Doutes électromagnétiques

ISBN 978-2-36923-154-7, EAN 9782369231547, v1, 29 décembre 2020.

Ce document s'attarde sur l'analyse de la version covariante de la loi de Lorentz qui a été faite sous l'angle spécifique de la théorie des produits tensoriels déformés et éventuellement décomposés non-trivialement. Il s'interroge essentiellement sur la réalité des champs électromagnétiques prédits par cette approche. Il montre que l'existence de ces derniers confère à la loi un caractère purement géométrique et il s'efforce d'en énoncer les solutions.

Thierry PERIAT

§. **Résumé logique de la démarche :**

Bien que la démarche exposée dans les documents ISBN 978-2-36923-016-8, 112-7 et 087-8 semble harmonieuse, elle porte avec elle un doute profond qui s'énonce ainsi : « Les champs électromagnétiques prédits par cette approche existent-ils vraiment dans la nature ? Et si oui : où ? »

Pour tenter d'identifier une faute éventuelle du raisonnement mené, je vais d'abord résumer la démarche entreprise :

- La loi covariante (dite de Lorentz-Einstein) [Lichnerowicz ; 1955] décrivant le mouvement d'une particule électrique de masse non-nulle circulant dans un champ électromagnétique et une géométrie éventuellement changeante est présupposée être vraie, nonobstant les réserves émises par exemple dans [Vega, Pound].
- Je souhaite exprimer cette loi sous la forme d'un opérateur différentiel d'ordre deux dans un autre référentiel pour pouvoir la traiter « à la Sturm-Liouville » [Arfken et Weber].
- Pour y parvenir, je fais le choix arbitraire d'un ensemble de quatre formes finslériennes. Elles permettent de passer du référentiel événementiel dans lequel nous vivons (celui dans lequel la loi covariante a son formalisme habituel) au référentiel dans lequel la loi devient un opérateur différentiel.
- La traduction de la loi covariante est obtenue grâce à un ensemble de quatre relations de cohérence.
- La troisième nous apprend que le champ électromagnétique se transformerait comme dans une connexion alors qu'il doit en principe se transformer dans une jauge ; notamment pour obtenir la covariance de l'expression initiale de la loi étudiée.
- Le recouvrement de la jauge s'obtient en annulant la partie hors-jauge de la connexion. La contrainte en résultant indique que les champs électromagnétiques de cette approche doivent être proportionnels à des métriques antisymétriques… dont l'existence réelle constitue le questionnement central de ce travail.

Sur le plan logique, tout se passe donc comme si :

(i) la traduction de la loi covariante initiale au moyen du dictionnaire dont nous disposons (i.e. : les formes finslériennes) s'accompagnait irrémédiablement d'une erreur (les champs électromagnétiques se transforment comme dans une connexion au lieu de le faire comme dans une jauge) ;

(ii) nous étions du coup obligés de corriger a posteriori cette erreur en imposant une restriction au domaine de validité de la loi dont nous avons réalisé la traduction.

Plus concrètement, j'ai finalement étudié une version limitée de la loi covariante que je devrais écrire en fait :

(01)

$$\left|\frac{d\mathbf{u}}{ds} + {}_{\Gamma(2)}\otimes(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \right> = -\frac{dm}{ds}.\,[G_0].\,|\mathbf{u}> ;$$

parce que le recouvrement de la jauge électromagnétique impose de poser [087-8, au bas de la page 7] :

$$q.\ [F_{\alpha\beta}] = -\frac{1}{m}.\frac{dm}{ds}.\ [G_0] = -\frac{d[G]}{ds}$$
$$[G_0] + [G_0]^t = [0]$$

Commentaires : La relation (01) représente ostensiblement une équation dans laquelle la particule étudiée (masse m et charge q) s'écarte de la géodésique qu'elle suivrait si elle était en chute libre.
Dans l'interprétation initiale de cette équation, l'écart s'explique par la présence d'un champ électromagnétique.
Dans la formulation qui vient d'être obtenue par analyse logique, il est tentant de considérer que ce champ électromagnétique se traduit doublement : (i) par une modification de la géométrie d[G] comme j'en ai indiqué la possibilité théorique dans [085-4] lorsque la décomposition triviale du terme gravitationnel revêt certains formalismes très précis ; et (ii) par une contrepartie géométrique proportionnelle (a) à une variation relative de la masse de la particule et (b) à une matrice antisymétrique $[G_0]$ modifiant la géométrie initiale (avant le passage de la particule).

