Etude de la décomposition des produits de Lie déformés en dimension quatre.

Scénario des trois générations (proposition).

©Auteur : Thierry PERIAT, ISBN 978-2-36923-156-1, EAN 9782369231561, v1.

16 juin 2021

Ce document poursuit le balisage systématique des ingrédients dont la mise en forme dans une forme adéquate devrait permettre -à terme- la découverte des solutions de la question (E) lorsque celle-ci est posée dans les espaces de dimension quatre. Il propose en passant une explication mathématique justifiant l'existence de trois générations (énergétiques) pour un même type de particules.

Mots clés : Mathématiques pures, produits tensoriels, dimension quatre.

Table des matières

1 Contextes **1**

1.1 Rappel : contexte physique ayant motivé l'exploration mathématique. 1

1.2 Rappel : résultats physiques acquis dans les espaces de dimension trois. 2

1.3 Objectifs 2

2 Traitement de la question en dimension quatre. **2**

2.1 La question, dite (E), en général. 2

2.2 Début de classification des décompositions. 5

2.3 Eléments pour une discussion en dimension quatre. 6

2.4 Le cas des cubes anti-symétriques et anti-réduits. 7

2.5 Dérivés partielles successives de la polynomiale Λ. 8

2.6 Analyse des composantes du gradient de la forme volumique à coefficients invariants. 10

3 Bibliographie **15**

3.1 Contributions personnelles 15

french

1 Contextes

1.1 Rappel : contexte physique ayant motivé l'exploration mathématique.

Les lois de Maxwell concernant l'électromagnétisme se synthétisent grâce à l'usage de la notion de produit vectoriel dans une formulation au sein des espaces de dimension trois, et grâce à celle de produit extérieur dans une formulation au sein des espaces de dimension quatre.
Leurs projections dans un espace dual de dimension trois (formulation ancienne) et l'injection à l'intérieur de ces dernières des représentations triviales des produits

vectoriels classiques (des matrices figurant une rotation) permettent de retrouver une densité volumique de force dont l'analyse montre qu'elle est la somme d'une force de polarisation électromagnétique et d'un flux tourbillonnaire [[a]].
Ce résultat laisse penser que la procédure *projection dans l'espace dual et injection d'une représentation matricielle du produit vectoriel* équivaut à définir un être mathématique se situant dans l'espace tangeant.
Comme les discussions actuelles se réalisent de préférence dans un espace de dimension quatre, la démarche précédente demande à être généralisée aux espaces de dimension supérieure à trois et à être systématisée. Cette systématisation passe par l'examen des étapes suivantes qui concernent :

1. la projection dans l'espace dual de la discussion ;
2. la décomposition, éventuellement non-triviale, des représentations duales des produits déformés.

Pour découvrir les outils indispensables de la discussion, les lecteurs sont invités à d'abord lire [[a]].

1.2 Rappel : résultats physiques acquis dans les espaces de dimension trois.

Voir [[b]].

1.3 Objectifs

Ce document poursuit le balisage systématique des ingrédients dont la mise en forme dans une forme adéquate devrait permettre -à terme- la découverte des solutions de la question (E) lorsque celle-ci est posée dans les espaces de dimension quatre.

2 Traitement de la question en dimension quatre.

2.1 La question, dite (E), en général.

Soit, dans l'espace dual de E(D, C), une relation du type suivant :

$$|\otimes_A ({}^{(D)}\mathbf{a},\, {}^{(D)}\mathbf{b}) >= {}^{(D)}[P]\,.\,|{}^{(D)}\mathbf{b} > +\,|{}^{(D)}\mathbf{z} >$$

dans laquelle le cube A quelconque, et la paire d'arguments ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$) sont connus. La question est :

"Est-il possible d'en déduire le formalisme générique des paires ([P], $\mathbf{z}$) de M(D, C) $\times$ E(D, C) ?

Proposition 2.1. *Prémisses.*

Lorsque le cube déformant, A, est anti-symétrique sur ses indices bas, l'énoncé de cette question (E) sous-entend implicitement l'existence d'une polynomiale de degré au plus égal à D - 1 définie par :

$$\Lambda({}^{(D)}\mathbf{a}) \,=\, |{}_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{a}) \,-\, {}^{(D)}[P]|$$

dans laquelle la matrice ${}_A\Phi(\mathbf{a})$ est la décomposition intuitive la plus triviale du produit extérieur déformé qu'on a sous la main.

Démonstration. : soit les étapes suivantes :

1. **L'existence de cette polynomiale est intrinsèque au fait de se poser la question** (E) puisque le système implicitement contenu dans la question peut toujours se réécrire :

$$\{{}_A\Phi(\mathbf{a})\,-\,[P]\}.|\mathbf{b}>=|\mathbf{z}>$$

La matrice ${}_A\Phi(\mathbf{a})$ - [P] est donc toujours présente de façon sous-jacente dans cette discussion et, s'il s'agissait de résoudre ce système dans un contexte plus habituel où les composantes du vecteur **b** seraient les D inconnues, il faudrait toujours en calculer le discriminant. Par convention du langage, ce discriminant est dit être *stratégique* pour la question posée.

2. **Une propriété des décompositions triviales des produits de Lie déformés.** Le calcul algébrique permet de démontrer l'existence des décompositions triviales pour n'importe quel produit tensoriel déformé ; ce fait se traduit par la relation générique :

$$|\otimes_A(\mathbf{a},\,\mathbf{b})>=\,{}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{b}>$$

Elle n'appelle à première vue aucune remarque particulière en dehors de son inintéressante trivialité. Lorsque le cube A est quelconque, elle permet même d'envisager le cas où les deux arguments coincident :

$$\mathbf{a}\,=\,\mathbf{b}\,\Rightarrow\,|\otimes_A(\mathbf{a},\,\mathbf{a})>=\,{}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{a}>$$

En revanche, si le cube A est anti-symétrique sur ses indices bas, alors :

$$\forall\,(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\in\,E^2(D,\,C),\,\forall\,A,\,A^k_{ij}\,+\,A^k_{ji}\,=\,0\,:$$

$$\otimes_A(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

$$=$$

$$\sum_k(\sum_i\sum_j A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j)\,.\,\mathbf{e}_k$$

$$=$$

$$\sum_k(\sum_{i<j}A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j\,+\,\sum_{i=j}A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j\,+\,\sum_{i>j}A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j)\,.\,\mathbf{e}_k$$

$$=$$

$$\sum_k(\sum_{i<j}A^k_{ij}\,.\,a^i\,.\,b^j\,+\,0\,.\,a^i\,.\,b^j\,-\,\sum_{i<j}A^k_{ij}\,.\,a^j\,.\,b^i)\,.\,\mathbf{e}_k$$

$$=$$

$$\sum_k(\sum_{i<j}A^k_{ij}\,.\,(a^i\,.\,b^j\,-\,a^j\,.\,b^i)\,.\,\mathbf{e}_k$$

$$=$$

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}]_A$$

Ce qui permet de constater la coincidence entre produit tensoriel déformé par un cube anti-symétrique sur ses indices bas et produit de Lie déformé par ce cube là :

$$\forall\,(\mathbf{a},\mathbf{b})\,\in\,E^2(D,\,C):$$

$$\forall\,A\,:\,A^k_{ij}\,+\,A^k_{ji}\,=\,0,\,\otimes_A(\mathbf{a},\mathbf{b})\,=\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]_A$$

