Décompositions des produits tensoriels déformés dans les espaces de dimension deux

La théorie de la question (E)

ISBN 978-2-36923-103-5 - EAN 9782369231035

11 décembre 2019

Mots clés: produits tensoriels ; déformations ; décompositions ; sociologie

Contents

french

1 Question (E) en dimension deux pour les produits tensoriels déformés

1.1 Enoncé du problème en dimension deux

La question consiste à savoir si l'image duale d'un produit tensoriel déformé par un cube A de $2^3 = 8$ éléments et agissant sur E(2, K) se laise décomposer, éventuellement non trivialement, de la façcon suivante :

$$| \otimes_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) >= [P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

Dans le langage des composantes d'une base canonique quelconque Ω : ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$), il est équivalent de se demander "Que valent les paires ([P], $\mathbf{z}$) de M(2, K) $\times$ E(2, K) lorsque seul le système suivant est connu?"

$$A^k_{ij} \,.\, q^i_1 \,.\, q^j_2 \;=\; p_{kj} \,.\, q^j_2 \;+\; z^k \;;\; i,\, j,\, k \;\in\; I_2$$

Définition 1.1. ***Données intrinsèques au problème posé***

Ce sont les données dont dispose le mathématicien au moment de l'énoncé du problème ; à savoir : (i) le cube A déformant le produit tensoriel classique et (ii) les arguments de ce produit ; in extenso et dans l'ordre : le projectile $\mathbf{q}_1$ et la cible invariante lors des éventuelles décompositions, $\mathbf{q}_2$.

Définition 1.2. ***Ligne, colonne et bâton***

Chaque vecteur $\mathbf{a}$ de E(2, K) se laisse représenter dans l'espace tridimensionnel classique euclidien soit sous forme d'une ligne $\mathbf{a}(\rightarrow)$: [a^1, a^2], soit d'une colonne :

$$\mathbf{a}(\downarrow) \;:\; \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix}$$

soit encore d'un bâton (difficile à dessiner sur une feuille mais facile à s'imaginer): $\mathbf{a}(\nearrow)$. Cette manière de penser n'est qu'une extrapolation de la convention d'écriture dûe à Dirac. Les trois représentations sont simplement ce que j'appellerai des représentations duales (des éléments de E*(2, K) orientées dans l'espace euclidien réel.

Muni de ces définitions, et imprégné de l'état d'esprit implicitement véhiculé par celles-ci, il devient facile d'imaginer des représentations orientées dans l'espace des éléments de M(2, K). Ainsi et à titre d'exemple :

$$[M(\mathbf{a}(\downarrow), \mathbf{b}(\downarrow))](\rightarrow) \;=\; [\mathbf{a}(\downarrow), \mathbf{b}(\downarrow)] \;=\; \begin{bmatrix} a^1 & b^1 \\ a^2 & b^2 \end{bmatrix}$$

$$[M(\mathbf{a}(\rightarrow), \mathbf{b}(\rightarrow))](\downarrow) \;=\; \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\rightarrow) \\ \mathbf{b}(\rightarrow) \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{bmatrix} \;=\; \{[M(\mathbf{a}(\downarrow), \mathbf{b}(\downarrow))](\rightarrow)\}^t$$

Pour rendre compte du fait qu'un élément de M(2, K) peut désormais être représenté dans un des deux plans orthogonaux à celui de la feuille de papier, il suffit simplement d'écrire [M($\mathbf{a}(\downarrow)$,$\mathbf{b}(\downarrow)$)]($\nearrow$) ou [M($\mathbf{a}(\rightarrow)$,$\mathbf{b}(\rightarrow)$)]($\nearrow$).

Attention : avec ces conventions, par contre, la notation [M($\mathbf{a}(\downarrow)$,$\mathbf{b}(\downarrow)$)]($\downarrow$) n'est plus un élément de M(2, K) mais de M(4, 1).

Par ailleurs, il va faloir introduire deux opérations de "basculement (rotation)" d'un élément de M(2, K) pour pouvoir rendre compte de possibles basculements d'une représentation dans l'une des deux autres. Plus généralement, je vais être obligé d'importer l'arsenal des rotations de $\pi/2$ dans M(2, K). Enfin, conséquence ultime, il va devenir possible de concevoir la définition suivante :

Définition 1.3. ***Cube de rang deux***

Un cube, A, de rang deux est constitué par la superposition de deux éléments de M(2, K). L'élément générique se note, par exemple et par convention de l'écriture :

$$[_{label}A] \,=\, [A^{ligne}_{label\,colonne}] \,=\, \begin{bmatrix} A^1_{a1} & A^1_{a2} \\ A^2_{a1} & A^2_{a2} \end{bmatrix}$$

et la “superposition” de ces matrices labelisées se note △(label) :

$$A \,=\, \triangle(label)[_{label}A] \,=\, \triangle(A^{ligne}_{label\,colonne})$$

Muni de cette définition, il est aisé de comprendre qu'un même cube peut aussi résulter de la superposition de deux autres paires de matrices de M(2, K) ; ces autres superpositions s'effectuant chacune dans une des deux autres directions possibles de l'espace euclidien de dimension trois. Ce qui peut se noter symboliquement (au moins provisoirement en attendant mieux et plus concis) :

$$A \,=\, \triangle(label)[_{label}A] \,=\, \triangle(ligne)[A^{ligne}] \,=\, \triangle(colonne)[A_{colonne}] \,=\, \triangle(A^{ligne}_{label\,colonne})$$

Une autre façon de représenter un cube résulte de l'application de la convention introduite dans la définition précédente. Ainsi, l'écriture ci-dessous est un cube constitué par l'empilement de deux matrices, chacune étant située dans un plan parallèle au plan de cette feuille et la seconde étant la plus éloignée de ce plan :

$$\triangle\{[M(\mathbf{a}(\downarrow), \mathbf{b}(\downarrow))](\rightarrow), [M(\mathbf{c}(\downarrow), \mathbf{d}(\downarrow))](\rightarrow)(\nearrow)\}$$

Il est clair que cette écriture est très gourmande de signes mais je n'en ai pour le moment pas d'autre à proposer. Je pense qu'il sera judicieux, à l'avenir, (a) de privilégier le plan de la feuille de calcul comme plan de référence des écritures ; (b) de remarquer qu'un cube se trouve essentiellement défini par ses colonnes et la disposition de ses paires de colonnes dans l'espace. Autrement dit, pour ébaucher un début de simplification de la notation ci-dessus, le même cube aurait tout aussi bien pu être noté plus simplement comme suit si aucun doute n'est possible sur l'ordre et la disposition des colonnes :

$$[(\mathbf{a}\downarrow, \mathbf{b}\downarrow)\rightarrow][(\mathbf{c}\downarrow, \mathbf{d}\downarrow)\rightarrow]\nearrow = \,\triangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$$

1.2 Un discriminant stratégique et ses coefficients

En dimension D = 2 (le cas étudié ici), comme dans le cas des espaces vectoriels de dimension D supérieure à deux, ce système peut tout de même s'écrire classiquement comme un ensemble de combinaisons linéaires des composantes de la cible (le vecteur $\mathbf{q}_2$).

$$(A^k_{ij}\,.\,q^i_1 \,-\, p_{kj})\,.\,q^j_2 \,=\, z^k\,;\, i,\, j,\, k \,\in\, I_2$$

Bien qu'il ne s'agisse pas ici de découvrir les composantes de la cible en fonction des autres données du problème, il reste utile de calculer le discriminant de ce système:

$$\Delta \,=\, |A^k_{ij}\,.\,q^i_1 \,-\, p_{kj}|\,;\, i,\, j,\, k \,\in\, I_2$$

Ici encore, ce discriminant mesure la différence entre une décomposition triviale et une décomposition non-triviale du produit tensoriel déformé par le cube A.

Proposition 1.1. ***Domaine d'appartenance du discriminant de la question (E) en dimension deux***

Ce discriminant est un élément de P(2, 2), c'est-à-dire une forme polynomiale de degré deux agissant sur l'ensemble des projectiles de E(2, K).

