

Représentations matricielles du foncteur “adjonction tensorielle”

Liens avec la théorie des produits vectoriels décomposés non trivialement

©Thierry PERIAT, ISBN 978-2-36923-067-8, EAN 9782369230678, v2

13 mai 2020

Le document se focalise sur la découverte de représentations matricielles pour le concept d'*adjonction tensorielle*. Il applique les résultats de cette exploration à la représentations matricielle de la version deux fois covariante du tenseur champ électromagnétique. La démarche ouvre une porte inattendue sur l'utilisation des résultats acquis préalablement au sein de l'analyse des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés.

Table des matières

1	Au sujet des représentations du champ électromagnétique	2
1.1	Objectifs du chapitre	2
1.2	Résumé de la démarche suivie	2
1.3	Résultats principaux	2
1.4	L'analyse périenne des matrices carrées	3
1.5	Les matrices de passage entre les représentations d'un champ EM	5
2	Représentations de l'adjonction tensorielle dans $M(4, \mathbb{C})$	11
2.1	Premiers éléments de l'exploration	11
2.2	Le coeur des matrices admissibles	19
2.3	Les mères admissibles	21
2.4	Classification des mères admissibles	27
2.5	Rendre compte du rôle du tenseur complètement antisymétrique de rang quatre	34
2.6	Les conséquences du troisième critère	43
3	Partie physique : représentation des particules	48
3.1	Interprétation dans le cadre des représentations paramétriques des rotations	48
3.2	Première forme invariante et tenseur impulsion-énergie du champ EM.	51
3.3	La seconde forme invariante	53
3.4	Quel est le rôle de la polynomiale Lambda?	59
3.5	Conclusion	63
4	Bibliographie	64
4.1	Livres, ouvrages et cours	64
4.2	Travaux personnels préliminaires	65

1 Au sujet des représentations du champ électromagnétique

1.1 Objectifs du chapitre

Des champs électromagnétiques (EM) de nature géométrique ont été découverts dans [[a]]. Il s'agit maintenant de les étudier en détail. Ont-ils une existence réelle ou ne sont-ils que le fruit hasardeux d'un montage intellectuel virtuel? Respectent-ils les lois de Maxwell [[01]]? Si oui : dans quelle catégorie convient-il alors de les classer? Sont-ils de simples champs classiques, ou des champs de Yang-Mills? Ont-ils un lien avec les gravitons de la formulation linéarisée [[02]], [[03]] de la théorie de la relativité générale émise il y a plus d'un siècle par A. Einstein [[04]]? Quelle énergie véhiculent-ils? Comment se transforment-ils dans un changement de référentiels? etc.

1.2 Résumé de la démarche suivie

Pour tenter de pouvoir répondre à toutes ces interrogations légitimes, j'entreprends ici une exploration des représentations des champs EM. Elle s'appuie sur des travaux académiques déjà anciens mais confirmés par l'usage du temps.

Techniquement, elle s'appuie sur une analyse dite *périennne* des matrices; voir la définition 1.1 et l'Equ.(6). Elle commence par en démontrer l'utilité pratique au travers des matrices de passage entre les versions deux fois covariante, (2, 0), et deux fois contravariante, (0, 2), d'un champ EM. Elle m'emmène ensuite doucement vers la problématique plus générale des représentations matricielles de l'application baptisée "adjonction tensorielle".

Globalement, la démarche fait comprendre le lien qui existe entre le coeur de ces représentations et la partie principale des décompositions non-triviales de produits vectoriels déformés; voir [[b]], [[c]] et [[d]]. Bref, elle établit un lien entre l'analyse tensorielle et l'algèbre tout en opérant un recadrage lent mais effectif de la théorie mathématique dans un environnement physique plus facile à visualiser.

Par exemple, elle fait comprendre que les représentations non-triviales de l'*adjonction tensorielle* portent avec elles des informations sur l'intensité du flux d'énergie porté par le champ électromagnétique. Elle permet aussi de comprendre l'existence d'un lien entre ces représentations et une polynomiale sous-jacente qu'on a irrésistiblement envie de relier à une surface d'onde.