Soit à reconsidérer alors le sujet des décompositions triviales quand le cube est élément de $C^-{}_{(D-D-D)}$; il vient logiquement :

$$\forall\,A\,\in\,C^-_{(D-D-D)},\,\forall\,\mathbf{a},\mathbf{b}\,\in\,E(D,\,C)\,:\,|[\mathbf{a},\mathbf{b}]_A>=\,{}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{b}>$$

Mais cette fois-ci, le cas de deux arguments égaux a une conséquence inattendue dûe à l'anti-symétrie du cube :

$$\forall A \in C^{-}_{(D-D-D)}, \forall \mathbf{a} \in E(D, C) \,:\, |[\mathbf{a}, \mathbf{a}]_A >= {}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{a} >= |\mathbf{0}>$$

Ces circonstances n'ont de réalité cohérente que dans trois cas : (i) l'argument est nul, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; (ii) le cube A est nul et (iii) le déterminant de la décomposition triviale est nul. Autrement dit, puisque les deux premiers cas sont parfaitement sans intérêt, il ne peut exister de décompositions triviales relatées à la décomposition d'un produit de Lie déformé (par définition, par un cube anti-symétrique) que des matrices associées avec un système dégénéré d'équations :

$$\forall A \in C^{-}_{(D-D-D)} - \{A = 0\}, \forall \mathbf{a} \in E(D, C) - \{\mathbf{0}\} \,:\, |{}_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{a})| = 0$$

3. **Formalisme général du discriminant**.
Si le cube déformant était quelconque, alors la polynomiale $\Lambda({}^{(D)}\mathbf{a})$ serait forcément de degré D au plus et il prendrait la forme générique suivante :

$$\Lambda({}^{(D)}\mathbf{a}) = c_{\alpha_1 \dots \alpha_D}\,.\,a^{\alpha_1}\,.\dots.\,a^{\alpha_D} + \dots + c_{\alpha_1\alpha_2}\,.\,a^{\alpha_1}\,.\,a^{\alpha_2} + c_{\alpha_1}\,.\,a^{\alpha_1} + c$$

Mais ici :
— La matrice de décomposition la plus triviale est le seul objet de la discussion dont le déterminant est une forme de degré D pure ; la présence de la matrice inconnue [P] ne fait que permettre d'étendre cette forme polynomiale aux degrés inférieurs à D. Ce qui permet de présumer :

$$_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{a}) = [A^{\alpha}_{\chi\beta}\,.\,a^{\chi}] \Rightarrow |{}_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{a})| = c_{\alpha_1 \dots \alpha_D}\,.\,a^{\alpha_1}\,.\dots.\,a^{\alpha_D}$$

Et comme je viens de la démontrer au point 2, cette somme est nulle lorsque le cube A est anti-symétrique sur ses indices bas.
— Il est aisé de démontrer que :

$$d = (-1)^D\,.\,|P|$$

□

De sorte qu'il devient raisonnable d'énoncer le :

Théorème 2.1. *Lorsque la question (E) est posée dans E(D, C) et qu'elle implique un cube déformant anti-symétrique sur ses indices bas, le discriminant stratégique est une polynomiale de degré D - 1 écrite en fonction des composantes du projectile figurant dans le produit de Lie déformé qu'on a sous la main.*

$$\Lambda({}^{(D)}\mathbf{a}) = c_{\alpha_1 \dots \alpha_D}\,.\,a^{\alpha_1}\,.\dots.\,a^{\alpha_{D-1}} + \dots + c_{\alpha_1\alpha_2}\,.\,a^{\alpha_1}\,.\,a^{\alpha_2} + c_{\alpha_1}\,.\,a^{\alpha_1} + (-1)^D\,.\,|P|$$

Corollaire 2.1. *Le cas des décompositions dont les parties principales ont un déterminant nul.*

Lorsque le déterminant d'une partie principale est nulle, la question (E) étant posée dans E(D, C) en impliquant un cube déformant anti-symétrique sur ses indices bas, le discriminant stratégique (i) est une polynomiale de degré D - 1 écrite en fonction des composantes du projectile figurant dans le produit de Lie déformé qu'on a sous la main ; (ii) est une somme de D polynomiales de degré D - 2 écrites en fonction de ces mêmes composantes.

$$|{}^{(D)}P| = 0 \Rightarrow \Lambda({}^{(D)}\mathbf{a})$$
$$=$$
$$a^{\alpha_1}\,.\,\{c_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_D}\,.\,a^{\alpha_2}\,.\dots.\,a^{\alpha_{D-1}} + \dots + c_{\alpha_1\alpha_2}\,.\,a^{\alpha_2} + c_{\alpha_1}\}$$

2.2 Début de classification des décompositions.

Soit l'ensemble des solutions de la question (E) sur une partie U de l'espace {E(D, C), $\otimes_A$} :

$$\forall\,(\mathbf{a},\,\mathbf{b})\,\in\,U\,\subset\,\{E^2(D,\,C),\,\otimes_A\}$$

$$S(U)\,:\,\{([P],\,\mathbf{z})\,\in\,M(D,\,C)\,\times\,E(D,\,C)\,:\,|\otimes_A(\mathbf{a},\,\mathbf{b})>=[P].|\mathbf{b}>+|\mathbf{z}>\}$$

Proposition 2.2. *Décomposabilité des produits tensoriels déformés.*

Tout produit tensoriel déformé est décomposable (synonyme : possède au moins une solution pour la question (E)).

Démonstration. Il est de fait facile de constater qu'à partir du moment où un produit tensoriel déformé est calculable, il a un résultat ; soit **z** ce résultat, alors la représentation duale du produit tensoriel déformé qu'on a sous la main peut toujours s'écrire :

$$\forall\,(\mathbf{a},\,\mathbf{b})\,\in\,U\,\subset\,\{E^2(D,\,C),\,\otimes_A\}\,:\,|\otimes_A(\mathbf{a},\,\mathbf{b})>=[0].|\mathbf{b}>+|\mathbf{z}>$$

□

Définition 2.1. *Décomposition non spécifique.*

Toute solution à la question (E) dont le formalisme est une paire ([0], $\mathbf{z} = {}_A\otimes(\mathbf{a}, \mathbf{b})$) de M(D, C) × E(D, C) est dite non spécifique.