Preuve 1.1. *En effet, il vient in extenso :*

$$\Delta = \begin{vmatrix} A^1_{a1} \,.\, q^a_1 - p_{11} & A^1_{b2} \,.\, q^b_1 - p_{12} \\ A^2_{a1} \,.\, q^a_1 - p_{21} & A^2_{b2} \,.\, q^b_1 - p_{22} \end{vmatrix}$$

Soit encore :

$$\Delta = (A^1_{a1} \,.\, q^a_1 - p_{11}) \,.\, (A^2_{b2} \,.\, q^b_1 - p_{22}) - (A^2_{a1} \,.\, q^a_1 - p_{21}) \,.\, (A^1_{b2} \,.\, q^b_1 - p_{12})$$

Plus précisément :

$$\Delta =$$
$$(A^1_{a1} \,.\, A^2_{b2} - A^2_{a1} \,.\, A^1_{b2}) \,.\, q^a_1 \,.\, q^b_1 + \{(p_{12} \,.\, A^2_{a1} - p_{22} \,.\, A^1_{a1}) + (p_{21} \,.\, A^1_{a2} - p_{11} \,.\, A^2_{a2})\} \,.\, q^a_1 + |P|$$

Ce qui peut s'interpréter comme l'action d'une forme polynomiale de degré deux, F, agissant sur le vecteur $\boldsymbol{q}_1$ qui est le premier argument du produit tensoriel déformé $\otimes_A(\boldsymbol{q}_1,\, \boldsymbol{q}_2)$:

$$\Delta = F(q^1_1, q^2_1) = f_{ab} \,.\, q^a_1 \,.\, q^b_1 + f_a \,.\, q^a_1 + f$$

A condition de poser :

$$f_{ab} = (A^1_{a1} \,.\, A^2_{b2} - A^2_{a1} \,.\, A^1_{b2})$$
$$f_a = (p_{12} \,.\, A^2_{a1} - p_{22} \,.\, A^1_{a1}) + (p_{21} \,.\, A^1_{a2} - p_{11} \,.\, A^2_{a2})$$
$$f = |P|$$

1.3 Interprétation mathématique des coefficients du discriminant

Le formalisme des coefficients suggére fortement de reconsidérer la définition 1.2 (ligne, colonne et bâton) et celle des cubes. En effet, l'observation de ce formalisme fait clairement naître l'intuition que ces coefficients sont les déterminants d'éléments de M(2, K) obtenus en combinant des paires de colonnes choisies, soit parmi celles du cube A, soit de façon croisée entre celles du cube A et celles de la matrice inconnue [P] (la partie principale de la décomposition du produit tensoriel déformé par le cube A).

Je vais donc commencer par "trancrire" le cube A et la matrice [P] sous forme de colonnes en tenant compte des conventions définies au préalable dans ce document.

Le cube A peut se transcrire :

$$A = \triangle(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = [(\mathbf{a}_1 \downarrow, \mathbf{a}_2 \downarrow) \rightarrow][(\mathbf{b}_1 \downarrow, \mathbf{b}_2 \downarrow) \rightarrow] \nearrow$$

Ou encore :

$$A = \triangle\{[M(\mathbf{a}_1(\downarrow), \mathbf{a}_2(\downarrow))](\rightarrow), [M(\mathbf{b}_1(\downarrow), \mathbf{b}_2(\downarrow))](\rightarrow)(\nearrow)\}$$

Avec :

$$[M(\mathbf{a}_1(\downarrow), \mathbf{a}_2(\downarrow))] = \begin{bmatrix} a^1_1 = A^1_{11} & a^1_2 = A^1_{12} \\ a^2_1 = A^2_{11} & a^2_2 = A^2_{12} \end{bmatrix}$$

$$[M(\mathbf{b}_1(\downarrow), \mathbf{b}_2(\downarrow))] = \begin{bmatrix} b_1^1 = A_{21}^1 & b_2^1 = A_{22}^1 \\ b_1^2 = A_{21}^2 & b_2^2 = A_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Il en résulte la possibilité d'interpréter les coefficients de degré deux du discriminant comme de simples déterminants :

$$f_{11} = (A_{11}^1 . A_{12}^2 - A_{11}^2 . A_{12}^1) = |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|$$

$$f_{12} = (A_{11}^1 . A_{22}^2 - A_{11}^2 . A_{22}^1) = |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)|$$

$$f_{21} = (A_{21}^1 . A_{12}^2 - A_{21}^2 . A_{12}^1) = |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2)|$$

$$f_{22} = (A_{21}^1 . A_{22}^2 - A_{21}^2 . A_{22}^1) = |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)|$$

Quant à la matrice inconnue [P], rien n'empêche de la noter symboliquement :

$$[M(\mathbf{p}_1(\downarrow), \mathbf{p}_2(\downarrow))] = \begin{bmatrix} p_1^1 = p_{11} & p_2^1 = p_{12} \\ p_1^2 = p_{21} & p_2^2 = p_{22} \end{bmatrix}$$

Avec le même état d'esprit, il devient possible et logique de construire les matrices croisées à partir des colonnes des matrices labelisées du cube A et des colonnes de la matrice inconnue [P] ; et d'interpréter les coefficients de degré un du discriminant de la façon suivante (quand K est supposé être équippé d'une multiplication commutative) :

$$f_1 = (p_{12} . A_{11}^2 - p_{22} . A_{11}^1) + (p_{21} . A_{12}^1 - p_{11} . A_{12}^2) = |M(\mathbf{p}_2, \mathbf{a}_1)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{p}_1)|$$

$$f_2 = (p_{12} . A_{21}^2 - p_{22} . A_{21}^1) + (p_{21} . A_{22}^1 - p_{11} . A_{22}^2) = |M(\mathbf{p}_2, \mathbf{b}_1)| + |M(\mathbf{b}_2, \mathbf{p}_1)|$$

Enfin, il apparaît clairement que le coefficient de degré zéro vaut :

$$f = |P| = |M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|$$

Théorème 1.1. *Le discriminant stratégique (je l'appelerai désormais ainsi) de la question (E) en dimension deux est un élément de P(2, 2) et ses sept coefficients sont entièrement déterminés par la donnée des quatre colonnes du cube A et des deux colonnes de la matrice inconnue [P].*

Il s'écrit in extenso pour n'importe quel projectile $\mathbf{q}$: (q^1, q^2)

$$|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| . q^1 . q^1 + |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| . q^1 . q^2 + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)| . q^2 . q^1 + |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)| . q^2 . q^2$$
$$+ \{|M(\mathbf{p}_2, \mathbf{a}_1)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{p}_1)|\} . q^1 + \{|M(\mathbf{p}_2, \mathbf{b}_1)| + |M(\mathbf{b}_2, \mathbf{p}_1)| . q^2$$
$$+ |M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|$$

1.4 Interprétation sociologique des coefficients du discriminant

Le théorème précédent -et en fait surtout la manière dont il l'a été- suggère de démontrer cette nouvelle proposition en utilisant les informations implicitement contenues, mais pas encore complètement analysées, dans cette démarche. Je veux dire par là qu'*il semble exister une logique combinatoire concernant les colonnes du cube déformant et de la matrice inconnue* qui accompagnent respectivement la définition et la résolution de la question (E). Pour tester cette intuition, je propose de considérer le cas D = 2. Le cube contient (2 × 2 =) 4 colonnes et la matrice inconnue [P] en contient deux.

Le coefficient de degré zéro est le déterminant construit avec les colonnes de [P] affublé du coefficient (-1)^2. Un seul déterminant peut être formé avec les deux colonnes de la matrice [P] prises dans l'ordre naturel de leur disposition au sein de cette matrice. Une inversion de cet ordre naturel redonnerait la même valeur au signe moins un près.[1]

Les coefficients de degré deux sont les déterminants construits avec les paires de colonnes du cube A constituées sans répétition. In extenso, ceci signifie que les paires ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_1$), ($\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2$), ($\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_1$) et ($\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_2$) sont interdites. S'il venait d'ailleurs à l'idée de calculer les déterminants des matrices ainsi constituées, il serait facile de constater qu'ils sont nuls.

La seconde colonne de la paire peut donc être choisie dans la matrice où l'a été la première, mais ce doit être l'autre ; ce seraient cette fois-ci les paires ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$), ($\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$).

La seconde colonne peut aussi être choisie dans l'autre matrice du cube pourvu qu'elle n'ait pas le même positionnement relatif dans sa matrice. Ce qui veut dire que si la première colonne appartient à la première matrice, alors la seconde colonne ne peut être que la seconde colonne de la seconde matrice : la paire ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_2$) mais jamais la paire ($\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$). Symétriquement, si la première colonne appartient à la seconde matrice, alors la seconde colonne ne peut être que la seconde colonne de la première matrice ; ce serait cette fois-ci la paire ($\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_2$) et jamais la paire ($\mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_2$).

Remarque 1.1. ***Sociologie des coefficients de degré deux du discriminant***

S'il me fallait absolument décrire le comportement des coefficients de degré deux en termes d'interaction sociologique, j'aurais tendance à faire les parallèles simplificateurs et pédagogiques suivants :

- colonne $\Longleftrightarrow$ individu polarisé
- matrice $\Longleftrightarrow$ couple d'individus
- position de la colonne $\Longleftrightarrow$ nature de la polarisation
- déterminant entre deux colonnes $\Longleftrightarrow$ interaction entre deux individus polarisés

Je pourrais également résumer les règles régissant les comportements de la communauté concernée par les calculs précédents de la façon amusante suivante :

- **règle 1**: Un individu, quel que soit sa polarité et quel que soit son couple d'appartenance, n'interagit jamais avec lui-même ou avec un individu ayant la méme polarité que lui.
- **règle 2**: En revanche, un individu, quel que soit sa polarité et quel que soit son couple d'appartenance, va interagir avec l'autre individu de son couple ou avec l'individu de l'autre couple qui n'est pas de même polarité.