§. **Enoncé mathématique de la version étudiée :**
La loi de Lorentz-Einstein prend donc ici une tournure spécifique de l'analyse centrée sur les décompositions des produits tensoriels déformés. La notion de champ électromagnétique disparait apparemment. Elle devient désormais une équation différentielle par rapport à deux données physiques essentielles : (i) les composantes de la quadri-vitesse de la particule étudiée, **u**, et (ii) la métrique [G]. Cette affirmation s'illustre simplement ; en effet la relation (01) s'exprime dans le langage des composantes de la manière suivante :
(02)

$$\forall\ \chi\ : \frac{du^\chi}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\chi}.\ u^\alpha.\ u^\beta = -\frac{dm}{ds}.\ {}_0g_{\chi\beta}.\ u^\beta$$

Et comme les symboles de Christoffel de la seconde espèce s'écrivent traditionnellement dans une connexion de Levi-Civita (compatible avec la métrique) :
(03)

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\chi} = g^{\chi\delta}.\ \left(\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\delta}\right)$$

Tous les travaux exploratoires menés à ce jour sur la loi covariante de Lorentz concernent effectivement le système :
(04)

$$\forall\ \chi\ : \frac{du^\chi}{ds} + g^{\chi\delta}.\ \left(\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\delta}\right).\ u^\alpha.\ u^\beta + \frac{dm}{ds}.\ {}_0g_{\chi\beta}.\ u^\beta = 0$$

Trois questions logiques surgissent à cet endroit :

(i) La définition des symboles de Christoffel caractérisant la connexion de Levi-Civita est-elle compatible avec l'intervention ou avec l'existence d'une métrique antisymétrique ?
(ii) Si oui, le système précédent a-t-il des solutions ?
(iii) Si oui, lesquelles ?

§. **La préservation de la symétrie des symboles de Christoffel de la seconde espèce :**
Concernant la première question, et partant du travail historique de Christoffel [01] dans lequel ces symboles sont -sans discussion- symétriques, il faut pouvoir écrire :
(05)

$$\forall\ \chi\ : \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\chi} = g^{\chi\delta}.\ \left(\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^\delta}\right) = g^{\chi\delta}.\ \left(\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\delta}\right) = \Gamma_{\beta\alpha}{}^{\chi}$$

La symétrie n'est obtenue qu'à la condition de pouvoir vérifier que :

(06)

$$g^{\chi\delta}.\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}} - \frac{\partial g_{\beta\alpha}}{\partial x^{\delta}}\right) = g^{\chi\delta}.\frac{\partial (g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha})}{\partial x^{\delta}} = 0$$

A condition de définir les dérivées partielles premières des métriques de la façon suivante :
(D-1)

$$\forall\ \delta : [G] \xrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^{\delta}}} \frac{\partial [G]}{\partial x^{\delta}} = [\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}}]$$

La condition de symétrie sur les symboles de Christoffel s'écrit aussi plus concisément :
(07)

$$[G]^{-1}.\frac{\partial([G]-[G]^{t})}{\partial x^{\delta}} = [0]$$

Elle laisse clairement apparaitre que les métriques symétriques la valident automatiquement (tant mieux). Pour autant je suis surtout intéressé de savoir si et quand cette contrainte (07) peut être satisfaite par une métrique quelconque. Même si la métrique initiale est symétrique, l'existence de fluctuations éventuelles impose de continuer à pouvoir écrire cette condition durablement ; y compris lorsque la métrique initiale s'est métamorphosée à la suite de l'action d'une « composante » antisymétrique (08-3 ; ci-dessous) :
(08)

$$[G] = [G]^{t}$$
$$[G] \rightarrow [G'] = [G] + d[G]$$
$$d[G] = -\frac{dm}{m}.[G_0]$$
$$[G_0] + [G_0]^{t} = [0]$$
$$[G']^{-1}.\frac{\partial([G']-[G']^{t})}{\partial x^{\delta}} = [0]$$

