ISBN 978-2-36923-139-4 / EAN 9782369231394 28/09/2018

Table des matières

Le challenge

Résumé des chapitres précédents

Nous abordons maintenant une nouvelle partie de l'exposé expliquant ma vision des espace-temps vides. La première a exposé une partie des outils mathématiques fondamentaux relatifs à la notion de produit tensoriel déformé ; la deuxième a approfondi la notion de C*-algèbre puis commencé à nous faire pressentir le lien entre cette structure mathématique et les régions de l'univers dans lesquelles la gravitation semble avoir un effet nul ; [a]. La troisième a utilisé un raisonnement dû à Lamb et Rutherford[1] pour expliquer qu'un dédoublement des états énergétiques des régions vides (entre états stables et états instables) devrait se manifester par l'apparition de symétries entre ces divers états et découvert que ces symétries sont liées au groupe cyclique des racines cubiques complexes de l'unité.

[1] La démarche a initialement été proposée pour expliquer le dédoublement des raies d'hydrogène ; voir par exemple : Mécanique quantique I; Cohen-Tanoudji, B. Diu et Fr. Lalöe; 1977, complément HIV ; pages 468-473.

Elle a ainsi établi un lien formel supplémentaire entre les C*-algèbres, les régions dans lesquelles la gravitation semble s'annuler et les régions vides dont les états énergétiques seraient instables ; [b]. La quatrième partie, [c], nous a convaincu de l'existence possible de coutants de forces neutres dans le vide électromagnétique (EM) le plus classique qui puisse être imaginé : celui dû à Maxwell, loin de toutes sources, électriques et matérielles.

L'expansion de l'univers

L'astronomie est une science en plein essor ; comme l'univers qu'elle observe et étudie. Nous ne rappellerons pas les progrès accomplis au cours du siècle dernier et encourageons les lecteurs à en prendre connaissance par eux-mêmes en parcourant l'abondante littérature mise à disposition dans les médias sur ce sujet.

Toujours est-il que nous faisons désormais face à un double mystère : (i) l'univers est en expansion accélérée sans que nous connaissions la source énergétique de ce phénomène et (ii) il contient une quantité impressionnante (environ 69% de toutes les énergies recensées à ce jour) d'une énergie de nature inconnue, dite « sombre » [01], [02]. Il peut être tentant de mettre ces deux faits en relation, même si le fait de pratiquer de la sorte n'explique encore rien.

L'équation d'état des régions vides est présumée être de nature quantique puisqu'elle s'écrirait comme un équilibre entre une densité volumique d'énergie et une pression négative.

$$\rho_{\text{Volume}}.\, c^2 + p \sim 0$$

Cette relation[2] évoque la famille des équations d'état décrivant les fluides parfaits. Poursuivant mentalement cette piste de réflexion, nous remémorant les résultats de la quatrième partie de cette investigation globale, nous pouvons être tentés d'imaginer les régions apparemment vides comme une sorte d'océan énergétique parcouru par divers courants (l'image du courant d'eau dans l'eau de l'océan maritime) ; le tout s'étalant sur un volume croissant exponentiellement. Ce qui nous rapproche lentement de la notion de vortex, de tube d'énergie, et… avec un peu d'imagination, de corde élastique faite d'énergie. Nous y voilà.

A défaut de pouvoir être en mesure de nous imaginer comment ce scénario fictif expliquerait l'expansion de l'univers et son énergie sombre, il offre une vision alternative semi-classique- à la notion de particule. Cette partie de l'exposé va donc s'attacher à redémontrer l'es équations caractérisant le comportement d'une corde élastique classique tendue entre deux point fixes et soumises, dans un premier temps, à une force de gravitation (par exemple terrestre). C'est un travail que nous avons réalisé vers la fin des années soixante-dix et fût, en son temps proposé aux élèves de l'école Polytechnique. C'est un travail long et fastidieux dont les lecteurs pourront penser dans un premier temps qu'il n'apporte rien de nouveau. Pour autant, nous pensons que le sens extrapolé de cette investigation contient des informations fondamentales sur la nature des régions vides.

