©Thierry PERIAT : Découverte d'un formalisme pour les champs électromagnétiques, ISBN 978-2-36923-067-0, 30 mars 2020.

Mots clés : Champs électromagnétiques, représentations, produits tensoriels.

Contents

french

1 Introduction

1.1 Motivation

Au cours d'explorations précédentes qui ont été développées dans un contexte mathématique purement tridimensionnel, l'existence de moments angulaires déformés a pu clairement être justifiée ; j'invite les lecteurs à découvrir mon dcument: "La proposition d'Einstein-Rosen (1935) revisitée", [[a]] réexaminant l'article [[01]].

Ici, le travail prend d'emblée place dans un environnement quadridimensionnel et, y extrapolant le résultat précédent, je suppose sans démonstration l'existence d'un objet mathématique qui n'est rien d'autre qu'un produit tensoriel impliquant des paires $(\mathbf{u},\, \mathbf{x}) \equiv$ (vitesse, événement) ; il est déformé par un cube A au départ quelconque. Pour rappel, cet objet se laisse décomposer trivialement de la façon suivante :

$$\forall\, (\mathbf{u},\, \mathbf{x}) \,\in\, E(4,\, R) \,\times\, E(4,\, R) \,:\, |\otimes_A (\mathbf{u},\, \mathbf{x}) >=\, {}_A\Phi(\mathbf{u}).|\mathbf{x}>$$

N'importe quel champ électromagnétique (abréviation : EM) peut se concevoir indifféremment soit comme une paire de vecteurs $(\mathbf{E},\, \mathbf{H})$ dans $\mathrm{E}(3,\mathrm{R}) \times \mathrm{E}(3,\mathrm{R})$ [1] ou comme un tenseur admettant une représentation matricielle dans M(4, R), l'ensemble des matrices carrées (4 - 4) à entrées réelles ; voir par exemple : [[02]; p. 73], [[03] ; p. 114], [[04] ; p. 25, (6.5)] et plus bas dans ce texte l'Equ.(33).

Parce que je crois que cette remarque aura plus tard son utilité et qu'elle fonde au moins formellement la quête poursuivie dans ce document, je noterai ici en passant que cette représentation matricielle est aussi la représentation d'une décomposition triviale lorsque le cube A est anti-symétrique et anti-réduit (voir ma sémantique dans [[b]]) ; donc ramené à un élément $\mathbf{a}$ de E(4, R) :

$$A \to\; \mathbf{a} \,\in\, E(4,\, R) \,:\, F \,\equiv\, {}_{\mathbf{a}}\Phi(\mathbf{u}) \tag{1}$$

L'intérêt de cette incidente étant d'attirer l'attention sur la multiplicité possible des représentations d'un champ EM et sur le fait qu'un acteur généralement non

[1] ... donc comme un bi-vecteur.

noté, le cube A, agit en sous-main dans chacune de ces représentations. Au départ poussé par cette intuition, je parie que chaque représentation matricielle d'un champ électromagnétique peut s'exprimer en fonction d'une décomposition triviale ${}_A\Phi(\mathbf{u})$ = ${}_A\Phi$ (plus brièvement si cette écriture ne génère aucune confusion) dans laquelle A est n'importe quel cube. Plus précisément :

Proposition 1.1. *Il existe une paire de scalaires* $(s_1,\ s_2)$ *dans* R^2 [2] *compatible avec une reformulation de la représentation matricielle générique d'un champ électromagnétique F dans M(4, R) qui dépende à la fois du tenseur métrique G et de la décomposition triviale* ${}_A\Phi$.

$$\exists\,(s_1,\ s_2)\ \in\ R^2 :\ F\ =\ s_1\,.\,G\,.\,{}_A\Phi\ +\ s_2\,.\,{}_A\Phi^t\,.\,G \tag{2}$$

$$F\ =\ [F_{\alpha\beta}],\ G\ =\ [g_{\alpha\beta}],\ {}_A\Phi\ =\ {}_A\Phi(\mathbf{u}),\ [M]\ =\ [m_{\alpha\beta}]^t\ =\ [m_{\beta\alpha}]\ =\ [M]^t$$

Preuve :
1) Préliminaires : Le premier obstacle technique est dû au fait que les formalismes modernes font intervenir le vecteur "potentiel du champ électromagnétique" ; il est traditionnellement noté : **A** et c'est un élément de E(4, R), voire de E(4, C). Heureusement pour la suite de la démonstration, il est également connu que les charges électriques ayant un mouvement uniforme dans une région baignée par un tel potentiel possèdent une vitesse proportionnelle à celui-ci [[02] ; p. 109, (38,5)] ; je généraliserai donc cette formule en écrivant :

$$\mathbf{A}\ =\ \frac{\phi}{c}\,.\,\mathbf{u} \tag{3}$$

et je concentrerai mon attention sur les produits tensoriels déformés suivants :

$$\forall\,(\mathbf{A},\,\mathbf{x})\ \in\ E(4,\,R)\ \times\ E(4,\,R) :\ |\otimes_A(\mathbf{A},\,\mathbf{x})>=\ {}_A\Phi(\mathbf{A}).|\mathbf{x}> \tag{4}$$

La proposition symbolisée par l'Equ.(2) devient :

$$\exists\,(s_1,\ s_2)\ \in\ R^2 :\ \frac{\phi}{c}\,.\,F\ =\ s_1\,.\,G\,.\,{}_A\Phi(\mathbf{A})\ +\ s_2\,.\,{}_A\Phi^t(\mathbf{A})\,.\,G \tag{5}$$

et elle n'a de sens que pour les zones de l'espace-temps dans lesquelles une charge électrique a un mouvement uniforme.

Ceci étant posé, je rappelerai quelques éléments simples du calcul. L'Equ.(4) s'écrit dans la base canonique Ω à laquelle l'espace E(4, R) peut être rapporté :

$$\forall\,(\mathbf{A},\,\mathbf{x})\ \in\ E(4,\,R)\ \times\ E(4,\,R) :\ A^\gamma_{\alpha\beta}.A^\alpha.x^\beta.\mathbf{e}_\gamma\ =\ {}_A\Phi_{\gamma\beta}(\mathbf{A}).x^\beta.\mathbf{e}_\gamma \tag{6}$$

Justement parce que Ω est une base, il en résulte le systéme :

$$\forall\,(\mathbf{A},\,\mathbf{x})\ \in\ E(4,\,R)\ \times\ E(4,\,R) :\ \{A^\gamma_{\alpha\beta}.A^\alpha\ -\ {}_A\Phi_{\gamma\beta}(\mathbf{A})\}.x^\beta\ =\ 0 \tag{7}$$

Pour que cette équation soit vraie partout où la particule passe pendant sa durée de vie, il faut et suffit de poser :

$$\forall\,(\mathbf{A},\,\mathbf{x})\ \in\ E(4,\,R)\ \times\ E(4,\,R) :\ {}_A\Phi(\mathbf{A})\ =\ [{}_A\Phi_{\gamma\beta}(\mathbf{A})]\ =\ [A^\gamma_{\alpha\beta}.A^\alpha] \tag{8}$$

Ce qui fournit l'expression générique de la décomposition triviale. La Prop.1.1 se traduit désormais par :

$$\exists\,(s_1,\ s_2)\ \in\ R^2 :\ \frac{\phi}{c}\,.\,F_{\alpha\beta}\ =\ s_1\,.\,g_{\alpha\gamma}\,.\,{}_A\Phi_{\gamma\beta}(\mathbf{A})\ +\ s_2\,.\,{}_A\Phi^t_{\alpha\gamma}(\mathbf{A})\,.\,g_{\gamma\beta} \tag{9}$$

[2] éventuellement dans C^2 puisque F pourrait aussi être un élément de M(4, C)

ISBN 978-2-36923-067-0, 30 mars 2020.