1.3 Résultats principaux

Soit une représentation matricielle $F = [F_{\lambda\mu}]$ de la version deux fois covariante d'un tenseur champ EM. Le foncteur *adjonction tensorielle* est l'application notée "adj" qui à cette représentation matricielle fait correspondre la représentation matricielle de la version adjointe $*F = [*F_{\lambda\mu}]$ de ce tenseur champ EM¹.

Je pars du principe que cette application se laisse représenter dans $M(4, \mathbb{C})$ et que les deux contraintes supplémentaires auxquelles elle est soumise sont (i) d'avoir un carré égal à moins une fois l'unité : $({}^4)\chi^2 = -\text{Id}_4$ et (ii) d'effectuer le même travail que le tenseur entièrement antisymétrique de rang quatre.

1. La convention d'écriture utilisée dans ce document est celle qui a été introduite en 1955 par A. Lichnerowicz : [[05]]. Cet ouvrage a été réédité récemment aux éditions Gabay et il est donc consultable par tout un chacun.

Ce document démontre qu'il existe certaines représentations de ce foncteur dont les coeurs peuvent se relier aux représentations paramétriques des rotations effectuées dans un espace de dimension trois et, par ricochet, aux polynomiales associées avec des décompositions non-triviales d'un produit vectoriel classique. Il établit donc les fondations d'un lien théorique fort entre le concept d'adjonction tensorielle et certaines caractéristiques physiques essentielles d'une onde EM. C'est la tout son intérêt.

La (re)découverte essentielle faite dans ce document tient dans la figure ci-dessous :

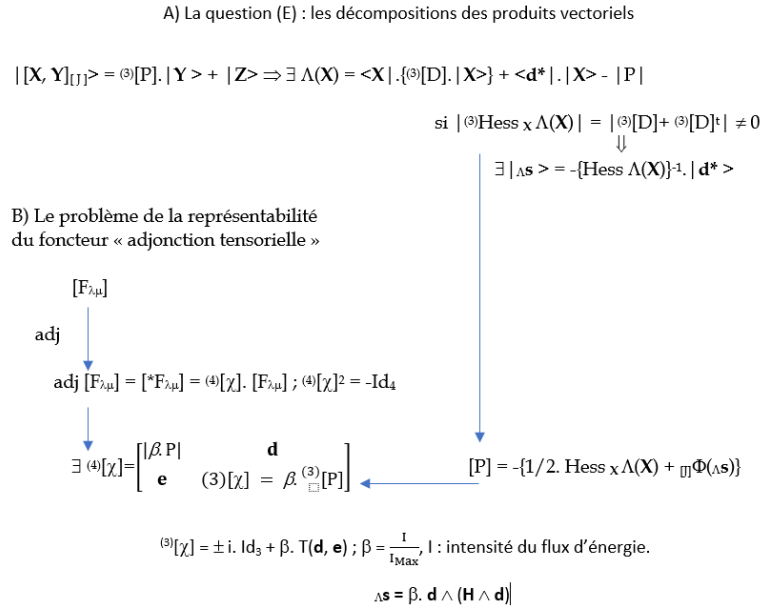


FIGURE 1 – Vue d'ensemble sur la théorie des produits vectoriels décomposés non trivialement.

1.4 L'analyse périenne des matrices carrées

Les représentations habituelles d'un champ EM sont données au travers de deux matrices que nous avons déjà rencontrées au chapitre précédent :

$$F = [F_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$F^* = [F^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Le premier devoir technique auquel il peut être utile de s'atteler consiste à trouver une matrice de passage entre ces deux représentations. En clair : "Existe t-il une

matrice inversible $[M]$ de $M(4, \mathbb{R})$ -ou, éventuellement de $M(4, \mathbb{C})$, telle que :

$$\begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$$

Ignorant si le calcul a déjà été fait quelque part, je l'entreprends in extenso. Soit le premier système linéaire de quatre équations comportant quatre inconnues :

$$\begin{aligned} 0 \cdot m_{00} - E_x \cdot m_{01} - E_y \cdot m_{02} - E_z \cdot m_{03} &= 0 \\ E_x \cdot m_{00} + 0 \cdot m_{01} + H_z \cdot m_{02} - H_y \cdot m_{03} &= -E_x \\ E_y \cdot m_{00} - H_z \cdot m_{01} + 0 \cdot m_{02} + H_x \cdot m_{03} &= -E_y \\ E_z \cdot m_{00} + H_y \cdot m_{01} - H_x \cdot m_{02} + 0 \cdot m_{03} &= -E_z \end{aligned}$$