La situation étant décrite de la sorte, je peux dire que les coefficients de degré deux diagonaux sont des interactions au sein des couples respectifs et que les coefficients de degré deux hors de la diagonale sont des *interactions hétépolaires* entre deux couples.

[1]En dimension D = 3, le cube A contient (3 $\times$ 3 =) neuf colonnes et la matrice inconnue [P] en contient trois. Le coefficient de degré zéro est le déterminant construit avec les colonnes de [P] affublé du coefficient $(-1)^3$. Compte tenu du formalisme du système dont il faut calculer le discriminant, il n'est pas difficile de généraliser le constat fait jusqu'à présent sur les coefficients de degré zéro aux espaces de dimension D supérieure à trois. (à suivre).

Remarque 1.2. ***Sociologie des coefficients de degré un du discriminant***

Bien que très "originale", l'analyse précédente permet aussi d'interpréter les coefficients de degré un du discriminant comme le résultat de relations hétépolaires entre un troisième couple, [P], et chacun des autres couples déjà constitués au sein du cube A.

1.5 Conditions de l'identification avec une forme fondamentale

Le discriminant stratégique s'identifie avec une forme quadratique lorsque (chaque fois que) :

$$\{|M(\mathbf{p}_2, \mathbf{a}_1)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{p}_1)|\} \,.\, q^1 + \{|M(\mathbf{p}_2, \mathbf{b}_1)| + |M(\mathbf{b}_2, \mathbf{p}_1)|\} \,.\, q^2 + |M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)| \;=\; 0$$

Dans l'absolu, cette forme quadratique sera une forme fondamentale (au sens de Gauss) si, en plus de la condition précédente, il se trouve une paire (**U**,**V**) de vecteurs de E(2, K) et une forme bilinéaire représentée par la matrice [G] de M(2, K) telles que :

$$\Delta$$

$$=$$

$$|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| \,.\, q^1 \,.\, q^1 + |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| \,.\, q^1 \,.\, q^2 + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)| \,.\, q^2 \,.\, q^1 + |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)|\} \,.\, q^2 \,.\, q^2$$

$$=$$

$$< \mathbf{U}, \mathbf{V} >_{[G]}$$

1.6 Bilan intermédiaire

Dans la première partie de cette section, je me suis efforcé à poser les jalons indispensables d'une discussion concernant les décompositions des produits tensoriels déformés des espaces de dimension deux.
A l'instar de ce qui va être fait pour les espace de dimension supérieure à deux, le discriminant stratégique du système d'équations linéaires accompagnant irrémédiablement la recherche de décompositions a été calculé in extenso.
Pour faciliter la compréhension de son formalisme, il a été interprété à l'aide d'outils originaux emprûntant un peu à la sociologie des couples.
Il est en général une forme polynomiale de degré deux. Certaines conditions simples précisées en fin de section permettent de l'identifier parfois avec une forme fondamentale I de Gauss. Ce travail sera poursuivi de façon à permettre la résolution du problème en dimension deux dans un contexte l'intégrant aux discussions sur les surfaces, en particulier celles immergées dans un espace de dimension trois.
L'objectif lointain est de savoir construire une imbrication cohérente entre les savoirs acquis en dimension deux et ceux obtenus en dimension trois.

1.7 Etude du discriminant à l'aune des acquis sur les coniques

Je renvoie ici les lecteurs à l'ouvrage un peu ancien mais très clair [[01] ; chapitre 10 sur les coniques].

Théorème 1.2. ***Conique "propre" bâtie avec un discriminant***

Un déterminant stratégique permet de définir une conique d'équation :

$$|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| \,.\, q^1 \,.\, q^1 \,+\, |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| \,.\, q^1 \,.\, q^2 \,+\, |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)| \,.\, q^2 \,.\, q^1 \,+\, |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)| \,.\, q_1^2 \,.\, q_1^2$$

$$+\{|M(\mathbf{p}_2,\mathbf{a}_1)|+|M(\mathbf{a}_2,\mathbf{p}_1)|\}\,.\,q^1+\{|M(\mathbf{p}_2,\mathbf{b}_1)|+|M(\mathbf{b}_2,\mathbf{p}_1)|\}\,.\,q^2+|M(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)|-\Delta\;=\;0$$

Elle est "propre" si et seulement si :

$$|M(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)|\,.\,|M(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)|\,.\,\{|M(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)|\;-\;\Delta\}$$
$$-\,|M(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)|\,.\,\{|M(\mathbf{p}_2,\mathbf{b}_1)|\;+\;|M(\mathbf{b}_2,\mathbf{p}_1)|\}$$
$$-\,|M(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)|\,.\,\{|M(\mathbf{p}_2,\mathbf{a}_1)|\;+\;|M(\mathbf{a}_2,\mathbf{p}_1)|\}\;\neq\;0$$

Ce théorème ancien permet de se rendre compte à quel point les interactions, in extenso : les valeurs des sept déterminants impliqués dans le calcul d'un discriminant stratégique, jouent un rôle crucial pour l'existence d'un graphe représentatif de ce discriminant.

Remarque 1.3. ***Classification des coniques bâties avec un discriminant***

Très classiquement, une conique bâtie sur un discriminant non nul est :

- une ellipse si :
$$|M(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)|\,.\,|M(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)|\;>\;0$$
- une hyperbole si :
$$|M(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)|\,.\,|M(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)|\;<\;0$$
- une parabole si :
$$|M(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)|\,.\,|M(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)|\;=\;0$$

Cette remarque permet de bien comprendre que les caractéristiques du cube A impliqué dans le problème jouent le rôle crucial pour spécifier la nature du graphe, ... lorsque ce dernier existe.

Remarque 1.4. ***Le cas des coniques bâties avec un discriminant nul***

La nullité du discriminant stratégique ne change pas grand chose au théorème précédent et encore moins à la remarque précisant la classification. Par contre elle interfère sérieusement sur la résolution de la problématique posée en dimension deux puisqu'elle indique que les deux colonnes (individus dans le language de l'interprétation sociologique) apparaissant implicitement dans le système suivant sont liées :

$$0\;=\;|A^k_{ij}\,.\,q^i_1\;-\;p_{kj}|\,;\;i,\;j,\;k\;\in\;I_2$$

Plus exactement :

$$\exists\,k\;\in\;K-\{0\},\;A^1_{i1}\,.\,q^i-p_{11}\;=\;k\,.\,(A^1_{i2}\,.\,q^i-p_{12})\;et\;A^2_{i1}\,.\,q^i-p_{21}\;=\;k\,.\,(A^2_{i2}\,.\,q^i-p_{22})$$

Remarque 1.5. ***Le cas des coniques bâties avec un cube anti-symétrique***

Pour rappel :

$$[M(\mathbf{a}_1(\downarrow),\mathbf{a}_2(\downarrow))]\;=\;\begin{bmatrix} a^1_1\;=\;A^1_{11} & a^1_2\;=\;A^1_{12} \\ a^2_1\;=\;A^2_{11} & a^2_2\;=\;A^2_{12}\end{bmatrix}$$

$$[M(\mathbf{b}_1(\downarrow),\mathbf{b}_2(\downarrow))]\;=\;\begin{bmatrix} b^1_1\;=\;A^1_{21} & b^1_2\;=\;A^1_{22} \\ b^2_1\;=\;A^2_{21} & b^2_2\;=\;A^2_{22}\end{bmatrix}$$

et un cube est dit anti-symétrique si :

$$A^k_{ij}\;=\;-A^k_{ji}$$

Il en résulte que dans le cadre des espaces de dimension deux, un cube anti-symétrique se résume à la superposition des deux matrices :

$$[M(\mathbf{a}_1(\downarrow), \mathbf{a}_2(\downarrow))] = \begin{bmatrix} a_1^1 = 0 & a_2^1 = A_{12}^1 = a \\ a_1^2 = 0 & a_2^2 = A_{12}^2 = b \end{bmatrix}$$

$$[M(\mathbf{b}_1(\downarrow), \mathbf{b}_2(\downarrow))] = \begin{bmatrix} b_1^1 = -A_{12}^1 = -a & b_2^1 = 0 \\ b_1^2 = -A_{12}^2 = -b & b_2^2 = 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui permet de calculer le discriminant spécifique pour ces situations :

$$\Delta = |M(\mathbf{0}, \mathbf{a}_2)| \,.\, q^1 \,.\, q^1 + |M(\mathbf{0}, -\mathbf{a}_2)| \,.\, q^1 \,.\, q^2 + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{0})| \,.\, q^2 \,.\, q^1 + |M(-\mathbf{a}_2, \mathbf{0})| \,.\, q_1^2 \,.\, q_1^2$$

$$+\{|M(\mathbf{p}_2, \mathbf{0})| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{p}_1)|\} \,.\, q^1 + \{|M(\mathbf{p}_2, -\mathbf{a}_2)| + |M(\mathbf{0}, \mathbf{p}_1)|\} \,.\, q^2 + |M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|$$

In fine il vaut :

$$\Delta = |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{p}_1)| \,.\, q^1 + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{p}_2)| \,.\, q^2 + |M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|$$

et décrit l'équation d'une droite dont les coefficients sont obtenus grâce aux interactions entre le vecteur $\mathbf{a}_2$ (seul rescapé du cube A) et la matrice inconnue [P].