En faisant appel à l'Equ.(7) et à la seconde ligne de l'Equ.(2), il vient ensuite :

$$\exists\,(s_1,\,s_2)\,\in\,R^2 : \frac{\phi}{c}\,.\,F_{\alpha\beta}\;=\;(s_1\,.\,g_{\alpha\gamma}\,.\,A^{\gamma}_{\epsilon\beta}\;+\;s_2\,.\,A^{\gamma}_{\epsilon\alpha}\,.\,g_{\gamma\beta}).A^{\epsilon} \tag{10}$$

qui, dans les circonstances spéciales de cette démonstration et à cause de l'Equ.(3), pourrait tout aussi bien s'écrire :

$$\exists\,(s_1,\,s_2)\,\in\,R^2\;:\;F_{\alpha\beta}\;=\;(s_1\,.\,g_{\alpha\gamma}\,.\,A^{\gamma}_{\epsilon\beta}\;+\;s_2\,.\,A^{\gamma}_{\epsilon\alpha}\,.\,g_{\gamma\beta}).u^{\epsilon}$$

2) Hypothèse du transport parallèle dans une connexion : Et justement, dans ces circonstances, les principes de l'optique géométrique moderne ainsi que le bon sens autorisent à considérer qu'une charge se déplaçant uniformément dans une zone de l'espace-temps le fait en transportant ses diverses caractéristiques parallèlement à elles-mêmes ; par exemple : sa vitesse, même lorsque celle-ci se trouve exceptionnellement être colinéaire au potentiel-vecteur. Cette remarque revient à dire que la charge suit une géodésique. A supposer alors (*hypothèse de travail*) que le cube A déformant le produit tensoriel serait aussi celui de la connexion, il deviendrait permis d'écrire [[05] ; p. 26, (1.7.4)] :

$$A^{\alpha}_{\lambda\beta}.A^{\lambda}\;+\;\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\;=\;0 \tag{11}$$

Maintenant, ce n'est pas un scoop d'écrire les composantes classiques d'un champ électromagnérique en fonction des dérivées partielles d'un champ de potentiel de la façon suivante [[04] ; p. 26, (6.8)] :

$$F^{\alpha\beta}\;=\;\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\;-\;\frac{\partial A^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} \tag{12}$$

Quand l'Equ.(11) est vraie, il en résulte que :

$$F^{\alpha\beta}\;=\;(A^{\beta}_{\lambda\alpha}\;-\;A^{\alpha}_{\lambda\beta}).A^{\lambda} \tag{13}$$

Remarque en passant : si le cube est réduit (voir la sémantique dans [[b]]), le champ EM est nul. Mais quand l'Equ.(11) est vraie, il en résulte aussi que la Prop.1.1 exprimée au travers de l'Equ.(10) devient :

$$\exists\,(s_1,\,s_2)\,\in\,R^2 : \frac{\phi}{c}\,.\,F_{\alpha\beta}\;=\;-s_1\,.\,g_{\alpha\gamma}\,.\,\frac{\partial A^{\gamma}}{\partial x^{\beta}}\;-\;s_2\,.\,\frac{\partial A^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}}\,.\,g_{\gamma\beta} \tag{14}$$

Plus couremment, la littérature [[03] ; p. 114, pas de numéro], [[06] ; p. 45, pas de numéro] propose la relation suivante :

$$F_{\alpha\beta}\;=\;\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x_{\beta}}\;-\;\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x_{\alpha}} \tag{15}$$

et, du seul point de vue des mathématiques, la coincidence entre les Equ.(14) et (15) est par exemple trivialement assurée lorsque :

$$\exists\,(s_1,\,s_2)\;=\;(-1,\,1)\,\in\,R^2;\,g_{\alpha\gamma}\;=\;\delta^{\alpha}_{\gamma}\;\Longleftrightarrow\;G\;=\;Id_4 \tag{16}$$

Mais est-ce une solution réellement intéressante du point de vue physique?

Lemme 1.1. *Dans une géométrie quadri-dimensionnelle dont la métrique est représentée par la matrice identité, Id_4, toute représentation classique d'un champ EM dans M(4, R), Equ.(15), peut se comprendre comme étant un cas particulier de l'Equ.(2) correspondant à la validation des Equ.(3) et (11), c'est-à-dire à l'existence d'une charge électrique se déplaçant (i) uniformément à la vitesse* **u** *proportionnelle au champ potentiel sous-jacent,* **A**, *et (ii) parallèlement à elle-même dans la connexion affine représentée par le cube A, si la paire de scalaire vaut (-1, 1).*

Est-ce la seule solution possible? En multipliant l'Equ.(14) par l'inverse de la métrique (supposée inversible pour l'occasion) sur le le côté gauche, il vient :

$$\exists\,(s_1,\, s_2)\,\in\,R^2:\,\frac{\phi}{c}\,.\,g^{\epsilon\alpha}.F_{\alpha\beta}\,=\,-s_1\,.\,g^{\epsilon\alpha}.g_{\alpha\gamma}\,.\,\frac{\partial A^\gamma}{\partial x^\beta}\,-\,s_2\,.\,g^{\epsilon\alpha}.\frac{\partial A^\gamma}{\partial x^\alpha}\,.\,g_{\gamma\beta} \tag{17}$$

$$\downarrow$$

$$\exists\,(s_1,\, s_2)\,\in\,R^2:\,\frac{\phi}{c}\,.\,F^\epsilon{}_\beta\,=\,-s_1\,.\,\frac{\partial A^\epsilon}{\partial x^\beta}\,-\,s_2\,.\,g^{\epsilon\alpha}.\frac{\partial A^\gamma}{\partial x^\alpha}\,.\,g_{\gamma\beta}$$

Et, en se servant des Equ.(11) et (8) à l'envers :

$$\exists\,(s_1,\, s_2)\,\in\,R^2:\,\frac{\phi}{c}\,.\,F^\epsilon{}_\beta\,=\,s_1\,.\,A^\epsilon_{\lambda\beta}\,.\,A^\lambda\,-\,s_2\,.\,g^{\epsilon\alpha}.\frac{\partial A^\gamma}{\partial x^\alpha}\,.\,g_{\gamma\beta}$$

$$\downarrow$$

$$\exists\,(s_1,\, s_2)\,\in\,R^2:\,\frac{\phi}{c}\,.\,F^\epsilon{}_\beta\,=\,s_1\,.\,{}_A\Phi_{\epsilon\beta}(\mathbf{A})\,-\,s_2\,.\,g^{\epsilon\alpha}.\frac{\partial A^\gamma}{\partial x^\alpha}\,.\,g_{\gamma\beta}$$

$$\downarrow$$

$$\exists\,(s_1,\, s_2)\,\in\,R^2:\,\frac{\phi}{c}\,.\,[F^\epsilon{}_\beta]\,=\,s_1\,.\,{}_A\Phi(\mathbf{A})\,-\,s_2\,.\,G^{-1}.[\frac{\partial A^\gamma}{\partial x^\alpha}]\,.\,G$$

La question n'est plus alors de chercher une coincidence avec l'Equ.(15) mais de remarquer incidemment que cette expression peut aussi s'écrire :

$$\exists\,(s_1,\, s_2)\,\in\,R^2:\,[F^\epsilon{}_\beta]\,=\,s_1\,.\,{}_A\Phi(\mathbf{u})\,-\,s_2\,.\,\frac{c}{\phi}\,.\,G^{-1}.[\frac{\partial A^\gamma}{\partial x^\alpha}]\,.\,G \tag{18}$$

Remarque 1.1. ***Un lien inattendu avec la loi de Lorentz-Einstein***

De facto, elle suggère fortement que la représentation $(\uparrow,\,\downarrow)$ du champ EM a le formalisme d'une décomposition non-triviale d'un produit tensoriel déformé du type $\otimes_A(\mathrm{s}_1.\mathbf{u},\,...)$ qui aurait été obtenue par une méthode extrinsèque (voir [[c]]). La question subsidiaire consiste à se demander "Où, en physique, est-il possible de trouver une loi faisant intervenir clairement cette représentation du champ EM?"