Lemme 2.1. *Stupide.*

Toute paire (**a**, **b**) de {E^2(D, C), $\otimes_A$} admet une solution non spécifique à la question (E) sur cet espace. Elle a pour formalisme générique la paire ([0], $\mathbf{z} = {}_A\otimes(\mathbf{a}, \mathbf{b})$) de M(D, C) × E(D, C). L'espace S{E^2(D, C), $\otimes_A$} n'est donc jamais vide.

$$S\{E^2(D,\,C),\,\otimes_A\}\neq\emptyset$$

Remarque 2.1. *Sur les décompositions d'une première famille de paires de vecteurs.*

Soit les paires (**a**, **0**) de {E^2(D, C), $\otimes_A$}. Leurs produits tensoriels déformés admettent une représentation duale se décomposant de la manière suivante :

$$\forall\,(\mathbf{a},\,\mathbf{0})\,\in\,U\,\subset\,\{E^2(D,\,C),\,\otimes_A\}\,:$$

$$|\otimes_A(\mathbf{a},\,\mathbf{0})>=[P]\,.\,|\mathbf{0}>+|\mathbf{0}>,\,\forall\,[P]\,\in\,M(D,\,C)$$

Les éléments ([P], **0**) de M(D, C) × E(D, C) sont donc toujours tous des éléments de l'ensemble des solutions de la question (E) pour les paires (**a**, **0**) de {E^2(D, C), $\otimes_A$}. Ces décompositions sont triviales en ce sens qu'elles n'ont pas de résidu sans nécessairement toujours se confondre avec la décomposition la plus triviale d'entre elles.

Remarque 2.2. *Rappel sur les décompositions les plus triviales.*

Il faut se souvenir de deux informations (i) tout vecteur de E(D, C) a une représentation duale dans E*(D, C) et (ii) il est toujours possible de trouver un élément de M(D, C) appelé "*décomposition la plus triviale*" de la représentation duale du produit tensoriel déformé qu'on a sous la main validant la relation :

$$\forall\,(\mathbf{a},\,\mathbf{b})\,\in\,\{E^2(D,\,C),\,\otimes_A\}\,:\,|\otimes_A(\mathbf{a},\,\mathbf{b})>={}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{b}>+|\mathbf{0}>$$

L'ensemble des éléments (${}_A\Phi(\mathbf{a})$, **0**) de M(D, C) × E(D, C) est un sous-ensemble de l'ensemble S{E^2(D, C), $\otimes_A$}.

2.3 Eléments pour une discussion en dimension quatre.

La suite de la discussion n'implique que des cubes déformants anti-symétriques sur leurs indices bas.

Exemple 2.1. *Le cas des espaces de dimension quatre (D = 4).*

Dans le cas particulier où D = 4 :

$$\Lambda({}^{(4)}\mathbf{a}) \,=\, c_{\alpha\beta\chi} \,.\, a^{\alpha} \,.\, a^{\beta} \,.\, a^{\chi} \,+\, c_{\alpha\beta} \,.\, a^{\alpha} \,.\, a^{\beta} \,+\, c_{\alpha} \,.\, a^{\alpha} \,+\, |P|$$

C'est une forme volumique. Si -en particulier- le déterminant de la partie principale de la décomposition s'annule, alors :

$$|{}^{(4)}P| \,=\, 0 \,\Rightarrow\, \Lambda({}^{(4)}\mathbf{a}) \,=\, a^{\alpha_1} \,.\, \{c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \,.\, a^{\alpha_2} \,.\, a^{\alpha_3} \,+\, c_{\alpha_1\alpha_2} \,.\, a^{\alpha_2} \,+\, c_{\alpha_1}\}$$

Le discriminant stratégique est une somme de quatre (D = 4) polynomiales de degré deux écrites en fonction des composantes du projectile ${}^{(4)}\mathbf{a}$.

Remarque 2.3. *Lorsque le discriminant s'identifie avec un développement limité ; le cas des espaces réels de dimension quatre.*

Il existe probablement mille et une manières d'identifier un développement limité d'une fonction f de D variables réelles à l'ordre N (N ∈ N*) avec une polynomiale de degré N écrite en fonction des composantes d'un élément de l'espace vectoriel E(D, R). Il est par exemple permis d'envisager que ce discriminant stratégique est un développement limité de la fonction f($\mathbf{a}$) autour du vecteur nul de E(4, R) ; il suffit pour celà de pouvoir poser simultanément :

$$c \,=\, f(\mathbf{0}) \,+\, 0(5) \,=\, |P|$$

$$c_{\alpha} \,=\, \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial a^{\alpha}}$$

$$c_{\alpha\beta} \,=\, \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial a^{\alpha} \partial a^{\beta}}$$

$$c_{\alpha\beta\chi} \,=\, \frac{1}{3!} \cdot \frac{\partial^3 f(\mathbf{a})}{\partial a^{\alpha} \partial a^{\beta} \partial a^{\chi}}$$

$$c_{\alpha\beta\chi\delta} \,=\, \frac{1}{4!} \cdot \frac{\partial^4 f(\mathbf{a})}{\partial a^{\alpha} \partial a^{\beta} \partial a^{\chi} \partial a^{\delta}}$$

pour pouvoir plausiblement écrire que :

$$\Lambda(\mathbf{a}) \,=\, f(\mathbf{a})$$

Le fait d'écrire ces relations de dépendance entre les coefficients de la polynomiale $\Lambda({}^{(4)}\mathbf{a})$ et les dérivées partielles successives de la fonction de quatre variables réelles f(${}^{(4)}\mathbf{a}$) s'accompagne cependant irrémédiablement de contraintes sur ces dérivées partielles ; à titre d'illustration, une dérivation partielle des coefficients de degré un fournit :

$$\frac{\partial c_{\alpha}}{\partial a^{\beta}} \,=\, \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial a^{\beta} \partial a^{\alpha}}$$

Et, en inversant le sens de la dérivation partielle :

$$\frac{\partial c_{\beta}}{\partial a^{\alpha}} \,=\, \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial a^{\alpha} \partial a^{\beta}}$$

De sorte que si la fonction f est continue :

$$2 \,.\, c_{\alpha\beta} \,=\, \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial a^{\alpha} \partial a^{\beta}} \,=\, \frac{\partial c_{\beta}}{\partial a^{\alpha}} \,=\, \frac{\partial c_{\alpha}}{\partial a^{\beta}} \,=\, \frac{\partial^2 f(\mathbf{a})}{\partial a^{\beta} \partial a^{\alpha}} \,=\, 2 \,.\, c_{\beta\alpha}$$

Il est possible de continuer cette illustration de proche en proche et de découvrir ainsi l'ensemble des contraintes accompagnant l'identification. Leur recevabilité et leur cohérence seront examinées ultérieurement.

2.4 Le cas des cubes anti-symétriques et anti-réduits.

Pour rappel, dans [[c]], le calcul du discriminant stratégique associé avec la recherche des solutions de la question (E) dans les espaces de dimension quatre équipés d'un produit tensoriels déformé par un cube A quelconque -typiquement : {E(4, R ou C), $_{A}\otimes$}- a été débuté. La difficulté des calculs associés au cas général a justifié de commencer avec le cas particulier des cubes anti-symétriques et anti-réduits. Un tel cube se ramène à un vecteur **A** de E(4, R ou C). L'exploration s'est ainsi attachée à exprimer :

$$\Lambda({}^{(4)}\mathbf{a}) = |_{{}^{(4)}\mathbf{A}}\Phi({}^{(4)}\mathbf{a}) - [P]|$$

Après un long et pénible calcul, le formalisme de la partie de la polynomiale Λ de degré quatre a été obtenu ; il s'agit de :

$$c_{\alpha\beta\chi\delta} \,.\, a^{\alpha} \,.\, a^{\beta} \,.\, a^{\chi} \,.\, a^{\delta}$$

Il peut grossièrement se décrire comme suit. La décomposition la plus triviale du produit $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{\mathbf{A}}$ est équivalente au produit extérieur $\mathbf{A} \wedge \mathbf{a}$. Si **E** et **H** désignent les deux vecteurs de E(3, R ou C) dont l'existence est induite par celle de ce produit extérieur, alors :

$$c_{\alpha\beta\chi\delta} \,.\, a^{\alpha} \,.\, a^{\beta} \,.\, a^{\chi} \,.\, a^{\delta} = (<^{(3)} \mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{H} >_{Id_3})^2$$

Corollaire 2.2. ***Scénario des trois générations de particules.***

La cohérence de ce formalisme vis-à-vis du théorème 2.1 établi ci-dessus ne s'obtient que dans un nombre très limité de cas.