Le modèle classique de la corde élastique

Les approches modernes consacrées à l'étude des particules élémentaires abandonnent la représentation ponctuelle et classique de celles-ci. Chacune d'entre elles est plus volontiers décrite comme une sorte de tube spatio-temporel. Comme tous ces tubes, à priori, possèdent une certaine densité volumique de matière et subissent l'effet de phénomènes gravitationnels, nous sommes poussés à étudier la forme prise par une corde élastique tendue entre deux points fixes soumise à la

---

[2] et ceci est connu depuis fort longtemps des mathématiciens ; voir par exemple l'ouvrage historique d'A. Lichnerowicz : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, 298 p. Masson et Cie éditeurs, Paris (1955).

seule action de sa masse dans le champ de pesanteur terrestre ; à titre d'exemple didactique pour la suite.

Les conditions de l'expérience

Définition de la corde élastique

On entend par corde élastique tout objet capable de se déformer, c'est-à-dire de subir des modifications de ses dimensions (notamment et en particulier de sa dimension longitudinale), et, sous l'effet d'une force de tension interne liée à la nature de la matière dont elle est faite, de reprendre sa forme première, dite de repos initial.

Les conditions initiales de l'expérience

L'expérience la plus élémentaire consiste à considérer une corde élastique filiforme, assimilable à un cylindre déformable dont le diamètre se résout aux dimensions d'un point. C'est ce qu'on fera ici dans un premier temps pour se familiariser avec les cordes. Ces cordes filiformes ont l'avantage de pouvoir être assimilées à une succession discrète et continue de points. Mathématiquement, elles peuvent être vues comme des courbes dans un espace à deux, trois ou, pourquoi pas, quatre dimensions.

Il est connu que les cordes élastiques possèdent une limite supérieure d'élasticité et qu'au-delà d'une certaine contrainte, la déformation aboutit à la rupture du matériau. On supposera évidemment par commodité que cette limite n'est jamais atteinte dans le cadre des expériences décrites ici.

Soit donc une table plane et horizontale dont l'une des dimensions est donnée et égale à L. On suppose pour le besoin de l'expérience que cette table est encastrée exactement entre deux murs distants de L. Une corde élastique filiforme est disposée de manière rectiligne sur cette table et on suppose que la longueur au repos de celle-ci est de L. Elle est fixée sans tension à chacune de ses deux extrémités au mur qui encadre la table.

Dans les conditions dites de repos, la corde ne subit aucune tension, horizontale ou verticale, en aucun de ses points. En effet, la table sur laquelle elle repose compense exactement en chacun de ses points la tension verticale que son propre poids pourrait engendrer. Le fait qu'elle ne subisse du coup aucune tension externe annule de facto les tensions horizontales de rappel qu'elle aurait manifesté sinon.

L'étude menée ci-dessous se propose de découvrir la forme prise par la corde lorsque la table est retirée.

Analyse de la situation

Le préjugé

L'expérience et le sens commun enseignent que la forme adoptée par cette corde dans les conditions décrites ci-avant correspond essentiellement à la forme qu'elle adopte du fait de la pesanteur terrestre et de son aptitude à se déformer (en rapport avec sa constitution).

Assez fréquemment, les cordes utilisées permettent de se rendre compte que la forme obtenue est celle dite d'une chaînette tendue entre O et M (les deux points d'attache de la corde). Pour ne cependant pas préjuger de ce résultat de l'observation, nous allons nous s'astreindre à un raisonnement très général.

Méthodologie

La corde est donc supposée avoir une forme quelconque tout en commençant en O et tout en finissant en M, sans interruption (la limite d'élasticité n'est pas dépassée et la corde n'est pas rompue) -elle est donc continue-.

Nous supposerons qu'il n'y a pas de vent et donc que la déformation de la corde se fait uniquement dans le plan défini par la corde au repos et le plan vertical à celle-ci. Moyennant toutes ces précautions, il est possible d'assimiler la corde à une fonction numérique réelle continue, f, définie sur l'intervalle [0, L].

Le segment de droite [O, M] peut être séparé en N segments de longueurs égales à Δx. De sorte que bien entendu :
(1)

$$L = N. \Delta x$$

Ces segments vont être considérés comme les projections horizontales selon un axe vertical des différents arcs curvilignes décrits par la corde au cours de son trajet entre O et M. Ces petits segments curvilignes sont limités, grâce à un découpage conventionnel, par les points M(i) et M(i+1) sachant que M(0) = O et M(N) = M.