La loi de Lorentz covariante, dite aussi de Lorentz-Einstein, répond à cette interrogation puisqu'elle s'écrit (pour une charge électrique q de masse m et en absence de force extérieure) [[04] ; chapitre 20, p. 106, (20.4)], [[06] ; p. 60, pas de numéro] :

$$m.|\frac{d\mathbf{u}}{ds}\;+\;\otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u},\,\mathbf{u})>\;=\;q.[F(\uparrow,\,\downarrow)].\,|\mathbf{u}>$$

Si cette loi physique était toujours vraie et décrivait la réalité de manière exacte - ce que des études récentes mettent en doute [cite11], pour les charges de masse non nulle, il serait possible de la lire comme un produit tensoriel déformé par le cube des symboles de Christofel de la seconde espèce, $\Gamma(2)$, en repositionnant les divers termes de la façon suivante :

$$|\otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u},\,\mathbf{u})>\,=\,\frac{q}{m}.[F(\uparrow,\,\downarrow)].\,|\mathbf{u}>\;-\,|\frac{d\mathbf{u}}{ds}>;\,m\,\neq\,0 \tag{19}$$

Et, au facteur q/m près, la représentation $(\uparrow,\,\downarrow)$ du champ EM se trouverait de facto être une décomposition non triviale de ce produit tensoriel déformé que, dans d'autres parties de mes travaux, j'ai nommé *le terme gravitationnel de la loi de Lorentz-Einstein*.

A supposer alors que nous souhaitions découvrir au moins une expression approchée

ISBN 978-2-36923-067-0, 30 mars 2020.

du formalisme de cette décomposition non-triviale, nous ferions par exemple appel à la méthode extrinsèque exposée dans [[c] ; en anglais], nous trouverions :

$$\frac{q}{m}.[F(\uparrow,\downarrow)] \;=\; {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \;-\; \frac{1}{2}\,.\,G^{-1}.Hess_{(\mathbf{u},\,0)}P_2(\mathbf{u}) \tag{20}$$

Nous retrouverions l'Equ.(18) ... à condition de poser les relations suivantes dans lesquelles P_2 est une polynomiale de degré deux dépendant de la vitesse de la particule :

$$s_1\,.\,\frac{q}{m}\,.\,{}_A\Phi(\mathbf{u}) \;=\; {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \tag{21}$$

$$s_2\,.\,\frac{q}{m}.\frac{c}{\phi}\,.\,G^{-1}.[\frac{\partial A^\gamma}{\partial x^\alpha}]\,.\,G \;=\; \frac{1}{2}\,.\,G^{-1}.Hess_{(\mathbf{u},\,0)}P_2(\mathbf{u}) \tag{22}$$

En observant bien la progression logique qui vient d'être suivie, il est facile de comprendre qu'en régle générale, l'hypothèse d'un transport parallèle n'est pas nécessaire pour parvenir à des conclusions similaires.

Concrètement : il est possible de se passer de l'Equ.(11), de commencer la procédure au niveau de l'Equ.(10), de la multiplier par la gauche par l'inverse de la métrique supposée non dégénérée pour l'occasion et d'effectuer à ce niveau là une comparaison avec une décomposition non-triviale du terme gravitationnel de la loi de Lorentz-Einstein pour retrouver l'Equ.(21) et découvrir une variante de l'Equ.(22) :

$$-\,s_2\,.\,\frac{q}{m}\,.\,G^{-1}.{}_A\Phi^t(\mathbf{u})\,.\,G \;=\; \frac{1}{2}\,.\,G^{-1}.Hess_{(\mathbf{u},\,0)}P_2(\mathbf{u}) \tag{23}$$

L'Equ.(23) se laisse triturer de telle sorte qu'elle livre :

$$-s_2\,.\,\frac{q}{m}.{}_A\Phi(\mathbf{u}) \;=\; \frac{1}{2}\,.\,(G^{-1})^t\,.\,Hess^t_{(\mathbf{u},\,0)}P_2(\mathbf{u})$$

et qu'une confrontation avec l'Equ.(21) mène à la relation de cohérence :

$$-\,s_2\,.\,{}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \;=\; \frac{s_1}{2}\,.\,(G^{-1})^t\,.\,Hess^t_{(\mathbf{u},\,0)}P_2(\mathbf{u}) \tag{24}$$

Aussi longtemps que cette relation de cohérence est vérifiée, la Prop.1.1 est démontrée indépendamment de la valeur des paires de scalaires (s_1, s_2) dans le cadre qui vient d'être décrit. Ce qui permet d'énoncer le : □

Théorème 1.1. ***Représentation alternative des champs EM***

Dans n'importe quelle zone de l'espace-temps où (i) la métrique est non-dégénérée et (ii) le mouvement d'une charge électrique de masse non nulle est correctement décrite par la loi de Lorentz covariante, l'Equ.(2) peut toujours s'interpréter comme une formulation approchée de la représentation $(\uparrow,\downarrow)$ du champ EM qui règne dans cette zone. Cette interprétation s'accompagne des Equ.(21), (23) et (24). Il n'est absolument pas nécessaire que cette charge suive une géodésique.

1.2 Les polynomiales P_2 continues

Corollaire 1.1. *Des polynomiales P_2 continues.*

D'un côté la prop.1.1 est démontrée ; de l'autre, il se peut que se pose un problème technique liée à la continuité de la polynomiale P_2 impliquée dans cette approche et dépendante de quatre variables réelles : les composantes de la vitesse de la particule. Si elle est continue, alors sa Hessienne est symétrique et :

$$-s_2\,.\,\frac{2.q}{m}\,.\,G^t.{}_A\Phi(\mathbf{u}) \;=\; Hess^t_{(\mathbf{u},\,0)}P_2(\mathbf{u}) \;=\; Hess_{(\mathbf{u},\,0)}P_2(\mathbf{u}) \;=\; -s_2\,.\,\frac{2.q}{m}\,.\,{}_A\Phi^t(\mathbf{u})\,.\,G \tag{25}$$

ISBN 978-2-36923-067-0, 30 mars 2020.