Théorème 1.3. ***Cubes anti-symétriques agissant sur des espaces de dimension deux***

Les cubes anti-symétriques agissant sur des éléments (vecteurs) d'espaces de dimension deux se résument à la superposition de deux matrices de M(2, K) ne faisant intervenir qu'un vecteur de E(2, K). Ils ont tous le formalisme suivant :

$$\triangle(\mathbf{0}, \mathbf{a}, -\mathbf{a}, \mathbf{0})$$

Corollaire 1.1. ***Cubes anti-symétriques agissant sur des espaces de dimension deux***

Il en résulte que tout vecteur de E(2, K) génère (ou est associé bi-univoquement à) un cube anti-symétrique et un seul.

$$\forall \mathbf{a} \in E(2, K), \exists \triangle(\mathbf{0}, \mathbf{a}, -\mathbf{a}, \mathbf{0})$$

Il en résulte aussi que le probléme mathématique étudié dans ce document s'écrit, pour cet ensemble de cubes :

$$| \otimes_{\mathbf{a}} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) >= [P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

Mais ici, le terme à gauche de l'égalité vaut :

$$\forall k \in I_2 : A_{ij}^k \,.\, q_1^i \,.\, q_2^j = A_{11}^k \,.\, q_1^1 \,.\, q_2^1 + A_{12}^k \,.\, q_1^1 \,.\, q_2^2 + A_{21}^k \,.\, q_1^2 \,.\, q_2^1 + A_{22}^k \,.\, q_1^2 \,.\, q_2^2$$

C'est précisément :

$$k = 1 : A_{ij}^1 \,.\, q_1^i \,.\, q_2^j = A_{12}^1 \,.\, (q_1^1 \,.\, q_2^2 - q_1^2 \,.\, q_2^1)$$

$$k = 2 : A_{ij}^2 \,.\, q_1^i \,.\, q_2^j = A_{12}^2 \,.\, (q_1^1 \,.\, q_2^2 - q_1^2 \,.\, q_2^1)$$

A supposer que les vecteurs $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$ peuvent être prolongés dans un espace E(3, K) qui "engloberait" l'espace E(2, K) auquel ils appartiennent :

$$|\mathbf{q}_1 > \in E^*(2, K) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ q_1^1 \\ q_1^2 \end{bmatrix} \in E^*(3, K) \,;\, |\mathbf{q}_2 > \in E^*(2, K) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ q_2^1 \\ q_2^2 \end{bmatrix} \in E^*(3, K)$$

et à supposer également que la notion de produit extérieur est définie sur E(3, K), alors, il est très facile de se rendre compte que dans le langage des composantes d'une base canonique quelconque de E(3, K), soit Ω^+ : ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$) prolongeant la base Ω de E(2, K), il est équivalent de se demander "Que valent les paires ([P], $\mathbf{z}$) de M(2, K) $\times$ E(2, K) lorsque seul le système suivant est connu?"

$$\left[\begin{array}{c} A^1_{12} \cdot (q^1_1 \cdot q^2_2 - q^2_1 \cdot q^1_2) \\ A^2_{12} \cdot (q^1_1 \cdot q^2_2 - q^2_1 \cdot q^1_2) \end{array}\right] = (\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^1 \,.\, |\mathbf{a}> = [p_{kj}] \,.\, |q^j_2> + |z^k> ;\; i,\, j,\, k \in I_2$$

Enfin, dernier corollaire, le produit extérieur déformé est défini sur E(2, K) de telle sorte qu'il faut calculer :

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{2} \cdot \{\otimes_{\mathbf{a}}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) - \otimes_{\mathbf{a}}(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)\}$$

Ici, il s'agit donc de :

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{\mathbf{a}} = \frac{1}{2} \cdot \{(\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^1 \,.\, \mathbf{a} - (\mathbf{q}_2 \wedge \mathbf{q}_1)^1 \,.\, |\mathbf{a}\}$$

Puisque le produit extérieur "classique" est anti-symétrique, ce n'est rien d'autre que :

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{\mathbf{a}} = (\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^1 \,.\, \mathbf{a}$$

Le problème que j'étudie donc en dimension deux consiste à savoir si la représentation duale dans E*(2, K) du vecteur ci-dessus se laisse décomposer de telle sorte que :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{\mathbf{a}}> = (\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^1 \,.\, |\mathbf{a}> = [P] \,.\, |\mathbf{q}_2> + |\mathbf{z}>$$

Remarque 1.6. ***Sur la résolution dans le cas des cubes antisymétriques***

Cette situation appelle diverses remarques :

- **Interprétation du problème** : bien que les arguments (la paire de vecteurs ($\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$)) apparaissent dans l'expression de ce qui équivaut à un produit de Lie en dimension deux, ces arguments ne semblent vraiment intervenir que pour moduler l'intensité du vecteur **a** représentant le cube antisymétrique agissant sur eux ; en bref : les arguments modulent la déformation. Ainsi, de façon presque contre-intuitive par rapport au formalisme de son énoncé, le problème posé étudie en réalité la décomposition de la déformation et non pas tant celle du produit de Lie.

- **Etat des lieux** ; similitude lointaine avec la situation rencontrée en dimension trois parce qu'elle pourrait suggérer que la solution au problème posé -dans sa restriction à un espace de dimension deux- passe par la découverte d'une sorte de jauge : trois colonnes (vecteurs) sont connu(e)s, {$\mathbf{a}$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$}, tandis que trois colonnes sont inconnues : {$\mathbf{z}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$}. Les choses étant abordées de la sorte, il est tentant de dire que le problème dispose d'autant de données connues que de données inconnues. Pour autant, il ne s'agit malheureusement pas d'un simple système de relations linéaires!

- **Nouveau positionnement du problème** ; tout se présente ainsi comme si, disposant de trois points d'un espace de dimension deux (les trois colonnes {$\mathbf{a}$, $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$}) le problème consistait à savoir comment leur faire correspondre trois autres points d'un espace de dimension deux (les trois colonnes {$\mathbf{z}$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$}). Il semble donc qu'il ne soit plus possible de séparer cette discussion algébrique de considérations géométriques (exemples : plan tangent, rayons de courbure, ... en chaque point) ni de systématiquement la restreindre aux espaces de dimension deux.

En effet, et même en géométrie euclidienne, si trois points suffisent effectivement à définir un plan (donc un espace de dimension deux), rien n'indique dans la manière dont j'ai posé le problème étudié ici que le "triangle solution" (et qui définira à son tour un espace de dimension deux) se trouve dans le même plan que le "triangle initial".

Il semble donc judicieux de suggérer que la résolution systématique de ce problème passe par une confrontation entre l'ensemble des transformations d'un triangle dans un espace de dimension trois et la relation de décomposition que j'ai impôsé au départ.

- **Décomposition triviale** : il existe aussi une décomposition triviale dans les espaces de dimension deux. Elle correspond à une configuration simple du système d'équations telle que $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ et :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{\mathbf{a}} >= \begin{bmatrix} A^1_{12} \cdot (q^1_1 \cdot q^2_2 - q^2_1 \cdot q^1_2) \\ A^2_{12} \cdot (q^1_1 \cdot q^2_2 - q^2_1 \cdot q^1_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \cdot q^1_2 + p_{12} \cdot q^2_2 \\ p_{21} \cdot q^1_2 + p_{22} \cdot q^2_2 \end{bmatrix} = [P] \cdot |\mathbf{q}_2 >$$

D'où il est facile de déduire que, forcément, si K est commutatif :

$$[P] = \begin{bmatrix} -A^1_{12} \cdot q^2_1 & A^1_{12} \cdot q^1_1 \\ -A^2_{12} \cdot q^2_1 & A^2_{12} \cdot q^1_1 \end{bmatrix} = {}_{\mathbf{a}}\Phi(\mathbf{q}_1)\,;\, |P| = 0$$

$$\mathbf{p}_1 = -q^2_1 \cdot \mathbf{a}\,;\, \mathbf{p}_2 = q^1_1 \cdot \mathbf{a}$$

Dans ce cas précis, les colonnes de la matrice recherchée, [P], sont simplement proportionnelles à la déformation.

