GTR2, pseudo-champs électromagnétiques et pseudo-tenseur de courbure

©Thierry PERIAT, ISBN 978-2-36923-135-6, EAN 9782369231356, v2

14 février 2020

Ce document revient sur les fondations de la GTR2 et analyse, en particulier et en détails, la prédiction de l'existence de champs électromagnétiques (EM) d'origine géométrique.

Table des matières

1 Contexte et résumé des résultats **2**
1.1 Contexte . . . 2
1.2 Exposé de la démarche suivie dans ce document . . . 3
1.3 Résumé succinct des résultats obtenus . . . 3

2 Dérivées partielles des composantes de la métrique **4**
2.1 Les dérivées partielles premières des composantes de la métrique 4
2.2 Dérivées partielles secondes des composantes de la métrique . . . 4
2.3 Dérivées partielles d'ordre trois des composantes de la métrique . 6

3 Trois autres manières de calculer les variations des composantes de la métrique **8**
3.1 La règle de Leibniz . . . 8
3.2 L'évolution des états . . . 10
3.3 La théorie des produits tensoriels déformés . . . 12

4 Le problème de l'interprétation des variations **12**
4.1 Confrontation avec un développement en série, dit de Taylor . . . 12
4.2 Interprétation polynomiale . . . 14
4.3 Quand la règle de Leibniz definit une série de Taylor . . . 14
4.4 Le promeneur de Walker . . . 22
4.5 Indications sur le formalisme des pseudo-champs EM de la GTR2 23
4.6 Un pseudo-tenseur de courbure . . . 26
4.7 Arguments en faveur de la théorie des produits tensoriels déformés 32
4.8 Un postulat . . . 32
4.9 Exemples . . . 32

5 Conclusions **33**

6 Contribution personnelle **34**

7 Bibliographie **34**
French

1 Contexte et résumé des résultats

1.1 Contexte

Ce document revêt la forme d'un exercice d'auto-critique. Il se propose de tester la solidité et la recevabilité des propositions théoriques formulées dans [a ; en français] (voir contributions personnelles au § 6) et regroupées sous le label de GTR2. Il concentre toute son attention sur la recevabilité de la prédiction de l'existence de champs électromagnétiques (EM) d'origine géométrique.

Il s'astreint à le faire en adoptant un point de vue essentiellement mathématique. La démarche force à approfondir la notion de développement en séries (dite, par exemple, de Taylor) et à poser les éléments fondateurs du raisonnement de manière ordonnée et claire. A y regarder de près, l'édifice repose sur quatre hypothèses. Chacune d'elle possède une traduction mathématique :

1. (H-1) : La discussion prend place sur l'espace vectoriel V = {E(4, R), $\otimes_T$} [1]. Cet espace est, comme à l'accoutumée, rapporté à une base canonique Ω : ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) dont les vecteurs peuvent varier.
2. (H-2) : Les variations des vecteurs de base sont décrites par des développements en séries jusqu'à l'ordre p inclus. La théorie bâtie sur ces développements porte le nom de "GTR-p" :

$$\delta \mathbf{e}_\lambda = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_1} ... \partial x^{\alpha_k}} \cdot dx^{\alpha_1} ... dx^{\alpha_k} + \mathbf{0}(p+1) \tag{1}$$

3. (H-3) : La dérivée partielle à l'ordre k (k $\geq$ 1) de n'importe quel vecteur de base est encore un élément de l'espace vectoriel V parce qu'elle peut toujours y être reprojettée de la façon suivante :

$$\frac{\partial^k \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_k} ... \partial x^{\alpha_1}} = T^\beta_{\lambda \alpha_1 ... \alpha_k} \cdot \mathbf{e}_\beta \tag{2}$$

4. (H-4) : Une table de Pythagore [2] bâtie sur le produit scalaire de deux vecteurs et appliquée à la base Ω définit les seize composantes locales de la métrique :

$$[G] = [g_{\lambda\mu}] = [< \mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\mu >_{[G]}] = T_2(< ..., ... >_{[G]})(\Omega, \Omega) \tag{3}$$

Question : "Comment évaluer les variations des composantes de cette métrique locale, in extenso : que valent les $\delta g_{\lambda\mu}$?"

1. La notation $\otimes_T$ désigne un produit tensoriel standard qui a été déformé par un cube, T, de $4 \times 4 \times 4 = 64$ nombres réels. Ces nombres représentent les composantes des seize dérivées partielles premières des vecteurs de la base Ω [a ; p. 2, (3)].

2. Ce concept a été expliqué dans d'autres parties de mon travail et en particulier dans [a]. Il constitue une sorte d'extrapolation de la notion élémentaire de table de multiplication.

1.2 Exposé de la démarche suivie dans ce document

Il ressort des premiers instants de cette analyse que les hypothèses précédentes suffisent à permettre le calcul jusqu'à l'ordre k des dérivées partielles des composantes de la métrique. Elle permettent donc la construction d'une série de nombres réels qui pourraient a priori permettre le calcul des variations infinitésimales des variations des composantes de cette métrique par le biais d'un développement en série jusqu'à l'ordre p inclus ; je note figurativement de la lettre (i) la représentation de ces variations. La représentation (i) est la brique de base de l'approche GTR-p et elle sert de référence pour dire ce qu'est "la bonne expression" des variations des composantes de la métrique.

Les difficultés techniques apparaissent du fait qu'il existe en réalité de multiples manières de fonder un calcul des variations des composantes d'une métrique. En effet, selon que ce calcul se fonde sur :

- (i) l'approche prônée par la GTR-p ;
- (ii) l'emploi de la bonne vieille règle de Leibniz [3] ;
- (iii) une comparaison entre un état final et un état initial de la métrique ;
- (iv) la mesure d'un écart à la trivialité d'un produit tensoriel (ou de Lie) déformé,

les coefficients des formes polynomiales trouvées diffèrent. Du seul point de vue du mathématicien, il devient extrêmement difficile ou arbitraire de choisir une définition des variations plutôt qu'une autre.

Il en devient donc tentant de vouloir définir les conditions assurant la similitude des différentes formes polynomiales trouvées. En pratique, la démarche consiste à découvrir les circonstances dans lesquelles chaque coefficient de degré k (pour k allant de 1 à p) de l'une quelconque des formes polynomiales trouvées se confond avec la dérivée partielle d'ordre k d'une composante de la métrique dont les variations sont étudiées. Et à répéter ensuite la manoeuvre pour les diverses formes polynomiales qui auront pu être découvertes et calculées. Il est probable que les mesures physiques permettront d'orienter ensuite le choix vers la méthode de calcul des variations de la métrique correspondant au mieux à la réalité.

1.3 Résumé succinct des résultats obtenus

La situation peut être un peu éclaircie en remarquant que :

- Les coefficients de degré un sont les mêmes pour les définitions (i), (ii) et (iii) de ces variations.
- Il existe des circonstances pour lesquelles les coefficients de degré deux de la polynomiale obtenue avec la définition (ii) coincide avec les dérivées partielles d'ordre deux calculées grâce à (i). Ces circonstances s'accomodent très bien de l'existence de pseudo-champs EM d'origine géométrique. Une comparaison des résultats issus de l'usage des définitions (i)

3. Philosophe, mathématicien, juriste et conseiller politique, allemand, connu pour son esprit universaliste, 1646-1716.

et (iii) n'est pas incompatible avec l'existence de ces champs mais ils s'annulent dans cette confrontation particulière.

— Les coefficients de la définition (iv) représentent une catégorie complètement à part de l'interprétation de la définition (i). Ils offrent l'opportunité d'introduire des grandeurs physiques dans la discussion mathématique d'une manière originale ; y compris des représentations de bi-vecteurs, et elles évoquent bien évidemment un lien possible avec les représentations habituelles des champs EM.

2 Dérivées partielles des composantes de la métrique

2.1 Les dérivées partielles premières des composantes de la métrique

En partant de l'hypothèse (H-4)

$$g_{\lambda\beta} = < \mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\beta >_{[G]}$$

Une dérivation partielle des composantes de la métrique grâce à la règle de Leibniz fournit simplement :

$$\frac{\partial\, g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha_k}} = < \frac{\partial\, \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_k}}, \mathbf{e}_\beta > + < \mathbf{e}_\lambda, \frac{\partial\, \mathbf{e}_\beta}{\partial x^{\alpha_k}} >$$

L'utilisation de l'hypothèse (H-3) à l'ordre un permet de poursuivre avec :

$$\frac{\partial\, g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha_k}} = < T^\theta_{\lambda\alpha_k} \,.\, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\beta > + < \mathbf{e}_\lambda, T^\theta_{\beta\alpha_k} \,.\, \mathbf{e}_\theta >$$

Comme la discussion prend place sur l'ensemble des nombres réels :

$$\frac{\partial\, g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha_k}} = T^\theta_{\lambda\alpha_k} \,.\, g_{\theta\beta} + T^\theta_{\beta\alpha_k} \,.\, g_{\lambda\theta} \tag{4}$$

De même :

$$\frac{\partial\, g_{\beta\mu}}{\partial x^{\alpha_k}} = T^\theta_{\beta\alpha_k} \,.\, g_{\theta\mu} + T^\theta_{\mu\alpha_k} \,.\, g_{\beta\theta}$$

2.2 Dérivées partielles secondes des composantes de la métrique

Remarque 2.1. ***Relation de cohérence entre l'ordre un et l'ordre deux***

En différentiant les dérivées partielles premières d'un vecteur de base, il vient d'abord :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_1}} = \frac{\partial T^\beta_{\lambda\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_2}} \,.\, \mathbf{e}_\beta + T^\beta_{\lambda\alpha_1} \,.\, \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^{\alpha_2}}$$

Grâce à l'hypothèse (H-3) le calcul se poursuit un peu comme dans les prémisses de la théorie de la relativité générale avec :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_1}} = \frac{\partial T^\beta_{\lambda\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_2}} \,.\, \mathbf{e}_\beta + T^\beta_{\lambda\alpha_1} \,.\, T^\theta_{\beta\alpha_2} \,.\, \mathbf{e}_\theta$$

L'indice β est muet dans la première somme placée à droite du signe de l'égalité ; il peut être remplacé par l'indice θ apparaissant dans la seconde somme. Le tout peut donc être regroupé pour donner :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_1}} = \{\frac{\partial T^\theta_{\lambda\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_2}} + T^\beta_{\lambda\alpha_1} . T^\theta_{\beta\alpha_2}\} . \mathbf{e}_\theta$$

Mais la même hypothèse H-3 autorise aussi à écrire à l'ordre deux :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_2} \partial x^{\alpha_1}} = T^\theta_{\lambda\alpha_1\alpha_2} . \mathbf{e}_\theta$$

Il devient évident que les règles habituelles de la différentiation, alliées à l'hypothèse H-3 mènent à la relation de cohérence liant les projecteurs de l'ordre deux avec ceux de l'ordre un :

$$\frac{\partial T^\theta_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} = T^\theta_{\lambda\alpha\beta} - T^\phi_{\lambda\alpha} . T^\theta_{\phi\beta} \tag{5}$$

Remarque 2.2. ***Les dérivées partielles à l'ordre deux des composantes de la métrique***

Il en découle :

$$\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$$
$$=$$
$$\frac{\partial g_{\lambda\theta}}{\partial x^\beta} . T^\theta_{\mu\alpha} + \frac{\partial T^\theta_{\lambda\alpha}}{\partial x^\beta} . g_{\theta\mu} + g_{\lambda\theta} . \frac{\partial T^\theta_{\mu\alpha}}{\partial x^\beta} + T^\theta_{\lambda\alpha} . \frac{\partial g_{\theta\mu}}{\partial x^\beta}$$
$$=$$
$$\frac{\partial g_{\lambda\theta}}{\partial x^\beta} . T^\theta_{\mu\alpha} + \{T^\theta_{\lambda\alpha\beta} - T^\phi_{\lambda\alpha} . T^\theta_{\phi\beta}\} . g_{\theta\mu}$$
$$+$$
$$g_{\lambda\theta} . \{T^\theta_{\mu\alpha\beta} - T^\phi_{\mu\alpha} . T^\theta_{\phi\beta}\} + T^\theta_{\lambda\alpha} . \frac{\partial g_{\theta\mu}}{\partial x^\beta}$$
$$=$$
$$\{T^\phi_{\lambda\beta} . g_{\phi\theta} + T^\phi_{\theta\beta} . g_{\lambda\phi}\} . T^\theta_{\mu\alpha} + \{T^\theta_{\lambda\alpha\beta} - T^\phi_{\lambda\alpha} . T^\theta_{\phi\beta}\} . g_{\theta\mu}$$
$$+$$
$$g_{\lambda\theta} . \{T^\theta_{\mu\alpha\beta} - T^\phi_{\mu\alpha} . T^\theta_{\phi\beta}\} + T^\theta_{\lambda\alpha} . \{T^\phi_{\theta\beta} . g_{\phi\mu} + T^\phi_{\mu\beta} . g_{\theta\phi}\}$$
$$=$$
$$\{g_{\lambda\theta} . T^\theta_{\mu\alpha\beta} + T^\theta_{\lambda\alpha\beta} . g_{\theta\mu}\}$$
$$+$$
$$\{T^\phi_{\lambda\beta} . g_{\phi\theta} + T^\phi_{\theta\beta} . g_{\lambda\phi}\} . T^\theta_{\mu\alpha} - T^\phi_{\lambda\alpha} . T^\theta_{\phi\beta} . g_{\theta\mu}$$
$$+$$
$$- g_{\lambda\theta} . T^\phi_{\mu\alpha} . T^\theta_{\phi\beta} + T^\theta_{\lambda\alpha} . \{T^\phi_{\theta\beta} . g_{\phi\mu} + T^\phi_{\mu\beta} . g_{\theta\phi}\}$$