Dans ce cas de figure, cette exploration mène à trois équations qui doivent être vraies simultanément, la première n'étant que l'Equ.(2) symbolisant notre hypothèse de départ :

$$F \;=\; s_1 \,.\, G \,.\, {}_{A}\Phi(\mathbf{u}) \;+\; s_2 \,.\, {}_{A}\Phi^t(\mathbf{u}) \,.\, G$$

$$G^t .{}_{A}\Phi(\mathbf{u}) \;-\; {}_{A}\Phi^t(\mathbf{u}) \,.\, G \;=\; {}^{(4)}[0] \tag{26}$$

$$-\, s_2 \,.\, \frac{q}{m} \,.\, \{G^t .{}_{A}\Phi(\mathbf{u}) \;+\; {}_{A}\Phi^t(\mathbf{u}) \,.\, G\} \;=\; Hess_{(\mathbf{u},\,0)} P_2(\mathbf{u}) \tag{27}$$

Grâce à la multiplication de ces équations par un paramètre ad hoc, l'Equ.(21) permet d'exprimer ces équations dans la connexion habituelle de Levi-Civita :

$$\frac{q}{m} \,.\, F \;=\; G \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \;+\; \frac{s_2}{s_1} \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi^t(\mathbf{u}) \,.\, G \,;\; m,\, s_1 \;\neq\; 0 \tag{28}$$

$$G^t .{}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \;-\; {}_{\Gamma(2)}\Phi^t(\mathbf{u}) \,.\, G \;=\; {}^{(4)}[0] \tag{29}$$

$$-\, s_2 \,.\, \{G^t .{}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \;+\; {}_{\Gamma(2)}\Phi^t(\mathbf{u}) \,.\, G\} \;=\; s_1 \,.\, Hess_{(\mathbf{u},\,0)} P_2(\mathbf{u}) \tag{30}$$

En définissant le moment cinétique classiquement par :

$$\mathbf{p} \;=\; m.\mathbf{u} \tag{31}$$

L'Equ.(28) peut encore se réécrire :

$$q \,.\, F \;=\; s_1 . G \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{p}) \;+\; s_2 \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi^t(\mathbf{p}) \,.\, G \tag{32}$$

Il est bien entendu crucial de savoir si la réalisation simultanée de ces trois relations est plausible sans que ceci mène à l'annulation de tous les acteurs présents dans cette discussion. Je vais donc envisager d'illustrer les propos tenus jusqu'à présent par un exemple.

Exemple 1.1. ***Des polynomiales P2 continues***

Soit les matrices suivantes :

$$F \;=\; [F_{\alpha\beta}] \;=\; \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix} \tag{33}$$

$$[F^{\alpha\beta}] \;=\; \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$$

$${}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{p}) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & \Upsilon & 0 \\ 0 & \Upsilon & 0 & 0 \\ \chi & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,;\; \Upsilon \;=\; \pm\chi \tag{34}$$

$$G \;=\; \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \tag{35}$$

Ici, la définition (34) entraine :

$${}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{p}) \;=\; {}_{\Gamma(2)}\Phi^t(\mathbf{p}) \tag{36}$$

ISBN 978-2-36923-067-0, 30 mars 2020.

Par ailleurs, pour montrer la possibilité d'un lien avec la théorie quantique des champs, je noterai au passage que :

$$\chi = \Upsilon \Rightarrow {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{p}) = \chi \,.\, \alpha^1 ; \; \chi = -\Upsilon \Rightarrow {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{p}) = -\chi \,.\, \gamma^2 \tag{37}$$

où j'ai introduis les matrices de Dirac avec la notation utilisée par Dyson dans la traduction allemande [[07] ; p. 30] de son ouvrage de référence. Je me propose alors de vérifier que les Equ.(28), (29) et (30) peuvent être vraies simultanément sans que ce fait mène à des incohérences ; ici, à cause de l'Equ.(36), elle deviennent :

$$\frac{q}{m} \,.\, F = G \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) + \frac{s_2}{s_1} \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \,.\, G \, ; \, m, \, s_1 \neq 0$$

$$G^t . {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) - {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \,.\, G = {}^{(4)}[0]$$

$$-s_2 \,.\, \{G^t . {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) + {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \,.\, G\} = s_1 \,.\, Hess_{(\mathbf{u},\,0)} P_2(\mathbf{u})$$

Pour assurer une possible compatibilité avec des conditions qui ont été décrites avant de parvenir au Lem.1.1, je supposerai de plus que :

$$s_1 + s_2 = 0$$

Il s'agit donc d'étudier la cohérence du trio d'équations :

$$\frac{q}{m} \,.\, F = G \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) - {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \,.\, G \, ; \, m \neq 0 \tag{38}$$

$$G^t . {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) - {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \,.\, G = {}^{(4)}[0] \tag{39}$$

$$G^t . {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) + {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \,.\, G = Hess_{(\mathbf{u},\,0)} P_2(\mathbf{u}) \tag{40}$$

lorsque la polynomiale P2 est continue et que la matrice triviale est définie par l'Equ.(34). Une simple observation visuelle mène sans calcul à faire la :

Proposition 1.2. *Les métriques symétriques valident le trio d'équations (38), (39) et (40) mais les représentations du champ EM données par l'Equ.(2) ne s'appliquent alors qu'à ceux qui sont nuls.*

Preuve: Bien que la démonstration visuelle soit évidente, il vient en détail :

$$\forall G \, : \, G \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \tag{41}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & \Upsilon & 0 \\ 0 & \Upsilon & 0 & 0 \\ \chi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} \chi \cdot g_{03} & \Upsilon \cdot g_{02} & \Upsilon \cdot g_{01} & \chi \cdot g_{00} \\ \chi \cdot g_{13} & \Upsilon \cdot g_{12} & \Upsilon \cdot g_{11} & \chi \cdot g_{10} \\ \chi \cdot g_{23} & \Upsilon \cdot g_{22} & \Upsilon \cdot g_{21} & \chi \cdot g_{20} \\ \chi \cdot g_{33} & \Upsilon \cdot g_{32} & \Upsilon \cdot g_{31} & \chi \cdot g_{30} \end{bmatrix}$$

Et :

$$\forall G \, : \, G^t \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \tag{42}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} g_{00} & g_{10} & g_{20} & g_{30} \\ g_{01} & g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{32} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & \Upsilon & 0 \\ 0 & \Upsilon & 0 & 0 \\ \chi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} \chi \cdot g_{30} & \Upsilon \cdot g_{20} & \Upsilon \cdot g_{10} & \chi \cdot g_{00} \\ \chi \cdot g_{31} & \Upsilon \cdot g_{21} & \Upsilon \cdot g_{11} & \chi \cdot g_{01} \\ \chi \cdot g_{32} & \Upsilon \cdot g_{22} & \Upsilon \cdot g_{12} & \chi \cdot g_{02} \\ \chi \cdot g_{33} & \Upsilon \cdot g_{23} & \Upsilon \cdot g_{13} & \chi \cdot g_{03} \end{bmatrix}$$

Et :

$$\forall G \,:\, {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \,.\, G \tag{43}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & \Upsilon & 0 \\ 0 & \Upsilon & 0 & 0 \\ \chi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} \chi \cdot g_{30} & \chi \cdot g_{31} & \chi \cdot g_{32} & \chi \cdot g_{33} \\ \Upsilon \cdot g_{20} & \Upsilon \cdot g_{21} & \Upsilon \cdot g_{22} & \Upsilon \cdot g_{23} \\ \Upsilon \cdot g_{10} & \Upsilon \cdot g_{11} & \Upsilon \cdot g_{12} & \Upsilon \cdot g_{13} \\ \chi \cdot g_{00} & \chi \cdot g_{01} & \chi \cdot g_{02} & \chi \cdot g_{03} \end{bmatrix}$$

Et :

$$\forall G \,:\, {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \,.\, G^t \tag{44}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \chi \\ 0 & 0 & \Upsilon & 0 \\ 0 & \Upsilon & 0 & 0 \\ \chi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} g_{00} & g_{10} & g_{20} & g_{30} \\ g_{01} & g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ g_{02} & g_{12} & g_{22} & g_{32} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} \chi \cdot g_{03} & \chi \cdot g_{13} & \chi \cdot g_{23} & \chi \cdot g_{33} \\ \Upsilon \cdot g_{02} & \Upsilon \cdot g_{12} & \Upsilon \cdot g_{22} & \Upsilon \cdot g_{32} \\ \Upsilon \cdot g_{01} & \Upsilon \cdot g_{11} & \Upsilon \cdot g_{21} & \Upsilon \cdot g_{31} \\ \chi \cdot g_{00} & \chi \cdot g_{10} & \chi \cdot g_{20} & \chi \cdot g_{30} \end{bmatrix}$$