Pour mémoire, dans les espaces de dimension trois (voir au début de ce document), la décomposition triviale la plus simple est représentée par une matrice rotation ${}_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_1)$ et son déterminant est nul. Dans les espaces de dimension deux, la matrice ci-dessus a un déterminant nul (uniquement si K est commutatif) mais sa parenté avec la représentation d'une rotation ne saute pas aux yeux! Par contre, elle est une table de Pythagore puisqu'elle s'écrit aussi :

$$[P] = \begin{pmatrix} \otimes & -q^2_1 & q^1_1 \\ A^1_{12} & -A^1_{12} \cdot q^2_1 & A^1_{12} \cdot q^1_1 \\ A^2_{12} & -A^2_{12} \cdot q^2_1 & A^2_{12} \cdot q^1_1 \end{pmatrix} = {}_{\mathbf{a}}\Phi(\mathbf{q}_1)$$

et ce fait permet de rebrancher progressivement la discussion avec un concept complémentaire de celui de rotation ; à savoir : la réflection[2]. En effet, il est facile de constater que :

$$\begin{bmatrix} -q^2_1 \\ q^1_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q^1_1 \\ q^2_1 \end{bmatrix} = [C] \cdot |\mathbf{q}_1 >$$

$$\downarrow$$

$$[-q^2_1, q^1_1] = [q^1_1, q^2_1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = < \mathbf{q}_1| \cdot [C]^t$$

Or la matrice [C] apparaissant ici fait partie de l'ensemble des représentations des réflections (reversals en anglais ; voir [[03] ; §7, §61, §126]). Par conséquent,

[2]Les passionnés comprenant la langue de Sheakspeare pourront profiter de ce passage pour commencer à découvrir le sujet en parcourant les premiers chapitres de [[03]].

la décomposition triviale d'un produit de Lie déformé défini dans un espace de dimension deux peut s'écrire sous la forme de la table de Pythagore (un autre mot pour désigner une extrapolation du concept de table de multiplication) :

$$_{\mathbf{a}}\Phi(\mathbf{q}_1) \;=\; T_2(\otimes)(<\mathbf{q}_1|\,.\,[C]^t,\;|\mathbf{a}>)$$

Pour rappel (voir remarque ci-dessus), le discriminant stratégique pour le problème posé vaut en général lorsque le cube A est antisymétrique et finalement symbolisé par un seul vecteur **a** :

$$\Delta \;=\; |M(\mathbf{a},\mathbf{p}_1)|\,.\,q^1 \;+\; |M(\mathbf{a},\mathbf{p}_2)|\;.\,q^2 \;+\; |M(\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_2)|$$

Il est facile d'en déduire que ce discriminant s'annule si la matrice [P] représente une décomposition triviale.

1.8 La méthode extrinsèque de décomposition des produits tensoriels déformés

Remarque 1.7. ***Les résultats acquis lors d'études précédentes***

Pour éviter les redites, je renvoie à mon travail [[b]] et livre ici directement les résultats que permettent d'obtenir cette méthode très générale. L'espace E(2, K) est supposé être équipé d'une métrique inversible représentée par l'élément [G] de M(2, K) (avec $|G| \neq 0$). Cette méthode présuppose aussi l'existence d'une forme polynomiale de degré deux dépendant de la cible, $\mathbf{q}_2$ et notée conventionnellement P_2. Elle livre :

– Termes de degré deux :

$$[P] \;=\; {}_{A}\Phi(\mathbf{q}_1) \;-\; \frac{1}{2}\,.\,[G]^{-1}\,.\,[Hess_{(\mathbf{q}_2)}P_2(\mathbf{0})]$$

– Termes de degré un :

$$|\mathbf{z}> = \;-[G]^{-1}\,.\,|\mathbf{Grad}_{(\mathbf{q}_2)}P_2(\mathbf{0})>$$

– Terme de degré zéro :

$$0(3) \;=\; P_2(\mathbf{0})$$

Il est possible de faire disparaitre la présence de la polynomiale P_2 du formalisme de la matrice [P] recherchée et il vient alors :

$$[P] \;=\; {}_{A}\Phi(\mathbf{q}_1) \;+\; \frac{1}{2}\,.\,[G]^{-1}.\,T_2(o)(\mathbf{Grad}_{(\mathbf{q}_2)},\mathbf{z}^*);\;|\mathbf{z}^*> = \;[G]\,.\,|\mathbf{z}>$$

Néanmoins, la pertinence de cette méthode extrinsèque est liée à une analyse de vraisemblance dont la réalisation est rendue nécessaire par le fait que si le scalaire associé à la cible est nul :

$$<\mathbf{q}_2\,,\,\delta\mathbf{E}>_{[G]} = \;0$$

alors trois situations logiques peuvent en découler. Pour autant, une seule d'entre elles correspond à une décomposition non-triviale exacte :

– **Configuration 1**: La cible est nulle - le produit tensoriel déformé étudié est nul et il s'agit de l'étude de la décomposition du vecteur nul ;

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{0}$$

- **Configuration 2**: La décomposition est exacte (c'est la situation idéale recherchée) :

$$\delta\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

- **Configuration 3**: La cible et l'erreur de réalisation de la décomposition obéissent à une sorte de relation d'orthogonalité mais aucune des deux n'est strictement nulle :

$$\mathbf{q}_2 \neq \mathbf{0},\ \delta\mathbf{E} \neq \mathbf{0},\ < \mathbf{q}_2\,,\ \delta\mathbf{E} >_{[G]} =\ 0$$

Dans ce cas, la méthode extrinsèque fournit :

$$Limite_{\delta\mathbf{E}\to\mathbf{0}} | \otimes_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) >$$

$$=$$

$$\{{}_A\Phi(\mathbf{q}_1) - \frac{1}{2} \,.\, [G]^{-1} \,.\, [Hess_{(\mathbf{q}_2)} P_2(\mathbf{0})]\} \,.\, |\mathbf{q}_2 > \ - [G]^{-1} \,.\, |\mathbf{Grad}_{(\mathbf{q}_2)} P_2(\mathbf{0}) >$$

Remarque 1.8. ***De quelle aide est la méthode extrinsèque pour la résolution? Piste 01***

Ceci étant dit, il est légitime de s'interroger sur ce que ces résultats peuvent apporter comme aide dans la résolution du problème posé en dimension deux. Une réponse raisonnable passe par le raisonnement suivant :

- L'énoncé du problème est systématiquement associé à l'existence d'une polynomiale de degré deux (le discriminant stratégique ; voir §1.4 cidessus). Celle-ci se décompose toujours en la somme d'une forme quadratique et d'une forme linéaire.
- Or la configuration 3 correspond de facto à l'existence d'une forme quadratique nulle.
- Par conséquent, les situations pour lesquelles la partie quadratique du discriminant stratégique coincide avec celle qui serait issue de la configuration logique 3 et s'annule, sont forcément des situations pour lesquelles le problème posé a des chances d'avoir une solution. Ces situations sont en principe décrites par les relations suivantes qui doivent être vraies simultanément :

  1. Existence d'une "erreur" de réalisation de la décomposition, le vecteur $\delta\mathbf{E}$ tel que :

  $$|\delta\mathbf{E} >= | \otimes_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) > \ - \{[P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > \ + |\mathbf{z} >\}$$

  2. L'erreur et la cible (le second argument aparaissant dans le produit tensoriel déformé) obéissent à la loi :

  $$< \mathbf{q}_2, \delta\mathbf{E} >_{[G]}$$

  $$=$$

  $$|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| \,.\, (q^1)^2 \ + \ |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)| \,.\, (q^2)^2$$
  $$+ |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| \,.\, q^1 \,.\, q^2 \ + \ |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)| \,.\, q^2 \,.\, q^1$$

  $$=$$

  $$0$$

  et réalisent ainsi la configuration logique 3 validant au mieux la décomposition ;

3. Le discriminant stratégique se réduit à une forme linéaire :

$$\Delta$$

$$=$$

$$\{|M(\mathbf{p}_2, \mathbf{a}_1)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{p}_1)|\} \,.\, q^1$$
$$+ \{|M(\mathbf{p}_2, \mathbf{b}_1)| + |M(\mathbf{b}_2, \mathbf{p}_1)|\} \,.\, q^2$$
$$+ |M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)|$$

Remarque 1.9. ***De quelle aide est la méthode extrinsèque pour la résolution? Piste 02***

A ce stade, à part l'avantage d'offrir un premier visage aux solutions cherchées, la réponse apportée par l'usage de la méthode extrinsèque reste discutable. Et par ailleurs, pourquoi vouloir lier le test logique et le discriminant au seul motif de l'existence de formalismes similaires? En effet, en plus d'introduire un acteur extérieur à la discussion initiale (même s'il s'agit ici de la matrice [G] représentant la géométrie locale), cette méthode substitue une polynomiale a priori inconnue de degré au moins égale à deux dépendant des composantes locales de la cible, $\mathrm{P}_2(\mathbf{q}_2)$, aux inconnues initiales : la paire ([P], $\mathbf{z}$).

Pour mémoire, la décomposition d'un produit tensoriel $\otimes_A(\mathbf{u},\ \mathbf{w})$ est systématiquement associé avec l'existence d'une polynomiale de degré deux (le discriminant stratégique ; voir §ci-dessus), Δ, dépendant de facto des composantes du projectile qui, pour une paire $(\mathbf{u},\ \mathbf{w})$ prise dans cet ordre, coincide avec le vecteur $\mathbf{u}$; ainsi : $\Delta = \Delta(\mathbf{u})$.