1. Si la discussion a lieu sur E(4, R) et sur E(3, R), alors forcément :
   (a) $\mathbf{E} = \mathbf{0}, \forall\, \mathbf{H}$;
   (b) $\mathbf{H} = \mathbf{0}, \forall\, \mathbf{E}$;
   (c) $\forall\, \mathbf{E}, \mathbf{H} : \mathbf{E} \perp \mathbf{H}$
2. Si la discussion a lieu sur E(4, C) et sur E(3, C), alors forcément :
   (a) $\mathbf{E} = \mathbf{0}, \forall\, \mathbf{H}$;
   (b) $\mathbf{H} = \mathbf{0}, \forall\, \mathbf{E}$;
   (c) $\forall\, \mathbf{E}, \mathbf{H} : \mathbf{E} \perp \mathbf{H}$
   (d) $\mathbf{E}^2 = 0$
   (e) $\mathbf{H}^2 = 0$

Ce résultat mathématique général revêt un intérêt tout particulier en électromagnétisme lorsque les vecteurs ${}^{(3)}\mathbf{E}$, ${}^{(3)}\mathbf{H}$ et ${}^{(4)}\mathbf{a} = {}^{(4)}\mathbf{u}$ représentent respectivement un champ électrique, un champ magnétique et la vitesse associés à une onde électromagnétique.

En effet, dans ce cas, la polynomiale $\Lambda({}^{(4)}\mathbf{u})$ est une polynomiale de degré trois écrite en fonction des quatre composantes de la vitesse de l'onde. On peut imaginer que certains changements de référentiels ad hoc permettent d'exprimer les composantes de la vitesse avec le quadruplé (c, u, 0, 0) ; ce qui transforme la polynomiale en un polynome de degré trois écrit en fonction de la seule composante u. La méthode ancestrale de Tartaglia et Cardan en livre les solutions.

Chaque valeur permise pour la vitesse est forcément associée avec un niveau d'énergie, je propose donc d'interpréter ce résultat mathématique comme étant l'explication de l'existence des trois générations énergétiques observées pour un même type de particules.

2.5 Dérivés partielles successives de la polynomiale Λ.

Remarque 2.4. *Rappels de quelques données importantes dans les espaces de dimension trois.*

J'ai montré au cours du traitement de la question (E) dans les espaces de dimension trois (D = 3) [[d]] que ce discriminant a vraiment une importance stratégique en ce sens que le calcul (i) de son gradient et (ii) de sa Hessienne livre -lorsque celle-ci pas dégénérée- les objets mathématiques permettant d'exprimer le noyau générique de la matrice $^{(3)}$[P] de M(3, C) recherchée.

Remarque 2.5. *Calcul des composantes du gradient du discriminant stratégique dans les espaces de dimension quatre.*

Dans les espaces de dimension quatre, le discriminant a quatre dérivées partielles d'ordre un qui coincide avec les composantes du gradient de la polynomiale Λ. Chacune de ces composantes est en général une polynomiale de degré trois (i) écrite en fonction des composantes du projectile figurant dans le produit de Lie déformé qu'on a sous la main ; (ii) dont les coefficients dépendent de ceux de la polynomiale Λ et des dérivées partielles d'ordre un des composantes du projectile figurant dans le produit de Lie déformé qu'on a sous la main :

$$\frac{\partial\Lambda(\mathbf{a})}{\partial a^\delta}$$

$$=$$

$$\frac{\partial c_{\alpha\beta\chi}}{\partial a^\delta}\,.\,a^\alpha\,.\,a^\beta\,.\,a^\chi$$

$$+\,c_{\alpha\beta\chi}\,.\,\frac{\partial a^\alpha}{\partial a^\delta}\,.\,a^\beta\,.\,a^\chi\;+\;c_{\alpha\beta\chi}\,.\,a^\alpha\,.\,\frac{\partial a^\beta}{\partial a^\delta}\,.\,a^\chi\;+\;c_{\alpha\beta\chi}\,.\,a^\alpha\,.\,a^\beta\,.\,\frac{\partial a^\chi}{\partial a^\delta}$$

$$+\,\frac{\partial c_{\alpha\beta}}{\partial a^\delta}\,.\,a^\alpha\,.\,a^\beta\;+\;c_{\alpha\beta}\,.\,\frac{\partial a^\alpha}{\partial a^\delta}\,.\,a^\beta\;+\;c_{\alpha\beta}\,.\,a^\alpha\,.\,\frac{\partial a^\beta}{\partial a^\delta}$$

$$+\,\frac{\partial c_\alpha}{\partial a^\delta}\,.\,a^\alpha\;+\;c_\alpha\,.\,\frac{\partial a^\alpha}{\partial a^\delta}$$

$$+\,\frac{\partial c}{\partial a^\delta}$$

$$=$$

$$\frac{\partial c_{\alpha\beta\chi}}{\partial a^\delta}\,.\,a^\alpha\,.\,a^\beta\,.\,a^\chi$$

$$+\,c_{\delta\beta\chi}\,.\,a^\beta\,.\,a^\chi\;+\;c_{\alpha\delta\chi}\,.\,a^\alpha\,.\,a^\chi\;+\;c_{\alpha\beta\delta}\,.\,a^\alpha\,.\,a^\beta$$

$$+\,\frac{\partial c_{\alpha\beta}}{\partial a^\delta}\,.\,a^\alpha\,.\,a^\beta\;+\;c_{\delta\beta}\,.\,a^\beta\;+\;c_{\alpha\delta}\,.\,a^\alpha$$

$$+\,\frac{\partial c_\alpha}{\partial a^\delta}\,.\,a^\alpha\;+\;c_\delta$$

$$+\,\frac{\partial c}{\partial a^\delta}$$

$$=$$

$$\frac{\partial c_{\alpha\beta\chi}}{\partial a^\delta}\,.\,a^\alpha\,.\,a^\beta\,.\,a^\chi$$

$$+\,(c_{\delta\alpha\beta}\;+\;c_{\alpha\delta\beta}\;+\;c_{\alpha\beta\delta}\;+\;\frac{\partial c_{\alpha\beta}}{\partial a^\delta})\,.\,a^\alpha\,.\,a^\beta\;+\;(c_{\delta\alpha}\;+\;c_{\alpha\delta}\;+\;\frac{\partial c_\alpha}{\partial a^\delta})\,.\,a^\alpha\;+\;(c_\delta\;+\;\frac{\partial c}{\partial a^\delta})$$