Je vais essayer de préciser cette métamorphose de la métrique. Elle va d'une forme symétrique [G] à une forme inversible a priori quelconque [G']. Concernant le numérateur de la relation (08-5), il vient :
(09)

$$[G']^{t} = [G]^{t} + (d[G])^{t} = [G] - \frac{dm}{m}.[G_0]^{t} = [G] + \frac{dm}{m}.[G_0]$$
$$[G'] - [G']^{t} = -2.\frac{dm}{m}.[G_0]$$

La théorie de la relativité restreinte livre l'information importante que la masse effective d'une particule varie en fonction de sa vitesse relative :
(10)

$$m = m(\mathbf{u}) = \frac{m_0}{\sqrt[2]{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

Ce fait autorise à écrire :
(11)

$$\frac{dm}{ds} = \frac{\partial m}{\partial u^{\varepsilon}}.\gamma^{\varepsilon}\ ;\ \boldsymbol{\gamma}\ \textbf{:}\ \text{accélération.}$$

Je vais faire une autre hypothèse osée consistant à croire qu'il existe une métrique antisymétrique minimale et invariante dans l'espace-temps : $[G_0]$. Il en découle que les variations ne concernent finalement que la masse :
(12)

$$\frac{\partial([G']-[G']^{t})}{\partial x^{\delta}} = -2.\frac{\partial}{\partial x^{\delta}}\left(\frac{dm}{m}\right).[G_0]$$

Il manque à cet essai de savoir exprimer l'inverse de la métrique métamorphosée. Le formalisme de la métamorphose invite à proposer, au moins en première approche :
(13)

$$[G']^{-1} = [G] + k.\ [G_0]$$

Cela étant posé, il faudrait alors vérifier en toutes circonstances que :
(14)

$$Id_4 = [G'].\ [G']^{-1} = \{[G] - \frac{dm}{m}.\ [G_0]\}.\ \{[G] + k.\ [G_0]\} = \{[G]^2 - k.\ \frac{dm}{m}.\ [G_0]^2\} + \{k.\ [G].\ [G_0] - \frac{dm}{m}.\ [G_0].\ [G]\}$$

$$Id_4 = [G']^{-1}.\ [G'] = \{[G] + k.\ [G_0]\}.\ \{[G] - \frac{dm}{m}.\ [G_0]\} = \{[G]^2 - k.\ \frac{dm}{m}.\ [G_0]^2\} + \{k.\ [G_0].\ [G] - \frac{dm}{m}.\ [G].\ [G_0]\}$$

Une première solution consiste à poser :
(15)

$$[G]^2 - k.\ \frac{dm}{m}.\ [G_0]^2 = Id_4$$

En envisageant trois sous-familles :
(15-1)

$$k = \frac{dm}{m} : [G].\ [G_0] - [G_0].\ [G] = [0]$$

(15-2)

$$k = -\frac{dm}{m} : [G].\ [G_0] + [G_0].\ [G] = [0]$$

(15-3)

$$\forall\ (k, \frac{dm}{m}) : [G].\ [G_0] = [G_0].\ [G] = [0]$$

Pour les deux premières sous-familles, il est possible de connaitre le coefficient k définissant la métamorphose inverse. Ce n'est plus le cas pour la troisième sous-famille ; les diverses représentations y sont pour ainsi dire « orthogonales » entre elles. La métrique symétrique initiale étant supposée inversible pour permettre d'écrire l'indispensable relation (07) – ce qui revient à écrire $|G| = g \neq 0$, il en résulte que la matrice antisymétrique minimale doit être dégénérée : $|G_0| = g_0 = 0$. Comme cette dernière doit mimer un champ électromagnétique, je travaillerai avec la représentation suivante :

$$[G] = \begin{bmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} ; [G_0] = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & -z & y \\ -b & z & 0 & -x \\ -c & -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

Comme il est connu (i) que (a, b, c) représentent le champ électrique **E**, (ii) que (x, y, z) représentent le champ magnétique **H**, et (iii) que le déterminant $g_0 = \langle \mathbf{E}, \mathbf{H} \rangle_{Id3}$, la troisième sous-famille coïncide avec les situations physiques pour lesquelles le champ électrique est orthogonal au champ magnétique.