Les trois autres systèmes sont similaires. Le deuxième système s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 \cdot m_{10} - E_x \cdot m_{11} - E_y \cdot m_{12} - E_z \cdot m_{13} &= E_x \\ E_x \cdot m_{10} + 0 \cdot m_{11} + H_z \cdot m_{12} - H_y \cdot m_{13} &= 0 \\ E_y \cdot m_{10} - H_z \cdot m_{11} + 0 \cdot m_{12} + H_x \cdot m_{13} &= -H_z \\ E_z \cdot m_{10} + H_y \cdot m_{11} - H_x \cdot m_{12} + 0 \cdot m_{13} &= H_y \end{aligned}$$

Il est nécessaire de calculer le déterminant de la matrice F qui se trouve aussi être le discriminant des quatre systèmes. Il se trouve que ce déterminant est l'un des deux invariants du champ électromagnétique [[02]; p. 110, (4.21)], [[05], §8, p. 17, (8-6)] :

$$|F| = (\langle {}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{H} \rangle_{Id_3})^2 = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2 \quad (4)$$

Stricto sensu, il est nul chaque fois que le champ électrique est orthogonal au champ magnétique. Dans tous les autres cas ($|F| \neq 0$), il reste possible de calculer les solutions à la main ; par exemple :

$$m_{00} = -1 \quad (5)$$

Mais la méthode historique de Cramer [[06]; § 6.3, pp. 229-230] est très fastidieuse. Qui plus est, dans le cas du problème que je viens de poser, elle ne dit rien sur les situations correspondant à des champs électriques et magnétiques orthogonaux et dont nous savons pourtant qu'elles existent dans la nature. Ce sont deux des raisons pour lesquelles je propose dans le document qui suit une autre approche de la résolution de ce type de problème.

Définition 1.1. *Analyse dite périenne des matrices carrées.*

J'analyse les éléments de $M(4, \mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} , avec l'état d'esprit qui consiste à *partager visuellement* toute matrice en un quadruplet de données :

- son *coin scalaire* au Nord-Ouest,
- son *aile Nord*, un premier vecteur disposé en ligne au Nord,
- son *aile Ouest*, un second vecteur écrit en colonne à l'Ouest et
- son *coeur*, une sous-matrice carrée d'un rang diminué d'une unité.

Avec cette interprétation, le formalisme de l'élément générique est donné par :

$${}^{(D)}[M] = \left[\begin{array}{c} m \\ |{}^{(D-1)}\mathbf{N} \rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle {}^{(D-1)}\mathbf{M}| \\ {}^{(D-1)}[M] \end{array} \right] \quad (6)$$

Remarque 1.1. *Produit de deux matrices*

Il est facile de démontrer la formule suivante :

$$\begin{aligned} & {}^{(D)}[M] \cdot {}^{(D)}[M'] \\ &= \\ & \left[\begin{array}{c} m \\ |{}^{(D-1)}\mathbf{N} \rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle {}^{(D-1)}\mathbf{M}| \\ {}^{(D-1)}[M] \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} m' \\ |{}^{(D-1)}\mathbf{N}' \rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle {}^{(D-1)}\mathbf{M}'| \\ {}^{(D-1)}[M'] \end{array} \right] \\ &= \\ & \left[\begin{array}{c} m.m' + \langle {}^{(D-1)}\mathbf{M}| \cdot |{}^{(D-1)}\mathbf{N}' \rangle \\ m' \cdot |{}^{(D-1)}\mathbf{N} \rangle + {}^{(D-1)}[M] \cdot |{}^{(D-1)}\mathbf{N}' \rangle \end{array} \begin{array}{c} m \cdot \langle {}^{(D-1)}\mathbf{M}'| + \langle {}^{(D-1)}\mathbf{M}| \cdot {}^{(D-1)}[M'] \\ {}^{(D-1)}[M] \cdot {}^{(D-1)}[M'] + T_2(\otimes)({}^{(D-1)}\mathbf{N}, {}^{(D-1)}\mathbf{M}') \end{array} \right] \end{aligned}$$

Exemple 1.1. *Les matrices de passage entre les représentations matricielles habituelles du champ EM.*