Lemme 2.2. *Gradient d'une forme volumique à coefficients invariants.*

Dans les espaces de dimension quatre, un discriminant stratégique dont les coefficients sont invariants a quatre dérivées partielles d'ordre un qui coincident avec les composantes du gradient de la polynomiale Λ. Chacune de ces composantes est une polynomiale de degré deux (i) écrite en fonction des composantes du projectile figurant dans le produit de Lie déformé qu'on a sous la main ; (ii) dont les coefficients dépendent de combinaisons de ceux de la polynomiale Λ.

$$\mathbf{Grad_a}\Lambda(\mathbf{a}) \in E(4,\, C) \equiv (\frac{\partial\Lambda(\mathbf{a})}{\partial a^0}, \frac{\partial\Lambda(\mathbf{a})}{\partial a^1}, \frac{\partial\Lambda(\mathbf{a})}{\partial a^2}, \frac{\partial\Lambda(\mathbf{a})}{\partial a^3}) \in E^*(4,\, C)$$

$$\frac{\partial\Lambda(\mathbf{a})}{\partial a^\delta} = (c_{\delta\alpha\beta} + c_{\alpha\delta\beta} + c_{\alpha\beta\delta})\,.\,a^\alpha\,.\,a^\beta + (c_{\delta\alpha} + c_{\alpha\delta})\,.\,a^\alpha + c_\delta$$

Remarque 2.6. *Calcul des composantes de la Hessienne du discriminant stratégique à coefficients invariants dans les espaces de dimension quatre.*

Dans les mêmes conditions d'invariance des coefficients, chacune de ces quatre dérivées partielles premières a quatre dérivées partielles d'ordre un ; l'ensemble de ces dérivées permet d'exprimer les seize composantes de la Hessienne de la polynomiale Λ :

$$\frac{\partial^2\Lambda(\mathbf{a})}{\partial a^\epsilon \partial a^\delta} = (c_{\delta\alpha\beta} + c_{\alpha\delta\beta} + c_{\alpha\beta\delta})\,.\,(\delta^\alpha_\epsilon\,.\,a^\beta + a^\alpha\,.\,\delta^\beta_\epsilon) + (c_{\delta\alpha} + c_{\alpha\delta})\,.\,\delta^\alpha_\epsilon$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\frac{\partial^2\Lambda(\mathbf{a})}{\partial a^\epsilon \partial a^\delta} = \{(c_{\delta\epsilon\alpha} + c_{\epsilon\delta\alpha} + c_{\epsilon\alpha\delta}) + (c_{\delta\alpha\epsilon} + c_{\alpha\delta\epsilon} + c_{\alpha\epsilon\delta})\}\,.\,a^\alpha + (c_{\delta\epsilon} + c_{\epsilon\delta})$$

et, provisoirement :

$$Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a}) = \{[C] + [C]^t\} + [\{(c_{\delta\epsilon\alpha} + c_{\epsilon\delta\alpha} + c_{\epsilon\alpha\delta}) + (c_{\delta\alpha\epsilon} + c_{\alpha\delta\epsilon} + c_{\alpha\epsilon\delta})\}\,.\,a^\alpha]$$

Définition 2.2. *Le cube $\odot C$.*

Les coefficients de degré trois du discriminant stratégique constituent les composantes d'un cube C(4-4-4). Chacune d'elles a trois indices et il est possible de fabriquer une somme de trois permutations cycliques et de trois permutations anticycliques de chaque triplé d'indices. Ces sommes permettent de construire un nouveau cube $\odot$C.

$$\odot C \equiv \odot c_{\alpha\epsilon\delta} = c_{\delta\epsilon\alpha} + c_{\epsilon\delta\alpha} + c_{\epsilon\alpha\delta} + c_{\delta\alpha\epsilon} + c_{\alpha\delta\epsilon} + c_{\alpha\epsilon\delta}$$

Remarque 2.7. *Dénombrement.*

§1. Un comptage s'impose car le cube C des coefficients de degré trois de la polynomiale initiale $\Lambda({}^{(4)}\mathbf{a})$ n'a que soixante quatre composantes ($4 \times 4 \times 4 = 64$). Chaque Hessienne n'a que neuf composantes indexées au travers des paires (j, k) dans lesquelles j et k peuvent prendre les valeurs entières 1, 2, 3. Chaque composante (j, k) d'une Hessienne donnée est la somme de six coefficients de degré trois ; et elle est en même temps la composante (δ, j, k) du cube $\odot$C. Soit une Hessienne donnée ; si tous les coefficients de degré trois y apparaissant étaient tous distincts les uns des autres, alors cette Hessienne impliquerait à elle seule neuf fois six, soit cinquante quatre composantes ($9 \times 6 = 54$). Les quatre Hessiennes impliqueraient quatre fois ce nombre, soit un total de deux cent seize composantes ($4 \times 54 = 216$). Ce qui est impossible compte tenu du comptage préalable réalisé au début de ce paragraphe.

Il existe donc probablement des symétries levant cette apparente incohérence.

§2. La même logique de dénombrement, appliquée au cube $\odot$C conçu comme la superposition de quatre matrices de M(4, C), pousserait faussement à faire croire que quatre fois seize fois six composantes distinctes, soit trois cent quatre vingt quatre ($4 \times 16 \times 6 = 384$) seraient impliquées. Ce qui n'est évidemment pas le cas puisqu'il y en a six fois moins. Il est facile de vérifier que la valeur d'une composante du cube $\odot$C ne change pas en intervertissant n'importe quelle paire de ses indices :

$$\forall\, \alpha,\, \epsilon, \delta \,=\, 0,\, 1,\, 2,\, 3\, :$$

$$\odot c_{\alpha\epsilon\delta} \,=\, \odot c_{\delta\epsilon\alpha} \,=\, \odot c_{\epsilon\delta\alpha} \,=\, \odot c_{\epsilon\alpha\delta} \,=\, \odot c_{\delta\alpha\epsilon} \,=\, \odot c_{\alpha\delta\epsilon}$$

Le cube $\odot$C vaut donc six fois un cube de référence ; je noterai ce résultat symboliquement :

$$\odot C \,=\, 6\,.\, \odot C_0$$

Ce cube peut ensuite agir sur la gauche du projectile **a** de telle sorte que :

Lemme 2.3. *Hessienne d'une forme volumique à coefficients invariants.*

La Hessienne d'une forme volumique à coefficients invariants se distingue de celle d'une polynomiale de degré deux à coefficients également invariants par l'apparition d'une matrice supplémentaire qui se trouve être une décomposition triviale d'un produit tensoriel déformé par le cube $\odot$C. Cette particularité mise à part, elle contient aussi deux fois la partie symétrique de la matrice des coefficients de degré deux de la polynomiale Λ.

$$^{(4)}Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(^{(4)}\mathbf{a}) \,=\, \{^{(4)}[C] \,+\, ^{(4)}[C]^t\} \,+\, 6\,.\,_{\odot C_0}\Phi(^{(4)}\mathbf{a})$$