La discussion a lieu sur le corps commutatif des nombres réels (rappel) ; la distributivité et l'associativité permettent des réorganisations à l'interieur des produits apparaissant dans la somme précédente. De sorte que :

$$\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$$
$$=$$
$$\{g_{\lambda\theta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha\beta} + T^\theta_{\lambda\alpha\beta} \cdot g_{\theta\mu}\}$$
$$+$$
$$g_{\phi\theta} \,.\, T^\phi_{\lambda\beta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha} + g_{\lambda\phi} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha} \,.\, T^\phi_{\theta\beta} - T^\phi_{\lambda\alpha} \,.\, T^\theta_{\phi\beta} \cdot g_{\theta\mu}$$
$$+$$
$$g_{\phi\mu} \,.\, T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, T^\phi_{\theta\beta} - g_{\lambda\theta} \,.\, T^\phi_{\mu\alpha} \,.\, T^\theta_{\phi\beta} + T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, T^\phi_{\mu\beta} \cdot g_{\theta\phi}$$

De plus, certaines sommes sont effectuées à l'aide d'indices muets (θ et ϕ) dont l'ordre peut être inversé sans rien changer à la quantité exprimée. Ainsi, considérant la deuxième et la troisième ligne de l'expression ci-dessus, le deuxième terme et le cinquième terme sont en réalité égaux à un signe moins près ; par conséquent : ils s'annulent mutuellement. Il en est de même du lien relatif entre le troisième terme et le quatrième terme. Après multiplication par un demi, il résulte de tout ceci que :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \tag{6}$$
$$=$$
$$\frac{1}{2} \cdot \{g_{\lambda\theta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha\beta} + T^\theta_{\lambda\alpha\beta} \cdot g_{\theta\mu}\}$$
$$+$$
$$\frac{1}{2} \cdot \{g_{\phi\theta} \,.\, T^\phi_{\lambda\beta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha} + T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, T^\phi_{\mu\beta} \cdot g_{\theta\phi}\}$$

2.3 Dérivées partielles d'ordre trois des composantes de la métrique

Remarque 2.3. ***Relation de cohérence entre l'ordre k et l'ordre k + 1***

Le raisonnement tenu au cours de la remarque 2.1 peut être réitéré aux ordres supérieurs et fournir la relation de cohérence plus générale suivante :

$$T^\theta_{\lambda\alpha_1\ldots\alpha_k} = \frac{\partial T^\theta_{\lambda\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}}{x^{\alpha_k}} + T^\beta_{\lambda\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} \,.\, T^\theta_{\beta\alpha_k} \tag{7}$$

C'est la relation de cohérence [a ; p. 5, (25)] qui reste vraie quelle que soit l'interprétation des variations de la métrique qui sera faite ultérieurement.

Remarque 2.4. ***Le calcul à l'ordre trois***

Il faut partir de l'ordre deux et calculer :

$$\frac{\partial^3 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\chi \partial x^\beta \partial x^\alpha}$$
$$=$$
$$\{\frac{\partial g_{\lambda\theta}}{\partial x^\chi} . T^\theta_{\mu\alpha\beta} + g_{\lambda\theta} . \frac{\partial T^\theta_{\mu\alpha\beta}}{\partial x^\chi}\}$$
$$+$$
$$\{\frac{\partial T^\theta_{\lambda\alpha\beta}}{\partial x^\chi} . g_{\theta\mu} + T^\theta_{\lambda\alpha\beta} . \frac{\partial g_{\theta\mu}}{\partial x^\chi}\}$$
$$+$$
$$\{\frac{\partial g_{\phi\theta}}{\partial x^\chi} . T^\phi_{\lambda\beta} . T^\theta_{\mu\alpha} + g_{\phi\theta} . \frac{\partial T^\phi_{\lambda\beta}}{\partial x^\chi} . T^\theta_{\mu\alpha} + g_{\phi\theta} . T^\phi_{\lambda\beta} . \frac{\partial T^\theta_{\mu\alpha}}{\partial x^\chi}\}$$
$$+$$
$$\{\frac{\partial T^\theta_{\lambda\alpha}}{\partial x^\chi} . T^\phi_{\mu\beta} . g_{\theta\phi} + T^\theta_{\lambda\alpha} . \frac{\partial T^\phi_{\mu\beta}}{\partial x^\chi} . g_{\theta\phi} + T^\theta_{\lambda\alpha} . T^\phi_{\mu\beta} . \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial x^\chi}\}$$

Puis il faut remplacer par leurs expressions alternatives connues les dérivées partielles des composantes de la métrique et des projecteurs. Sachant d'une part que :

$$\frac{\partial\, g_{\lambda\theta}}{\partial x^\chi} = T^\psi_{\lambda\chi} . g_{\psi\theta} + T^\psi_{\theta\chi} . g_{\lambda\psi}$$
$$\frac{\partial\, g_{\phi\theta}}{\partial x^\chi} = T^\psi_{\phi\chi} . g_{\psi\theta} + T^\psi_{\theta\chi} . g_{\phi\psi}$$
$$\frac{\partial\, g_{\theta\phi}}{\partial x^\chi} = T^\psi_{\theta\chi} . g_{\psi\phi} + T^\psi_{\phi\chi} . g_{\theta\psi}$$
$$\frac{\partial\, g_{\theta\mu}}{\partial x^\chi} = T^\psi_{\theta\chi} . g_{\psi\mu} + T^\psi_{\mu\chi} . g_{\theta\psi}$$

et d'autre par que :

$$\frac{\partial T^\theta_{\lambda\alpha}}{\partial x^\chi} = T^\theta_{\lambda\alpha\chi} - T^\phi_{\lambda\alpha} . T^\theta_{\phi\chi}$$
$$\frac{\partial T^\phi_{\lambda\beta}}{\partial x^\chi} = T^\phi_{\lambda\beta\chi} - T^\epsilon_{\lambda\beta} . T^\phi_{\epsilon\chi}$$
$$\frac{\partial T^\theta_{\mu\alpha}}{\partial x^\chi} = T^\theta_{\mu\alpha\chi} - T^\phi_{\mu\alpha} . T^\theta_{\phi\chi}$$
$$\frac{\partial T^\phi_{\mu\beta}}{\partial x^\chi} = T^\phi_{\mu\beta\chi} - T^\epsilon_{\mu\beta} . T^\phi_{\epsilon\chi}$$

Ainsi que :

$$\frac{\partial T^\theta_{\mu\alpha\beta}}{\partial x^\chi} = T^\theta_{\mu\alpha\beta\chi} - T^\phi_{\mu\alpha\beta} . T^\theta_{\phi\chi}$$
$$\frac{\partial T^\theta_{\lambda\alpha\beta}}{\partial x^\chi} = T^\theta_{\lambda\alpha\beta\chi} - T^\phi_{\lambda\alpha\beta} . T^\theta_{\phi\chi}$$

Il vient :

$$\frac{\partial^3 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\chi \partial x^\beta \partial x^\alpha} \tag{8}$$
$$=$$
$$(T^\psi_{\lambda\chi} \,.\, g_{\psi\theta} \,+\, T^\psi_{\theta\chi} \,.\, g_{\lambda\psi}) \,.\, T^\theta_{\mu\alpha\beta} \,+\, g_{\lambda\theta} \,.\, (T^\theta_{\mu\alpha\beta\chi} \,-\, T^\phi_{\mu\alpha\beta} \,.\, T^\theta_{\phi\chi})$$
$$+$$
$$(T^\theta_{\lambda\alpha\beta\chi} \,-\, T^\phi_{\lambda\alpha\beta} \,.\, T^\theta_{\phi\chi}) \,.\, g_{\theta\mu} \,+\, T^\theta_{\lambda\alpha\beta} \,.\, (T^\psi_{\theta\chi} \,.\, g_{\psi\mu} \,+\, T^\psi_{\mu\chi} \,.\, g_{\theta\psi})$$
$$+$$
$$(T^\psi_{\phi\chi} \,.\, g_{\psi\theta} \,+\, T^\psi_{\theta\chi} \,.\, g_{\phi\psi}) \,.\, T^\phi_{\lambda\beta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha}$$
$$+$$
$$g_{\phi\theta} \,.\, (T^\phi_{\lambda\beta\chi} \,-\, T^\epsilon_{\lambda\beta} \,.\, T^\phi_{\epsilon\chi}) \,.\, T^\theta_{\mu\alpha} \,+\, g_{\phi\theta} \,.\, T^\phi_{\lambda\beta} \,.\, (T^\theta_{\mu\alpha\chi} \,-\, T^\phi_{\mu\alpha} \,.\, T^\theta_{\phi\chi})$$
$$+$$
$$(T^\theta_{\lambda\alpha\chi} \,-\, T^\phi_{\lambda\alpha} \,.\, T^\theta_{\phi\chi}) \,.\, T^\phi_{\mu\beta} \,.\, g_{\theta\phi} \,+\, T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, (T^\phi_{\mu\beta\chi} \,-\, T^\epsilon_{\mu\beta} \,.\, T^\phi_{\epsilon\chi}) \,.\, g_{\theta\phi}$$
$$+$$
$$T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, T^\phi_{\mu\beta} \,.\, (T^\psi_{\theta\chi} \,.\, g_{\psi\phi} \,+\, T^\psi_{\phi\chi} \,.\, g_{\theta\psi})$$

Il faut ensuite soigneusement regrouper les termes semblables, s'ils existent, et tenter de former des identités remarquables. Les résultats de ces calculs auront leur utilité au niveau de la remarque 4.10 .

3 Trois autres manières de calculer les variations des composantes de la métrique

Proposition 3.1. *Il existe de multiples manières de calculer les variations des composantes de la métrique.*

3.1 La règle de Leibniz

Exemple 3.1. ***Application de la règle à l'ordre deux***

A l'ordre deux, il vient :

$$\delta \mathbf{e}_\lambda(ordre\,2) \;=\; \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\alpha} \,.\, dx^\alpha \,+\, \frac{1}{2} \,.\, \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta \,+\, \mathbf{0}(3)$$

C'est-à-dire, en utilisant les projecteurs (hypothèse H-3) :

$$\delta \mathbf{e}_\lambda(ordre\,2) \;=\; \{T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, dx^\alpha \,+\, \frac{1}{2} \,.\, T^\theta_{\lambda\alpha\beta} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta\} \,.\, \mathbf{e}_\theta \,+\, \mathbf{0}(3)$$

La seule application de la règle de Leibniz fournit :

$$\delta g_{\lambda\mu}(ordre\,2) \;=<\delta \mathbf{e}_\lambda(ordre\,2),\, \mathbf{e}_\mu >_{[G]} \,+\, <\mathbf{e}_\lambda,\, \delta \mathbf{e}_\mu(ordre\,2) >_{[G]}$$

C'est-à-dire :

$$\delta g_{\lambda\mu} \;=\; \{g_{\lambda\theta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha} + T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, g_{\theta\mu}\} \,.\, dx^\alpha + \frac{1}{2} \,.\, \{g_{\lambda\theta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha\beta} + T^\theta_{\lambda\alpha\beta} \,.\, g_{\theta\mu}\} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta + 0(3)$$

Exemple 3.2. ***Application de la règle de Leibniz à l'ordre quatre***

Si la démarche exposée dans l'exemple précédent est répétée à l'ordre quatre, il vient d'abord grâce à l'hypothesè H-2 :

$$\delta \mathbf{e}_\lambda(ordre\,4)$$
$$=$$
$$\frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\alpha} \,.\, dx^\alpha$$
$$+$$
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta$$
$$+$$
$$\frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\chi} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta \,.\, dx^\chi$$
$$+$$
$$\frac{1}{24} \cdot \frac{\partial^4 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\chi \partial x^\epsilon} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta \,.\, dx^\chi \,.\, dx^\epsilon \;+\; \mathbf{0}(5)$$

C'est-à-dire, en y injectant les relations issues de l'hypothèse H-3

$$\delta \mathbf{e}_\lambda(ordre\,4)$$
$$=$$
$$\{T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, dx^\alpha + \frac{1}{2} \,.\, T^\theta_{\lambda\alpha\beta} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta + \frac{1}{6} \,.\, T^\theta_{\lambda\alpha\beta\chi} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta \,.\, dx^\chi + \frac{1}{24} \,.\, T^\theta_{\lambda\alpha\beta\chi\epsilon} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta \,.\, dx^\chi \,.\, dx^\epsilon\} \,.\, \mathbf{e}_\theta + \mathbf{0}(5)$$

L'application de la règle de Leibniz fournit ici :

$$\delta g_{\lambda\mu}(ordre\,4) \;=<\delta \mathbf{e}_\lambda(ordre\,4),\, \mathbf{e}_\mu >_{[G]} \;+\; <\mathbf{e}_\lambda,\, \delta \mathbf{e}_\mu(ordre\,4) >_{[G]}$$

Puis :

$$\delta g_{\lambda\mu}(ordre\,4) \tag{9}$$
$$=$$
$$\{g_{\lambda\theta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha} \;+\; T^\theta_{\lambda\alpha} \cdot g_{\theta\mu}\} \,.\, dx^\alpha$$
$$+$$
$$\frac{1}{2} \cdot \{g_{\lambda\theta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha\beta} \;+\; T^\theta_{\lambda\alpha\beta} \cdot g_{\theta\mu}\} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta$$
$$+$$
$$\frac{1}{6} \cdot \{g_{\lambda\theta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha\beta\chi} \;+\; T^\theta_{\lambda\alpha\beta\chi} \cdot g_{\theta\mu}\} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta \,.\, dx^\chi$$
$$+$$
$$\frac{1}{24} \cdot \{g_{\lambda\theta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha\beta\chi\epsilon} \;+\; T^\theta_{\lambda\alpha\beta\chi\epsilon} \cdot g_{\theta\mu}\} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta \,.\, dx^\chi \,.\, dx^\epsilon \;+\; 0(5)$$

Remarque 3.1. ***Application de la règle à l'ordre k***

Ce calcul reste à faire.