Dans l'état d'esprit de la méthode extrinsèque, il faut disposer de deux polynomiales de degré deux au moins, soit $\mathrm{P}_1(\mathbf{u})$ et $\mathrm{P}_2(\mathbf{w})$ pour un produit tensoriel dénoté génériquement par $\otimes_A(\mathbf{u},\ \mathbf{w})$. Symétriquement, pour le produit tensoriel $\otimes_A(\mathbf{w},\ \mathbf{u})$, il faut disposer de deux polynomiales de degré deux au moins, soit $\mathrm{N}_1(\mathbf{w})$ et $\mathrm{N}_2(\mathbf{u})$.

Le discriminant stratégique apparaissant dans la décomposition de $\otimes_A(\mathbf{u},\ \mathbf{w})$ pourrait donc, spontanément et sans la nécessité de faire appel à des données extérieures supplémentaires, remplir le rôle de la polynomiale $\mathrm{N}_2(\mathbf{u})$.

Je vais donc explorer une seconde piste consistant à poser de façon non restrictive que le dicriminant associé à la décomposition de $\otimes(\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2)$ peut servir de polynomiale dépendant de la cible pour la décomposition non-triviale du produit $\otimes(\mathbf{q}_2,\ \mathbf{q}_1)$ par la méthode extrinsèque :

$$\Delta(\mathbf{q}_1) = N_2(\mathbf{q}_1)$$

J'en déduis facilement que si les composantes du cube A ne dépendent pas des composantes de la paire (**projectile**, **cible**), alors :

$$\frac{\partial N_2(\mathbf{q}_1)}{\partial q_1^1}$$

$$=$$

$$\{|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|\} \,.\, q_1^2 + 2 \,.\, |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| \,.\, q_1^1 + \{|M(\mathbf{p}_2, \mathbf{a}_1)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{p}_1)|\}$$

et :

$$\frac{\partial N_2(\mathbf{q}_1)}{\partial q_1^2}$$

$$=$$

$$\{|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|\} \,.\, q_1^1 + 2 \,.\, |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)| \,.\, q_1^2 + \{|M(\mathbf{p}_2, \mathbf{b}_1)| + |M(\mathbf{b}_2, \mathbf{p}_1)|\}$$

Ce qui permet d'exprimer le gradient de la polynomiale N_2 :

$$|\mathbf{Grad}_{(\mathbf{q}_1)} N_2(\mathbf{q}_1) >= [Hess_{(\mathbf{q}_1)} N_2(\mathbf{q}_1)] \,.\, |\mathbf{q}_1 > + \begin{bmatrix} |M(\mathbf{p}_2, \mathbf{a}_1)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{p}_1)| \\ |M(\mathbf{p}_2, \mathbf{b}_1)| + |M(\mathbf{b}_2, \mathbf{p}_1)| \end{bmatrix}$$

qui vaut en particulier :

$$|\mathbf{Grad}_{(\mathbf{q}_1)} N_2(\mathbf{0}) >= \begin{bmatrix} |M(\mathbf{p}_2, \mathbf{a}_1)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{p}_1)| \\ |M(\mathbf{p}_2, \mathbf{b}_1)| + |M(\mathbf{b}_2, \mathbf{p}_1)| \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, les composantes de la Hessienne classique de la polynomiale N_2 ne dépendent finalement pas du vecteur $\mathbf{q}_1$ mais entièrement de celles du cube déformant A :

$$[Hess_{(\mathbf{q}_1)} N_2(\mathbf{q}_1))] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_2(\mathbf{q}_1)}{\partial^2 q_1^1} & \frac{\partial^2 N_2(\mathbf{q}_1)}{\partial q_1^1 \partial q_1^2} \\ \frac{\partial^2 N_2(\mathbf{q}_1)}{\partial q_1^2 \partial q_1^1} & \frac{\partial^2 N_2(\mathbf{q}_1)}{\partial^2 q_1^2} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 2 \,.\, |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| & |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)| \\ |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)| & 2 \,.\, |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)| \end{bmatrix}$$

L'usage de la méthode extrinsèque fournit ici :

$$Limite_{\delta \mathbf{E} \to \mathbf{0}} | \otimes_A (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) >$$

$$=$$

$$\{{}_A\Phi(\mathbf{q}_2) - \frac{1}{2} \,.\, [G]^{-1} \,.\, [Hess_{(\mathbf{q}_1)} N_2(\mathbf{0})]\} \,.\, |\mathbf{q}_1 > - [G]^{-1} \,.\, |\mathbf{Grad}_{(\mathbf{q}_1)} N_2(\mathbf{0}) >$$

avec :

$$[N] = [M(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)] = \{{}_A\Phi(\mathbf{q}_2) - \frac{1}{2} \,.\, [G]^{-1} \,.\, [Hess_{(\mathbf{q}_1)} N_2(\mathbf{0})]\}$$

Par conséquent, il est possible d'écrire plus précisément encore (Ce résultat va bientôt servir) :

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} A^1_{i1} \,.\, q_2^i - \{g^{11} \,.\, |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| + \frac{g^{12}}{2} \,.\, (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|)\} \\ A^1_{i2} \,.\, q_2^i - \{g^{21} \,.\, |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| + \frac{g^{22}}{2} \,.\, (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|)\} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} A^2_{i1} \,.\, q_2^i - \{\frac{g^{11}}{2} \,.\, (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|) + g^{12} \,.\, |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)|\} \\ A^2_{i2} \,.\, q_2^i - \{\frac{g^{21}}{2} \,.\, (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|) + g^{22} \,.\, |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)|\} \end{bmatrix}$$

Raisonnement symétrique : Simultanément, la décomposition non-triviale du produit $\otimes(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1)$ est systématiquement associée avec l'existence d'un discriminant stratégique qui se trouve forcément être une polynomiale de degré deux dépendant de facto des composantes du projectile $\mathbf{q}_2$: $\mathrm{N}_1(\mathbf{q}_2)$. Elle pourrait donc, spontanément et sans la nécessité de faire appel à des données extérieures supplémentaires, remplir le rôle de la polynomiale inconnue $\mathrm{P}_2(\mathbf{q}_2)$ dont il est nécessaire de disposer pour pouvoir déployer la méthode extrinsèque facilitant la recherche des décompositions non-triviales du produit tensoriel $\otimes(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)$; je décide donc de poser :

$$P_2(\mathbf{q}_2)$$

$$=$$

$$|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| \,.\, q_2^1 \,.\, q_2^1 + |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| \,.\, q_2^1 \,.\, q_2^2 + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)| \,.\, q_2^2 \,.\, q_2^1 + |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)| \,.\, q_2^2 \,.\, q_2^2$$

$$+\{|M(\mathbf{n}_2, \mathbf{a}_1)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{n}_1)|\} . q_2^1 + \{|M(\mathbf{n}_2, \mathbf{b}_1)| + |M(\mathbf{b}_2, \mathbf{n}_1)| . q_2^2$$
$$+ |M(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)|$$

Il en résulte que :

$$|\mathbf{Grad}_{(\mathbf{q}_2)} P_2(\mathbf{q}_2) >= [Hess_{(\mathbf{q}_2)} P_2(\mathbf{q}_2)] . |\mathbf{q}_1 > + \begin{bmatrix} |M(\mathbf{n}_2, \mathbf{a}_1)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{n}_1)| \\ |M(\mathbf{n}_2, \mathbf{b}_1)| + |M(\mathbf{b}_2, \mathbf{n}_1)| \end{bmatrix}$$

En particulier :

$$|\mathbf{Grad}_{(\mathbf{q}_1)} P_2(\mathbf{0}) >= \begin{bmatrix} |M(\mathbf{n}_2, \mathbf{a}_1)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{n}_1)| \\ |M(\mathbf{n}_2, \mathbf{b}_1)| + |M(\mathbf{b}_2, \mathbf{n}_1)| \end{bmatrix}$$

Avec par ailleurs :

$$[Hess_{(\mathbf{q}_2)} P_2(\mathbf{q}_2))] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{q}_2)}{\partial^2 q_2^1} & \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{q}_2)}{\partial q_2^1 \partial q_2^2} \\ \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{q}_2)}{\partial q_2^2 \partial q_1^1} & \frac{\partial^2 P_2(\mathbf{q}_2)}{\partial^2 q_2^2} \end{bmatrix}$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} 2 . |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| & |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)| \\ |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)| & 2 . |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)| \end{bmatrix}$$

Pour rappel, la méthode extrinsèque fournit :

$$Limite_{\delta \mathbf{E} \to \mathbf{0}} | \otimes_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) >$$
$$=$$
$$\{_A\Phi(\mathbf{q}_1) - \frac{1}{2} . [G]^{-1} . [Hess_{(\mathbf{q}_2)} P_2(\mathbf{0})]\} . |\mathbf{q}_2 > - [G]^{-1} . |\mathbf{Grad}_{(\mathbf{q}_2)} P_2(\mathbf{0}) >$$

