lecteurs qui refuseraient d'utiliser le stratagème consistant à travailler avec la version imaginaire de la relation de De Broglie, que le chemin orthodoxe mène ici à :

$${}^{(4)}\mathbf{p} \,=\, \hbar\,.\,\mathbf{k}$$

$$\downarrow$$

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{k},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^\lambda}) \,=\, -g^{\lambda\mu}\,.\,k_\lambda\,.\,k_\mu \,+\, i\,.\,g^{\lambda\mu}\,.\,\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu}\,.\,k^\alpha \,+\, \frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}$$

Les termes de degré un de la polynomiale P_2 sont alors affublés du facteur i. Bien que ces termes disparaissent lorsque les métriques sont invariantes, il reporte le problème d'interprétation lié à la présence du nombre imaginaire sur les métriques lorsque celles-ci varient. Les théories pronant l'existence de bi-métriques n'ayant pas actuellement reçu l'adoubement académique, cette formulation me force à restreindre le domaine de définition de cette analyse aux vecteurs d'onde purement imaginaires :

$${}^{(4)}\mathbf{k} \,=\, i\,.\,\mathbf{k}_0\,;\, \mathbf{k}_0 \,\in\, E(4,\, R)$$

Il revient au même de poser directement :

$${}^{(4)}\mathbf{p} \,=\, i\,.\,\hbar\,.\,\mathbf{k}_0\,;\, \mathbf{k}_0 \,\in\, E(4,\, R)$$

Lemme 3.1. *Des ondes massives de Klein-Gordon se propageant sans interaction avec leur environnement.*

Une onde massive de Klein-Gordon se propageant sans interaction avec son environnement a une vitesse invariante et elle peut être décrite à l'aide d'une polynomiale de degré deux dépendant des composantes du vecteur d'onde $\mathbf{k}$: $\mathrm{P}_2(\mathbf{k})$. Ce résultat autorise à vouloir faire usage de la méthode extrinsèque de décomposition des produits tensoriels déformés. Plus précisément, (i) il invite à interpréter la forme finslérienne $\mathrm{P}_2(\mathbf{k})$ comme un développement de Taylor Mac Laurin autour de $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ et (ii) il suggère de relater ce développement à l'existence d'une décomposition non-triviale d'un produit tensoriel déformé générique du type $\otimes_A(...,\, \mathbf{k})$.

3.4 Analyse dans le cadre de la méthode extrinsèque de décomposition des produits tensoriels déformés.

Analysons maintenant les formes finslériennes P_2 obtenues au cours de la sous-section précédente en admettant de penser qu'elles sont des développements de Taylor Mac Laurin autour de l'origine d'un référentiel :

$$\frac{1}{2} . < \mathbf{k}| . \{[Hess_{(\mathbf{k},\,0)}\, P_2(\mathbf{0})] . |\mathbf{k} >\} \;=\; g^{\lambda\mu} . (g_{\alpha\lambda} . k^{\alpha}) . (g_{\beta\mu} . k^{\beta})$$

$$|\mathbf{Grad}_{(\mathbf{k})}\, P_2(\mathbf{0}) >= -\,|g^{\lambda\mu} . \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} >$$

Et supposons que ces formes résultent de l'usage de la méthode extrinsèque pour tenter de découvrir les décompositions non-triviales des produits tensoriels déformés génériques du type $\otimes_A(..., \mathbf{k})$:

$$\exists\, ({}^{(4)}[O],\, {}^{(4)}\mathbf{y}) \in M(4,\, R) \times E(4,\, R) \,:\, |\otimes_A({}^{(4)}...,\, {}^{(4)}\mathbf{k}) >= {}^{(4)}[O] . |{}^{(4)}\mathbf{k} > + |{}^{(4)}\mathbf{y} >$$

Dans ces circonstances, il existe des formes bilinéaires non-dégénérées qui sont représentées par des éléments [B] de M(4, R) tels que :

— Pour les termes de degré deux :

$$[O] \;=\; {}_A\Phi(...) \;-\; \frac{1}{2} . [B]^{-1} . [Hess_{(\mathbf{k},\,0)}\, P_2(\mathbf{0})]$$