Il en résulte que :

$$\forall G \,:\, (38) \tag{45}$$

$$=$$

$$(41) \;-\; (43)$$

$$=$$

$$G \,.\, {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \;-\; {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \,.\, G$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} \chi \cdot (g_{03} - g_{30}) & \Upsilon \cdot g_{02} - \chi \cdot g_{31} & \Upsilon \cdot g_{01} - \chi \cdot g_{32} & \chi \cdot (g_{00} - g_{33}) \\ \chi \cdot g_{13} - \Upsilon \cdot g_{20} & \Upsilon \cdot (g_{12} - g_{21}) & \Upsilon \cdot (g_{11} - g_{22}) & \chi \cdot g_{10} - \Upsilon \cdot g_{23} \\ \chi \cdot g_{23} - \Upsilon \cdot g_{10} & \Upsilon \cdot (g_{22} - g_{11}) & \Upsilon \cdot (g_{21} - g_{12}) & \chi \cdot g_{20} - \Upsilon \cdot g_{13} \\ \chi \cdot (g_{33} - g_{00}) & \Upsilon \cdot g_{32} - \chi \cdot g_{01} & \Upsilon \cdot g_{31} - \chi \cdot g_{02} & \chi \cdot (g_{30} - g_{03}) \end{bmatrix}$$

Il existe deux familles de situations :

- Famille 1 ($\chi = \Upsilon$) :

$$\chi \cdot \begin{bmatrix} g_{03} - g_{30} & g_{02} - g_{31} & g_{01} - g_{32} & g_{00} - g_{33} \\ g_{13} - g_{20} & g_{12} - g_{21} & g_{11} - g_{22} & g_{10} - g_{23} \\ g_{23} - g_{10} & g_{22} - g_{11} & g_{21} - g_{12} & g_{20} - g_{13} \\ g_{33} - g_{00} & g_{32} - g_{01} & g_{31} - g_{02} & g_{30} - g_{03} \end{bmatrix}$$

ISBN 978-2-36923-067-0, 30 mars 2020.

- Famille 2 :

$$\chi\cdot\begin{bmatrix} g_{03}-g_{30} & -g_{02}-g_{31} & -g_{01}-g_{32} & (g_{00}-g_{33}) \\ g_{13}+g_{20} & -(g_{12}-g_{21}) & -(g_{11}-g_{22}) & g_{10}+g_{23} \\ g_{23}+g_{10} & -(g_{22}-g_{11}) & -(g_{21}-g_{12}) & g_{20}+g_{13} \\ g_{33}-g_{00} & -g_{32}-g_{01} & -g_{31}-g_{02} & (g_{30}-g_{03}) \end{bmatrix}$$

Cette Equ.(45) est à comparer avec les Equ.(33) et (38). Un double constat s'impose au regard :

- Quelle que soit la famille considérée, la diagonale de cette matrice ne peut s'annuler que dans certaines métriques très précisément définies par :

$$g_{03}=g_{30}\,;\,g_{12}=g_{21} \tag{46}$$

- L'antisymétrie attendue pour cette matrice est naturellement réalisée sur l'orthogonale quelle que soit la famille. Sinon, une fois l'Equ.(46) vérifiée, ces matrices (selon la famille) ont le formalisme générique suivant ; famille 1 :

$$\chi\cdot\begin{bmatrix} 0 & A & B & ok \\ A' & 0 & ok & -B' \\ B' & ok & 0 & -A' \\ ok & -B & -A & 0 \end{bmatrix}$$

  et famille 2 :

$$\chi\cdot\begin{bmatrix} 0 & C & D & ok \\ C' & 0 & ok & D' \\ D' & ok & 0 & C' \\ ok & D & C & 0 \end{bmatrix}$$

  L'anti-symétrie n'est donc obtenue qu'en posant les conditions supplémentaires suivantes sur la métrique : A + A' = 0 = B + B' pour la première famille et C + C' = 0 = D + D' pour la seconde famille ; plus précisément, pour la famille 1 ($\chi = \Upsilon$) :

$$g_{02}-g_{20}=g_{31}-g_{13} \tag{47}$$

$$g_{01}-g_{10}=g_{32}-g_{23} \tag{48}$$

  et pour la famille 2 (χ = -Υ) :

$$g_{20}-g_{02}=g_{31}-g_{13} \tag{49}$$

$$g_{10}-g_{01}=g_{32}-g_{23} \tag{50}$$

Ces conditions sont automatiquement vérifiées pour les métriques symétriques mais, dans ce cas, la validation simultanée de l'Equ.(39) induit que le champ EM qui est sensé être décrit par le trio cohérent des équations (38), (39) et (40) est forcément nul. □

Lemme 1.2. *Les métriques symétriques valident la représentation des champs EM proposée au travers de l'Equ.(2) si ceux-ci sont nuls. Ce qui, à cause de l'Equ:(40), n'empêche pas du tout l'existence d'une hessienne symétrique telle que :*

$$\forall G = G^t \,:\, Hess_{(\mathbf{u},\,0)}P_2(\mathbf{u}) \tag{51}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 2.\chi\cdot g_{03} & \Upsilon\cdot g_{02}+\chi\cdot g_{13} & \Upsilon\cdot g_{01}+\chi\cdot g_{23} & \chi\cdot(g_{00}+g_{33}) \\ \chi\cdot g_{13}+\Upsilon\cdot g_{02} & 2.\Upsilon\cdot g_{12} & \Upsilon\cdot(g_{11}+g_{22}) & \chi\cdot g_{10}+\Upsilon\cdot g_{23} \\ \chi\cdot g_{23}+\Upsilon\cdot g_{01} & \Upsilon\cdot(g_{22}+g_{11}) & 2.\Upsilon\cdot g_{12} & \chi\cdot g_{02}+\Upsilon\cdot g_{13} \\ \chi\cdot(g_{33}+g_{00}) & \Upsilon\cdot g_{23}+\chi\cdot g_{01} & \Upsilon\cdot g_{13}+\chi\cdot g_{02} & 2.\chi\cdot g_{03} \end{bmatrix}$$

Nota bene : les situations décrites ici correspondent en fait à des circonstances dans lesquelles la métrique ne varie pas [3]. Ce que je vais démontrer plus loin dans ce document : voir la Prop.1.4.