1.9 Une famille de solutions en dimension deux

Conséquences des raisonnements. Il convient maintenant de remarquer que :

- Lorsque les composantes des vecteurs $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$ ne dépendent pas de celles du cube, A, déformant leurs deux produits tensoriels possibles, $\otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ et $\otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)$, alors les Hessiennes des discriminants stratégiques des systèmes correspondant aux décompositions non-triviales de ces produits sont égales. Elles ne dépendent que des composantes du cube A.

$$[Hess_{(\mathbf{q}_1)} N_2(\mathbf{q}_1)] = [Hess_{(\mathbf{q}_2)} P_2(\mathbf{q}_2)] = Hess(A)$$

- Quel que soit l'ordre dans lequel les arguments d'un produit tensoriel déformé sont considérés, la partie principale de leur décomposition non-triviale est toujours égale à la partie principale de leur décomposition triviale dont a été retiré une matrice -1/2. $[G]^{-1}$. Hess(A) ne dépendant que de la métrique locale et des composantes du cube A. Il en résulte une relation liant les parties principales des décompositions non-triviales :

$$[P] - {}_A\Phi(\mathbf{q}_1) = -\frac{1}{2} . [G]^{-1} . Hess(A) = [N] - {}_A\Phi(\mathbf{q}_2)$$

In fine, à noter aussi ici que la démarche équivaut à avoir supposé que le discriminant stratégique a une valeur fixe entièrement dépendante des composantes du cube A et du déterminant non nul de la métrique locale :

$$\forall \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 : \Delta = \Delta(g, A)$$

$$\Delta = \frac{1}{2.g} . \{4 . |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| . |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)| - (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|)^2\}$$

- Le résidu du produit tensoriel $\otimes_A(\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2)$ dépend de la partie principale de la décomposition du produit tensoriel $\otimes_A(\mathbf{q}_2,\ \mathbf{q}_1)$; et inversement.

- Le résultat cherché est désormais en vue. En effet, puisque [N] est connu, la paire $(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2)$ (qui ne dépend au demeurant que de $\mathbf{q}_2$, de [G] et du cube A) l'est aussi. Il suffit de l'injecter dans l'expression de $\mathbf{Grad}_{(q2)}\mathrm{P}_2(\mathbf{0})$ pour obtenir une expression complète de la décomposition de $\otimes_A(\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2)$, résidu $\mathbf{z}$ inclus.

Résultats. Les raisonnements précédents livrent la partie principale :

$$[P] = [M(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)] = {}_A\Phi(\mathbf{q}_1) - \frac{1}{2} . [G]^{-1} . Hess(A)$$

Avec :

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} A^1_{i1} . q^i_1 - \{g^{11} . |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| + \frac{g^{12}}{2} . (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|)\} \\ A^1_{i2} . q^i_1 - \{g^{21} . |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| + \frac{g^{22}}{2} . (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|)\} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} A^2_{i1} . q^i_1 - \{\frac{g^{11}}{2} . (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|) + g^{12} . |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)|\} \\ A^2_{i2} . q^i_1 - \{\frac{g^{21}}{2} . (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|) + g^{22} . |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)|\} \end{bmatrix}$$

Et la partie résiduelle :

$$|\mathbf{z} >= -[G]^{-1} . \begin{bmatrix} |M(\mathbf{n}_2, \mathbf{a}_1)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{n}_1)| \\ |M(\mathbf{n}_2, \mathbf{b}_1)| + |M(\mathbf{b}_2, \mathbf{n}_1)| \end{bmatrix}$$

avec :

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} A^1_{i1} . q^i_2 - \{g^{11} . |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| + \frac{g^{12}}{2} . (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|)\} \\ A^1_{i2} . q^i_2 - \{g^{21} . |M(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)| + \frac{g^{22}}{2} . (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|)\} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} A^2_{i1} . q^i_2 - \{\frac{g^{11}}{2} . (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|) + g^{12} . |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)|\} \\ A^2_{i2} . q^i_2 - \{\frac{g^{21}}{2} . (|M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)| + |M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)|) + g^{22} . |M(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)|\} \end{bmatrix}$$

Exemple 1.1. ***Application du raisonnement aux cubes antisymétriques***

Je vais tester ici les conséquences du raisonnement précédent sur les produits tensoriels déformés par un cube antisymétrique. J'ai montré au cours des paragraphes ci-dessus qu'un tel cube se caractérise par : $\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}$ et $\mathbf{a}_2 = \text{-}\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}$. En reportant ces valeurs dans les relations obtenues pour la paire ([P], $\mathbf{z}$), il vient donc :

$$\Delta = \frac{1}{2.g} . \{4 . |M(\mathbf{0}, \mathbf{a})| . |M(-\mathbf{a}, \mathbf{0})| - (|M(\mathbf{0}, \mathbf{0})| + |M(\mathbf{a}, -\mathbf{a})|)^2\} = 0$$

$$Hess(A) = [0] ; [P] = {}_A\Phi(\mathbf{q}_1)$$

Conclusion : Avec le raisonnement que j'ai proposé et développé au cours d'une remarque précédente, les cubes antisymétriques réalisent un cas limite pour lequel la décomposition est toujours triviale.

1.10 Résumé

Dans cette deuxième section, je me suis efforcé à découvrir une stratégie livrant des solutions au problème posé, c'est-à-dire : des décompositions non-triviales pour les produits tensoriels déformés par un cube de huit nombres, éléments d'un ensemble K.

Je me suis interrogé sur l'utilité de trouver des situations diminuant le degré du polynome caractéristique et stratégique du problème posé d'une unité. Etant incapable, au départ de cette investigation, de répondre facilement et clairement à cette interrogation, j'ai débuté une exploration exhaustive du sujet, incluant la recherche de liens avec les coniques puisque ce polynome stratégique est en général de degré deux. Ceci m'a permis de proposer une première classification des ces polynomiales. Si une classification met un peu d'ordre dans l'ensemble des possibles, elle ne répond pas à la question posée.

C'est la raison pour laquelle j'ai poursuivi cette recherche en examinant de près le cas des cubes antisymétriques. Ils ont révélé que, pour eux, le problème posé prenait un tout autre visage et consistait en réalité à étudier les décompositions des déformations.

J'ai décidé ensuite d'étudier ce que la méthode extrinsèque des décompositions des produits tensoriels déformés pouvait apporter comme bonus. Un premier scénario peu convainquant a été proposé mais délaissé rapidement. Un second scénario, beaucoup plus prometteur fournit un ensemble complet de solutions et ramène finalement le cas des cubes antisymétriques à un cas particulier n'admettant que des décompositions triviales.

Pour autant, la problématique des décompositions se heurte de manière récurrente à un aspect logique qui n'a pas encore été abordé avec suffisamment de profondeur : "Comment et pourquoi décider d'une décomposition?" "Pourquoi serait-il préférable de poser $12 = (4 \times 3) + 0$ au lieu de $12 = (5 \times 2) + 2$?" L'effet de la méthode extrinsèque, à travers le second scénario et son effet restrictif sur les cubes antisymétriques, semble clairement indiquer l'influence de facteurs extérieurs sur les solutions qui peuvent être données au problème posé.

1.11 Interprétations des résultats

Une conséquence remarquable de l'approche précédente est que, finalement :

$$|[P] - {}_A\Phi(\mathbf{q}_1)| = -\frac{1}{2g} \, . \, |Hess(A)| = |[N] - {}_A\Phi(\mathbf{q}_2)|$$

La valeur du discriminant stratégique pour la décomposition de $\otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$ et celle du discriminant stratégique pour la décomposition de $\otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)$ sont toutes deux égales à moins une demi fois celle du déterminant d'une matrice qui, si elle est au départ une Hessienne classique, prend désormais l'apparence claire d'une sorte d'opérateur entièrement déterminé par les valeurs du cube A ; le tout étant divisé par le déterminant de la métrique locale ou, plus généralement, par le déterminant d'une matrice représentant localement la forme bilinéaire impliquée dans la mise en oeuvre de la méthode de décomposition. Il est bien connu que, dans les espaces de dimension deux, la notion de déterminant peut être reliée à celle de surface. C'est l'angle sous lequel je me propose maintenant de développer le sujet.