Cela étant accepté et réalisé, une condition assurant la symétrie des symboles de Christoffel de la seconde espèce (même après une métamorphose $[G] \to [G']$) devient :
(16)

$$[G']^{-1}.\ \frac{\partial([G'] - [G']^t)}{\partial x^\delta} = -2.\ \frac{\partial}{\partial x^\delta}(\frac{dm}{m}).\ \{[G] + k.\ [G_0]\}.\ [G_0]$$

L'objectif de ce paragraphe est d'identifier les circonstances l'annulant . Comme la métrique initiale [G] est symétrique alors que la métamorphose minimale $[G_0]$ est antisymétrique et non nulle, les deux ne peuvent pas être proportionnelles entre elles. Il se dessine ainsi deux types de circonstances permettant l'annulation de la matrice ci-dessus :

  ISBN 978-2-36923-154-7
EAN 9782369231547, 29 décembre 2020, v1.

- l'annulation du facteur scalaire figurant en amont :

(17)

$$\forall\ \delta : \frac{\partial}{\partial x^{\delta}}(\frac{dm}{m}) = 0$$

- la réalisation de :

(18)

$$\{[G] + k.\ [G_0]\}.\ [G_0] = [0]$$

Conclusion : Dans les circonstances qui viennent d'être expliquées, (08), (13), les métamorphoses antisymétriques d'une métrique symétrique préservent la symétrie des symboles de Christoffel de la seconde espèce (équivalent : la relation (07) est validée) lorsque :

$$\forall\ \delta : \frac{\partial}{\partial x^{\delta}}(\frac{dm}{m}) = 0$$

Il revient alors au même de dire que la variation relative de la masse de la particule est constante le long du trajet curviligne de celle-ci ; c'est-à-dire :

(19)

$$(17) \rightarrow \frac{d}{ds}(\frac{dm}{m}) = 0 \rightarrow \frac{dm(s)}{m} = \text{cte},\ \forall\ s.$$

§. **Une autre sous-famille préservant la symétrie des symboles de Christoffel :**

Le système des équations (15, 15-1 à 15-3) contient peut-être encore d'autre sous-familles ; par exemple, rien ne semble interdire de poser en particulier :

(20)

$$[G_0]^2 = [G]^2\ ;\ [G] \neq \pm[G_0]$$

Qui transformera la relation (15) en :

(15bis)

$$(1 - k.\ \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{m}}).\ [G]^2 = Id_4$$

Ici, la métamorphose inverse (spécifiée par la valeur du paramètre scalaire k) est toujours telle que l'inverse de la métrique non-dégénérée initiale vaut :

(21)

$$[G]^{-1} = (1 - k.\ \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{m}}).\ [G]$$

Des règles générales concernant les déterminants des matrices, je tire alors de (15bis) l'information utile que :

(22)

$$(1 - k.\ \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{m}})^4.\ g^2 = 1\ ;\ g = |G| \neq 0$$

Et, chaque fois que cela fait sens (i.e. la masse n'est pas constante et la discussion reste dans le monde réel) le paramètre k peut se calculer :

(23)

$$(1 - k.\ \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{m}})^2.\ g = 1\ ;\ g > 0$$
$$(1 - k.\ \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{m}})^2.\ g = -1\ ;\ g < 0$$
$$\downarrow$$
$$1 - k.\ \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{m}} = \pm\frac{1}{\sqrt[2]{|g|}}$$
$$\downarrow$$

$$k = \frac{1}{\frac{dm}{m}}.\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt[2]{|g|}}\right) ; \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{m}} \neq 0$$

D'où, à cause du préjugé (13) :
(24)

$$[G']^{-1} = [G] + \frac{1}{\frac{dm}{m}}.\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt[2]{|g|}}\right).[G_0]$$

Et, finalement, avec l'aide de (12) :
(25)

$$[G']^{-1}.\frac{\partial([G']-[G']^t)}{\partial x^\delta} = -2.\frac{\partial}{\partial x^\delta}\left(\frac{dm}{m}\right).\left\{[G] + \frac{1}{\frac{dm}{m}}.\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt[2]{|g|}}\right).[G_0]\right\}.[G_0]$$

L'annulation de cette matrice est obtenue comme précédemment lorsque la relation (17) est validée. Mais comme déjà évoqué au travers de la relation (18), elle peut aussi s'obtenir pour une autre famille de situations, à savoir lorsque :
(26)

$$[G].[G_0] + \frac{1}{\frac{dm}{m}}.\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt[2]{|g|}}\right).[G_0]^2 = [0]$$