Il semble aisé d'appliquer cette analyse matricielle au cas particulier des matrices F et $F^* = M.F$; car dans ce cas $D = 4$ et :

$$F^* = [M] \cdot F \quad (8)$$

$$m' = 0$$

$${}^{(3)}\mathbf{M}' = {}^{(3)}\mathbf{E}$$

$${}^{(3)}\mathbf{N}' = -{}^{(3)}\mathbf{E}$$

$${}^{(3)}[M'] = {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H})$$

Le résultat du produit à gauche par la matrice inconnue ${}^{(4)}[M]$ doit livrer la matrice F^* ; ceci revient à étudier et résoudre le système :

$$\langle {}^{(3)}\mathbf{M}| \cdot |{}^{(3)}\mathbf{E} \rangle = 0 \quad (9)$$

$$m \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{E}| + \langle {}^{(3)}\mathbf{M}| \cdot {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) = -{}^{(3)}\mathbf{E}$$

$$-{}^{(3)}[M] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{E} \rangle = {}^{(3)}\mathbf{E}$$

$${}^{(3)}[M] \cdot {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{N}, {}^{(3)}\mathbf{E}) = {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H})$$

1.5 Les matrices de passage entre les représentations d'un champ EM

Remarque 1.2. *Discussion et résolution*

En bref : il s'agit de découvrir : $(m, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ et ${}^{(3)}[M])$ grâce à ces quatre équations. Je vais distinguer deux sous-ensembles de situations, selon que le champ électrique est ou non nul :

— $\mathbf{E} = \mathbf{0}$; le système des quatres équations se réduit à :

$$\begin{aligned} \forall {}^{(3)}\mathbf{M} : (9-1) \text{ vrai} \\ (9-2) \Rightarrow \forall m : {}^{(3)}\mathbf{M} // {}^{(3)}\mathbf{H} \\ \forall {}^{(3)}[M] : (9-3) \text{ vrai} \\ (9-4) \Rightarrow \forall {}^{(3)}\mathbf{N}, {}^{(3)}\mathbf{H} : {}^{(3)}[M] \cdot {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) = {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{aligned}$$

Cette dernière admet au moins une solution évidente ; à savoir : $[M] = \text{Id}_3$. Ce sous-ensemble de situations se caractérise donc par une matrice de passage du genre :

$${}^{(4)}[M] = \begin{bmatrix} m & \langle {}^{(3)}\mathbf{H} | \\ |{}^{(3)}\mathbf{N} \rangle & \text{Id}_3 \end{bmatrix}$$

Ce formalisme laisse la porte ouverte à un grand nombre de cas dans les détails desquels je ne rentrerai pas plus avant parce que cette partie du document n'a qu'une vocation pédagogique. Elle est destinée à s'initier aux problématiques implicitement contenues dans l'usage de l'analyse périenne.

— $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$; le système des quatres équations permet les commentaires suivants :

1. La première dit que le vecteur \mathbf{M} doit être orthogonal au champ électrique.
2. Je laisse momentanément la deuxième de côté, tout en remarquant qu'elle peut en particulier être validée lorsque (i) $m_{00} = m = -1$ et (ii) le vecteur inconnu \mathbf{M} est colinéaire au champ magnétique \mathbf{H} .
3. La troisième contient clairement une solution évidente :

$${}^{(3)}[M] = -\text{Id}_3 \quad (10)$$

Mais elle contient aussi tous les cas moins triviaux que je n'approfondirai pas ici et pour lesquels :

$$|{}^{(3)}[M] + \text{Id}_3| = 0$$

4. En repositionnant la solution évidente de (9-3) dans (9-4), il faudrait pouvoir trouver un vecteur \mathbf{N} tel que :

$$T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{N}, {}^{(3)}\mathbf{E}) = 2 \cdot {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \quad (11)$$

Sachant que² :

$$T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{N}, {}^{(3)}\mathbf{E}) - T_2^t(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{N}, {}^{(3)}\mathbf{E}) = {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{N} \wedge {}^{(3)}\mathbf{E}) \quad (12)$$

et connaissant l'anti-symétrie naturelle des matrices issues d'une décomposition triviale d'un produit vectoriel classique :

$${}_{[J]}\Phi^t({}^{(3)}\mathbf{H}) = -{}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \quad (13)$$

il devient aisé d'en déduire :

$${}^{(3)}\mathbf{H} = \frac{1}{4} \cdot {}^{(3)}\mathbf{N} \wedge {}^{(3)}\mathbf{E} \quad (14)$$