Il faut maintenant analyser les forces qui s'exercent sur chacun de ces segments curvilignes et comment elles s'exercent.

Analyse des forces

Chaque segment subit, du fait de sa propre masse et du fait qu'il est plongé dans le champ de pesanteur terrestre, une force verticale, appliquée à peu près en son milieu, dirigée de haut en bas et d'une intensité donnée par :
(2)

$$P(i, i+1) = \rho(i, i+1). \Delta L(i, i+1). g(i, i+1)$$

Où :

- $\rho(i, i+1)$ représente *la densité linéaire moyenne de matière de la corde* sur le segment curviligne [M(i), M(i+1)] ;
- $\Delta L(i, i+1)$ représente la longueur du segment curviligne [M(i), M(i+1)] ;
- g(i, i+1) représente l'intensité du champ de pesanteur terrestre sur le segment curviligne [M(i), M(i+1)].

Cette action a pour effet essentiel de déplacer l'ensemble des points de la corde vers le bas (approximativement vers le centre de la terre en fait) et, du fait qu'elle possède deux points fixes en O et M et qu'elle est élastique, de créer une force de rappel à l'extrémité de chacun des segments curvilignes en laquelle il est possible de décomposer sa forme réelle.

L'extrémité M(i) subit une tension $\mathbf{T}^+(i)$ tangente à f, en ce point qui tend à la ramener vers M(i+1) et une tension $\mathbf{T}^-(i)$ tangente à f en ce point qui tend à la ramener vers M(i-1). Par ailleurs, l'extrémité M(i+1) subit une tension $\mathbf{T}^+(i+1)$ tangente à f en ce point qui tend à la ramener vers M(i) et une tension $\mathbf{T}^-(i+1)$ tangente à f en ce point qui tend à la ramener vers M(i). Chaque segment curviligne [M(i), M(i+1)] subit donc l'action de trois forces : $\mathbf{P}(i,i+1)$, $\mathbf{T}^+(i)$ et $\mathbf{T}^-(i+1)$. Deux d'entre elles, $\mathbf{T}^+(i)$ et $\mathbf{T}^-(i+1)$, ont tendance à exercer une sorte de couple sur ses extrémités.

Les conditions de l'équilibre

Au bout d'un moment l'équilibre est atteint. La corde s'immobilise dans une nouvelle position de repos. Lorsque N est très grand il est raisonnable de considérer que ces trois forces s'exercent approximativement en un seul point que nous pouvons supposer être le milieu du segment curviligne [M(i), M(i+1)]. La condition suivante y est donc approximativement remplie:
(3)

$$\forall\ i, \mathbf{P}(i, i+1) + \mathbf{T}^+(i) + \mathbf{T}^-(i+1) = \mathbf{0}$$

Analyse des conditions de l'équilibre

Nous allons maintenant projeter l'équation d'équilibre obtenue précédemment sur les axes horizontaux et verticaux du repère des discussions. Ceci permet d'obtenir les deux équations :

(3.x)

$$T^{+}(i).\ \cos(\theta_i) - T^{-}(i+1).\ \cos(\theta_{i+1}) = 0$$

(3.y)

$$-P(i, i+1) + T^{+}(i).\ \sin(\theta_i) - T^{-}(i+1).\ \sin(\theta_{i+1}) = 0$$

De la relation (3.y) nous tirons :

(4)

$$-P(i, i+1) + T^{+}(i).\ \cos(\theta_i).\ tg(\theta_i) - T^{-}(i+1).\ \cos(\theta_{i+1}).\ tg(\theta_{i+1}) = 0$$

L'utilisation de la relation (3.x) dans la relation (4) fournit alors:

(5)

$$-P(i, i+1) + T^{+}(i).\ \cos(\theta_i).\ (tg(\theta_i) - tg(\theta_{i+1})) = 0$$

En injectant la relation (2) dans cette relation (5) :

(6)

$$-\rho(i, i+1).\ \Delta L(i, i+1).\ g(i, i+1) + T^{+}(i).\ \cos(\theta_i).\ (tg(\theta_i) - tg(\theta_{i+1})) = 0$$