Pour obtenir une idée des représentations de ces métriques compatibles avec la préservation de la symétrie des symboles de Christoffel de la seconde espèce, je pose à nouveau :
(27)

$$[G] = \begin{bmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix} ; [G_0] = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & -z & y \\ -b & z & 0 & -x \\ -c & -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

De sorte que cette nouvelle famille s'obtient en résolvant :
(28)

$$\begin{bmatrix} 0 & g_{00}.a & g_{00}.b & g_{00}.c \\ -g_{11}.a & 0 & -g_{11}.z & g_{11}.y \\ -g_{22}.b & g_{22}.z & 0 & -g_{22}.x \\ -g_{33}.c & -g_{33}.y & g_{33}.x & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\frac{dm}{m}}.\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt[2]{|g|}}\right).\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0]$$

§. **Exemple de la métrique initiale de Minkowski :**
Dans le cas d'une métrique initiale en coïncidence avec celle décrivant la géométrie de Minkowski (+ - - -), il convient de résoudre[1] :
(29)

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & z & -y \\ b & -z & 0 & x \\ c & y & -x & 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{\frac{dm}{m}}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0]$$

Dans tous les cas, il s'agit d'un problème relatif aux valeurs propres. Un calcul simple dans son essence mais fastidieux dans sa réalisation permet de prouver que :
(30)

$$D = \begin{vmatrix} k & a & b & c \\ a & k & z & -y \\ b & -z & k & x \\ c & y & -x & k \end{vmatrix} = k^4 + \{(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + b^2 + c^2)\}.k^2 - 2.(a.x.b.y + b.y.c.z + c.z.a.x)$$

[1] Ici g = -1, donc |g| = 1 et le cas du signe moins (valeurs propres nulles) est laissé de côté.

Il est donc possible d'en déduire les valeurs du paramètre k annulant ce polynôme. En notant pour le moment conventionnellement :

(31)

$$\varphi = a.\,x.\,b.\,y + b.\,y.\,c.\,z + c.\,z.\,a.\,x$$

Il est clair que les solutions de :

(32)

$$D = k^4 + (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2).\,k^2 - 2.\,\varphi = 0$$

Sont ici les :

(33)

$$2.\,k^2 = (\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) \pm \{(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 8.\,\varphi\}^{1/2} = 2.\,\left(\frac{2}{\frac{dm}{m}}\right)^2$$

Par conséquent, en plus de la relation (17), la relation suivante :

(34)

$$\left(\frac{dm}{m}\right)^2 = \frac{8}{\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2 \pm \sqrt[2]{(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{H}^2)^2 + 8.\varphi}} \geq 0$$

valide la préservation de la symétrie des symboles de Christoffel après une métamorphose de la métrique initiale définie par un des paramètre k, respectivement par un des taux de variation de la masse, ci-dessus.

- Comme les champs électromagnétiques sont oscillants, les taux de variation compatibles avec la validation des relations (07) et (08-5) varient constamment et il devient pertinent d'en calculer la valeur moyenne sur une période.
- Je peux également noter au passage que dans les situations caractérisées par :

(35)

$$\mathbf{E} = \pm\, \mathbf{H}\ ;\ E^2 = H^2$$

Alors :

(36)

$$D = k^4 - 2.\,(a^2.\,b^2 + b^2.\,c^2 + c^2.\,a^2).$$

Il en résulte que :

(37)

$$k = \sqrt[4]{2.\,(a^2.\,b^2 + b^2.\,c^2 + c^2.\,a^2)} = \frac{2}{\frac{dm}{m}}$$

Et :

(38)

$$\frac{dm}{m} = \frac{2}{\sqrt[4]{2.\varphi_0}}$$

Je noterai aussi que la forme particulière :

(39)

$$\varphi_0 = a^2.\,b^2 + b^2.\,c^2 + c^2.\,a^2$$

a de bien intéressantes symétries en lien avec les racines cubiques de l'unité et avec les symétries inhérentes aux tétraèdres.

§. **Recherche d'un lien avec la notion de propagateur :**

Si la version limitée de la loi de Lorentz donnée par la relation (04) a une réalité physique, alors le terme gravitationnel se décompose non-trivialement. L'usage de la méthode extrinsèque (voir [a] et usage dans [b]) livre une formulation approchée de cette décomposition :

  ISBN 978-2-36923-154-7
EAN 9782369231547, 29 décembre 2020, v1.