3.2 L'évolution des états

Pour aller plus loin encore dans cette exploration des évolutions de la métrique, je vais considérer ce sujet sous un angle légèrement différent. Dans l'état d'esprit de ce document, une métrique est essentiellement le résultat de l'interaction d'une base canonique avec elle-même. Toutefois, les bases peuvent évoluer ; ce qui veut dire concrètement : leurs vecteurs constitutifs aussi. Au cours de ces évolutions, la qualité “être une base doit pouvoir être préservée”. Ces évolutions se traduisent par :

$$\forall \lambda : \mathbf{e}_\lambda \to \mathbf{e}_\lambda + \delta\mathbf{e}_\lambda$$

ou, plus précisement à l'ordre deux :

$$\forall \lambda : \mathbf{e}_\lambda \to \mathbf{e}_\lambda + \{T^\theta_{\lambda\alpha} . dx^\alpha + \frac{1}{2} . T^\theta_{\lambda\alpha\beta} . dx^\alpha . dx^\beta\} . \mathbf{e}_\theta + \mathbf{0}(3)$$

Les composantes de la métrique locale se transforment de la façon suivante :

$$g_{\lambda\mu}(initial) = < \mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\mu >_{[G]} \to g_{\lambda\mu}(final) = < \mathbf{e}_\lambda + \delta\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\mu + \delta\mathbf{e}_\mu >_{[G]}$$

Il en résulte :

$$g_{\lambda\mu}(final) - g_{\lambda\mu}(initial) = < \mathbf{e}_\lambda, \delta\mathbf{e}_\mu >_{[G]} + < \delta\mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\mu >_{[G]} + < \delta\mathbf{e}_\lambda, \delta\mathbf{e}_\mu >_{[G]}$$

A l'ordre deux il s'agit de :

$$\{g_{\lambda\mu}(final) - g_{\lambda\mu}(inital)\}(ordre\, 2)$$

$$=$$

$$< \mathbf{e}_\lambda, \delta\mathbf{e}_\mu(ordre\, 2) >_{[G]} + < \delta\mathbf{e}_\lambda(ordre\, 2), \mathbf{e}_\mu >_{[G]} + < \delta\mathbf{e}_\lambda(ordre\, 2), \delta\mathbf{e}_\mu(ordre\, 2) >_{[G]}$$

$$=$$

$$< \mathbf{e}_\lambda, \{T^\phi_{\mu\chi} . dx^\chi + \frac{1}{2} . T^\phi_{\mu\chi\epsilon} . dx^\chi . dx^\epsilon\} . \mathbf{e}_\phi >_{[G]}$$

$$+$$

$$< \{T^\theta_{\lambda\alpha} . dx^\alpha + \frac{1}{2} . T^\theta_{\lambda\alpha\beta} . dx^\alpha . dx^\beta\} . \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\mu >_{[G]}$$

$$+$$

$$< \{T^\theta_{\lambda\alpha} . dx^\alpha + \frac{1}{2} . T^\theta_{\lambda\alpha\beta} . dx^\alpha . dx^\beta\} . \mathbf{e}_\theta, \{T^\phi_{\mu\chi} . dx^\chi + \frac{1}{2} . T^\phi_{\mu\chi\epsilon} . dx^\chi . dx^\epsilon\} . \mathbf{e}_\phi >_{[G]}$$

La démarche livre une forme polynomiale de degré quatre [4].

L'observation attentative de cet exemple montre que, *sans en passer par un développement en série à l'ordre quatre des vecteurs de base*, les deux expressions de la variation d'une composante de la métrique diffèrent seulement du terme $\delta\mathbf{e}_\lambda \,.\, \delta\mathbf{e}_\mu$ contenant des coefficients de degré deux, trois et quatre.

4. Une question annexe consiste à se demander si la différence $g_{\lambda\mu}$(final) - $g_{\lambda\mu}$(initial) calculée ci-dessus peut raisonnablement se comparer avec le résultat qui aurrait été obtenu en réalisant la démarche exposée dans la sous-section utilisant la règle de Leibniz à l'ordre quatre.

Pour la complétude de cet exposé, cette polynomiale de degré quatre s'écrit in extenso :

$$\{g_{\lambda\mu}(final) \,-\, g_{\lambda\mu}(inital)\}(ordre\,2) \tag{10}$$

$$=$$

$$\{g_{\lambda\theta}\,.\,T^{\theta}_{\mu\alpha} \,+\, T^{\theta}_{\lambda\alpha}\,.\,g_{\theta\mu}\}\,.\,dx^{\alpha}$$

$$+$$

$$\{\frac{1}{2}\,.\,(g_{\lambda\theta}\,.\,T^{\theta}_{\mu\alpha\beta} \,+\, T^{\theta}_{\lambda\alpha\beta}\,.\,g_{\theta\mu}) \,+\, g_{\theta\phi}\,.\,T^{\theta}_{\lambda\alpha}\,.\,T^{\phi}_{\mu\beta}\}\,.\,dx^{\alpha}\,.\,dx^{\beta}$$

$$+$$

$$\frac{1}{2}\,.\,g_{\theta\phi}\,.\,(T^{\theta}_{\lambda\alpha}\,.\,T^{\phi}_{\mu\beta\chi} \,+\, T^{\theta}_{\lambda\alpha\beta}\,.\,T^{\phi}_{\mu\chi})\,.\,dx^{\alpha}\,.\,dx^{\beta}\,.\,dx^{\chi}$$

$$+$$

$$\frac{1}{4}\,.\,g_{\theta\phi}\,.\,T^{\theta}_{\lambda\alpha\beta}\,.\,T^{\phi}_{\mu\chi\epsilon}\,.\,dx^{\alpha}\,.\,dx^{\beta}\,.\,dx^{\chi}\,.\,dx^{\epsilon} \,+\, 0(5)$$

Remarque 3.2. ***Comparaison des état à l'ordre k***

Je repars ici de :

$$\delta\mathbf{e}_{\lambda} \,=\, \sum_{k\,=\,1}^{k\,=\,p} \frac{1}{k!}\,.\,\frac{\partial^{k}\mathbf{e}_{\lambda}}{\partial x^{\alpha_1}...\partial x^{\alpha_k}}\,.\,dx^{\alpha_1}\,...\,dx^{\alpha_k} \,+\, \mathbf{0}(p+1)$$

$$\downarrow (H-3)$$

$$\delta\mathbf{e}_{\lambda} \,=\, \{\sum_{k\,=\,1}^{k\,=\,p} \frac{1}{k!}\,.\,T^{\beta}_{\lambda\alpha_1\,...\alpha_k}\,.\,dx^{\alpha_1}\,...\,dx^{\alpha_k}\}\,.\,\mathbf{e}_{\beta} \,+\, \mathbf{0}(p+1)$$

Je généralise ensuite la relation à l'ordre p :

$$\{g_{\lambda\mu}(final) \,-\, g_{\lambda\mu}(inital)\}(ordre\,p)$$

$$=$$

$$<\mathbf{e}_{\lambda},\, \delta\mathbf{e}_{\mu}(ordre\,p)>_{[G]}$$

$$+$$

$$<\delta\mathbf{e}_{\lambda}(ordre\,p),\, \mathbf{e}_{\mu}>_{[G]}$$

$$+$$

$$<\delta\mathbf{e}_{\lambda}(ordre\,p),\, \delta\mathbf{e}_{\mu}(ordre\,p)>_{[G]}$$

$$=$$

$$<\mathbf{e}_{\lambda},\, \{\sum_{k\,=\,1}^{k\,=\,p} \frac{1}{k!}\,.\,T^{\theta}_{\mu\alpha_1\,...\alpha_k}\,.\,dx^{\alpha_1}\,...\,dx^{\alpha_k}\}\,.\,\mathbf{e}_{\theta}>_{[G]}$$

$$+$$

$$< \{\sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k!} \,.\, T^{\theta}_{\lambda\alpha_1 \ldots \alpha_k} \,.\, dx^{\alpha_1} \ldots dx^{\alpha_k}\} \,.\, \mathbf{e}_\theta,\, \mathbf{e}_\mu >_{[G]}$$

$$+$$

$$< \{\sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k!} \,.\, T^{\theta}_{\lambda\alpha_1 \ldots \alpha_k} \,.\, dx^{\alpha_1} \ldots dx^{\alpha_k}\} \,.\, \mathbf{e}_\theta,\, \{\sum_{l=1}^{l=p} \frac{1}{l!} \,.\, T^{\phi}_{\mu\alpha_1 \ldots \alpha_k} \,.\, dx^{\alpha_1} \ldots dx^{\alpha_k}\} \,.\, \mathbf{e}_\phi >_{[G]}$$

Ces calculs livrent un polynôme de degré 2.p dont les coefficients diffèrent de ceux obtenus avec la seule règle de Leibniz dès le deuxième degré (Voir illustration du propos un peu plus loin dans l'exposé).

3.3 La théorie des produits tensoriels déformés

Soit l'espace $\{E(4, R), \otimes_T\}$. Lorsque, dans un tel espace, le cube T a pu être réduit deux fois, il devient un vecteur de l'espace E(4, R) ; par exemple **T**. L'étude des décompositions des produits tensoriels déformés par ce vecteur qui sont du type $\otimes_{\mathbf{T}}(\delta\mathbf{x}, \ldots)$ exige de calculer les quantités stratégiques suivantes ${}_{\lambda\mu}\Delta = |\ {}_{\mathbf{T}}\Phi(\delta\mathbf{x}, \ldots)$ - $[{}_{\lambda\mu}P]|$ mesurant les différences entre une partie principale triviale et une partie principale non-triviale de ces décompositions. Le calcul détaillé de ce genre de discriminant livre lui aussi un ensemble de polynomiales de degré quatre du genre :

$${}_{\lambda\mu}\Delta \tag{11}$$

$$=$$

$$(<_{\lambda\mu} \mathbf{b}_1, {}_{\lambda\mu} \mathbf{b}_2 >_{Id_3})^2 + {}_{\lambda\mu}d_{\alpha\beta\chi} \,.\, u^\alpha \,.\, u^\beta \,.\, u^\chi + {}_{\lambda\mu}d_{\alpha\beta} \,.\, u^\alpha \,.\, u^\beta + {}_{\lambda\mu}d_\alpha \,.\, u^\alpha + |{}_{\lambda\mu}P|$$

et il devient donc tentant de se demander si le système suivant est une alternative plausible aux identifications proposées dans [a] et au cours des paragraphes précédents :

$$\delta g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = |{}_{(4)\mathbf{T}}\Phi(\delta\mathbf{x}) - [{}_{\alpha\beta}P]| - |{}_{\alpha\beta}P| \tag{12}$$

Théorème 3.1. ***Représentations alternatives des variations des composantes d'une métrique***

Il existe donc bien de multiples formulations alternatives des variations des composantes d'une métrique. Les paragraphes précédents ont exposés tour à tour : celle basée sur la règle de Leibniz, celle reposant sur une comparaison des états de la métrique et enfin une autre s'inscrivant au sein d'une théorie visant à promouvoir l'intérêt d'utiliser les produits tensoriels déformés, particulièrement dans un espace $\{E(4, R), \otimes_{\mathbf{T}}\}$.