Nous savons par ailleurs que dans les conditions habituelles, c'est-à-dire dans celles offertes à la surface de la terre sous l'influence de la pesanteur, le calcul des longueurs repose sur l'emploi du théorème de Pythagore ; de sorte que la relation suivante donne une bonne approximation de la longueur de n'importe quel segment :

(7)

$$\Delta L(i, i+1) = \int [1 + f'^2(x)]^{1/2}.\ dx, \text{ entre } M(i) \text{ et } M(i+1)$$

Pour alléger l'écriture il est intéressant de poser :

(8)

$$u(x) = (1 + f'^2(x))^{1/2}$$

Ceci permet de réécrire la relation (7) :

(9)

$$\Delta L\ (i, i+1) = \int u(x).\ dx, \text{ entre } M(i) \text{ et } M(i+1)$$

Mais ceci permet surtout de faire une intégration par partie à répétition sur cette relation. Nous obtenons ainsi :

(10)

$$\Delta L(i, i+1) = \sum_{p = 1 \text{ à } N} \frac{(-1)^{p-1}}{p!}.\ x^p.\ u^{p-1}(x)] + 0(N+1) \text{ entre } M(i) \text{ et } M(i+1)$$

Avec :

(11)

$$u^{(0)}(x) = u(x)$$

Il est ensuite possible de montrer que nous pouvons toujours poursuivre avec :

(12)

$$\Delta L\ (i, i + 1) = K\ (i, i + 1).\ \Delta x$$

Où la fonction nouvelle K(x) introduite est du genre :

(13)

$$K\ (i, i + 1) = u(x) + ½.\ u'(x).\ \Delta x - \frac{1}{6}.\ u''(x).\ (\Delta x)^2 + ...$$

Et où le développement exact dépend du degré d'approximation souhaité. Par conséquent, nous parvenons ainsi doucement à :
(14)

$$- \rho(i, i+1).\ K(i, i + 1).\ \Delta x.\ g(i,i+1) + T^{+}(i).\ \cos(\theta_i).\ (f'(M(i)) - f'(M(i + 1))) = 0$$

Puis à :
(15)

$$- \rho(i, i+1).\ K(i, i + 1).\ g(i, i+1) + T^{+}(i).\ \cos(\theta_i).\ \frac{f'(M(i)) - f'(M(i+1)}{\Delta x} = 0$$

Le passage à la limite lorsque l'intervalle Δx devient infiniment petit fournit :
(16)

$$\text{Limite}_{\ \Delta x \to 0}\,(15) = -\rho(x).\ u(x).\ g(x) + T^{+}(i).\ \cos(\theta_i).\ f''(x) = 0$$

Plus exactement, en replaçant la fonction numérique f(x) dans l'expression limite obtenue ci-dessus :
(17)

$$-\rho(x).\ (1 + f'^2\,(x))^{1/2}.\ g(x) + T_x.\ f''(x) = 0$$

Où nous avons posé :
(18)

$$T_x = T^{+}(i).\ \cos(\theta_i)$$

La relation (17) est très intéressante. Elle donne le lien entre la pente locale de la fonction f(x) décrivant la forme de la corde élastique tendue entre deux points fixes, sa densité linéaire, la valeur locale du champ de pesanteur à laquelle elle est soumise et la tension horizontale existant au bout de la corde. Nous pouvons encore l'écrire sous la forme suivante qui permet d'isoler l'élément local de densité linéaire de poids (le numérateur de terme de droite) :
(19)

$$\frac{f''(x)}{\sqrt[2]{1+f'^2(x)}} = \rho(x).\ \frac{g(x)}{T_x}$$

Dans les zones où la géométrie reste euclidienne par approximation (euclidienne parce nous avons fait appel à la relation (7) pour calculer la longueur d'un élément infinitésimal de longueur de corde), nous pouvons finalement interpréter ce résultat général en disant que la forme f(x) de la corde va dépendre principalement (i) de sa densité linéaire de poids et (ii) du ratio entre la pesanteur locale et la tension horizontale de rappel qu'elle subit. C'est un résultat facilement admissible par le bon sens et que nous pouvons facilement envisager de généraliser.