— Pour les termes de degré un :

$$|\mathbf{y} >= [B]^{-1} . |g^{\lambda\mu} . \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^{\mu}} >$$

— Pour les termes de degré zéro :

$$0(3) \;=\; P_2(\mathbf{k}) \;-\; \frac{m^2 . c^2}{\hbar^2}$$

Lorsque la fonction P_2 est continue, sa Hessienne est forcément symétrique et il est facile de vérifier que chaque décomposition non-triviale vérifie la relation :

$$[B] . [O] \;-\; [O]^t . [B]^t \;=\; [B] . {}_A\Phi(...) \;-\; {}_A\Phi^t(...) . [B]^t$$

Remarque : Au cas où la métrique est symétrique, la Hessienne de la fonction P_2 prend un visage particulier :

$$[G] \;=\; [G]^t \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} . [Hess_{(\mathbf{k},\,0)}\, P_2(\mathbf{0})] \;=\; [G]^{-1}$$

Précisément, elle correspond à une métrique d'E. Cartan ; voir [[03]]. De plus :

$$[B] . \{{}_A\Phi(\mathbf{u}) \;-\; [B]^{-1} . [G]^{-1}\} \;-\; \{{}_A\Phi(\mathbf{u}) \;-\; [B]^{-1} . [G]^{-1}\}^t . [B]^t$$

$$=$$

$$[B] . {}_A\Phi(\mathbf{u}) \;-\; {}_A\Phi^t(\mathbf{u}) . [B]^t$$

$$\downarrow$$

$$-[G]^{-1} \;+\; \{[B]^{-1} . [G]^{-1}\}^t . [B]^t \;=\; [0]$$

$$\downarrow$$

$$-[G]^{-1} \;+\; \{([G]^{-1})^t . ([B]^{-1})^t\} . [B]^t \;=\; [0]$$

Puisque la multiplication est une opération associative sur M(4, R) :

$$-[G]^{-1} + ([G]^{-1})^t \,.\, \{([B]^{-1})^t \,.\, [B]^t\} = [0]$$

Comme ici la métrique est supposée être symétrique :

$$-[G]^{-1} + [G]^{-1} \,.\, \{([B]^{-1})^t \,.\, [B]^t\} = [0]$$

Cette relation devient vraie sans limitation :

$$([B]^{-1})^t \,.\, [B]^t = Id_4$$

Ou lorsque, équivalemment :

$$([B]^{-1})^t = ([B]^t)^{-1}$$

Lemme 3.2. *Condition nécessaire permettant l'usage de la méthode extrinsèque pour l'analyse de l'équation de Klein-Gordon.*

Lorsque la métrique est symétrique, la polynomiale $P_2(\mathbf{k})$ décrivant la propagation d'une onde massive de Klein-Gordon peut être associée à une famille de produits tensoriels déformés et décomposés non trivialement du type $\otimes_A(..., \mathbf{k})$ à condition d'établir cette association à l'aide de la méthode extrinsèque en mettant en jeu des éléments [B] de M(4, R) respectant une relation qui sera désormais désignée par le label *règle d'or*. Ces éléments n'ont aucune raison d'être liés à la métrique qui, par ailleurs, est *Cartan* au sens donné à ce qualificatif dans [[03]].

3.5 Un lien possible avec la version covariante de la loi de Lorentz.

Examinons maintenant la recevabilité de la correspondance :

$$|m \,.\, \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) >= q \,.\, [F] \,.\, |\mathbf{u}> \iff \otimes_A(..., \mathbf{k}) = [O] \,.\, |\mathbf{k}> + |\mathbf{y}>$$

Puisque (rappel) :

$$\mathbf{p} = i.\hbar\, \mathbf{k}\,;\, \mathbf{k} \in E(4,\, R)$$

Il revient au même de vouloir examiner l'équivalence :

$$|m \,.\, \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) >= q \,.\, [F] \,.\, |\mathbf{u}> \iff \otimes_A(..., \mathbf{p}) = [O] \,.\, |\mathbf{p}> + i \,.\, \hbar \,.\, |\mathbf{y}>$$