Remarque 1.10. ***Une interprétation possible des déterminants***

Tous les éléments de cette discussion sont dans E(2, K). Ils peuvent tous être prolongés dans E(3, K) avec une représentation dans K^3 sans rien changer à leur ordonnancement (voir une première introduction du concept de prolongation au §1.4).

$$\forall \mathbf{X} \in E(2,K) : \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \end{bmatrix} \to \mathbf{X}^+ \in E(3,K) : \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le produit vectoriel classique (non déformé) est défini sur E(3, K) et il permet d'écrire :

$$\forall (\mathbf{X}^+, \mathbf{Y}^+) \in E(3,K)^2 : \mathbf{X}^+ \wedge \mathbf{Y}^+ : \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} Y^1 \\ Y^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X^1 . Y^2 - X^2 . Y^1 \end{bmatrix}$$

Avec les notations utilisées dans ce document il est facile de se rendre compte que :

$$\forall (\mathbf{X}^+, \mathbf{Y}^+) \in E(3,K)^2 : \mathbf{X}^+ \wedge \mathbf{Y}^+ : \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ |M(\mathbf{X}, \mathbf{Y})| \end{bmatrix}$$

Chaque déterminant d'une matrice carrée (2-2), M($\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$), apparaissant dans les calculs précédents peut donc toujours se concevoir comme la représentation de la troisième composante du produit vectoriel classique des vecteurs la constituant en ayant pris soin de les prolonger mentalement selon la façon indiquée ci-avant. Ainsi, si, comme tous les espaces vectoriels, E(3, K) est rapporté à sa base canonique Ω: ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$), alors :

$$\forall (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \in E(2,K)^2 : \mathbf{X}^+ \wedge \mathbf{Y}^+ = |M(\mathbf{X}, \mathbf{Y})| . \mathbf{e}_3$$

Remarque 1.11. ***Une autre interprétation possible des déterminants***

L'interprétation précédente ne mène pour le moment pas très loin. Pour des raisons totalement intuitive, je vais examiner une autre approche. Le but reste le même : tenter de donner une interprétation géométrique aux déterminants figurant dans la matrice Hess(A) ; et donc, in fine, aux déterminants qui peuvent être formés à l'aide des vecteurs présents dans le cube A. Soit donc les tables de Pythagore suivantes :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1) = \begin{bmatrix} (a_1^1)^2 & a_1^1.a_1^2 \\ a_1^2.a_1^1 & (a_1^2)^2 \end{bmatrix} ; T_2(\otimes)(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2) = \begin{bmatrix} (a_2^1)^2 & a_2^1.a_2^2 \\ a_2^2.a_2^1 & (a_2^2)^2 \end{bmatrix}$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} (b_1^1)^2 & b_1^1.b_1^2 \\ b_1^2.b_1^1 & (b_1^2)^2 \end{bmatrix} ; T_2(\otimes)(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} (b_2^1)^2 & b_2^1.b_2^2 \\ b_2^2.b_2^1 & (b_2^2)^2 \end{bmatrix}$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{bmatrix} a_1^1.a_2^1 & a_1^2.a_2^1 \\ a_1^1.a_2^2 & a_1^2.a_2^2 \end{bmatrix} ; T_2(\otimes)(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} b_1^1.b_2^1 & b_1^2.b_2^1 \\ b_1^1.b_2^2 & b_1^2.b_2^2 \end{bmatrix}$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) = \begin{bmatrix} a_1^1.b_2^1 & a_1^2.b_2^1 \\ a_1^1.b_2^2 & a_1^2.b_2^2 \end{bmatrix} ; T_2(\otimes)(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) = \begin{bmatrix} a_2^1.b_1^1 & a_2^2.b_1^1 \\ a_2^1.b_1^2 & a_2^2.b_1^2 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de chacune de ces tables est nul. Ceci est vrai de façon générale pour l'ensemble des tables du type :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} X^1.Y^1 & X^2.Y^1 \\ X^1.Y^2 & X^2.Y^2 \end{bmatrix} ; |T_2(\otimes)(\mathbf{X}, \mathbf{Y})| = 0$$

Pour autant, ***si*** K est équipé d'une mutiplication "." commutative :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{Y},\mathbf{X}) \,=\, \begin{bmatrix} 0 & X^2.Y^1 \,-\, X^1.Y^2 \\ X^1.Y^2 \,-\, X^2.Y^1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui équivaut à :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{Y},\mathbf{X}) \,=\, |M(\mathbf{X},\mathbf{Y})|\,.\,[C]$$

où la matrice [C] apparaissant ici est celle déjà introduite auparavant au niveau de la remarque étudiant les décompositions triviales dans le cas des cubes anti-symétriques. Ceci permet alors d'en conclure, sans être amené à déplacer la conversation vers un espace de dimension trois englobant celui de la discussion initiale (in extenso : sans être obligé d'en passer par la notion de prolongation) que:

$$|T_2(\otimes)(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{Y},\mathbf{X})| \,=\, |M(\mathbf{X},\mathbf{Y})|^2$$

Ce qui signifie que :

- Pour autant que le déterminant |M($\mathbf{X}$,$\mathbf{Y}$)| ne soit pas nul, la matrice [C] (si importante dans la théorie des spineurs - voir [03]) peut toujours s'écrire d'une infinité de façons comme suit :

$$\forall\,(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \,\in\, E(2,K)^2,\; |M(\mathbf{X},\mathbf{Y})| \,\neq\, 0 \,:\, [C] \,=\, \frac{T_2(\otimes)(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{Y},\mathbf{X})}{|M(\mathbf{X},\mathbf{Y})|}$$

- L'écriture fonctionnelle |M(..., ...)| peut être remplacée par la racine carrée du déterminant d'une différence de matrices dont, pour rappel et pour la pédagogie, l'extrapolation en dimension trois représente une rotation (plus généralement : un rotationnel).

$$|M(\mathbf{X},\mathbf{Y})| \,=\, \pm|T_2(\otimes)(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{Y},\mathbf{X})|^{1/2}$$

Remarque 1.12. ***Le lien avec la géométrie du plan complexe***

Dans cette nouvelle remarque, je vais me servir de l'habitude qu'ont pris (il y a fort longtemps) les mathématiciens de représenter les nombres complexes (les éléments de l'ensemble $\mathbb{C}$) en se servant du plan euclidien classique. Ceci permet d'établir un isomorphisme entre les points de ce plan euclidien, E(2, $\mathbb{R}$), $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. En exagérant un peu le trait, chaque vecteur $\mathbf{V}$ de E(2, $\mathbb{R}$) ayant les composantes (x, y) se laisse représenter par convention par le nombre complexe z = x + $\imath$. y. Le principe peut être étendu aux éléments de E(2, $\mathbb{C}$) même si, dès lors, le cerveau humain ne peut plus vraiment se représenter ce qui se passe.

N'importe quel cube, A, de cette discussion fait intervenir huit nombres de l'ensemble K. Pour commencer doucement et permettre aux lecteurs de continuer à visualiser le récit, je choisirai de travailler avec K = $\mathbb{R}$. Nous disposons donc de huit nombres réels qui ont été répartis en colonnes ; chacune est un élément de l'espace dual de E(2, $\mathbb{R}$) et représente donc un vecteur de E(2, K). Grâce au principe de leur représentation par un nombre complexe, tout se passe donc comme si nous disposions de quatre nombres complexes ; soit, pour garder la nomenclature utilisée jusque là : a_1, a_2, b_1 et b_2.

C'est le moment de cet exposé où il convient de posséder ou apprendre quelques rudiments de géométrie pour le plan complexe [[04] ; §4.1, pp. 81-87], de faire appel aux transformations de Moebius et au "théorème dit du (traduction litérale depuis l'allemand) double comportement de quatre points" [[04] ; §4.1, p. 85] pour remarquer finalement que, si M désigne une transformation de Moebius, alors :

$$\forall\,(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)\,\in\,E(2,K)^2,\,\forall\,(\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2)\,\in\,E(2,K)^2\;:$$

$$[M(a_1),M(a_2)\,;\,M(b_1),M(b_2)]\,=\,[a_1,a_2\,;\,b_1,b_2]$$

et si π est une projection telle que $\pi(\mathrm{a}_1)=\mathrm{A}_1$, $\pi(\mathrm{a}_2)=\mathrm{A}_2$, $\pi(\mathrm{b}_1)=\mathrm{B}_1$ et $\pi(\mathrm{b}_2)=\mathrm{B}_2$, alors :

$$[a_1,a_2\,;\,b_1,b_2]\,=\,\frac{|M(\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_1)|\,.\,|M(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_2)|}{|M(\mathbf{a}_1,\mathbf{b}_2)|\,.\,|M(\mathbf{a}_2,\mathbf{b}_1)|}$$

References

2 Bibliographie

2.1 Articles, cours et livres

[01] Collection aleph$_0$ / Géométrie, Terminales C et E, ©1972 Librairie Hachette.

[03] Cartan, E. The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966; translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)"; Hermann, 1937; Dover Publications, Inc. New York. ©1966 by Hermann, Paris, ISBN 0-486-64070-1.

[04] Berchtold, Florian: Geometrie (Von Euklid bis zur hyperbolischen Geometrie mit Ausblick auf angrenzende Gebiete); ISBN 978-3-662-49954-5, Springer Spektrum, ©Springer-Verlag GmbH, Deutschland, 2017.

2.2 Travaux personnels

[a] PERIAT, T. : Décomposition intrinseque des produits vectoriels déformés; ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, v2, 14 aout 2018.

[b] PERIAT, T. : A. Einstein versus W. Heisenberg; ISBN 978-2-36923-026-7, EAN 9782369230267, 10 décembre 2019.