Recherche des formes de la corde

Recherche des pentes de la corde

La relation (19) revêt par chance un formalisme facile à intégrer. En effet, considérons la fonction générique connue :
(20)

$$\text{Arcsinh } f'(x) = \text{Log }\{f'(x) + (1 + f'^2\,(x))^{1/2}\}$$

Après une dérivation par rapport à x il vient (voir par exemple les formules dans [03 ; p. 177]) :
(21)

$$\frac{d\ arcsinh\ f'(x)}{dx} = \frac{f''(x)}{\sqrt[2]{1+f'^2(x)}}$$

Nous en déduisons donc en partant de (19) que :
(22)

$$\text{Arcsinh}(f'(x)) = \int \rho(x).\frac{g(x)}{T_x}.dx + \text{constante d'intégration}$$

Nous venons donc de mettre en évidence, non pas encore la forme exacte de la corde, mais celle de la tangente en chacun de ses points et cela rapproche évidemment singulièrement du résultat recherché.

En calculant le sinus hyperbolique de la relation (22) il vient encore :
(23)

$$\sinh\{\text{Arcsinh}(f'(b)) - \text{Arcsinh}(f'(a))\} = \sinh\int \rho(x).\frac{g(x)}{T_x}.dx + \text{constante}$$

En tenant compte des règles de combinaison sur les sinus hyperboliques :
(24)

$$f'(b).\cosh(\text{Arcsinh } f'(a)) - f'(a).\cosh[\text{Arcsinh } f'(b)] = \sinh(\int \rho(x).\frac{g(x)}{T_x}.dx) + \text{constante}$$

Or, par définition :
(25)

$$\forall\, y,\ \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$$

Ceci permet d'écrire :
(26)

$$\cosh^2[\text{Arcsinh } f'(x)] - \sinh^2[\text{Arcsinh } f'(x)] = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\cosh^2[\text{Arcsinh } f'(x)] = \text{sh}^2[\text{Arcsinh } f'(x)] + 1$$

$$\Downarrow$$

$$\cosh^2[\text{Arcsinh } f'(x)] = 1 + f'^2(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\cosh[\text{Arcsinh } f'(x)] = (1 + f'^2(x))^{1/2}$$

En particulier :
(27)

$$\cosh[\text{Arcsinh } f'(a)] = [1 + f'^2(a)]^{1/2}$$

$$\cosh[\text{Arcsinh } f'(b)] = [1 + f'^2(b)]^{1/2}$$

De sorte que :
(28)

$$f'(b).[1 + f'^2(a)]^{1/2} - f'(a).[1 + f'^2(b)]^{1/2} = \sinh(\int \rho(x).\frac{g(x)}{T_x}.dx + \text{constante}$$

En intégrant entre 0 et b :
(29)

$$f'(b).[1 + f'^2(0)]^{1/2} - f'(0).[1 + f'^2(b)]^{1/2} = \sinh\int \rho(x).\frac{g(x)}{T_x}.dx + \text{constante}$$

En manipulant suffisamment cette relation, il apparaît que nous sommes en présence d'un trinôme du second degré en f'(b). Ce résultat indique que nous pouvons théoriquement trouver, dans les conditions d'équilibre de la corde et selon l'endroit considéré sur celle-ci, deux, une ou aucune solution(s).

Intuitivement, l'absence de solution devrait correspondre au fait d'être en dehors de la corde. Mais les conditions de l'expérience, de son analyse et de l'intégration expliquent difficilement qu'une telle opportunité puisse se produire ici. Le nombre des solutions dépend en fait d'un discriminant qui se simplifie généreusement en :
(30)

$$\Delta = f'^2(0).\cosh^2[\int_0^b \rho(x).\, g(x).\, dx/T_x]$$

Ce discriminant, par chance, est toujours positif ou nul. Le polynôme admet donc toujours une ou deux solutions. Le fait que la courbe représentative de la corde admette toujours au moins une dérivée en chacun de ses points est rassurant, mathématiquement et physiquement, mais le fait qu'elle puisse éventuellement en posséder deux pose un petit problème d'interprétation physique sur lequel nous reviendrons ultérieurement.