Soit (proposition de travail) la relation :

$$|\mathbf{p}>= [T] \,.\, |\mathbf{u}> + |\mathbf{a}> \iff p^\beta = T^\beta_\epsilon \,.\, u^\epsilon + a^\beta$$

Pour la pédagogie, soit les produits tensoriels déformés dont le premier argument est une vitesse :

$$A^\chi_{\alpha\beta} \,.\, u^\alpha \,.\, p^\beta = o_{\chi\beta} \,.\, p^\beta + \hbar \,.\, i.y^\chi$$
$$\downarrow$$
$$A^\chi_{\alpha\beta} \,.\, u^\alpha \,.\, (T^\beta_\epsilon \,.\, u^\epsilon + a^\beta) = o_{\chi\beta} \,.\, (T^\beta_\epsilon \,.\, u^\epsilon + a^\beta) + i.\hbar \,.\, y^\chi$$
$$\downarrow$$
$$A^\chi_{\alpha\beta} \,.\, T^\beta_\epsilon \,.\, u^\alpha \,.\, u^\epsilon + A^\chi_{\alpha\beta} \,.\, u^\alpha \,.\, a^\beta = o_{\chi\beta} \,.\, T^\beta_\epsilon \,.\, u^\epsilon + (o_{\chi\beta} \,.\, a^\beta + i.\hbar \,.\, y^\chi)$$
$$\downarrow$$
$$(A^\chi_{\alpha\beta} \,.\, T^\beta_\epsilon) \,.\, u^\alpha \,.\, u^\epsilon = o_{\chi\beta} \,.\, T^\beta_\epsilon \,.\, u^\epsilon - A^\chi_{\alpha\beta} \,.\, a^\beta \,.\, u^\alpha + (o_{\chi\beta} \,.\, a^\beta + i.\hbar \,.\, y^\chi)$$

$$\downarrow$$

$$\forall\,\chi\,:\,(A^{\chi}_{\alpha\beta}\,.\,T^{\beta}_{\epsilon})\,.\,u^{\alpha}\,.\,u^{\epsilon}\,=\,(o_{\chi\beta}\,.\,T^{\beta}_{\epsilon}\,-\,A^{\chi}_{\epsilon\beta}\,.\,a^{\beta})\,.\,u^{\epsilon}\,+\,(o_{\chi\beta}\,.\,a^{\beta}\,+\,i.\hbar\,.\,y^{\chi})$$

La version covariante de la loi de Lorentz est formellement retrouvée dés le moment où, simultanément :

$$|\mathbf{p}>=\,[T]\,.\,|\mathbf{u}>\,+|\mathbf{a}>$$

$$\Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}\,=\,\Gamma^{\chi}_{\epsilon\alpha}$$

$$A^{\chi}_{\alpha\beta}\,.\,T^{\beta}_{\epsilon}\,=\,m\,.\,\Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

$$o_{\chi\beta}\,.\,T^{\beta}_{\epsilon}\,-\,A^{\chi}_{\epsilon\beta}\,.\,a^{\beta}\,=\,q\,.\,F^{\chi}{}_{\epsilon}$$

$$-m\,.\,\frac{du^{\chi}}{ds}\,=\,o_{\chi\beta}\,.\,a^{\beta}\,+\,i.\hbar\,.\,y^{\chi}$$

Lemme 3.3. *Conditions d'un lien formel entre l'équation de Klein-Gordon et la version covariante de la loi de Lorentz.*

Quand un produit tensoriel déformé associé à la polynomiale $\mathrm{P}_2(\mathbf{k})$ décrivant la propagation d'une onde massive de Klein-Gordon (i) est décomposé non-trivialement à l'aide de la méthode extrinsèque dans les conditions précisées au lemme précédent (ii) et qu'il appartient à la famille suivante :

$$\otimes_A(\mathbf{u},\mathbf{p})\,=\,[O]\,.\,|\mathbf{p}>\,+i\,.\,\hbar\,.\,|\mathbf{y}>$$