Toutefois cette relation est trompeuse et problématique à plus d'un titre :

2. La validité et la généralité de cette formule est démontrée plus loin dans ce document ; voir la Rem.2.5.

- (a) Si la géométrie locale est euclidienne, elle dit que le champ magnétique est orthogonal au champ électrique³ ; or cette configuration est exactement celle annulant le déterminant $|F|$ (voir Equ.(4))... et donc empêchant de découvrir la matrice de passage ; il y a là une contradiction logique dont l'origine est, à ce stade, difficile à comprendre.
- (b) Elle ne rend pas bien compte du fait que la diagonale de la décomposition triviale est nulle. Ce fait réduit considérablement les possibles en imposant le respect de (pas de sommation sur a) :

$$Equ.(11) \Rightarrow \forall a = 1, 2, 3 : N^a . E^a = 0 \quad (15)$$

Ceci veut dire qu'en choisissant arbitrairement un axe pour support du champ électrique, par exemple l'axe des X (a = 1), le vecteur \mathbf{N} doit forcément avoir le formalisme (0, N², N³). Il est dans un plan perpendiculaire à la direction du champ électrique.

$$Equ.(15) \Rightarrow \forall a = 1, 2, 3 : N^a . E^a = 0 \Rightarrow \sum_a N^a . E^a = \mathbf{N} . \mathbf{E} = 0 \quad (16)$$

- (c) En choisissant d'injecter l'Equ.(11) dans la deuxième ligne du système donné au travers des Equ.(9), il vient :

$$m . \langle^{(3)} \mathbf{E} | + \frac{1}{2} . \langle^{(3)} \mathbf{M} | . T_2(\otimes) \langle^{(3)} \mathbf{N} , \langle^{(3)} \mathbf{E} \rangle = - \langle^{(3)} \mathbf{E} \rangle$$

Les règles de calcul s'appliquant habituellement aux tables de Pythagore fournissent ensuite :

$$Equ.(11) \rightarrow (9-2) \Rightarrow m . \langle^{(3)} \mathbf{E} \rangle + \frac{1}{2} . \langle^{(3)} \mathbf{M} | . \langle^{(3)} \mathbf{N} \rangle . \langle^{(3)} \mathbf{E} \rangle = - \langle^{(3)} \mathbf{E} \rangle$$

Cette relation (i) est automatiquement vraie lorsque le champ électrique est nul et (ii) peut être validée pour n'importe quel champ électrique si :

$$\forall \mathbf{E} \neq \mathbf{0} : m + \frac{1}{2} . \langle^{(3)} \mathbf{M} | . \langle^{(3)} \mathbf{N} \rangle = -1 \quad (17)$$

Bien qu'il n'y ait rien à redire sur cette équation, force est de constater que si je n'avais pas fait le calcul manuel menant à $m = m_{00} = -1$ au début de ce document (voir Equ.(5)), je ne saurais pas qu'il faut absolument poser ici :

$$\forall \mathbf{E}, \mathbf{H} : \langle^{(3)} \mathbf{E} | . \langle^{(3)} \mathbf{H} \rangle \neq 0 \Rightarrow \langle^{(3)} \mathbf{M} | . \langle^{(3)} \mathbf{N} \rangle = 0 \quad (18)$$

et j'aurais proposé en toute bonne foi, mais parfois à tort (car l'Equ.(18) est fausse quand les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont orthogonaux) :

$$m = -1 - \frac{1}{2} . \langle^{(3)} \mathbf{M} | . \langle^{(3)} \mathbf{N} \rangle$$

qui laisse apparaître une dépendance vis à vis de l'orientation relative entre les vecteurs \mathbf{M} et \mathbf{N} . Je noterai ici qu'en travaillant sur E(3, C) -ce qui est tout à fait envisageable lorsqu'il s'agit d'électromagnétisme (voir par exemple [[15]] qui signalent cet usage dès les années 1970), le produit scalaire de ces deux vecteurs peut également s'annuler lorsque les deux vecteurs sont égaux et isotropiques au sens donné à ce qualificatif par E. Cartan dans [[09]].