(40)

$$|_{\Gamma(2)}\otimes(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > = \{_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) - [G]^{-1}. \text{Hess}_{\mathbf{u}}\ \Psi(\mathbf{u})\}.|\mathbf{u} > + \ldots$$

La comparaison membre à membre fournit dès lors :

(41)

$$_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) - [G]^{-1}. \text{Hess}_{\mathbf{u}}\ \Psi(\mathbf{u}) = - \frac{\mathrm{dm}}{\mathrm{ds}}. [G_0]$$
$$\ldots = - \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{ds}}$$

Le terme à gauche de l'égalité dans la relation (41-1) permet d'évoquer une première approche faite dans [c] concernant un lien formel entre les parties principales des décompositions et la notion de dérivée covariante. Le sujet sera toutefois approfondi ailleurs.

§. **Résolution formelle de l'équation maîtresse dans un univers virtuel de dimension N = 1.**

Dans un monde virtuel unidimensionnel, l'équation maîtresse de cette approche, la relation (04), s'écrirait :

(42)

$$\frac{du}{ds} + \Gamma.\ u^2 + g.\ u = 0$$

Dans un premier temps je considère que Γ et g sont deux constantes non-nulles ; i.e. : elles ne dépendent pas de l'abscisse curviligne s. Pour résoudre cette relation, je propose de réaliser le changement de variable :

(43)

$$u = w + u_0\ ;\ u_0 = \text{constante}$$

Il en résulte que :

(44)

$$\Gamma.\ u^2 + g.\ u = \Gamma.\ (w + u_0)^2 + g.\ (w + u_0) = \Gamma.\ w^2 + (2.\ \Gamma.\ u_0 + g).\ w + u_0.\ (\Gamma.\ u_0 + g)$$

Puisque le changement de variable est libre, il peut être construit de telle sorte que le terme de degré un disparaisse. Cette décision fixe la constante u^0 de sorte que :

(45)

$$u_0 = - \frac{g}{2.\Gamma}$$
$$u = w - \frac{g}{2.\Gamma}$$
$$\Gamma.\ u^2 + g.\ u = \Gamma.\ w^2 - \frac{g^2}{4.\Gamma}$$
$$\frac{du}{ds} = \frac{dw}{ds}$$

et que l'équation maîtresse devient :

(46)

$$\frac{dw}{ds} + \Gamma.\ w^2 - \frac{g^2}{4.\Gamma} = 0$$

Je peux isoler les variables w et s en écrivant :

(47)

$$\frac{dw}{w^2 - \frac{g^2}{4.\Gamma^2}} = - \Gamma.\ ds$$

Ce type d'équation se laisse intégrer [02] de la façon suivante :

(48)

$$\text{Log}\,\frac{w-\frac{g}{2.\Gamma}}{w+\frac{g}{2.\Gamma}} + \text{cte} = - ½.\ g.\ s$$

Il y a à ce stade plusieurs chemins menant à la solution recherchée ; par exemple en écrivant d'abord (à la constante d'intégration près) :

(49)

$$\frac{w-\frac{g}{2.\Gamma}}{w+\frac{g}{2.\Gamma}} = e^{-\frac{1}{2}.g.s}$$

Cela fournit :

$$\text{w}.\,(1 - e^{-\frac{1}{2}.g.s}) = \frac{g}{2.\Gamma}.\,(1 + e^{-\frac{1}{2}.g.s})$$

De sorte que, sauf lorsque s = 0 et grâce au changement de variable (45-2) :

(50)

$$\text{u} = \frac{g}{2.\Gamma}.\,(\frac{1}{th(\frac{1}{2}.g.s)} - 1)$$

De la relation (48) il est également possible de déduire directement en « repassant » à la variable initiale au moyen de la relation (45-2) et en fixant la constante d'intégration de façon cohérente :

(51)

$$\text{Log}\,\frac{u(s)}{u(s)+\frac{g}{\Gamma}} - \text{Log}\,\frac{u(0)}{u(0)+\frac{g}{\Gamma}} = -\tfrac{1}{2}.\,\text{g. s}$$