Proposition 1.3. *Lorsque la polynomiale P2 est continue et que la décomposition triviale est définie au travers de l'Equ.(36), les équations (38) et (39) ne peuvent être validées simultanément que si la métrique est symétrique.*

Preuve : La conséquence logique la plus intéressante du lemme 1.2 est que les situations physiques pour lesquelles les Equ.(38), resp. (49), exhibent un formalisme compatible avec une représentation $(\downarrow, \downarrow)$ du tenseur champ EM correspondent à une famille très précise de métriques. Je vais les préciser avec le calcul de :

$$\begin{gathered}\forall G : (39) \\ = \\ (42) - (43) \\ = \\ G^t \cdot {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) - {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) \cdot G \\ = \\ \begin{bmatrix} 0 & \Upsilon \cdot g_{20} - \chi \cdot g_{31} & \Upsilon \cdot g_{10} - \chi \cdot g_{32} & \chi \cdot (g_{00} - g_{33}) \\ \chi \cdot g_{31} - \Upsilon \cdot g_{20} & 0 & \Upsilon \cdot (g_{11} - g_{22}) & \chi \cdot g_{01} - \Upsilon \cdot g_{23} \\ \chi \cdot g_{32} - \Upsilon \cdot g_{10} & \Upsilon \cdot (g_{22} - g_{11}) & 0 & \chi \cdot g_{02} - \Upsilon \cdot g_{13} \\ \chi \cdot (g_{33} - g_{00}) & \Upsilon \cdot g_{23} - \chi \cdot g_{01} & \Upsilon \cdot g_{13} - \chi \cdot g_{02} & 0 \end{bmatrix}\end{gathered} \tag{52}$$

Là encore, la nullité attendue (exigée) pour cette équation n'est réalisée que pour une famille bien précise de métriques. Elles sont définies par les six conditions suivantes :

$$\begin{gathered}\Upsilon \cdot g_{20} = \chi \cdot g_{31} \\ \Upsilon \cdot g_{10} = \chi \cdot g_{32} \\ \chi \cdot (g_{00} - g_{33}) = 0 \\ \Upsilon \cdot (g_{11} - g_{22}) = 0 \\ \chi \cdot g_{01} = \Upsilon \cdot g_{23} \\ \chi \cdot g_{02} = \Upsilon \cdot g_{13}\end{gathered}$$

Nous retrouvons ici aussi deux familles de métriques ; famille 1 ($\chi = \Upsilon$) :

$$g_{20} = g_{31} \tag{53}$$

$$g_{10} = g_{32} \tag{54}$$

$$g_{00} = g_{33} \tag{55}$$

$$g_{11} = g_{22} \tag{56}$$

$$g_{01} = g_{23} \tag{57}$$

$$g_{02} = g_{13} \tag{58}$$

[3] J'ai eu l'occasion de le démontrer dans un document écrit en anglais : [[d]]. En effet, il existe des situations dans lesquelles l'Equ.(38) peut s'interpréter comme une variation infinitésimale de la métrique dans la théorie des spineurs inventée par E. Cartan, [[10] ; chapitre IX, §§ 172-173, pp. 145-147]. Ces situations sont réalisées lorsque l'Equ.(34) est vérifiée. De sorte que dans l'exemple étudié ici, l'Equ. (38) correspond à une variation anti-symétrique de la métrique.

Et famille 2 (χ = -Υ) :

$$g_{20} = -g_{31} \tag{59}$$
$$g_{10} = -g_{32} \tag{60}$$
$$(55) : g_{00} = g_{33}$$
$$(56) : g_{22} = g_{11}$$
$$g_{01} = -g_{23} \tag{61}$$
$$g_{02} = -g_{13} \tag{62}$$

Une observation attentive de toutes ces équations montre que la validation simultanée des conditions imposées par les Equ.(38) et (39) pour la première famille conduit in fine à devoir poser :

$$(46), (55), (56) : \; g_{30} = g_{03} \; ; \; g_{21} = g_{12} \; ; \; g_{22} = g_{11} \; ; \; g_{00} = g_{33}$$
$$(47) = (58) - (53) \Rightarrow g_{20} = g_{02} \; ; \; g_{13} = g_{31}$$
$$(48) = (57) - (54) \Rightarrow g_{10} = g_{01} \; ; \; g_{23} = g_{32}$$

Et finalement exactement de même pour la seconde famille :

$$(46), (55), (56) : \; g_{30} = g_{03} \; ; \; g_{21} = g_{12} \; ; \; g_{22} = g_{11} \; ; \; g_{00} = g_{33}$$
$$(49) = (59) - (62) \Rightarrow g_{20} = g_{02} \; ; \; g_{13} = g_{31}$$
$$(50) = (61) - (60) \Rightarrow g_{10} = g_{01} \; ; \; g_{23} = g_{32}$$

Les mètriques compatibles avec la réalisation simultanée des Equ.(38) et (39) ont donc toutes le formalisme :

$$G = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{01} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{02} & g_{12} & g_{11} & g_{23} \\ g_{03} & g_{13} & g_{23} & g_{00} \end{bmatrix} \tag{63}$$

Elles sont symétriques. □

Lemme 1.3. *Lorsque la polynomiale P2 est continue et que la décomposition triviale est définie au travers de l'Equ.(34), les équations (38) et (39) ne peuvent être validées simultanément que si la métrique est symétrique.*

Théorème 1.2. ***No go théorème pour les fonctions P2 continues***

Lorsqu'une particule chargée satisfait à la loi de Lorentz-Einstein, que la polynomiale P2 est continue et que la décomposition triviale est définie au travers de l'Equ.(34), l'Equ.(2) dans laquelle $\mathrm{s}_1 + \mathrm{s}_2 = 0$ ne peut représenter que des champs EM nuls évoluant dans une métrique symétrique.

1.3 Les polynomiales P_2 quelconques

La discussion menant au théorème 1.1 et le théorème 1.1 restent valables. Le socle des équations de référence pour de plus amples développements théoriques se constitue maintenant des Equ.(02), (19), (20), (21), (23), (24), (34) et $\mathrm{s}_1 + \mathrm{s}_2 = 0$.

$$(24) : {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} . (G^{-1})^t . Hess^t_{(\mathbf{u},0)} P_2(\mathbf{u})$$

$$(28) : \frac{q}{m} . F = G . {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) - {}_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u}) . G \, ; \, m, \neq 0$$

La transposition de (24) fournit :

$$(24^t)\ :\ {}_{\Gamma(2)}\Phi^t(\mathbf{u})\ =\ \frac{1}{2}\,.\,Hess_{(\mathbf{u},\,0)}P_2(\mathbf{u})\,.\,G^{-1}$$

Mais comme Φ est défini par (34), il en résulte (36) et ceci induit :

$$(36)\ \Rightarrow\ (64)\ :\ (G^{-1})^t\,.\,Hess^t_{(\mathbf{u},\,0)}P_2(\mathbf{u})\ =\ Hess_{(\mathbf{u},\,0)}P_2(\mathbf{u})\,.\,G^{-1}$$

Cette relation montre clairement qu'il n'y a aucune raison pour que la transposée de la hessienne vale encore la hessienne, en général. La métrique étant a priori quelconque, les calculs menant à l'Equ.(45) restent valables ainsi que la première partie qui la suit. Ce qui mène à un autre :

Lemme 1.4. *Lorsqu'une particule chargée satisfait à la loi de Lorentz-Einstein, que la polynomiale P2 est quelconque et que la décomposition triviale est définie au travers de l'Equ.(34), l'Equ.(2) dans laquelle $s_1\,+\,s_2\,=\,0$ a effectivement le formalisme des matrices représentant des champs EM. Celles-ci se répartissent en deux familles : la famille, définie par les Equ.(46), (47) et (48) ; et la famille 2, définie par les Equ.(46), (49) et (50). Précisément, ce sont les matrices suivantes :*

Pour la famille 1 :

$$\frac{q}{m}\,.\,F$$
$$=$$
$$\chi\,.\begin{bmatrix} 0 & A & B & ok \\ -A & 0 & ok & B \\ -B & ok & 0 & A \\ ok & -B & -A & 0 \end{bmatrix}$$
$$=$$
$$\chi\,.\begin{bmatrix} 0 & g_{02}-g_{31} & g_{01}-g_{32} & g_{00}-g_{33} \\ g_{31}-g_{02} & 0 & g_{11}-g_{22} & g_{10}-g_{23} \\ g_{32}-g_{01} & g_{22}-g_{11} & 0 & g_{20}-g_{13} \\ g_{33}-g_{00} & g_{23}-g_{10} & g_{13}-g_{20} & 0 \end{bmatrix}$$