4 Le problème de l'interprétation des variations

4.1 Confrontation avec un développement en série, dit de Taylor

Soit une fonction k dépendant de quatre variables supposées être les quatre composantes d'un vecteur **x**. Un développement en séries de Taylor permet d'écrire [[10] ; §9.3, pp.200-206, en allemand] :

$$k(x^0 + \delta x^0, x^1 + \delta x^1, x^2 + \delta x^2, x^3 + \delta x^3) - k(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$=$$

$$\sum_{n=1}^{n=\ldots} \frac{1}{\Pi_{\beta=0}^{\beta=3} \alpha_\beta !} \cdot \frac{\partial^n k(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial^{\alpha_0} x^0 \partial^{\alpha_1} x^1 \partial^{\alpha_2} x^2 \partial^{\alpha_3} x^3} \cdot (\delta x^0)^{\alpha_0} \cdot (\delta x^1)^{\alpha_1} \cdot (\delta x^2)^{\alpha_2} \cdot (\delta x^3)^{\alpha_3}$$

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=3} \alpha_\beta = n$$

Cette formule est très générale. Elle doit donc s'appliquer dans le cadre particulier de l'étude des composantes d'une métrique :

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - g_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$$

$$=$$

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha} \cdot \delta x^\alpha$$

$$+$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 g(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \cdot \delta x^\alpha \cdot \delta x^\beta$$

$$+$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 g(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\lambda} \cdot \delta x^\alpha \cdot \delta x^\beta \cdot \delta x^\lambda$$

$$+$$

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{\partial^4 g(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\lambda \partial x^\mu} \cdot \delta x^\alpha \cdot \delta x^\beta \cdot \delta x^\lambda \cdot \delta x^\mu$$

C'est “apparemment” le type d'expression qui a été obtenue avec [a ; p. 4, (17)] (et ci-dessus par application de la règle de Leibniz) et a permis de proposer les identifications [a ; p. 4, (18)]. Mais c'est aussi le type d'expression qui a été obtenu précédemment en étudiant l'évolution des états de la métrique ou en impliquant l'existence d'un produit tensoriel déformé et décomposé non-trivialement. C'est encore le type d'expression qui pourrait être construit d'autorité à partir des dérivées partielles des composantes de la métrique locale calculées à l'aide des hypothèses spécifiques de la GTR-p.

Ainsi, selon la méthode de calcul des variations qui a été adoptée, et à supposer que ces variations se laissent identifier avec un développement en série de Taylor, les dérivées partielles des composantes de la métrique n'auront pas forcément les mêmes valeurs. Pire constat encore : ces valeurs ne coincident pas nécessairement avec celles issues des hypothèses fondatrices de la GTR-p (voir les calculs propres à cette approche au début de document).

Si donc les résultats des calculs préliminaires propres à la GTR-p fixent “la norme”, cette diversité place le mathématicien dans l'embarras dès le moment où il souhaite absolument comparer un type précis de résultats avec le modèle imposé d'un développement en série de Taylor.

4.2 Interprétation polynomiale

Pour tenter d'aboutir à une formulation générique des variations de la métrique qui (a) s'accomode de cette diversité, (b) ne semble pas dépendre du choix arbitraire d'une méthode de calcul et (c) contienne cependant l'ensemble des résultats possibles en la matière, il semble raisonnable de classer tous les exemples proposés précédemment au sein d'une catégorie nommée : "forme polynomiale de degré tant". Ainsi, "les" calculs des variations des composantes peuvent en général s'écrire :

$$\delta g_{\lambda\mu} = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k!} \cdot {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \, . \, dx^{\alpha_1} \, . \ldots . \, dx^{\alpha_k} + 0(p+1) \tag{13}$$

4.3 Quand la règle de Leibniz definit une série de Taylor

Pour les raisons expliquées au début de cet exposé, il semble important de chercher à savoir s'il existe des circonstances dans lesquelles, à coup sur, une forme polynomiale se confond avec une série de Taylor. Je vais examiner ci-après le cas de la polynomiale obtenue par l'usage de la règle de Leibniz.

Remarque 4.1. ***Les coincidences à l'ordre un***

Ostensiblement, les coefficients de degré un des polynomiales obtenues par application de la règle de Leibniz et par la comparaison des états coincident avec les dérivées partielles du même ordre (k = 1) de la norme imposée par les calculs propres à la GTR-p.

$$ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha} = \frac{\partial \, g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha}} \tag{14}$$

Remarque 4.2. ***Condition suffisante de coincidence entre Leibniz et GTR-p à l'ordre deux***

Il suffit de valider la relation :

$$\frac{1}{2} \cdot \{ g_{\phi\theta} \, . \, T^{\phi}_{\lambda\beta} \cdot T^{\theta}_{\mu\alpha} + T^{\theta}_{\lambda\alpha} \, . \, T^{\phi}_{\mu\beta} \cdot g_{\theta\phi} \} = 0 \tag{15}$$

pour que les coefficients de degré deux obtenus par application de la règle de Leibniz coincident avec les dérivées partielles d'ordre deux imposées par la norme GTR-p. En utilisant l'hypothese H-3 à l'envers, cette relation s'écrit encore :

$$< \frac{\partial \mathbf{e}_{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}, \frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\beta}} >_{[G]} + < \frac{\partial \mathbf{e}_{\lambda}}{\partial x^{\beta}}, \frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} >_{[G]} = 0 \tag{16}$$

La validation de cette condition suffisante fonde l'existence de champs géométriques de spineurs tangeants à l'espace V des discussions. Ils miment de pseudo-champs électromagnétiques d'origine géométrique. Ce seul constat ne garantit pas leur existence physique mais il est un encouragement à les etudier, ne serait-ce que d'un point de vue theorique.

Remarque 4.3. ***Dérivée partielle première d'un coefficient de degré k - 1 dans le cadre de l'interprétation polynomiale des variations des composantes d'une métrique obtenue par application de la règle de Leibniz***

Si, au lieu d'interpréter aveuglément la relation donnant les variations des composantes de la métrique par application de la règle de Leibniz (voir la relation (9) ci-dessus et [a ; p. 4, (17)]) :

$$\delta g_{\lambda\mu} = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{k!} . \{T^{\beta}_{\lambda\alpha_1\ldots\alpha_k} . g_{\beta\mu} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_k} . g_{\lambda\beta}\} . dx^{\alpha_1} . \ldots . dx^{\alpha_k} + 0(p+1) \tag{17}$$

comme un développement en séries de Taylor (la relation [a ; p. 4, (18)]), je pose de manière plus neutre dans le cadre de l'interprétation polynomiale :

$$_{\lambda\mu}d_{\alpha_1\ldots\alpha_k} = T^{\beta}_{\lambda\alpha_1\ldots\alpha_k} . g_{\beta\mu} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_k} . g_{\lambda\beta} \tag{18}$$

alors, je peux reprendre le calcul commencé au niveau de [a ; p. 5, (26)] mais sans considérer les coefficients apparus dans [a ; p. 4, (17)] comme des dérivées partielles d'ordre k d'une composante de la métrique locale. Je calcule la dérivée partielle du coefficient de degré k - 1 en partant de la relation ci-dessus :

$$\frac{\partial\, _{\lambda\mu}d_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}}{\partial x^{\alpha_k}}$$

$$=$$

$$\frac{\partial\, \{T^{\beta}_{\lambda\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} . g_{\beta\mu} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} . g_{\lambda\beta}\}}{\partial x^{\alpha_k}}$$

$$=$$

$$\{\frac{\partial\, T^{\beta}_{\lambda\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}}{\partial x^{\alpha_k}} . g_{\beta\mu} + T^{\beta}_{\lambda\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} . \frac{\partial\, g_{\beta\mu}}{\partial x^{\alpha_k}}\}$$

$$+$$

$$\{\frac{\partial\, T^{\beta}_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}}{\partial x^{\alpha_k}} . g_{\lambda\beta} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} . \frac{\partial\, g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha_k}}\}$$

En y injectant la relation (7), il vient alors :

$$\frac{\partial\, _{\lambda\mu}d_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}}{\partial x^{\alpha_k}}$$

$$=$$

$$\{\{T^{\beta}_{\lambda\alpha_1\ldots\alpha_k} - T^{\theta}_{\lambda\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} . T^{\beta}_{\theta\alpha_k}\} . g_{\beta\mu} + T^{\beta}_{\lambda\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} . \frac{\partial\, g_{\beta\mu}}{\partial x^{\alpha_k}}\}$$

$$+$$

$$\{\{T^{\beta}_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_k} - T^{\theta}_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} . T^{\beta}_{\theta\alpha_k}\} . g_{\lambda\beta} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}} . \frac{\partial\, g_{\lambda\beta}}{\partial x^{\alpha_k}}\}$$

Il est assez aisé de reconnaître la présence du coefficient de degré k dans l'expression précédente :

$$\frac{\partial\, {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}}}{\partial x^{\alpha_k}} = {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} + \ldots$$

En tenant compte des expressions trouvées au début de ce document pour les dérivées partielles premières des composantes de la métrique, relation (4), le calcul se poursuit avec :

$$\frac{\partial\, {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}}}{\partial x^{\alpha_k}}$$
$$=$$
$${}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$$
$$+$$
$$T^{\beta}_{\lambda\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} . \{T^{\theta}_{\beta\alpha_k} . g_{\theta\mu} + T^{\theta}_{\mu\alpha_k} . g_{\beta\theta}\} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} . \{T^{\theta}_{\lambda\alpha_k} . g_{\theta\beta} + T^{\theta}_{\beta\alpha_k} . g_{\lambda\theta}\}$$
$$-$$
$$\{T^{\theta}_{\lambda\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} . T^{\beta}_{\theta\alpha_k} . g_{\beta\mu} + T^{\theta}_{\mu\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} . T^{\beta}_{\theta\alpha_k} . g_{\lambda\beta}\}$$

En remarquant à cet endroit que les indices θ et μ sont muets dans la première et dans la dernière somme, la relation précédente peut se réécrire :

$$\frac{\partial\, {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}}}{\partial x^{\alpha_k}}$$
$$=$$
$${}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}$$
$$+$$
$$T^{\theta}_{\lambda\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} . T^{\beta}_{\theta\alpha_k} . g_{\beta\mu} + T^{\beta}_{\lambda\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} . T^{\theta}_{\mu\alpha_k} . g_{\beta\theta} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} . T^{\theta}_{\lambda\alpha_k} . g_{\theta\beta} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} . T^{\theta}_{\beta\alpha_k} . g_{\lambda\theta}$$
$$-$$
$$\{T^{\theta}_{\lambda\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} . T^{\beta}_{\theta\alpha_k} . g_{\beta\mu} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} . T^{\theta}_{\beta\alpha_k} . g_{\lambda\theta}\}$$

La première, la deuxième, l'avant-dernière et la dernière somme disparaissent. Il reste :

$$\frac{\partial\, {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}}}{\partial x^{\alpha_k}} \tag{19}$$
$$=$$
$${}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} + \{T^{\beta}_{\lambda\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} . T^{\theta}_{\mu\alpha_k} . g_{\beta\theta} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}} . T^{\theta}_{\lambda\alpha_k} . g_{\theta\beta}\}$$

Lemme 4.1. ***de la dérivée partielle première d'un coefficient de degré k - 1 dans le cadre de l'interprétation polynomiale des variations des composantes d'une métrique obtenue par application de la règle de Leibniz***

La dérivée partielle première d'un coefficient de degré k - 1 de la polynomiale [a ; p. 4, (17)] donnant l'expression des variations d'une composante de la métrique locale dans le cadre de l'application de la règle de Leibniz est la somme d'un coefficient de degré k de cette polynomiale et d'un terme supplémentaire que je vais préciser.