Il suit :

$$\frac{u(s)}{u(0)}.\frac{u(0)+\frac{g}{\Gamma}}{u(s)+\frac{g}{\Gamma}} = e^{-\frac{1}{2}.g.s} \rightarrow \text{u(s)}.\,(1 - \frac{u(0)}{u(0)+\frac{g}{\Gamma}}.\,e^{-\frac{1}{2}.g.s}) = \frac{u(0).\,\frac{g}{\Gamma}}{u(0)+\frac{g}{\Gamma}}.\,e^{-\frac{1}{2}.g.s}$$

Et donc :

(52)

$$\text{u(s)} = \frac{\frac{u(0).\,\frac{g}{\Gamma}}{u(0)+\frac{g}{\Gamma}}.\,e^{-\frac{1}{2}.g.s}}{1-\frac{u(0)}{u(0)+\frac{g}{\Gamma}}.\,e^{-\frac{1}{2}.g.s}}$$

Commentaires : Ce cas virtuel n'a certes qu'une vertu pédagogique limité mais il assure du fait qu'il existe au moins un chemin autorisant à résoudre la version ultra-réduite de l'équation maîtresse de cette théorie. Ainsi, si la version complète peut se laisser mettre sous une forme analogue à la relation (42), il existe un espoir de résoudre la relation (04) de façon assez générale.

§. **Généralisation de la résolution – premier essai.**

Je vais par exemple extrapoler la relation (42) en supposant qu'il est possible de trouver quatre relations du type suivant dans lesquelles il n'y a *pour le moment* pas de somme sur l'indice λ :

(53)

$$\forall\,\lambda : \frac{du^{\lambda}}{ds} + {}_{\lambda}\Gamma.\,(u^{\lambda})^2 + {}_{\lambda}g.\,u^{\lambda} = 0$$

Et puis je vais introduire les changements de variables :

(54)

$$\forall\,\lambda : u^{\lambda} = T^{\lambda}{}_{\alpha}.\,w^{\alpha} + {}_{\lambda}u_0\ ;\ T^{\lambda}{}_{\alpha},\ {}_{\lambda}u_0 = \text{diverses constantes}$$

Dans ces conditions la relation (53) devient :

(55)

$$\forall\,\lambda : T^{\lambda}{}_{\alpha}.\,\frac{dw^{\alpha}}{ds} + {}_{\lambda}\Gamma.\,T^{\lambda}{}_{\alpha}.\,T^{\lambda}{}_{\beta}.\,w^{\alpha}.\,w^{\beta} + (2.\,{}_{\lambda}\Gamma.\,{}_{\lambda}u_0 + {}_{\lambda}g).\,T^{\lambda}{}_{\alpha}.\,w^{\alpha} + {}_{\lambda}u_0.\,({}_{\lambda}\Gamma.\,{}_{\lambda}u_0 + {}_{\lambda}g) = 0$$

Elle ne coïncide pas avec la version covariante de la loi de Lorentz mais elle s'en rapproche. Finalement si la matrice [T] est inversible, ce que je supposerai désormais, il devient possible d'écrire *cette fois-ci* en sommant sur λ :

(56)

$$\frac{dw^\mu}{ds} + \sum_\lambda T_\mu{}^\lambda .\, {}_\lambda\Gamma .\, T^\lambda{}_\alpha .\, T^\lambda{}_\beta .\, w^\alpha .\, w^\beta + \sum_\lambda T_\mu{}^\lambda .\, (2.\, {}_\lambda\Gamma .\, {}_\lambda u_0 + {}_\lambda g) .\, T^\lambda{}_\alpha .\, w^\alpha + \sum_\lambda T_\mu{}^\lambda .\, {}_\lambda u_0 .\, ({}_\lambda\Gamma .\, {}_\lambda u_0 + {}_\lambda g) = 0$$

Cette nouvelle expression se laisse identifier avec la loi de Lorentz-Einstein chaque fois qu'il est permis de poser simultanément :

(57-1, 2, 3)

$$\sum_\lambda T_\mu{}^\lambda .\, {}_\lambda\Gamma .\, T^\lambda{}_\alpha .\, T^\lambda{}_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu$$

$$\sum_\lambda T_\mu{}^\lambda .\, (2.\, {}_\lambda\Gamma .\, {}_\lambda u_0 + {}_\lambda g) .\, T^\lambda{}_\alpha = {}_0 g_{\mu\alpha}$$

$$\sum_\lambda T_\mu{}^\lambda .\, {}_\lambda u_0 .\, ({}_\lambda\Gamma .\, {}_\lambda u_0 + {}_\lambda g) = 0$$

Il y a de nombreuses manières de valider la relation (57-3). Une des plus simples s'inspire de la relation (45-1) et permet de ne pas se rendre dépendant de la matrice de transformation [T]. En pratiquant de la sorte, les constantes ${}_\lambda u_0$ sont facilement déterminées en fonction des constantes ${}_\lambda\Gamma$ et ${}_\lambda g$ lorsque les premières sont supposées ne pas être nulles.