Elle est compatible avec de *pseudo-champs EM de nature géométrique* définis par les relations :

$$E_x\,=\,g_{02}\,-\,g_{31}\ ;\ E_y\,=\,g_{01}\,-\,g_{32}\ ;E_z\,=\,g_{00}\,-\,g_{33}$$

$$H_x\,=\,g_{13}\,-\,g_{20}\ ;\ H_y\,=\,g_{10}\,-\,g_{23}\ ;H_z\,=\,g_{22}\,-\,g_{11}$$

$$(46)\ :\ \forall\,g_{03}\,=\,g_{30}\,;\,\forall\,g_{12}\,=\,g_{21}$$

Pour la famille 2 :

$$\frac{q}{m}\,.\,F$$
$$=$$
$$\chi\,.\begin{bmatrix} 0 & C & D & ok \\ -C & 0 & ok & -D \\ -D & ok & 0 & -C \\ ok & D & C & 0 \end{bmatrix}$$
$$=$$
$$\chi\,.\begin{bmatrix} 0 & -(g_{02}+g_{31}) & -(g_{01}+g_{32}) & -(g_{33}-g_{00}) \\ g_{02}+g_{31} & 0 & -(g_{11}-g_{22}) & g_{10}+g_{23} \\ g_{01}+g_{32} & g_{11}-g_{22} & 0 & g_{02}+g_{31} \\ g_{33}-g_{00} & -(g_{01}+g_{32}) & -(g_{31}+g_{02}) & 0 \end{bmatrix}$$

Elle est compatible avec de *pseudo-champs EM de nature géométrique* définis par les relations :

$$E_x = -(g_{02} + g_{31})\ ;\ E_y = -(g_{01} + g_{32})\ ; E_z = -(g_{33} - g_{00})$$
$$H_x = -(g_{02} + g_{31})\ ;\ H_y = g_{10} + g_{23}\ ; H_z = g_{11} - g_{22}$$
$$(46)\ :\ \forall\, g_{03} = g_{30}\, ; \forall\, g_{12} = g_{21}$$

Remarque 1.2. ***Liberté sur la métrique***

L'Equ.(39) n'est plus vraie en général puisqu'elle résultait de la continuité présupposée de la polynomiale P2 : Equ.(25) ; ce qui ne contraint plus la métrique à être forcément symétrique... mais sans lui interdire de l'être.

Remarque 1.3. ***Représentation adjointe***

Si la métrique est symétrique et non-dégénérée :

$$G = G^t$$
$$\Downarrow$$
$$G^{-1} = (G^{-1})^t$$
$$\Downarrow (64)$$
$$G^{-1} \,.\, Hess^t_{(\mathbf{u},\,0)} P_2(\mathbf{u}) = Hess_{(\mathbf{u},\,0)} P_2(\mathbf{u}) \,.\, G^{-1}$$
$$\Downarrow$$
$$Hess^t_{(\mathbf{u},\,0)} P_2(\mathbf{u}) = G.Hess_{(\mathbf{u},\,0)} P_2(\mathbf{u}) \,.\, G^{-1}$$

Autrement dit : les métriques symétriques compatibles avec l'ensemble de cette approche transforment chaque Hessienne en son adjoint mathématique (au sens donné à ce concept par exemple dans [[12] ; p. 262, en allemand]) qui, en l'occurence, n'est ici rien d'autre que la transposée de cette Hessienne.

$$G \rightarrow\ ad_G : \forall\, Hess_{(\mathbf{u},\,0)} P_2(\mathbf{u}) \xrightarrow{ad_G} Hess^t_{(\mathbf{u},\,0)} P_2(\mathbf{u})$$

Proposition 1.4. *Ces champs EM sont équivalents à des variations infinitésimales de la géométrie ; au sens donné à ce concept par E. Cartan, [[10] ; chapitre IX, §§ 172-173, pp. 145-147].*

Preuve : Elle est donnée de manière exhaustive dans [[d] ; en anglais]. Je vais en donner ici un aperçu. Pour pouvoir interpréter le formalisme de l'Equ.(28) dans l'état d'esprit promu dans l'ouvrage [10], il est important de pouvoir identifier une paire (vecteur = X, rotation = U). Ici, deux éventualités peuvent se présenter : soit il s'agit de la paire (G, Φ), soit de la paire inverse (Φ, G). Il faut réaliser ces identifications en sachant que dans le discours d'E. Cartan : (i) les vecteurs sont représentables par des matrices (voir l'exemple [10 ; § 93, p. 81, (5)]) et (ii) les rotations sont des bivecteurs, plus exactement des produits de deux vecteurs (chacun d'eux étant alors une réflection) ... donc de deux matrices. La démonstration effectuée dans [d ; théorème 1] justifie finalement pourquoi la représentation matricielle d'une métrique de Minkowski ne peut jamais être celle d'un bi-vecteur au sens de Cartan. Il en résulte que la seule paire qui puisse être candidate à une identification de l'Equ.(28) avec [10 ; chapitre IX, §§ 172, p. 145, (1)] est la paire (G, Φ). Le reste de la démonstration prouve que le seul formalisme de Φ compatible avec les exigences de cette identification est donné par l'Equ.(34) en y ajoutant la précision importante que :

$$\chi = \Gamma^0_{\mu 3}.p^\mu$$

□

ISBN 978-2-36923-067-0, 30 mars 2020.

Théorème 1.3. ***Des variations géométriques infinitésimales***

Lorsqu'une particule chargée satisfait à la loi de Lorentz-Einstein, que la polynomiale P2 est quelconque (= pas nécessairement continue) et que la décomposition triviale est définie au travers de l'Equ.(34), l'Equ.(2) dans laquelle $s_1 + s_2 = 0$ a le formalisme de matrices représentant des pseudo-champs EM de nature géometrique. Plus présicément elles sont des représentations de variations géométriques infinitésimales. Ces variations sont classifiables en deux grandes familles. Les polynomiales P2 continues annulent ces variations.

$$(Cartan - Periat)\;:\;\frac{q}{m}\,.\,F\;=\;G\,.\,_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u})\;-\;_{\Gamma(2)}\Phi(\mathbf{u})\,.\,G\;=\;\delta G\,;\,m,\neq\,0$$

Remarque 1.4. ***Adéquation aux lois de Maxwell pour l'électromagnétisme***

A ce stade, l'adéquation aux lois de Maxwell pour l'électromagnétisme [[04] ; chapitre 6, (6.6) et (6.7)], [[06] ; p. 44, (20-1) et (20-2)], [[13]], reste à explorer. Il est d'ores et déjà certain que leur respect va entrainer des contraintes très précises sur les métriques et leurs divers types de variations. Jusqu'à cet instant, les métriques symétriques ne sont pas incompatibles avec les équations exposées au Lem.1.4. Elles valident l'Equ.(46) automatiquement et établissent les premiers liens instantannés (= à chaque instant donné d'une quelconque chronologie) entre le champ électrique, **E**, et le champ magnétique, **H** puisque :

- Pour la famille 1

$$\delta g_{01}\;=\;E_x\;=\;g_{02}-g_{13}\;;\;\delta g_{02}\;=\;E_y\;=\;g_{01}-g_{23}\;;\delta g_{03}\;=\;E_z\;=\;g_{00}-g_{33}$$

$$-\delta g_{10}\;=\;E_x\;=\;g_{02}-g_{13}\;;\;-\delta g_{20}\;=\;E_y\;=\;g_{01}-g_{23}\;;-\delta g_{03}\;=\;E_z\;=\;g_{00}-g_{33}$$

$$\delta g_{23}\;=\;H_x\;=\;g_{13}-g_{02}\;;\;\delta g_{13}\;=\;H_y\;=\;g_{01}-g_{23}\;;\delta g_{12}\;=\;H_z\;=\;g_{22}-g_{11}$$

$$-\delta g_{32}\;=\;H_x\;=\;g_{13}-g_{02}\;;\;-\delta g_{31}\;=\;H_y\;=\;g_{01}-g_{23}\;;-\delta g_{21}\;=\;H_z\;=\;g_{22}-g_{11}$$