2.6 Analyse des composantes du gradient de la forme volumique à coefficients invariants.

Remarque 2.8. *L'apport de l'analyse faite dans les espaces de dimension trois.*

Chaque composante du gradient d'une forme volumique à coefficients invariants est une polynomiale de degré deux écrite en fonction des quatre composantes de l'argument **a**. Elle peut toujours se réécrire dans un formalisme du type "3 + 1" :

$$\frac{\partial\Lambda(\mathbf{a})}{\partial a^\delta}$$
$$=$$
$$(c_{\delta jk} \,+\, c_{j\delta k} \,+\, c_{jk\delta})\,.\, a^j\,.\, a^k$$
$$+$$
$$\{(c_{\delta j} \,+\, c_{j\delta}) \,+\, a^0\,.\,(c_{\delta j0} \,+\, c_{j\delta 0} \,+\, c_{j0\delta} \,+\, c_{\delta 0j} \,+\, c_{0\delta j} \,+\, c_{0j\delta})\}\,.\, a^j$$
$$+$$
$$\{(c_{\delta 00} \,+\, c_{0\delta 0} \,+\, c_{00\delta})\,.\, a^0\,.\, a^0 \,+\, (c_{\delta 0} \,+\, c_{0\delta})\,.\, a^0 \,+\, c_\delta\}$$

Le *raisonnement inverse de la question (E)* pour les espaces de dimension trois peut donc lui être appliqué. Plus clairement, en vertu du théorème 2.1, chaque composante peut a priori s'interpréter comme la preuve de l'existence d'un produit vectoriel déformé dans E(3, C) ayant une décomposition dans M(3, C) $\times$ E(3, C) :

$$\forall\, \delta \,=\, 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \exists\, \frac{\partial\Lambda(^{(4)}\mathbf{a})}{\partial a^\delta}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\,({}^{(3)}[{}_{\delta}P],\, {}^{(3)}_{\delta}\mathbf{z}) \in M(3,\,C) \times E(3,\,C) : |[{}^{(3)}\mathbf{a},\, {}^{(3)}\mathbf{b}]_{C(\delta)} >= [{}_{\delta}P]|{}^{(3)}\mathbf{b} > +|^{(3)}_{\delta}\mathbf{z} >$$

$$\forall\,\delta = 0,\,1,\,2,\,3,\ \frac{\partial\Lambda({}^{(4)}\mathbf{a})}{\partial a^{\delta}} = |_{C(\delta)}\Phi({}^{(3)}\mathbf{a}) - {}^{(3)}[{}_{\delta}P]| = {}_{\delta}\Lambda({}^{(3)}\mathbf{a})$$

En dimension trois, comme en dimension quatre, l'argument $\mathbf{b}$ n'a pas vraiment importance à ce stade de la discussion puisqu'il reste inchangé après une décomposition ; que celle-ci soit triviale ou non. La conséquence de la démarche expliquée ici est que l'existence du gradient de la polynomiale $\Lambda({}^{(4)}\mathbf{a})$ est simultanée à celle de quatre polynomiales spatiales de degré deux, les ${}_{\delta}\Lambda({}^{(3)}\mathbf{a})$ signant à leur tour l'existence plausible de quatre décompositions spatiales.

Remarque 2.9. *Le rôle de la composante temporelle du projectile.*

En conformité avec la démarche suivie pour explorer la question (E) dans les espaces de dimension trois, chaque polynomiale ${}_{\delta}\Lambda({}^{(3)}\mathbf{a})$ peut aussi s'écrire de manière condensée :

$$\forall\,\delta = 0,\,1,\,2,\,3,\ {}_{\delta}\Lambda({}^{(3)}\mathbf{a}) = {}_{\delta}d_{jk}\,.\,a^{j}\,.\,a^{k} + {}_{\delta}d_{j}\,.\,a^{j} + {}_{\delta}d$$

avec :

$$\begin{aligned}
{}_{\delta}d_{jk} &= (c_{\delta jk} + c_{j\delta k} + c_{jk\delta}) \\
{}_{\delta}d_{j} &= (c_{\delta j} + c_{j\delta}) + a^{0}\,.\,(c_{\delta j0} + c_{j\delta 0} + c_{j0\delta} + c_{\delta 0j} + c_{0\delta j} + c_{0j\delta}) \\
{}_{\delta}d &= (c_{\delta 00} + c_{0\delta 0} + c_{00\delta})\,.\,(a^{0})^{2} + (c_{\delta 0} + c_{0\delta})\,.\,a^{0} + c_{\delta} = -|{}_{\delta}P|
\end{aligned}$$

Il est légitime de se demander comment les diverses polynomiales s'articulent les unes avec les autres. Les coefficients de degré nul donnent un élément de réponse puisqu'ils livrent quatre trinômes du second degré écrits en fonction de l'unique composante temporelle, a^0, du projectile ${}^{(4)}\mathbf{a}$. Très classiquement, il convient de distinguer les situations théoriques suivantes :

1. La condition suivante est vérifiée :

   $$(c_{\delta 00} + c_{0\delta 0} + c_{00\delta}) \neq 0$$

   Auquel cas :

   $${}_{\delta}\Delta = (c_{\delta 0} + c_{0\delta})^{2} - 4\,.\,(c_{\delta 00} + c_{0\delta 0} + c_{00\delta})\,.\,(c_{\delta} - {}_{\delta}d)$$

   et :

   $$\forall\,\delta = 0,\,1,\,2,\,3 : a^{0}_{\pm} = \frac{-(c_{\delta 0} + c_{0\delta}) \pm \Delta^{1/2}}{2\,.\,(c_{\delta 00} + c_{0\delta 0} + c_{00\delta})}$$

2. La condition suivante est vérifiée :

   $$(c_{\delta 00} + c_{0\delta 0} + c_{00\delta}) = 0\,;\ (c_{\delta 0} + c_{0\delta}) \neq 0$$

   Dans ce cas :

   $$\forall\,\delta = 0,\,1,\,2,\,3 : a^{0} = \frac{{}_{\delta}d - c_{\delta}}{(c_{\delta 0} + c_{0\delta})}$$

Quelle que soit la situation, ces relations livrent deux informations très importantes :
- La composante temporelle de l'argument ${}^{(4)}\mathbf{a}$ possède quatre réalisations qui, toutes, dépendent des coefficients de la polynomiale $\Lambda({}^{(4)}\mathbf{a})$;
- Les coefficients de la polynomiale $\Lambda({}^{(4)}\mathbf{a})$ dépendent à chaque instant les uns des autres.