Le trinôme n'admet de solution unique que pour les cas physiques où la pente en O est nulle ou quasi-nulle (f'(0) = 0) car un cosinus hyperbolique est toujours supérieur ou égal à un. Physiquement, cette pente en O n'est nulle que si la corde est parfaitement horizontale. C'est la condition imposée avant de retirer la table qui supporte initialement la corde et avant donc l'instant à partir duquel la pesanteur commence à agir sur elle.

Les solutions générales sont données par :

(31)

$$f'(b) = (1 + f'^2(0))^{1/2}.\ \sinh[\textstyle\int_0^b \rho(x).\ g(x).\ dx\ /T_x] \pm f'(0).\ \cosh[\textstyle\int_0^b \rho(x).\ g(x).\ dx\ /T_x]$$

La solution unique (dite double) est fournie par :

(32)

$$f'(0) = 0 \text{ et } f'(b) = \sinh[\textstyle\int_0^b \rho(x).\ g(x).\ dx\ /T_x]$$

En fait il devient possible d'établir un lien entre le cas de la solution double et celui des deux solutions distinctes. Si nous prenons soin de noter $f'_{\Delta = 0}(b)$ la pente correspondant à une solution double du trinôme (29), il apparaît alors la relation :

(33)

$$f'_{\Delta}(b) = (1 + f'^2(0))^{1/2}.\ f'_{\Delta = 0}(b) \pm f'(0).\ (1 + f'_{\Delta = 0}(b))^{1/2}$$

Les deux types de solutions sont liées entre elles. Nous allons laisser là une fois encore ce résultat pour revenir à l'objectif que nous nous étions fixés initialement : « établir un lien entre cette description classique de la corde élastique et la manière dont une particule pourrait être décrite au sein de la relativité générale ».

Propositions concernant la nature de l'énergie sombre

Les lecteurs intéressés peuvent parcourir la littérature spécialisée actuelle pour découvrir les nombreuses interprétations proposées pour l'énergie sombre. Parmi elles, certains auteurs pressentent un lien avec la chromodynamique quantique [04], d'autres avec la constante cosmologique [05], d'autres encore avec un principe holographique [06], avec des modifications du calcul de Regge [07] ou avec les champs fantômes de Veneziano [08]. Et cette liste n'est pas exhaustive.

Conclusion

Cette partie de l'ouvrage consacré à exposer ma vision des régions vides de l'univers s'est concentrée sur l'idée que ces régions ne sont peut-être pas strictement homogènes, contrairement à une vision hyperclassique, statique et figée ; au demeurant actuellement démentie par les observations astronomiques. Elle a ainsi envisagé l'idée de l'existence de courants énergétiques filiformes dont certains, peut-être, pourraient être identifiés avec quelques-unes des particules élémentaires du bestiaire actuel. Pour cette raison, elle a établi une première loi concernant les formes de ces fils énergétiques dans des conditions ultra-classiques. Le but poursuivi consiste à extrapoler ensuite ces premiers acquis à des situations plus proches de celles rencontrées dans les espaces interstellaires.

Bibliographie indicative

Articles, cours et livres

[01] Dark energy – a pedagogic review; arXiv: astro-ph/0409166v3, 11 September 2004

[02] Dark energy and the accelerating universe; arXiv: 0803.0982v1 [astro-ph], 7 March 2008.

[03] Encyclopédie Bordas, Mathématiques 50/51, © Bordas éditeur, 1972.

[04] The QCD nature of the dark energy; arXiv: 0909.2684v4 [astro-ph.CO], 12 March 2010.

[05] Accelerated expansion from negative Λ; arXiv: 1205.3807v2 [hep-th], 30 May 2012.

[06] Entropic accelerating universe; arXiv: 1002.4278v3 [hep-th], 24 October 2010.

[07] Modified Regge calculus as an explanation for dark energy; arXiv: 1110.3973v2, [gr-qc], 26 January 2012.

[08] More on QCD ghost dark energy; arXiv: 1201.2494v1 [astro-ph.CO], 12 January 2012.

Contributions personnelles

[a] PERIAT, T. : Produits tensoriels déformés et C-algèbres ; ISBN 978-2-36923-137-0, EAN 9782369231370.*

[b] PERIAT, T. : Les régions vides : la vision empruntée à Lamb et Rutherford ; ISBN 978-2-36923-138-7, EAN 9782369231387.

[c] PERIAT, T. : Courants de forces dans le vide de Maxwell.