3. Cette affirmation résulte des propriétés classiques du produit vectoriel.

- (d) Enfin, mais plutôt en faveur de l'Equ.(11) et de ses conséquences logiques, les règles s'appliquant habituellement au produit vectoriel classique devrait livrer :

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\mathbf{E} \wedge {}^{(3)}\mathbf{H} &= \frac{1}{4} \cdot {}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{N} \wedge {}^{(3)}\mathbf{E}) \\ &= \\ \frac{1}{4} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{E})^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{N} &- ({}^{(3)}\mathbf{E} \cdot {}^{(3)}\mathbf{N}) \cdot {}^{(3)}\mathbf{E} \end{aligned}$$

Mais ici, les vecteurs \mathbf{N} et \mathbf{E} sont orthogonaux (voir ci-dessus le point (b) de cette énumération ; Equ.(16)) ; de sorte que finalement :

$${}^{(3)}\mathbf{E} \wedge {}^{(3)}\mathbf{H} = \frac{1}{4} \cdot {}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{N} \wedge {}^{(3)}\mathbf{E}) = \frac{1}{4} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{E})^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{N}$$

Compte tenu des connaissances actuelles sur les ondes électromagnétiques, il est possible d'en déduire que le vecteur \mathbf{N} est colinéaire au vecteur de Poynting, traditionnellement noté \mathbf{S} , de l'onde étudiée [[10] ; p. 90, (31,2)] :

$$\frac{1}{4} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{E})^2 \cdot {}^{(3)}\mathbf{N} = \frac{4\pi}{c} \cdot {}^{(3)}\mathbf{S} \quad (19)$$

Expression : (i) dans laquelle apparaît "c", la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide ; (ii) qui semble cohérente avec le fait connu que le vecteur de Poynting *porte* l'énergie du champ puisque la densité volumique d'énergie électrique du champ est donnée dans le vide par [[07] ; p. 51, (2.36)] :

$$\frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot ({}^{(3)}\mathbf{E})^2 = \frac{\partial W_E}{\partial \tau}$$

Où ϵ_0 est la permittivité électrique du vide. Je note au passage que :

$$\frac{\partial W_E}{\partial \tau} \cdot {}^{(3)}\mathbf{N} = \frac{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{c} \cdot {}^{(3)}\mathbf{S} \quad (20)$$

Remarque 1.3. Vérification quand le champ électrique n'est pas nul.

Bilan : Tout ceci ayant été noté, le formalisme des matrices de passage est-il parfaitement décodé ? À première vue, lorsque le champ électrique n'est pas nul, il semble plausible de retenir l'ensemble des matrices de passage ayant pour formalisme :

$$\forall \mathbf{E} \neq \mathbf{0} : {}^{(4)}[M] = \begin{bmatrix} -1 - \frac{1}{2} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \cdot | {}^{(3)}\mathbf{N} \rangle & \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \\ | {}^{(3)}\mathbf{N} \rangle & -Id_3 \end{bmatrix}$$

aussi longtemps que les relations suivantes sont vérifiées :

$$Equ.(9 - 1) : \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \cdot | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle = 0$$

$$Equ.(16) : \langle {}^{(3)}\mathbf{N} | \cdot | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle = 0$$

$$Equ.(17) : \frac{1}{2} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \cdot | {}^{(3)}\mathbf{N} \rangle = -(1 + m)$$

Vérification - Un calcul fait avec la formule définissant le produit matriciel qui a été exposée au cours de la Rem.1.1 et ces seules exigences fournit in extenso :

$${}^{(4)}[M] \cdot F$$

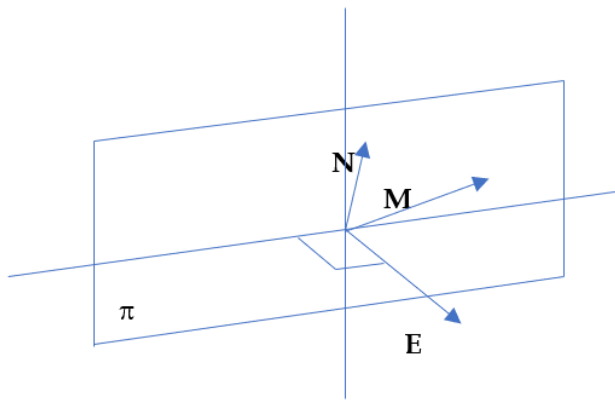


FIGURE 2 – Positions relatives des vecteurs (M, N, E).