Si, par exemple pour des raisons physiques, l'unicité de la composante temporelle est une exigence impérieuse, il ne faudra retenir pour cette discussion que les cubes, matrices, vecteurs et scalaires permettant de vérifier :

$$_{\delta}\Delta = (c_{\delta 0} + c_{0\delta})^2 - 4\,.\,(c_{\delta 00} + c_{0\delta 0} + c_{00\delta})\,.\,(c_{\delta} - {}_{\delta}d) = 0$$

et il viendra toujours :

$$\forall\,\delta = 0,\,1,\,2,\,3\,:\,a^0 = \frac{-(c_{\delta 0} + c_{0\delta})}{2\,.\,(c_{\delta 00} + c_{0\delta 0} + c_{00\delta})} = \frac{-2\,.\,(c_{\delta} - {}_{\delta}d)}{(c_{\delta 0} + c_{0\delta})}$$

Remarque 2.10. *La partie principale des décompositions spatiales classiques.*

Cette théorie devrait livrer les parties principales des décompositions spatiales classiques. Pour autant, il convient de remarquer que le cube $\mathrm{C}(\delta)$ attaché à la δème décomposition n'est pas vraiment bien identifié. Il doit en principe décrire la manière dont le produit vectoriel classique est localement déformé. Par simplicité, la question consistant à se demander si le produit vectoriel classique est déformé d'une manière qui dépend de l'axe considéré sera momentannément écartée et je ferai l'hypothèse, discutable par la suite, que :

$$\forall\,\delta = 0,\,1,\,2,\,3\,:\,{}^{(3)}C(\delta) = [J]$$

Par conséquent, chaque fois que la Hessienne de la polynomiale $\delta\Lambda({}^{(3)}\mathbf{a})$ n'est pas dégénérée, les parties principales se réduisent à leurs noyaux classiques de type I et ceux-ci s'écrivent [ISBN 978-2-36923-036-6 ; p. 17] :

$$\forall\,\delta = 0,\,1,\,2,\,3\,:\,{}^{(3)}[{}_{\delta}P] = \frac{1}{2}\,.\,Hess_{\delta}\Lambda({}^{(3)}\mathbf{a}) - \frac{1}{|A|}\,.\,{}_{[J]}\Phi(Hess_{\delta}^{-1}\Lambda({}^{(3)}\mathbf{a}))\,.\,|{}_{\delta}\mathbf{d}^* >)$$

avec :

$$Hess_{\delta}\Lambda({}^{(3)}\mathbf{a}) = {}^{(3)}[D] + {}^{(3)}[D]^t = {}^{(3)}[(c_{\delta jk} + c_{j\delta k} + c_{jk\delta}) + (c_{\delta kj} + c_{k\delta j} + c_{kj\delta})]$$

$${}^{(3)}_{\delta}\mathbf{d}^* \equiv ({}_{\delta}d_1,\,{}_{\delta}d_2,\,{}_{\delta}d_3)$$

Mais ici, à cause de l'hypothèse de travail faite ci-dessus (le produit vectoriel est classique), deux relations particulières apparaissent ; tout d'abord :

$$\forall\,\delta = 0,\,1,\,2,\,3\,:\,{}^{(3)}[{}_{\delta}P] = {}^{(3)}[D]$$

Par suite, pour les polynomiales spatiales continues :

$$\forall\,\delta = 0,\,1,\,2,\,3\,:\,{}^{(3)}[{}_{\delta}P] + {}^{(3)}[{}_{\delta}P]^t = Hess_{\delta}\Lambda({}^{(3)}\mathbf{a})$$

$$\forall\,\delta = 0,\,1,\,2,\,3\,:\,{}^{(3)}[{}_{\delta}P] - {}^{(3)}[{}_{\delta}P]^t = {}^{(3)}[0]$$

Ce qui fournit :

$$\forall\,\delta = 0,\,1,\,2,\,3\,:\,{}^{(3)}[{}_{\delta}P] = \frac{1}{2}\,.\,Hess_{\delta}\Lambda({}^{(3)}\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\,.\,[\odot c_{\delta jk}]$$

Et ensuite, bien logiquement, parce que la Hessienne a été supposée non-dégénérée :

$$\forall\,\delta = 0,\,1,\,2,\,3\,:\,{}_{\delta}\mathbf{d}^* = \mathbf{0}$$

Ce qui se traduit par la relation :

$$(c_{\delta j} + c_{j\delta}) + a^0\,.\,(c_{\delta j0} + c_{j\delta 0} + c_{j0\delta} + c_{\delta 0j} + c_{0\delta j} + c_{0j\delta}) = 0$$

Elle peut s'ajouter à la condition d'unicité de la composante temporelle du projectile déjà énoncée précédemment à la fin de la remarque 2.9 et fournir ainsi :

$$\forall\, \delta \,=\, 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \forall\, j \,=\, 1,\, 2,\, 3\,:$$

$$a^0 \,=\, \frac{-(c_{\delta 0} \,+\, c_{0\delta})}{\odot c_{00\delta}} \,=\, \frac{-2\,.\,(c_\delta \,-\, {}_\delta d)}{(c_{\delta 0} \,+\, c_{0\delta})} \,=\, \frac{-(c_{\delta j} \,+\, c_{j\delta})}{\odot c_{0j\delta}}$$

Qui contient en particulier (peu importe à cet endroit s'il s'agit du cube $\odot \mathrm{C}$ ou du cube de référence $\odot \mathrm{C}_0$) :

$$\odot c_{0j\delta} \,=\, \odot c_{00\delta} \cdot \frac{(c_{\delta j} \,+\, c_{j\delta})}{(c_{\delta 0} \,+\, c_{0\delta})}$$

Cette relation se condense en :

$$\forall\, \epsilon,\, \delta \,=\, 0,\, 1,\, 2,\, 3\,:$$

$$\odot c_{0\epsilon\delta} \,=\, \odot c_{00\delta} \cdot \frac{(c_{\delta\epsilon} \,+\, c_{\epsilon\delta})}{(c_{\delta 0} \,+\, c_{0\delta})}$$

Bien qu'apparemment spécieuse, cette petite remarque a une conséquence inattendue du fait que :

$$\odot c_{0\epsilon\delta} \,=\, \odot c_{0\delta\epsilon}$$

Et que :

$$\odot c_{0\delta\epsilon} \,=\, \odot c_{00\epsilon} \cdot \frac{(c_{\delta\epsilon} \,+\, c_{\epsilon\delta})}{(c_{\delta 0} \,+\, c_{0\delta})}$$

Il faut en déduire que l'unicité de la composante temporale du projectile force la relation :

$$\odot c_{00\delta} \,=\, \odot c_{00\epsilon} \,=\, \gamma$$

Ceci suggère l'idée selon laquelle au moins une partie des composantes du cube $\odot \mathrm{C}$ pourraient être remplacées par celles de la somme matricielle $[\mathrm{C}] \,+\, [\mathrm{C}]^t$, ou inversement. Les composantes de la décomposition la plus triviale d'un produit tensoriel déformé par le cube $\odot \mathrm{C}$ apparaissant dans la formulation de la Hessienne sont les :

$$\forall\, \delta,\, \epsilon,\, \delta \,=\, 0,\, 1,\, 2,\, 3\,;\, i \,=\, 1,\, 2,\, 3\,:$$

$$\odot c_{\alpha\epsilon\delta}\,.\,a^\alpha \,=\, \odot c_{0\epsilon\delta}\,.\,a^0 \,+\, \odot c_{i\epsilon\delta}\,.\,a^i$$

Compte tenu des résultats récemment acquis :

$$\odot c_{\alpha\epsilon\delta}\,.\,a^\alpha \,=\, \gamma\,.\,a^0\,.\,\frac{(c_{\delta\epsilon} \,+\, c_{\epsilon\delta})}{(c_{\delta 0} \,+\, c_{0\delta})} \,+\, \odot c_{i\epsilon\delta}\,.\,a^i$$