Lemme 4.2. ***du terme supplémentaire d'une dérivée partielle première d'un coefficient de degré k - 1 dans le cadre de l'interprétation polynomiale des variations des composantes d'une métrique obtenue par application de la règle de Leibniz***

La discussion s'opère sur l'ensemble des nombres réels. Le terme supplémentaire peut donc se condenser à l'aide de l'hypothese H-3 de la façon suivante :

$$T^{\beta}_{\lambda\alpha_1...\alpha_{k-1}} . T^{\theta}_{\mu\alpha_k} . g_{\beta\theta} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1...\alpha_{k-1}} . T^{\theta}_{\lambda\alpha_k} . g_{\theta\beta}$$

$$=$$

$$< \frac{\partial^{k-1}\mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_{k-1}}...\partial x^{\alpha_1}}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_k}} >_{[G]} + < \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_k}}, \frac{\partial^{k-1}\mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_{k-1}}...\partial x^{\alpha_1}} >_{[G]}$$

Compte tenu des connaissances déjà acquises au cours de l'exploration exposée dans le document [a] et de son analyse ci-dessus, je remarque que la dérivée première d'un coefficient de degré k - 1 de la somme [a ; p. 4, (17)] donnant l'expression des variations d'une composante de la métrique locale s'identifie avec un coefficient de degré k de cette somme, quel que soit ce degré k pourvu qu'il soit égal ou supérieur à un, lorsque le terme supplémentaire s'annule.

$$< \frac{\partial^{k-1}\mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_{k-1}}...\partial x^{\alpha_1}}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_k}} >_{[G]} + < \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_k}}, \frac{\partial^{k-1}\mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_{k-1}}...\partial x^{\alpha_1}} >_{[G]} = 0 \qquad (20)$$

Exemple 4.1. ***des développements à l'ordre deux***

Par exemple, à l'ordre k = 2, le terme supplémentaire s'écrit :

$$T^{\beta}_{\lambda\alpha_1} . T^{\theta}_{\mu\alpha_2} . g_{\beta\theta} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1} . T^{\theta}_{\lambda\alpha_2} . g_{\theta\beta}$$

et une dérivée partielle première (équiv. : à l'ordre un) d'un coefficient de degré un vaut en général :

$$\frac{\partial \ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_2}}$$

$$=$$

$${}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1\alpha_2} + \{T^{\beta}_{\lambda\alpha_1} . T^{\theta}_{\mu\alpha_2} . g_{\beta\theta} + T^{\beta}_{\mu\alpha_1} . T^{\theta}_{\lambda\alpha_2} . g_{\theta\beta}\}$$

$$=$$

$${}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1\alpha_2} + < \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_1}}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_2}} >_{[G]} + < \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_2}}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_1}} >_{[G]}$$

La somme des deuxième et troisième termes constitue le terme supplémentaire à l'ordre deux. Si le terme supplémentaire s'annule, alors :

$$(pseudo - champsEM) \Rightarrow \frac{\partial \ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_2}} = {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1\alpha_2}$$

Lemme 4.3. ***de l'ordre deux***

Inversement, si la dérivée partielle d'ordre un d'un coefficient de degré un de la somme [a ; p. 4, (17)] donnant l'expression des variations d'une composante de la métrique locale s'identifie avec un coefficient de degré deux de cette somme [a ; p. 4, (17)] pour ladite composante, le terme supplémentaire s'annule et il définit une structure symplectique sur les dérivées partielles premières des vecteurs de la base de référence Ω.

$$\frac{\partial\ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_2}} = {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1\alpha_2} \Rightarrow (pseudo - champs\, EM)$$

Je peux par conséquent avancer la définition suivante :

Définition 4.1. ***Dérivée partielle d'ordre 1 potentielle***

Lorsque la dérivée partielle d'ordre un d'un coefficient de degré un de la somme [a ; p. 4, (17)] donnant l'expression des variations d'une composante de la métrique locale s'identifie avec un coefficient de degré deux de cette somme [a ; p. 4, (17)] pour ladite composante, je dis que ce coefficient est "potentiellement représentatif d'une dérivée partielle première" de cette composante.

Définition 4.2. ***Dérivée partielle d'ordre k - 1 potentielle***

Lorsque la dérivée partielle d'ordre un d'un coefficient de degré k - 1 de la somme [a ; p. 4, (17)] donnant l'expression des variations d'une composante de la métrique locale s'identifie avec un coefficient de degré k de cette somme [a ; p. 4, (17)] pour ladite composante, je dis que ce coefficient est "potentiellement représentatif d'une dérivée partielle d'ordre k - 1" de cette composante.

Pour éviter toute forme de confusion logique, il faut noter que : pour un coefficent, la propriété consistant à "être potentiellement représentatif d'une dérivée partielle d'ordre k" ne signifie pas encore qu'il en soit effectivement et obligatoirement une.

Remarque 4.4. ***De la naissance d'une algèbre de Lie***

Soit le terme supplémentaire de l'ordre deux :

$$< \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_1}}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_2}} >_{[G]} + < \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_2}}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_1}} >_{[G]} = {}_{\lambda\mu}sup_{\alpha_1\alpha_2} \tag{21}$$

Je souhaite en calculer les dérivées partielles successives. L'hypothèse H-3 permettrait de la réécrire en faisant apparaitre les coefficients des hypercubes successivement impliqués et des composantes de la métrique. Mais, par une dérivation partielle au premier ordre, les dérivées partielles des composantes de la métrique apparaitraient forcément et c'est exactement ce qui n'est pas souhaité ici. Par conséquent, les dérivations partielles successives seront effectuées directement et exclusivement sur les vecteurs de base et sur leurs dérivées partielles successives. Les expressions obtenues de la sorte seront ensuite réécrites en fonction des coefficients des hypercubes et des seules composantes de la métrique.

Comme application pratique, la dérivée partielle première du terme supplémentaire à l'ordre deux s'écrit :

$$\frac{\partial \ {}_{\lambda\mu}sup_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_3}}$$
$$=$$
$$< \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_3}\partial x^{\alpha_1}}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_2}} >_{[G]} + < \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_3}\partial x^{\alpha_2}}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_1}} >_{[G]}$$
$$+$$
$$< \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_1}}, \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_3}\partial x^{\alpha_2}} >_{[G]} + < \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_2}}, \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_3}\partial x^{\alpha_1}} >_{[G]}$$

Stricto sensu (en respectant l'ordre dans lequel les indices apparaissent), le terme supplémentaire à l'ordre trois s'écrit :

$$< \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_2}\partial x^{\alpha_1}}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_3}} >_{[G]} + < \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_3}}, \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\mu}{\partial x^{\alpha_2}\partial x^{\alpha_1}} >_{[G]} = \ {}_{\lambda\mu}sup_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$$

Ce calcul peut se symboliser plus généralement comme suit :

$$\frac{\partial \ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_2}} = \ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1\alpha_2} + \ {}_{\lambda\mu}sup_{\alpha_1\alpha_2}$$
$$\downarrow \frac{\partial ...}{\partial x^{\alpha_3}}$$
$$\frac{\partial^2 \ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_3}\partial x^{\alpha_2}} = \frac{\partial \ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_3}} + \frac{\partial \ {}_{\lambda\mu}sup_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_3}}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{\partial^2 \ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_3}\partial x^{\alpha_2}} = \ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + \ {}_{\lambda\mu}sup_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + \frac{\partial \ {}_{\lambda\mu}sup_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_3}}$$

Une condition suffisante à assurer le fait que la dérivée partielle seconde d'un coefficient de degré un soit le coefficient de degré trois est que la relation suivante soit validée :

$$ {}_{\lambda\mu}sup_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} + \frac{\partial \ {}_{\lambda\mu}sup_{\alpha_1\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_3}} = 0 \tag{22}$$

Elle dit que la dérivée partielle première d'un terme supplémentaire à l'ordre deux doit être égal à moins une fois le terme supplémentaire de l'ordre trois. Dans cette relation, toutes les permutations de trois indices[5] font leur apparition. De plus, avec l'idée sous-jacente en tête que des pseudo-champs EM d'origine géométrique peuvent exister, son formalisme évoque la relation de fermeture d'une algèbre de Lie (synonyme : relation de Jacobi).

5. Elles sont au nombre de $3! = 3.2.1 = 6$.

Remarque 4.5. ***Une cascase de contraintes***

Annuler le terme supplémentaire, quel que soit le degré k considéré, revient simplement à écrire :

$$\frac{\partial\ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}}}{\partial x^{\alpha_k}} - {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = 0$$

Dans ce cas, différentier une fois zéro revient à écrire :

$$\frac{\partial^2\ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}}}{\partial x^{\alpha_{k+1}} \partial x^{\alpha_k}} - \frac{\partial\ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}}{\partial x^{\alpha_{k+1}}} = 0$$

et à pouvoir conclure :

$$\frac{\partial^2\ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}}}{\partial x^{\alpha_{k+1}} \partial x^{\alpha_k}} = \frac{\partial\ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}}{\partial x^{\alpha_{k+1}}} = {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k+1}}$$

Si cette relation s'applique effectivement quel que soit le degré auquel elle est considérée, alors elle peut l'être en particulier au degré deux, c'est-à-dire en partant de la relation (pseudo-champs EM). Elle engendre les premiers termes d'une série d'egalités :

$$\frac{\partial^2\ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_3} \partial x^{\alpha_2}} = \frac{\partial\ {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \alpha_2}}{\partial x^{\alpha_3}} = {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \alpha 2 \alpha_3}$$

qui peut être poursuivie de proche en proche jusqu'à l'ordre p. Il en résulte par la procédure suivante que la forme polynomiale décrivant les variations de chaque composante de la métrique qui a été obtenue par l'application de la règle de Leibniz devient une série potentielle de Taylor ; en effet :

$$(H-1)\ :\ \delta \mathbf{e}_\lambda = \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_k}} \, . \, dx^{\alpha_1} \ldots dx^{\alpha_k} + \mathbf{0}(k+1)$$

$$\downarrow$$

$$(H-2)$$

$$\downarrow$$

$$\delta \mathbf{e}_\lambda = \omega_\lambda^\theta \, . \, \mathbf{e}_\theta$$

$$\downarrow$$

$$regle\,de\,Leibniz$$

$$\downarrow$$

$$\delta g_{\lambda\mu}(ordre\,p + 1) = \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{(k+1)!} \cdot {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1 \ldots \alpha_{k+1}} \, . \, dx^{\alpha_1} \, \ldots . \, dx^{\alpha_{k+1}} + 0(p+2)$$

$$definition\,des\,coefficients$$

$$\downarrow$$

$$pseudo - champs\,EM$$

$$\downarrow$$

$$\delta g_{\lambda\mu}(ordre\, p+1) \;=\; \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{\partial^k ({}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1})}{\partial x^{\alpha_1} \ldots . \partial x^{\alpha_k}} \,.\, dx^{\alpha_1} \ldots . \, dx^{\alpha_{k+1}} + 0(p+2)$$

D'un point de vue purement formel, il est tentant de compléter la série des coefficients en lui ajoutant les coefficients de degré zéro suivants :

$${}_{\lambda\mu}d \;=\; g_{\lambda\mu} \;=< \mathbf{e}_\lambda, \, \mathbf{e}_\mu >_{[G]}$$

$$\frac{\partial \, {}_{\lambda\mu}d}{\partial x^\alpha} \;=\; {}_{\lambda\mu}d_\alpha \;=\; g_{\lambda\theta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha} \;+\; T^\theta_{\lambda\alpha} \cdot g_{\theta\mu}$$

Ce choix permet de finir le raisonnement décrivant la cascade des contraintes et fournit :

$$g_{\lambda\mu}(\mathbf{x} \,+\, \delta\mathbf{x}) \;=\; \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{\partial^{k+1} ({}_{\lambda\mu}d)}{\partial x^{\alpha_1} \ldots . \partial x^{\alpha_{k+1}}} \,.\, dx^{\alpha_1} \ldots . \, dx^{\alpha_{k+1}} \;+\; \ldots$$

$$\downarrow$$

$$g_{\lambda\mu}(\mathbf{x} \,+\, \delta\mathbf{x}) \;=\; \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1}{(k+1)!} \cdot \frac{\partial^{k+1} (g_{\lambda\mu})}{\partial x^{\alpha_1} \ldots . \partial x^{\alpha_{k+1}}} \,.\, dx^{\alpha_1} \ldots . \, dx^{\alpha_{k+1}} \;+\; \ldots$$

qui n'est finalement rien d'autre qu'un développement en série de Taylor de chaque composante de la métrique. Cette démarche peut se résumer en énonçant le :

Théorème 4.1. ***Des pseudo-champs EM d'origine géométrique***

Lorsque tous les termes supplémentaires implicitement contenus dans les coefficients de la polynomiale des variations des composantes de la métrique qui a été obtenue par l'usage de la règle de Leibniz sont nuls, alors cette polynomiale est équivalente à un développement en série de Taylor dont au moins les deux premiers termes coincident avec ceux résultant des hypothèses fondant la GTR-p. En particulier, la nullité du terme suppplémentaire à l'ordre deux dote l'espace tangent à l'espace V [6]d'une structure symplectique.

Corollaire 4.1. ***Extension à la comparaison des états de la métrique***

L'étape logique suivante consiste à vouloir interpréter le polynôme issu des calculs de variation des composantes de la métrique par comparaison des états comme une série de Taylor. L'énoncé du terme générique de ce polynôme étant difficile à trouver, je vais commencer par le cas simple p = 2 déjà calculé plus haut. A partir de la polynomiale obtenue dans ce cas, j'examine les conséquences du fait de vouloir écrire :

$$\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha} \;=\; \{g_{\lambda\theta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha} \;+\; T^\theta_{\lambda\alpha} \cdot g_{\theta\mu}\}$$

6. celui des dérivées partielles premières des vecteurs de la base Ω.