Alors il peut s'interpréter comme étant une représentation particulière de la version covariante de la loi de Lorentz si, simultanément, toutes les relations suivantes sont satisfaites :

$$|\mathbf{p}>=\,[T]\,.\,|\mathbf{u}>\,+|\mathbf{a}>$$

$$\Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}\,=\,\Gamma^{\chi}_{\epsilon\alpha}$$

$$A^{\chi}_{\alpha\beta}\,.\,T^{\beta}_{\epsilon}\,=\,m\,.\,\Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

$$o_{\chi\beta}\,.\,T^{\beta}_{\epsilon}\,-\,A^{\chi}_{\epsilon\beta}\,.\,a^{\beta}\,=\,q\,.\,F^{\chi}{}_{\epsilon}$$

$$-m\,.\,\frac{du^{\chi}}{ds}\,=\,o_{\chi\beta}\,.\,a^{\beta}\,+\,i.\hbar\,.\,y^{\chi}\,=\,0$$

La présence éventuellement gênante du nombre imaginaire disparaît facilement en imposant au vecteur $\mathbf{y}$ d'être du type : i.$\mathbf{y}_0$ avec $\mathbf{y}_0$ appartenant à E(4, R).

3.6 Où la relation de dispersion relativiste est retrouvée.

La métrique et le tenseur impulsion-énergie sont liés au sein de la théorie de la relativité générale par le biais de la très célèbre équation du champ [02; p. 154, (6.7)], [09; p. 115, (4.140)] :

$$[R_{\alpha\beta}]\,+\,(\Lambda\,-\,\frac{R}{2})\,.\,[G_{\alpha\beta}]\,=\,\frac{8.\pi.G}{c^4}\,.\,[T_{\alpha\beta}]$$

Quand la métrique est invariante, la connexion de Lev–Civita s'annule ainsi que le tenseur de courbure de Riemann :

$$\Lambda\,.\,[G]\,=\,\frac{8.\pi.G}{c^4}\,.\,[T]$$

Remarque : Dans un cadre géométrique limité aux métriques invariantes et symétriques, la fonction P_2 se résume à :

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\,{}^{(4)}\mathbf{k},\,[G],\,\frac{\partial[G]}{\partial x^{\lambda}})\,=\,g^{\lambda\mu}\,.\,k_{\lambda}\,.\,k_{\mu}\,+\,\frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}$$

$$\downarrow$$

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{k},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^\lambda}) \,=\, <\mathbf{k}|\,.\,[G]^{-1}\,.\,|\mathbf{k}> \,+\, \frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}$$

Et il est permis de poursuivre avec :

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{k},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^\lambda}) \,=\, \frac{\Lambda\,.\,c^4}{8.\pi.G}\,.\, <\mathbf{k}|\,.\,[T]^{-1}\,.\,|\mathbf{k}> \,+\, \frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}$$

Puisque (rappel) :

$$\mathbf{p} \,=\, i\,.\,\hbar\,.\,\mathbf{k}\,;\, \mathbf{k} \,\in\, E(4,\, R)$$

La fonction P_2 se réécrit :

$$P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{k},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^\lambda}) \,=\, -\frac{\Lambda\,.\,c^4}{8.\pi.G.\hbar^2}\,.\, <\mathbf{p}|\,.\,[T]^{-1}\,.\,|\mathbf{p}> \,+\, \frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}$$

$$\downarrow$$

$$\hbar^2\,.\,P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{k},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^\lambda})\,.\,c^2 \,=\, -\frac{\Lambda\,.\,c^6}{8.\pi.G}\,.\, <\mathbf{p}|\,.\,[T]^{-1}\,.\,|\mathbf{p}> \,+ m^2\,.\,c^4$$

Dans les conditions physiques venant d'être définies (métriques symétriques invariantes), cette formulation permet de retrouver la relation de dispersion (dite relativiste) lorsque deux conditions sont remplies :