Lemme 2.4. *Situations quasi-classiques.*

Si :

- (i) la composante temporelle a^0 d'un projectile $^{(4)}\mathbf{a}$ est unique ;
- (ii) chacune des quatre composantes du gradient de la polynomiale décrivant une forme volumique signe l'existence d'une décomposition d'un produit vectoriel classique ;
- (iii) les ailes de la partie symétrique de la matrice [C] n'ont aucune composante nulle, ce qui revient à dire :

$$\forall\, \delta \,=\, 0,\, 1,\, 2,\, 3\,:\, c_{0\delta} \,+\, c_{\delta 0} \,\neq\, 0$$

Alors :

1. La matrice triviale apparue dans la description de la Hessienne de la forme volumique se décompose en deux de la façon suivante :

$$_{\odot C}\Phi({}^{(4)}\mathbf{a})$$

$$=$$

$$a^0 \, . \begin{bmatrix} \odot c_{000} & \odot c_{001} & \odot c_{002} & \odot c_{003} \\ \odot c_{001} & \odot c_{011} & \odot c_{012} & \odot c_{013} \\ \odot c_{002} & \odot c_{012} & \odot c_{022} & \odot c_{023} \\ \odot c_{003} & \odot c_{013} & \odot c_{023} & \odot c_{033} \end{bmatrix} + [\odot c_{i\epsilon\delta} \, . \, a^i]$$

$$=$$

$$\gamma \, . \, a^0 \, . \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{(c_{11}+c_{11})}{(c_{10}+c_{01})} & \frac{(c_{12}+c_{21})}{(c_{20}+c_{02})} & \frac{(c_{31}+c_{13})}{(c_{30}+c_{03})} \\ 1 & \frac{(c_{12}+c_{21})}{(c_{20}+c_{02})} & \frac{(c_{22}+c_{22})}{(c_{20}+c_{02})} & \frac{(c_{32}+c_{23})}{(c_{30}+c_{03})} \\ 1 & \frac{(c_{13}+c_{31})}{(c_{30}+c_{03})} & \frac{(c_{32}+c_{23})}{(c_{20}+c_{02})} & \frac{(c_{33}+c_{33})}{(c_{30}+c_{03})} \end{bmatrix} + [\odot c_{i\epsilon\delta} \, . \, a^i]$$

2. Il existe quatre produits vectoriels classiques éventuellement décomposés non-trivialement de telle manière qu'il est plausible d'écrire en première intention ; voir ci-dessus et aussi [[d]] :

$$|^{(3)}(\mathbf{a} \wedge {}_{\delta}\mathbf{b}) >= \frac{1}{2} \, . \, {}^{(3)}[\odot c_{\delta jk}].|_{\delta}\mathbf{b} > + |_{\delta}^{(3)}\mathbf{z} >$$

Relations dans lesquelles :
— les coefficients de degré trois de la forme volumique qu'on a sous la main fournissent celles des parties principales des décompositions classiques ;

— Puisque :
  — (i) le projectile **a** et la cible **b** sont donnés ;
  — (ii) l'instant est supposé fixé, ce qui permet de ne pouvoir considérer que la partie spatiale du projectile - et elle est unique ;
  — (iii) le projectile interagit avec la cible qui a, à n'importe quel instant donné, quatre projections tridimensionnelles naturelles ;
  — (iv) la géométrie est présupposée être euclidienne à l'instant donné :

Proposition 2.3. *Les quatre vecteurs tridimensionnels* $_{\delta}\mathbf{b}$ *pourraient être les vecteurs formés en ne retenant que trois des quatre composantes du seul vecteur* ${}^{(4)}\mathbf{b}$ *qu'on a à disposition au début de l'énoncé de la question (E) en dimension quatre :*

$$_0\mathbf{b} \, : \, (b^1, \, b^2, \, b^3) \xrightarrow{rep.} A_0$$

$$_1\mathbf{b} \, : \, (b^0, \, b^2, \, b^3) \xrightarrow{rep.} A_1$$

$$_2\mathbf{b} \, : \, (b^0, \, b^1, \, b^3) \xrightarrow{rep.} A_2$$

$$_3\mathbf{b} \, : \, (b^0, \, b^1, \, b^2) \xrightarrow{rep.} A_3$$

Une représentation possible de la partie spatiale du vecteur ${}^{(4)}\mathbf{b}$: (b^0, b^1, b^2, b^3) dans l'espace euclidien tridimensionnel classique est proposée au travers de la Fig.1. Il s'agit bien entendu d'une manière exotique de concevoir l'espace-temps. Je la propose parce que, malgré les efforts intellectuels des meilleurs cerveaux, je ne crois pas qu'il soit vraiment possible de représenter la quatrième dimension de la même manière que les trois dimensions spatiales habituelles.

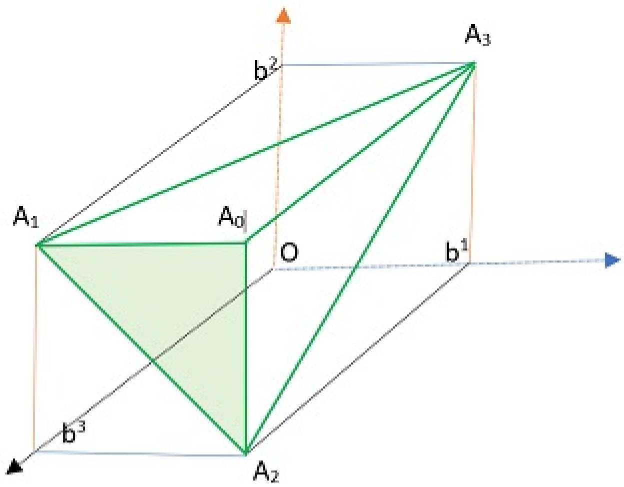

FIGURE 1 – Projection à un instant t d'un vecteur quadri-dimensionnel dans notre monde. La composante temporelle n'est pas représentable avec les outils et les sens humains. C'est la raison pour laquelle une pyramide est le seul moyen dont on dispose pour se faire une idée de ce vecteur.

3 Bibliographie

Références

3.1 Contributions personnelles

[a] PERIAT, T. : Aspects mathématiques de la théorie des produits tensoriels déformés, ISBN 978-2-36923-028-1, EAN 9782369230281, 2-6 juin 2021, 21 pages.

[b] PERIAT, Thierry : (2019, November 17). Particules idéales, vides de Maxwell et cordes élastiques classiques (Version 05 octobre 2018). Zenodo. http ://doi.org/10.5281/zenodo.3544733. Identification : ISBN 978-2-36923-140-0, EAN 9782369231400, version du 5 octobre 2018.

[c] PERIAT, T. : Méthode intrinsèque en dimension quatre, ISBN 978-2-36923-099-1, EAN 9782369230991, v3, 4 mai 2021 (sur le site www.cosmoquant.fr).

[d] PERIAT, Thierry (2019, April 29). Décompositions intrinsèques des produits vectoriels déformés (Version v20180814). Zenodo. http ://doi.org/10.5281/zenodo.2653623. Identification : ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, version du 14 août 2018.