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \{\frac{1}{2} \cdot (g_{\lambda\theta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha\beta} + T^\theta_{\lambda\alpha\beta} \cdot g_{\theta\mu}) + g_{\theta\phi} \,.\, T^\theta_{\lambda\alpha} \cdot T^\phi_{\mu\beta}\}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^3 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\chi} = \frac{1}{2} \cdot g_{\theta\phi} \,.\, (T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, T^\phi_{\mu\beta\chi} + T^\theta_{\lambda\alpha\beta} \,.\, T^\phi_{\mu\chi})$$

$$\frac{1}{24} \cdot \frac{\partial^4 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\chi \partial x^\epsilon} = \frac{1}{4} \cdot g_{\theta\phi} \,.\, T^\theta_{\lambda\alpha\beta} \,.\, T^\phi_{\mu\chi\epsilon}$$

Une comparaison entre le résultat du calcul fait avec la règle imposée par la GTR-p et l'expression obtenue en étudiant l'évolution des états d'une métrique montre que la cohérence entre les deux manières de calculer les derivées partielles deuxièmes des composantes de cette métrique n'est obtenue qu'au prix de la relation suivante :

$$g_{\theta\phi} \,.\, T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, T^\phi_{\mu\beta} = \frac{1}{2} \cdot \{g_{\phi\theta} \,.\, T^\phi_{\lambda\beta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha} + T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, T^\phi_{\mu\beta} \cdot g_{\theta\phi}\}$$

qui s'exprime aussi par :

$$g_{\theta\phi} \,.\, T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, T^\phi_{\mu\beta} - g_{\phi\theta} \,.\, T^\phi_{\lambda\beta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha} = 0$$

En intervertissant les indices muets dans la seconde somme, il vient finalement :

$$g_{\theta\phi} \,.\, (T^\theta_{\lambda\alpha} \,.\, T^\phi_{\mu\beta} - T^\theta_{\lambda\beta} \,.\, T^\phi_{\mu\alpha}) = 0$$

La condition suffisante découverte au niveau de la remarque 4.2 justifie d'introduire la notion de pseudo-champ EM d'origine géométrique. Dans ce contexte, c'est un fait certain que les coefficients de degré deux de la polynomiale obtenue dans le cadre d'une comparaison des états d'une métrique coincide avec les dérivéees partielles d'ordre deux de cette métrique si et quand ces pseudo-champs EM sont nuls.

Remarque 4.6. ***Lien avec un travail d'E. Cartan sur les métriques***

Ici, l'ordre entre les indices α et β ne peut pas être échangé parce qu'il signe l'ordre dans lequel les composantes de la métrique ont été différentiées deux fois de suite. Par contre les indices muets θ et ϕ prennent toutes les valeurs possibles. La somme précédente peut donc toujours se décomposer en trois parties associées successivement aux situations suivantes : (i) $\theta < \phi$; (ii) $\theta = \phi$ et (iii) $\theta > \phi$. La relation peut évoquer la dernière équation apparue dans l'ouvrage [[02](a)] si le cube T est interprété de la façon qui y est indiqué.

4.4 Le promeneur de Walker

Les variations des composantes de la métrique pour un "promeneur de Walker" dans un champ de gravitation faible [[00] ; chapitre 13, p. 332, (13.73) ; en américain], c'est-à-dire présentant un faible écart avec la géométrie de Minkowski, sont données par :

$$\delta g_{00} = -R_{0l0m}(GTR) \,.\, dx^l \,.\, dx^m$$

$$\delta g_{0j} = -\frac{4}{3} \,.\, R_{0ljm}(GTR) \,.\, dx^l \,.\, dx^m$$

$$\delta g_{ij} = -\frac{1}{3} \, . \, R_{iljm}(GTR) \, . \, dx^l \, . \, dx^m$$

Ce sont les équations livrées par l'application de la théorie de la relativité générale (GTR) à des circonstances particulières. La validité reconnue de cette théorie permet de faire usage de ses conséquences. Elles permettent un point de jonction logique avec les considérations mathématiques exposées au préalable dans ce document puisqu'elles sont, elles aussi, des représentations des variations des composantes de la métrique (en l'occurence : celle de Minkowski).

Question : "Avec quelle interprétation des variations d'une composante de la métrique est-il raisonnable de confronter ces variations issues de la GTR ?"

Réponses possibles :

1. Dans le cadre de la GTR-p ?
2. Dans le cadre de la forme polynomiale issue de l'application de la règle de Leibniz ?
3. Dans le cadre de la forme polynomiale issue d'une comparaison des états successifs de la métrique ?
4. Dans le cadre de la forme polynomiale se référant aux décompositions de produits tensoriels déformés ?

Commentaires : Dans le cadre généraliste d'une interprétation polynomiale elles peuvent se traduire comme suit :

$$_{00}d_{lm} = -R_{0l0m}(GTR) \tag{23}$$

$$_{0j}d_{lm} = -\frac{4}{3} \, . \, R_{0ljm}(GTR)$$

$$_{ij}d_{lm} = -\frac{1}{3} \, . \, R_{iljm}(GTR)$$

4.5 Indications sur le formalisme des pseudo-champs EM de la GTR2

Remarque 4.7. ***Notions supplémentaires sur le concept de table de Pythagore***

Avec l'aide de la base auquel un évènement $\mathbf{x}$ peut être rapporté, $\Omega(\mathbf{x})$, il est possible de construire une table de Pythagore de la manière qui suit. Soit $\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{x})$, l'un quelconque des vecteurs de cette base. Son existence, couplée au concept de dérivation partielle, rend possible la construction d'un quadruplet de vecteurs qui sera abusivement dénommé "gradient événementiel" du vecteur de base $\mathbf{e}_\alpha(\mathbf{x})$; soit $\partial_\mathbf{x}\mathbf{e}_\alpha$ ce gradient évènementiel. Ses composantes sont les (α est donné ; $\lambda = 0, 1, 2, 3$) $\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^\lambda}$. Il y a autant de gradients évènementiels que de vecteurs de base. La construction permet donc aussi de concevoir l'existence du qudruplet : (β est donné ; $\mu = 0, 1, 2, 3$) $\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^\mu}$. La base $\Omega(\mathbf{x})$ étant réputée être munie d'un produit scalaire puisqu'une mètrique est supposée y être définie, la table de Phytagore suivante peut se concevoir :

$$T_2(< ..., ... >_{[G]})(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\alpha, \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\beta)$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^0} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^1} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^2} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^2} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^2} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^3} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^3} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^3} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

La relation (pseudo-champ EM) permet de décomposer cette table de la façon suivante :

$$T_2(< ..., ... >_{[G]})(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\alpha, \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\beta)$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

$$+$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^0} \\ -\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^0} & 0 & -\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^2} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^1} \\ -\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^2} & 0 & -\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^3} \\ -\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^0} & -\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^3} & 0 \end{bmatrix}$$

La seconde matrice de cette décomposition a visiblement le formalisme d'une représentation standard d'un champ EM [[04] ; §23, p. 73] ; au détail physique important près que si ce type de champ existe réellement, il trouve son origine dans les variations de la géométrie. Cette décomposition peut encore s'écrire sous la forme matricielle condensée :

$$T_2(< ..., ... >_{[G]})(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\alpha, \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\beta) \,=\, {}_{\alpha\beta}[D] \,+\, {}_{\alpha\beta}[F]$$

Il peut être fait un premier précomptage de ce type de pseudo-champs. Il y a quatre vecteurs de base (les éléments $\mathbf{e}_\alpha$ de Ω pour α = 0, 1, 2 et 3) et un système de repérage basé sur les quatre composantes x^λ de l'évènement $\mathbf{x}$. Il y a donc seize dérivées partielles d'ordre un et quatre quadruplets (synonyme : gradients évènementiels). En théorie, seize tables de Pythagore de la sorte introduite ci-dessus pourraient être construites à l'aide de ces ingrédients.

Il faut noter au passage concernant la paire inverse (β, α) :

$$T_2(< ..., ... >_{[G]})(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\beta, \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\alpha)$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^0}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$

$$+$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^0} \\ -\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^0} & 0 & -\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^2} & \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^1} \\ -\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^1}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^2} & 0 & -\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^3} \\ -\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^0} & -\frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^3}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial x^3} & 0 \end{bmatrix}$$

Ceci se résume par la relation :

$$T_2(< ..., ... >_{[G]})(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\beta, \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\alpha) \;=\; -_{\alpha\beta}[D] \;-\; _{\alpha\beta}[F]$$

Par ailleurs, il peut être utile de considérer la matrice transposée :

$$T_2^t(< ..., ... >_{[G]})(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\alpha, \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\beta) \;=\; _{\alpha\beta}[D] \;-\; _{\alpha\beta}[F]$$

Définition 4.3. ***Les pseudo-champs EM de la théorie***

Les pseudo-champs EM de cette approche semblent donc pouvoir être définis de la façon suivante [7] :

$$_{(\lambda,\,\mu)}[F_{\alpha\beta}] \;=\; [g_{\theta\phi}\,.\,(T^{\theta}_{\lambda\alpha}\,.\,T^{\phi}_{\mu\beta} \;-\; T^{\theta}_{\lambda\beta}\,.\,T^{\phi}_{\mu\alpha})] \tag{24}$$

En effet, de la sorte :

$$_{(\lambda,\,\lambda)}F_{\alpha\beta} \;=\; 0$$

$$_{(\lambda,\,\mu)}F_{\beta\alpha} \;=\; -_{\lambda\mu}F_{\alpha\beta}$$

$$_{(\lambda,\,\mu)}F_{\alpha\alpha} \;=\; 0$$

Cette définition et les relations qui en découlent logiquement montrent que :

- La définition est compatible avec l'antisymétrie habituelle des composantes d'un champ EM standard.
- Dans un espace vectoriel V de dimension quatre bâti sur le corps commutatif des nombres réels, il n'a donc en réalité que deux fois six champs de ce type. Il correspondent aux paires $(\lambda, \mu) = (0,\, 1)$, $(0,\, 2)$, $(0,\, 3)$, $(1,\, 2)$, $(1,\, 3)$ et $(2,\, 3)$; et aux paires inverses.
- Le fait de calculer les variations de la métrique locale via la comparaison des états revient à se placer dans un contexte où ces champs s'annulent (Voir la remarque 4.6).

7. Les lecteurs sont invités à remarquer que les paires d'indices utilisées dans le paragraphe précédent à titre pédagogique pour développer la notion de table de Pythagore (voir remarque 4.7) sont disposés à l'inverse des notations utilisées dans le reste de ce document ; d'où la définition qui est proposée ici.

— Avec l'aide des hypothèses de cette théorie, ces pseudo-champs s'écrivent encore :

$$_{(\lambda,\,\mu)}[F_{\alpha\beta}] \;=\; [< \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\beta} >_{[G]} \;-\; < \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\beta}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\alpha} >_{[G]}] \tag{25}$$

Ou bien, avec la notation introduite au paragraphe précédent et impliquant des tables de Pythagore :

$$_{(\lambda,\,\mu)}[F_{\alpha\beta}] \;=\; T_2(< ...,... >_{[G]})(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\lambda, \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\mu) - T_2^t(< ...,... >_{[G]})(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\lambda, \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_\mu)$$

Ils pourraient être assimilés à une version vectorielle de la notion de “crochet de Poisson”. En effet, celle-ci est traditionnellement définie pour deux fonctions f(..., p_i, ..., ..., q_i, ...) et h(..., p_i, ..., ..., q_i, ...) de 2.N (N $\geq$ 1) variables réelles par :

$$\{f,\, h\} \;=\; \sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,N}, \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial p_i} \;-\; \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial q_i}$$

Ainsi, si une discussion introduit un ensemble de M (M $\geq$ 1) paires de fonctions de ce type : les $\{\mathrm{f}^1, ..., \mathrm{f}^\theta, ..., \mathrm{f}^M\}$ et les $\{\mathrm{h}^1, ..., \mathrm{h}^\phi, ..., \mathrm{h}^M\}$, il devient possible de calculer M^2 crochets de Poisson :

$$\{f^\theta,\, h^\phi\} \;=\; \sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,N} \frac{\partial f^\theta}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial h^\phi}{\partial p_i} \;-\; \frac{\partial f^\theta}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial h^\phi}{\partial q_i}$$

Et rien n'interdit de construire aussi les crochets suivants :

$$\{f^\theta,\, f^\phi\} \;=\; \sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,N} \frac{\partial f^\theta}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial f^\phi}{\partial p_i} \;-\; \frac{\partial f^\theta}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial f^\phi}{\partial q_i}$$

$$\{h^\theta,\, h^\phi\} \;=\; \sum_{i\,=\,1}^{i\,=\,N} \frac{\partial h^\theta}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial h^\phi}{\partial p_i} \;-\; \frac{\partial h^\theta}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial h^\phi}{\partial q_i}$$

Ces généralités peuvent donner envie d'extrapoler la définition historique de ce crochet. Et ce sera fait dans un autre document.