1. Le terme à gauche du signe de l'égalité représente le carré de l'énergie totale de l'onde massive :

$$E^2 \,=\, \hbar^2\,.\,P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{k},\, [G],\, \frac{\partial[G]}{\partial x^\lambda})\,.\,c^2$$

2. Et :

$$-\frac{\Lambda\,.\,c^4}{8.\pi.G}\,.\, <\mathbf{p}|\,.\,[T]^{-1}\,.\,|\mathbf{p}> = \,\mathbf{p}^2$$

$$\downarrow$$

$$\forall\,\mathbf{p}:\; [T]^{-1} \,+\, \frac{8.\pi.G}{\Lambda\,.\,c^4}\,.\,Id_4 \,=\, [0]$$

$$\downarrow$$

$$\forall\,\mathbf{p}:\; [T] \,+\, \frac{\Lambda\,.\,c^4}{8.\pi.G}\,.\,Id_4 \,=\, [0]$$

A partir de là, il devient permis d'en induire qu'en l'absence de contraintes sur la quantité de mouvement :

$$\rho_{vacuum} \,\sim\, -\frac{\Lambda\,.\,c^2}{8.\pi.G}$$

L'interprétation exacte de cette relation n'a pas la simplicité de ses apparences. Le ratio correspond bien à ce que dit la littérature. Mais il subsiste un doute concernant le signe de la constante cosmologique. Si l'anti-matière est de la matière ordinaire dont les densités volumiques d'énergie sont négatives, cette relation reste compatible avec une constante positive ; au cas contraire (anti-matière et matière véhiculent une énergie positive), la constante doit être négative.

Lemme 3.4. *Conditions permettant de retrouver la relation de dispersion relativiste.*

Une analyse de l'équation de Klein-Gordon dans un contexte géométrique limité aux métriques symétriques invariantes à l'aide de la méthode extrinsèque permet :

1. de retrouver la relation de dispersion relativiste caractérisant ce contexte (rappel) :
$$E^2 \,=\, m^2 \,.\, c^4 \,+\, c^2 \,.\, p^2$$
2. d'associer la fonction P_2 au carré de l'énergie totale de l'onde étudiée et, indirectement, à sa fréquence :
$$\nu^2 \,=\, P_2({}^{(4)}\mathbf{0},\, {}^{(4)}\mathbf{k},\, [G],\, \frac{\partial [G]}{\partial x^\lambda}) \,.\, c^2$$
3. de retrouver la valeur absolue de la densité volumique de matiére (équiv. d'énergie) dans le vide.

4 Résumé et conclusion

Ce travail démontre clairement que l'équation de Klein-Gordon se laisse analyser dans le cadre de la théorie des produits tensoriels déformés. Cette affirmation vaut aussi bien dans une vision géométrique de type 3 + 1 de l'espace-temps, [[05]], que dans un contexte où l'espace quadridimensionnel est traité globalement, sans faire appel à la moindre découpe arbitraire entre espaces tridimensionnels et temps [09].

Dans le premier cas, l'analyse introduit des produits vectoriels déformés qu'elle étudie à l'aide de la méthode intrinsèque ; [a] et [b]. Dans le second cas, elle fait apparaitre des produits tensoriels déformés qu'elle est en mesure d'étudier à l'aide de la méthode extrinséque [c]. Dans tous les cas, un des deux arguments des produits déformés impliqués est le vecteur d'onde **k**, que ce soit dans sa version spatiale ou dans sa version quadridimensionnelle.

A l'instar de ce que fait la théorie quantique des champs [[01]], cette analyse propose un raisonnement cohérent permettant de relier la relation de dispersion relativiste et l'équation de Klein-Gordon ; et inversement. Au lieu de le faire en se basant sur les relations [[01] ; p. 4, (1)] :

$$E \,\rightarrow\, i.\hbar \,.\, \frac{\partial}{\partial t} \,;\, \forall\, a \,=\, 1,\, 2,\, 3 \,:\, p_a \,\rightarrow\, -i.\hbar \,.\, \frac{\partial}{\partial x^a}$$

elle fait appel aux fonctions polynomiales de degré deux $\mathrm{P}_2(\mathbf{k})$ qu'elle est en mesure de systématiquement associer à l'équation de Klein-Gordon.