(58)

$$\forall\ \lambda : {}_\lambda\Gamma .\, {}_\lambda u_0 + {}_\lambda g = 0$$

Cela étant admis, l'injection des constantes ${}_\lambda u_0$ dans la relation (57-2) fournit :

(59)

$$-\sum_\lambda T_\mu{}^\lambda .\, {}_\lambda g .\, T^\lambda{}_\alpha = {}_0 g_{\mu\alpha}$$

La relation (57-1) est -une fois de plus- une factorisation des symboles de Christoffel de la seconde espèce.

Conclusion : Ce premier jet suggère qu'il sera possible de trouver des solutions à la relation (04) qui seront des généralisations de la relation (52).

§. **Résumé du document :**

Si je prends les prédictions de la démarche exposée dans les documents exploratoires précédents ISBN 978-2-36923-016-8, 112-7 et 087-8 à la lettre, alors elles ne concernent en réalité que la version covariante de la loi de Lorentz donnée par la relation (01) et détaillée par la relation (04) lorsque la connexion est compatible avec la métrique.
Le fait que des champs électromagnétiques peuvent se confondre avec (trouver leur origine dans) des variations infinitésimales de la métrique signifie qu'il existe des variations antisymétriques de la métrique capables d'interagir sur une métrique initiale symétrique. Je dis qu'elles la métamorphosent.
De façon sous-jacente, puisque les champs électromagnétiques sont les transmetteurs des interactions homonymes, je m'interroge sur le fait de savoir si tout champ électromagnétique peut être équivalemment décrit par son empreinte géométrique ?
J'étudie les métamorphoses qui préservent la symétrie des symboles de Christoffel de la seconde espèce de manière à laisser l'ensemble de ce travail dans les conditions du travail historique de ce mathématicien. J'examine en particulier le cas d'une métrique initiale de Minkowski. Cette démarche logique livre essentiellement les variations curvilignes admissibles de la masse de la particule (les dm/ds) ; relations (17), (19) et (34), (38).
Enfin, je propose un moyen de découvrir au moins un premier sous-ensemble de solutions pour les relations (04) lorsque celles-ci se laissent ramener aux relations (53) ; ce qui exige de poser le système acceptable des relations (57). Chaque composante de la quadri-vitesse de particule peut alors s'exprimer selon un formalisme dont la relation (52) est l'expression générique.

En admettant que l'abscisse curviligne de la particule étudiée de la sorte joue un rôle équivalent au temps, cette expression générique prédit que les composantes de la quadri-vitesse diminuent au cours de l'existence de la particule pour atteindre une valeur limite nulle ; ce qui est a priori raisonnable.
L'idée subliminale poursuivie ici consiste à croire que les métamorphoses d'une métrique initiale existent vraiment et qu'elles décrivent les particules élémentaires du modèle standard. Je ne sais pas encore dans quelle mesure ce document m'a réellement rapproché de cet objectif théorique.

Travail personnel :

[a] PERIAT, T. : The extrinsic method ; ISBN 978-2-36923-092-2, EAN 9782369230922, v6, 7 November 2020.
[b] PERIAT, T. : Principe d'incertitude sur les mesures de W. Heisenberg et théorie de la relativité générale d'A. Einstein, ISBN 978-2-36923-026-7, EAN-9782369230267, 10 décembre 2019.
[c] PERIAT, T. : Hessiennes et propagateurs dans la théorie des produits tensoriels déformés et décomposés - Introduction, ISBN 978-2-36923-089-2, EAN-9782369230892, 6 février 2019.

Bibliographie :

[01] Christoffel, E. B. : Über die Transformation der homogenen Differentiale Ausdrücke zweiten Graden; Journal für die reine und angewandte Mathematik, pp. 46-70, 3 Januar 1869. Ce document peut être consulté à l'Université de Göttingen (Allemagne).
[02] Bordas « Mathématiques », p. 177, (13).