4.6 Un pseudo-tenseur de courbure

La GTR2 tente de reproduire la théorie de la relativité générale (GTR) énoncée par A. Einstein [[00](a) en allemand, (b) en anglais] et dont des exposés modernes peuvent se lire par exemple dans [[00], (c) en américain]. In extenso : elle étudie les variations de quatre vecteurs d'une base générique, Ω, engendrant l'espace V dans les conditions définies par les hypothèses exposées au niveau des prémisses de ce document.

Contrairement à certaines approches similaires plus anciennes [[01]] qui limitaient les calculs de variation au premier ordre, cette théorie les pousse au moins jusqu'à l'ordre deux, voire à l'ordre p. En pratiquant de la sorte, le cube T des projecteurs à l'ordre un remplit formellement un rôle similaire à celui joué par le cube $\Gamma(2)$ des symbôles de Christoffel de la seconde espèce au sein de la GTR. Il permet par exemple la construction d'un objet mathématique, *en l'occurence un vecteur* dont les composantes ont le même formalisme que celles du tenseur de Riemann-Christoffel [a ; p. 3, (8)] :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\theta \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\alpha \partial x^\theta}$$
$$=$$
$$(T^\mu_{\lambda\alpha\theta} - T^\mu_{\lambda\theta\alpha}) \,.\, \mathbf{e}_\mu$$
$$=$$
$$(\frac{\partial T^\mu_{\lambda\alpha}}{\partial x^\theta} - \frac{\partial T^\mu_{\lambda\theta}}{\partial x^\alpha} + T^\beta_{\lambda\alpha} \,.\, T^\mu_{\beta\theta} - T^\beta_{\lambda\theta} \,.\, T^\mu_{\beta\alpha}) \,.\, \mathbf{e}_\mu$$

Bien que le cube T puisse à la limite être identifié avec le cube $\Gamma(2)$, il ne se confond pas en général et systématiquement avec lui. Il semble d'ailleurs préférable de lui trouver une interprétation au sein du contexte défini en 1933 par les travaux d'E. Cartan sur les métriques bâties à l'aide de surfaces en évolution [[02](a)].

Remarque 4.8. ***Combien de composantes pour ce pseudo-tenseur de courbure ?***

De la relation définissant ce pseudo-tenseur de courbure il est possible de déduire [a ; p. 6, (28)] :

$$R^\theta_{\alpha\mu\lambda}(GTR2) = T^\theta_{\alpha\lambda\mu} - T^\theta_{\alpha\mu\lambda} = \frac{\partial T^\theta_{\alpha\lambda}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial T^\theta_{\alpha\mu}}{\partial x^\lambda} + T^\beta_{\alpha\lambda} \,.\, T^\theta_{\beta\mu} - T^\beta_{\alpha\mu} \,.\, T^\theta_{\beta\lambda}$$

Cette expression possède des symétries intrinsèques (entendre par là : qui ne dépendent pas de la nature précise du cube T) ; à savoir :

$$\forall\, \alpha,\, \beta,\, \lambda,\, \mu,\, \theta = 0,\, 1,\, 2,\, 3 :\; R^\theta_{\alpha\mu\lambda}(GTR2) = -R^\theta_{\alpha\lambda\mu}(GTR2)$$

$$\forall\, \alpha,\, \beta,\, \lambda,\, \mu,\, \theta = 0,\, 1,\, 2,\, 3 :\; R^\theta_{\alpha\lambda\lambda}(GTR2) = 0$$

Ceci signifie que chaque matrice (4-4) $[^\theta{}_\alpha \mathrm{R(GTR2)}_{\lambda\mu}]$ est forcément antisymétrique et que sa diagonale est nulle ; elle contient au plus six termes indépendants. Et, jusqu'à preuve du contraire, il y a seize matrices de ce type.

Remarque 4.9. ***Les liens entre le pseudo-tenseur de courbure et les pseudo-champs EM***

Le formalisme de l'une quelconque de ces matrices invite toutefois à se demander s'il est possible de définir un isomorphisme autorisant à l'assimiler avec un pseudo-champ EM de cette théorie ; en posant par exemple (provisoirement) :

$$g_{\beta\theta} \,.\, R^\theta_{\alpha\mu\lambda}(GTR2) \sim {}_{\beta\alpha}F_{\lambda\mu}(GTR2)?$$

Je vais examiner l'intuition selon laquelle la réponse à cette interrogation se cache quelque part dans le fait que les pseudo-champs EM peuvent définir une

©Thierry PERIAT, ISBN 978-2-36923-135-6, EAN 9782369231356, v2

algèbre de Lie (voir la remarque 4.4).

Le théorème assurant l'équivalence entre la polynomiale issue de l'usage de la règle de Leibniz et une série de Taylor repose sur la nullité de l'ensemble des termes supplémentaires implicitement contenus dans chaque coefficient de cette polynomiale.
Il ne dit rien sur ce qui se passe si les termes supplémentaires ne sont pas tous simultanément nuls. Il ne dit pas non plus que l'existence des pseudo-champs EM suffit à le valider. Il contient seulement l'information que s'il (le théoreme) est valide alors -en particulier- les pseudo-champs EM existent dans cette théorie.

Que se passe t-il si les termes supplémentaires de degré deux ne sont pas nuls ? La remarque 4.4 montre que si ces termes supplémentaires d'ordre deux non-nécessairement nuls satisfont la relation de fermeture, alors les premiers termes de la polynomiale s'écrivent :

$$\delta g_{\lambda\mu}$$

$$=$$

$$_{\lambda\mu}d_{\alpha_1} \,.\, dx^{\alpha_1} + \frac{1}{2} \cdot {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1\alpha_2} \,.\, dx^{\alpha_1} \,.\, dx^{\alpha_2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 \, {}_{\lambda\mu}d_{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_3} \partial x^{\alpha_2}} \,.\, dx^{\alpha_1} \,.\, dx^{\alpha_2} \,.\, dx^{\alpha_3} + 0(4)$$

Ils miment le démarrage d'un développement en série qui aurait eu une "interuption" au niveau des coefficients de degré deux. A ce stade des calculs, les dérivées partielles des composantes de la métrique n'apparaissent pas encore. En choisissant de commencer une série avec :

$$_{\lambda\mu}d \;=\; g_{\lambda\mu} \;=< \mathbf{e}_\lambda, \mathbf{e}_\mu >_{[G]}$$

$$\frac{\partial \, {}_{\lambda\mu}d}{\partial x^\alpha} \;=\; \frac{\partial \, g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha} \;=\; {}_{\lambda\mu}d_\alpha \;=\; g_{\lambda\theta} \,.\, T^\theta_{\mu\alpha} \;+\; T^\theta_{\lambda\alpha} \cdot g_{\theta\mu}$$

$$\frac{\partial^2 \, {}_{\lambda\mu}d}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \;=\; \frac{\partial^2 \, g_{\lambda\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} \;=\; {}_{\lambda\mu}d_{\alpha\beta} \;+\; {}_{\lambda\mu}sup_{\alpha\beta}$$

Il devient possible d'écrire :

$$\delta g_{\lambda\mu}$$

$$=$$

$$\frac{\partial \, g_{\lambda\mu}}{\partial x^\alpha} \,.\, dx^\alpha + \frac{1}{2} \cdot \{ \frac{\partial^2 \, g_{\lambda\mu}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - {}_{\lambda\mu}sup_{\alpha\beta} \} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta + \frac{1}{6} \cdot \frac{\partial^2 \, {}_{\lambda\mu}d_\alpha}{\partial x^\chi \partial x^\beta} \,.\, dx^\alpha \,.\, dx^\beta \,.\, dx^\chi + 0(4)$$

et de voir apparaitre un développement limité des composantes de la métrique jusqu'à l'ordre deux auquel est additionné un terme supplémentaire.

Remarque 4.10. ***Forme polynomiale héritée de la règle de Leibniz et coefficients de la GTR-p aux ordres trois et quatre***

Il s'agit maintenant de relier les coefficients des formes polynomiales avec les dérivées partielles des composantes de la métrique d'une manière plus générale ; et pour commencer : à l'ordre trois. Ce n'est pas une tâche facile. Elle passe a priori par un approfondissement des relations de l'ordre trois (voir les calculs de la remarque 2.4) puique toutes les informations préliminaires sur l'ordre deux semblent avoir été dites ; sauf peut-être en ce qui concerne une confrontation avec les coefficients provenant de la théorie des produits tensoriels déformés. Ces calculs doivent maintenant être comparés avec ceux de l'exemple 3.2 . Il a été trouvé dans le cadre des hypothèses de la GTR-p que :

$$\frac{\partial^3 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\chi \partial x^\beta \partial x^\alpha}$$

$$=$$

$$(T^\psi_{\lambda\chi} \cdot g_{\psi\theta} + T^\psi_{\theta\chi} \cdot g_{\lambda\psi}) \cdot T^\theta_{\mu\alpha\beta} + g_{\lambda\theta} \cdot (T^\theta_{\mu\alpha\beta\chi} - T^\phi_{\mu\alpha\beta} \cdot T^\theta_{\phi\chi})$$

$$+$$

$$(T^\theta_{\lambda\alpha\beta\chi} - T^\phi_{\lambda\alpha\beta} \cdot T^\theta_{\phi\chi}) \cdot g_{\theta\mu} + T^\theta_{\lambda\alpha\beta} \cdot (T^\psi_{\theta\chi} \cdot g_{\psi\mu} + T^\psi_{\mu\chi} \cdot g_{\theta\psi})$$

$$+$$

$$(T^\psi_{\phi\chi} \cdot g_{\psi\theta} + T^\psi_{\theta\chi} \cdot g_{\phi\psi}) \cdot T^\phi_{\lambda\beta} \cdot T^\theta_{\mu\alpha}$$

$$+$$

$$g_{\phi\theta} \cdot (T^\phi_{\lambda\beta\chi} - T^\epsilon_{\lambda\beta} \cdot T^\phi_{\epsilon\chi}) \cdot T^\theta_{\mu\alpha} + g_{\phi\theta} \cdot T^\phi_{\lambda\beta} \cdot (T^\theta_{\mu\alpha\chi} - T^\phi_{\mu\alpha} \cdot T^\theta_{\phi\chi})$$

$$+$$

$$(T^\theta_{\lambda\alpha\chi} - T^\phi_{\lambda\alpha} \cdot T^\theta_{\phi\chi}) \cdot T^\phi_{\mu\beta} \cdot g_{\theta\phi} + T^\theta_{\lambda\alpha} \cdot (T^\phi_{\mu\beta\chi} - T^\epsilon_{\mu\beta} \cdot T^\phi_{\epsilon\chi}) \cdot g_{\theta\phi}$$

$$+$$

$$T^\theta_{\lambda\alpha} \cdot T^\phi_{\mu\beta} \cdot (T^\psi_{\theta\chi} \cdot g_{\psi\phi} + T^\psi_{\phi\chi} \cdot g_{\theta\psi})$$

Dans le cadre de la règle de Leibniz :

$$\{g_{\lambda\theta} \cdot T^\theta_{\mu\alpha\beta\chi} + T^\theta_{\lambda\alpha\beta\chi} \cdot g_{\theta\mu}\} = {}_{\lambda\mu}d_{\alpha\beta\chi}$$

Il est d'ores et déjà possible de constater que :

$$\frac{\partial^3 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\chi \partial x^\beta \partial x^\alpha} = {}_{\lambda\mu}d_{\alpha\beta\chi} + {}_{\lambda\mu\alpha\beta}S_\chi$$

Le terme noté "S" contient de nombreux termes supplémentaires d'ordre deux et trois ; ainsi, même si les termes supplémentaires d'ordre deux ne sont pas nuls et même si la relation de fermeture proposée au cours de la remarque 4.4. n'est pas validée, il est toujours possible d'écrire la polynomiale qui a été obtenue par l'emploi de la règle de Leibniz comme suit :

$$\delta g_{\lambda\mu}$$

$$=$$

$$\frac{\partial\, g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\alpha}} \,.\, dx^{\alpha} + \frac{1}{2} \cdot \{ \frac{\partial^2\, g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} - {}_{\lambda\mu}sup_{\alpha\beta} \} \,.\, dx^{\alpha} \,.\, dx^{\beta} + \frac{1}{6} \cdot \{ \frac{\partial^3 g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\chi} \partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} - {}_{\lambda\mu\alpha\beta}S_{\chi} \} \,.\, dx^{\alpha} \,.\, dx^{\beta} \,.\, dx^{\chi} + 0(4)$$

Elle se confond avec un développement limité des composantes de la métrique, à l'ordre quatre près, aussi longtemps que la condition suivante est satisfaite :

$${}_{\lambda\mu}sup_{\alpha\beta} \sim -{}_{\lambda\mu\alpha\beta}S_{\chi} \,.\, dx^{\chi}$$

La nullité du terme supplémentaire à l'ordre deux devient un cas particulier de réalisation de cette condition.