La polynomiale est interprétée comme la preuve de l'existence d'un produit tensoriel déformé ayant été décomposé non-trivialement ; il est du type : $\otimes_A(\mathbf{...},\, \mathbf{k})$.

De manière à bien montrer la capacité de cette analyse à retrouver les résultats obtenus au sein de la théorie quantique des champs, le document se concentre sur les conditions physiques similaires à celles caractérisant a priori les espaces vides : la métrique est symétrique et l'onde n'interagit pas avec son environnement.

Il établit les conditions mathématiques permettant l'usage de la méthode extrinsèque (lemme 3.2) et démontre qu'une spécialisation de cette discussion sur les produits tensoriels déformés du type $\otimes_A(\mathbf{u},\, \mathbf{k})$ où **u** représente la vitesse de l'onde permettrait théorétiquement de retrouver le formalisme de la version covariante de la loi de Lorentz. Ce lien formel porte avec lui une idée fondamentale puisqu'il assimile l'onde massive à une particule relativiste.

Enfin, en relatant -dans ces conditions physiques, l'équation de Klein-Gordon aux équations proposées par la théorie de la relativité générale, la relation de dispersion relativiste est finalement retrouvée lorsque la métrique est en plus invariante.

Cette analyse mérite sans doute d'être testée dans des conditions physiques plus générales et plus sophistiquées.

5 Bibliographie

Références

5.1 Contributions personnelles.

[a] PERIAT, T. : Méthode intrinsèque; ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, version du 14 août 2018.

[b] PERIAT, T. : Produits vectoriels déformés, involution, trous noirs satisfaisant aux solutions de Bowen-York pour le problème des données initiales et loi de dispersion des particules sans masse; initiation à la thématique, ISBN 978-2-36923-115-8, EAN 9782369231158, 10 février 2021.

[c] PERIAT, T. : Extrinsic method; ISBN 978-2-36923-092-2, EAN 9782369230922, v6, 7 novembre 2020.

5.2 Articles, cours et Ouvrages de référence.

[01] Dyson, Freeman, J. : Quantenfeld-theorie (Die Weltbekannte Einfuehrung von einem der Vaeter der QED); Springer Spektrum, ISBN 978-3-642-37677-1, ©Springer Verlag Berlin Heidelberg 2014, 288 pages.

[02] Birell, N. D. and Davies, P. C. W. : Quantum fields in curved spacetime; Cambridge monographs on mathematical physics, ©Cambridge University Press 1982, first paperback 1984, reprinted 1989, 1992, 1994, 0-521-27858-9 paperback edition, 340 pages.

[03] Cartan, E. : Cartan, Elie. Les espaces métriques fondés sur la notion de d'aire dans "Actualités scientifiques et industrielles", numéro 72, exposés de géométrie publiés sous la direction de monsieur Elie Cartan, membre de l'institut et professeur à la Sorbonne; Paris, Hermann et Cie, éditeurs, 1933 - la partie centrale fait 50 pages.

[04] Cartan, E. : The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966; translation of the "Lecons sur la théorie des spineurs (2 volumes)"; Hermann, 1937, 157 pages.

[05] A.D.M., the Dynamics of General Relativity; arXiv : 0405109v1, 19 May 2004.

[06] Crawford, F. S., Jr : Ondes, Berkeley, cours de physique, volume 3, ©Librairie Armand Colin, Paris, 1972, 603 pages.

[07] Wichmann, E. H. : Physique quantique, Berkeley, cours de physique, volume 3, ©Librairie Armand Colin, Paris, 1974, 423 pages.

[08] Lycée Naval. Physique des ondes, cours de mathématiques spéciales.

[09] Gourgoulhon, E. : Relativité générale, Cours de maîtrise, astronomie, astrophysique et ingénierie spatiale, année 2012-2013, Université Paris 7, 324 pages.