- Pour la famille 2

$$E_x\;=\;-(g_{02}\,+\,g_{13})\;;\;E_y\;=\;-(g_{01}\,+\,g_{23})\;;E_z\;=\;-(g_{33}\,-\,g_{00})$$

$$H_x\;=\;-(g_{02}\,+\,g_{13})\;;\;H_y\;=\;g_{01}\,+\,g_{23}\;;H_z\;=\;g_{11}\,-\,g_{22}$$

Il faut bien comprendre l'idée fondamentale qui s'applique ici. Même si la métrique devait occasionnelement être symétrique au départ, chacune de ses composantes évolue ensuite pour elle-même indépendamment des autres et, en particulier, de sa transposée ; de sorte que, de façon générale :

$$\forall\,g_{\alpha\beta}\;:\;\delta g_{\alpha\beta}\;\neq\;\delta g_{\beta\alpha}$$

Autrement dit : dans cette théorie, les métriques se déforment, se tordent et se contorsionnent autant que les lois de la physique le permettent. En l'occurence, les déformations de la métrique initiale, quelle qu'elle soit, satisfont même exactement à la règle :

$$\forall\,g_{\alpha\beta}\;:\;\delta g_{\alpha\beta}\;=\;-\delta g_{\beta\alpha}$$

C'est une manière d'écrire que toute transition physique entre un état initial de la géométrie et le suivant se fait par l'intermédiaire d'un champ EM de nature géométrique. De manière à connecter cette théorie avec le modèle standard, il conviendrait de préciser l'identité des particules contenues dans les deux familles.

1.4 Conclusion de la première partie

Cette première partie s'est attachée à prouver le bien-fondé de la proposition d'Equ.(2). C'est-à-dire l'existence de représentations matricielles (i) mimant celles des champs EM, Equ.(33), (ii) contenant une référence à la métrique G et à une décomposition triviale d'un produit tensoriel déformé Φ ad hoc.

La proposition est formellement recevable (i) si le produit tensoriel déformé impliqué dans cette exploration est lié au terme gravitationnel apparaissant dans la version covariante de la loi de Lorentz, Equ.(19) et (ii) si la décomposition a un formalisme spécifique donné par l'Equ.(34).

La démonstration s'appuie sur la méthode extrinsèque mise au point dans [[c]] et sur l'analyse exposée dans [[d]]. Elle fait intervenir une polynomiale de degré deux qui dépend des composantes de la vitesse de la particule étudiée : $P_2(\mathbf{u})$. L'exploration montre que les champs représentés par l'équation (02) sont de nature géométrique et qu'ils peuvent s'interpréter dans le cadre de la théorie des spineurs d'E. Cartan [[10]]. En bref, ce sont des variations infinitisimales de la géométrie ayant le formalisme de champs électromagnétiques. Ces variations indiquent l'existence de particules porteuses de caractéristiques du champ de gravitation (in extenso : une partie des composantes de la métrique) mais capables de mimer un champ électromagnétique. Je suggère de les appeler provisoirement des "*mimétons*"!

Il reste à approfondir cette découverte en la confrontant d'abord avec les lois de Maxwell pour l'électromagnétisme, puis avec les représentations habituelles des particules au sein du modèle standard ; comme par exemple dans [[07]]. En particulier, une étude comparative avec la notion de graviton héritée d'une linéarisation [[04] ; chapitres 32, 33 et 34], [[08] ; pp. 944-955] des équations de la relativité générale, [[14]], devrait être enrichissante.

2 Bibliographie

References

2.1 Livres, ouvrages et cours

[01] Einstein, A. and Rosen, N.: The particle problem in the theory of relativity; pp. 73-77, physical review, vol. 48, July 1, 1935.

[02] Landau und Lifschitz: Lehrbuch des theoretischen Physik, Band II: Klassische Feldtheorie, 12., ueberarbeit. Aufl. ©Akademischer Verlag, Berlin, 1992, ISBN 3-05-501550-9, 480 pages.

[03] Scherz, U. : Quantenmechanik: eine Einführung mit Anwendungen auf Atome, Moleküle und Festkörper; ISBN 3-519-03246-5, Teubner-Studienbücher, Physik, ©1999 B. G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 669 pages.

[04] Fließbach, T. : Allgemeine Relativitätstheorie, 4. Auflage 2003; ISBN 3-8274-1356-7, ©2003, 1998, 1995 Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg, Berlin, 343 pages.

[05] Stewart, J.: Advanced general relativity; Cambridge monographs on mathematical physics; Cambridge University Press, 1991; ISBN Paperback 0-521-44946-4, 228 pages.

[06] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme ; collection d'ouvrage à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. Darmois et A. Lichnerowicz. ©1955 by Masson and Cie, éditeurs, 298 pages.

[07] Dyson, F.: Quantenfeldtheory; ISBN 978-3-642-37677-1, DOI 10.1007/978-3-642-37678-8, Springer Spektrum ©Springer Verlag Berlin Heidelberg 2014, 288 pages.

[08] Misner, Thorne and Wheeler: Gravitation; Copyright ©1973 by W. H. Freeman and Company; ISBN 0-7167-0344-0 Paperback, 1279 pages.

[09] Birrel and Davies: Quantum fields in curved space; Cambridge monographs on mathematical physics; Cambridge University Press, 1982; ISBN Paperback 0-521-27858-9, 340 pages.

[10] Cartan, E. The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966; translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)"; Hermann, 1937; Dover Publications, Inc. New York. ©1966 by Hermann, Paris, ISBN 0-486-64070-1, 151 pages.

[11] The motion of point particles in curved spacetime; arXiv:1102.0529v3 [gr-qc] 26 september 2011.

[12] Broecker, T.: Lineare Algebra und analytische Geometrie; ©2004, Birhauser Verlag, Basel, ISBN 3-7643-7144-7, 366 pages.

[13] Maxwell, J. C.: A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field; Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, 155: 459 - 512; a priori consultable sur le site http://rstl.royalsocietypublishing.org/ sous votre responsabilité.

[14] (a) Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7. (b) Einstein, A. and Minkowski, H.: The principle of relativity; translated in English by Saha, M.N. and Bose, S.N. published by the university of Calcutta, 1920; available at the Library of the M.I.T. (c) Cartan, E. : Sur les équations de la gravitation d'Einstein ; extrait du journal de mathématiques, 1922, Fasc. numéro 2, édité par Gauthier-Villars et Cie, libraires du bureau des longitudes de l'école Polytechnique, Paris, 1922.

2.2 Travaux personnels préliminaires

[a] PERIAT, T: : La proposition d'Einstein - Rosen (1935) revisitée ; ISBN 978-2-36923-113-4, EAN-9782369231134, v2, 14 mars 2020.

[b] PERIAT, T: : Aspects mathématiques de la théorie des produits tensoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-028-1, EAN-9782369230281, v2, 25 octobre 2019.

[c] PERIAT, T: : Extrinsic method ; ISBN 978-2-36923-092-2, EAN-9782369230922, v2, 19 September 2019.

[d] PERIAT, T: : Does the new formalism of the EM field tensor contain a bivector "à la E. Cartan"? ; ISBN 978-2-36923-085-4, EAN-9782369230854, v2, 11 March 2019.