Remarque 4.11. ***Les pseudo-champs EM quand le terme supplementaire a l'ordre deux n'est pas nul***

L'investigation précédente précise un peu plus et un peu mieux l'état d'esprit de la GTR-p. Quand le terme supplémentaire à l'ordre deux n'est plus nul, il vient :

$$< \frac{\partial \mathbf{e}_{\lambda}}{\partial x^{\alpha}}, \frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\beta}} >_{[G]} + < \frac{\partial \mathbf{e}_{\lambda}}{\partial x^{\beta}}, \frac{\partial \mathbf{e}_{\mu}}{\partial x^{\alpha}} >_{[G]}$$

$$=$$

$${}_{\lambda\mu}sup_{\alpha\beta}$$

$$=$$

$$\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}(GTR-p)}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} - {}_{\lambda\mu}d_{\alpha\beta}(Leibniz)$$

Et il devient possible d'écrire :

$$T_2(< ..., ... >_{[G]})(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_{\alpha}, \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_{\beta})$$

$$=$$

$${}_{\lambda\mu}[D]$$

$$+$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^0} & \frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^0} & \frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^0} \\ -\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^0} & 0 & -\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^2} & \frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^1} \\ -\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^0} & \frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^1} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^2} & 0 & -\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^3} \\ -\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^0} & -\frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathbf{e}_{\alpha}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_{\beta}}{\partial x^3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ {}_{\lambda\mu}sup_{10} & 0 & 0 & 0 \\ {}_{\lambda\mu}sup_{20} & {}_{\lambda\mu}sup_{21} & 0 & 0 \\ {}_{\lambda\mu}sup_{30} & {}_{\lambda\mu}sup_{31} & {}_{\lambda\mu}sup_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Il en suit, avec la notation adoptée jusqu'à présent dans ce document :

$$T_2(< ..., ... >_{[G]})(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_{\alpha}, \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_{\beta}) - T_2^t(< ..., ... >_{[G]})(\partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_{\alpha}, \partial_{\mathbf{x}}\mathbf{e}_{\beta})$$

$$=$$

$$2 \cdot {}_{\lambda\mu}[F] + \begin{bmatrix} 0 & -{}_{\lambda\mu}sup_{10} & -{}_{\lambda\mu}sup_{20} & -{}_{\lambda\mu}sup_{30} \\ {}_{\lambda\mu}sup_{10} & 0 & -{}_{\lambda\mu}sup_{21} & -{}_{\lambda\mu}sup_{31} \\ {}_{\lambda\mu}sup_{20} & {}_{\lambda\mu}sup_{21} & 0 & -{}_{\lambda\mu}sup_{32} \\ {}_{\lambda\mu}sup_{30} & {}_{\lambda\mu}sup_{31} & {}_{\lambda\mu}sup_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

Dans la pratique, le terme supplémentaire à l'ordre deux mesure l'écart entre (a) la dérivée partielle seconde de la métrique telle qu'elle peut être calculée avec les hypothèses de base de la GTR-p et (b) les coefficients de degré deux de la polynomiale qui peut être obtenue avec les mêmes hypothèses de base et l'application de la règle de Leibniz lorsque le calcul des variations des composantes de la métrique est entrepris de façon générale.

Les calculs ci-dessus montrent que des pseudo-champs EM dont l'origine semble être enracinée dans les variations de la géométrie peuvent encore être définis lorsque cette différence n'est pas nulle. Le fait qu'elle ne soit pas nulle ajoute à ces champs une composante d'ordre deux.

Le raisonnement tenu dans ce document peut être étendu à toute sorte de manières de calculer les variations des composantes d'une métrique. Dans tous les cas de figure, il apparaitra un terme supplémentaire spécifiant l'écart entre (a) les dérivées partielles secondes de la métrique calculée avec les hypothèses de base de la GTR-p et (b) les coefficients de degré deux de la polynomiale qui peut être obtenue avec les mêmes hypothèses de base et l'application de la règle adoptée pour calculer ces variations.

Exemple 4.2. ***Le cas du promeneur de Walker***

En appliquant cette façon de penser au promeneur de Walker il vient :

$$< \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\beta} >_{[G]} + < \frac{\partial \mathbf{e}_\lambda}{\partial x^\beta}, \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial x^\alpha} >_{[G]}$$

$$=$$

$${}_{\lambda\mu}sup_{\alpha\beta}$$

$$=$$

$$\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}(GTR2)}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - K_{\lambda\mu} \,.\, R_{\lambda\alpha\mu\beta}(GTR - Walker)$$

Expression dans laquelle le coefficient scalaire $\mathrm{K}_{\lambda\mu}$ vaut 1 pour la paire (λ, μ) = (0, 0), vaut 4/3 pour les paires (0, j) et 1/3 pour les paires (i, j). Cette manière de penser prédit donc l'apparition de pseudo-champs EM dans l'univers du promeneur de Walker. Les indices du terme supplémentaire présentent les symétries naturelles suivantes :

$${}_{\lambda\mu}sup_{\alpha\beta} = {}_{\lambda\mu}sup_{\beta\alpha}$$

La formule ci-dessus s'appliquant, elle devrait donc logiquement aboutir pour chaque composante (λ, μ) de la métrique à la relation :

$$\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}(GTR2)}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}(GTR2)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$$

$$=$$

$$K_{\lambda\mu}\,.\,\{R_{\lambda\alpha\mu\beta}(GTR - Walker)\ -\ R_{\lambda\beta\mu\alpha}(GTR - Walker)\}$$

Les indices du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel possèdent des propriétés permettant finalement d'écrire (voir par exemple [[09] ; p. 95]) :

$$\frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}(GTR2)}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}(GTR2)}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = K_{\lambda\mu}\,.\,R_{\lambda\mu\alpha\beta}(GTR - Walker)$$

Conclusion : Si cette théorie s'appliquait réellement, les courbures rencontrées par un promeneur de Walker seraient irrémédiablement couplées avec des métriques discontinues (voir exposé historique sur les fonctions discontinues dans [[11]]).

4.7 Arguments en faveur de la théorie des produits tensoriels déformés

La théorie de la question (E) -alias : TQE- postule que chaque solution de la GTR (les ds^2) porte intrinsèquement en elle la signature de l'existence d'un produit tensoriel (resp. de Lie) déformé impliquant forcément le vecteur $\delta\mathbf{x}$, donc du genre : $\otimes_T(\delta\mathbf{x},\, \ldots)$. Deux arguments au moins justifient ce postulat :

- L'omniprésence de la notion de bivecteur dans les démonstrations des équations de la GTR ; voir par exemple : (i) E. Cartan dans [[02](b)] (1922) ; (ii) [[00]] (1973) ou (iii) P. Girard dans [[03]] (1999) qui établit justement un lien direct avec les algèbres de Clifford.
- La proximité conceptuelle entre produit de Lie déformé et bivecteur ; ainsi que la connaissance du fait qu'un produit de Lie déformé est une forme particulière de produit tensoriel déformé (voir les définitions de base dans § 6 [d]).

4.8 Un postulat

Les déformations de la géometrie modifient la façon dont nous devrions calculer. Plus concrètement : elles déforment les produits tensoriels classiques et, qui plus est, elles les forcent à se décomposer de manière non-triviale.

4.9 Exemples

Exemple 4.3. ***La loi de Lorentz-Einstein***

De par son seul formalisme, la version covariante de la loi de Lorentz (dite encore de Lorentz-Einstein) représente l'illustration type rêvee pour la promotion de la théorie des produits tensoriels déformés :

$$|\frac{D\mathbf{u}}{ds} >= |\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) >= [F]\,.\,|\mathbf{u}>$$

Cette affirmation doit beaucoup à l'apparition du "terme gravitationnel" $\otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ qui est, sans l'ombre d'un doute, un produit tensoriel déformé par le cube des symboles de Christoffel de la seconde espèce agissant sur la "quadrivitesse" (le vecteur $\mathbf{u}$).

Exemple 4.4. ***La déviation des géodésiques***

Voir [[00] ; chapter 11, pp. 265-270].

5 Conclusions

Ce document a repris pas à pas la démarche intuitive expliquée à grands traits et parfois de manière approximative dans [a]. Il en confirme certains aspects mais ne se prononce pas sur d'autres qui semblent devoir encore être approfondis. Pour l'heure :

— Il a stabilisé les hypothèses sur lesquelles la GTR-2 se fonde (voir § 1.1).

— Il a calculé les dérivées partielles successives jusqu'à l'ordre trois des composantes de n'importe quelle métrique à l'aide de ces hypothèses (voir § 2.1 et les remarques 2.2, 2.4).

— Il a ensuite montré la multiplicité des méthodes mathématiques permettant le calcul des variations des composantes de cette métrique ; Sec.3. Il en a donné trois exemples ; Sous-sec.3.1, 3.2 et 3.3. Dans tous les cas abordés, ces variations sont des formes polynomiales.

— Il a montré l'existence de circonstances simples pour lesquelles la méthode s'appuyant sur la règle de Leibniz permet d'identifier cette forme polynomiale avec un développement limité des composantes de la métrique.

— Il a confirmé que la GTR2 introduit un pseudo-tenseur de courbure dont le formalisme des composantes miment celui des composantes du tenseur historique de Riemann-Christoffel (voir § 4.6).

— Il a fait comprendre que, quelle que soit la méthode qui sera choisie :

1. L'existence de pseudo-champs mimant les propriétés de base d'une champ électromagnétique mais d'origine géométrique est formellement envisageable (voir § 4.5) et il en donne le formalisme au premier ordre (voir équation (24)). Il n'a pas encore pu vérifier si ces champs pouvaient satisfaire aux lois de Maxwell mais il a évoqué l'existence de circonstances compatibles avec l'émergence d'une algèbre de Lie (voir § 4.4).
2. Il peut éventuellement exister des écarts entre la forme polynomiale induite par ce choix et le développement de Taylor attendu dans le cadre de la GTR2.
3. L'absence d'écart n'invalide pas l'existence possible des pseudo-champs.

— En supposant a priori que les variations rencontrées par un promeneur de Walker peuvent illustrer cette façon de penser (voir exemple 4.2), il aboutit à la conclusion un peu surprenante qu'un tel promeneur ne devrait rencontrer des courbures que lorsque la métrique dans laquelle il évolue présente des discontinuités.

Les liens entre le tenseur de Riemann-Christoffel et le pseudo-tenseur de courbure de la GTR2 doivent encore être explorés. Ainsi que ceux pouvant surgir entre ces tenseurs et les pseudo-champs EM d'origine géométrique.

6 Contribution personnelle

PERIAT, T. : Fondations de la GTR2, extension de la théorie de la relativité générale incluant l'étude des variations des vecteurs de base a l'ordre deux ; ISBN 9782-36923-088-5, EAN 9782369230885, v-12 fevrier 2016.

Nota bene : Il existe plusieurs versions anglophones des fondations de cette théorie. L'une d'entre elle a été présentée au journal "Mathematical Physics, Analysis and Geometry" (Springer) en juillet 2018 que l'éditeur a préféré ne pas publier.

7 Bibliographie

Références

[00] (a) Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie ; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7.
(b) Einstein, A. and Minkowski, H. : The principle of relativity ; translated in english by Saha, M.N. and Bose, S.N. published by the university of Calcutta, 1920 ; available at the Library of the M.I.T.
(c) MTW : Gravitation, W.H. Freeman and company editions, New-York (1973).

[01] Delachet, A. : Le calcul tensoriel ; Collection "Que sais-je ?" aux Presses Universitaires de France, numéro 1336, 1974.

[02] Cartan, Elie.
(a) Les espaces métriques fondés sur la notion de d'aire dans "Actualités scientifiques et industrielles", numéro 72, exposés de géométrie publiés sous la direction de monsieur Elie Cartan, membre de l'institut et professeur à la Sorbonne ; Paris, Hermann et Cie, éditeurs, 1933.
(b) Cartan, E. : Sur les équations de la gravitation d'Einstein ; extrait du journal de mathématiques, 1922, Fasc. numéro 2, édité par Gauthier-Villars et Cie, libraires du bureau des longitudes de l'école Polytechnique, Paris, 1922.
(c) Cartan, E. : The theory of spinors : The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966 ; translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)" ; Hermann, 1937 ; Dover Publications, Inc. New York. ©1966 by Hermann, Paris, ISBN 0-486-64070-1.

[03] Girard, Patrick, R. : Einstein's equations and Clifford algebra ; advances in applied Clifford algebras, 9 number 2, 225-230 (1999).

[04] Landau, L. D. und Lifschitz, E.M. : Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II : Klassische Feldtheorie (German edition).

[05] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Editions Massons (1955).

[09] Fliessbach, T. : Allgemeine Relativitaetstheorie, 4. Auflage, Spektrum Lehrbuch, © 2003, 1998, 1995, SpektrumAkademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, ISBN 3-8274-1356-7.

[10] Deitmar, A. : Analysis, 422 p., Springer Spektrum Verlag, Berlin Heidelberg (2017).

[11] Darboux, G. : Mémoire sur les fonctions discontinues ; Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 4 (1875), p. 57-112, [[http ://www.numdam.org/item ?id=ASENS 1875 2 4 57 0]], 57 pages.