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &\left[\begin{array}{cc} -1 - \frac{1}{2} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \cdot {}^{(3)}\mathbf{N} \rangle & \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \\ |{}^{(3)}\mathbf{N} \rangle & -Id_3 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cc} 0 & \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \\ | -{}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & [J]\Phi^t({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{array} \right] \\
 &= \\
 &\left[\begin{array}{cc} - \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \cdot {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & - \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | - \frac{1}{2} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \cdot {}^{(3)}\mathbf{N} \rangle \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | + \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \cdot [J]\Phi^t({}^{(3)}\mathbf{H}) \\ |{}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & - [J]\Phi^t({}^{(3)}\mathbf{H}) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{N}, {}^{(3)}\mathbf{E}) \end{array} \right] \\
 &= \\
 &\left[\begin{array}{cc} 0 & m \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | + \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \cdot [J]\Phi^t({}^{(3)}\mathbf{H}) \\ |{}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & - [J]\Phi^t({}^{(3)}\mathbf{H}) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{N}, {}^{(3)}\mathbf{E}) \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Ce résultat ne parvient pas encore tout à fait à me persuader de l'exactitude de l'analyse précédente, ni de la conclusion que j'en ai tiré. Un des motifs justifiant ce doute tient au fait que le coeur du résultat obtenu fait apparaître la nécessité de poser l'Equ.(11) dont j'ai signalé les avantages mais, et aussi, les inconvénients.

Remarque 1.4. Incorporation de la notion de polarisation

Pour autant, poser les relations :

$$m = -1 ; {}^{(3)}\mathbf{M} = \mu \cdot {}^{(3)}\mathbf{H} \tag{21}$$

est un moyen, certes particulier, mais incroyablement simple de retrouver la matrice F* à l'aide des conditions proposées.

La multiplicité mathématique des expressions possibles pour une matrice de passage trouve t-elle son explication dans le fait qu'elle doit décrire la diversité des polarisations physiques possibles d'une onde? Une approche plus complète introduira un élément de M(3, C) tel que :

$$|{}^{(3)}\mathbf{M} \rangle = [\mu] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{H} \rangle \tag{22}$$

Dans ce cadre élargi, l'ensemble des matrices de M(4, C) assurant le passage entre la représentation F et la représentation F* d'un quelconque champ EM est constitué des éléments ayant le formalisme générique (voir l'Equ.(20) :

$$\frac{\partial W_E}{\partial \tau} \cdot {}^{(4)}[M] = \left[\begin{array}{cc} -\frac{\partial W_E}{\partial \tau} - \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{c} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{H} | \cdot [\mu]^t \cdot |{}^{(3)}\mathbf{S} \rangle & \frac{\partial W_E}{\partial \tau} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{H} | \cdot [\mu]^t \\ \frac{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{c} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{S} \rangle & -\frac{\partial W_E}{\partial \tau} \cdot Id_3 \end{array} \right] \tag{23}$$

aussi longtemps que les deux relations suivantes sont vérifiées⁴ :

$$\langle {}^{(3)} \mathbf{H} | \cdot | \mu \rangle^t \cdot | {}^{(3)} \mathbf{E} \rangle = 0 \quad (24)$$

$$\frac{4\pi}{c} \cdot \langle {}^{(3)} \mathbf{H} | \cdot | \mu \rangle^t \cdot | {}^{(3)} \mathbf{S} \rangle = -(1 + m) \quad (25)$$

Cette vision générale contient un cas particulier qui correspond à $[\mu] = \text{Id}_3$. Dans l'état d'esprit de la discussion qui vient d'être menée, la matrice de passage est alors donnée par :

$$\frac{\partial W_E}{\partial \tau} \cdot {}^{(4)}[M] = \left[\begin{array}{cc} -\frac{\partial W_E}{\partial \tau} - \frac{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{c} \cdot \langle {}^{(3)} \mathbf{H} | \cdot | {}^{(3)} \mathbf{S} \rangle & \frac{\partial W_E}{\partial \tau} \cdot \langle {}^{(3)} \mathbf{H} | \\ \frac{8 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{c} \cdot | {}^{(3)} \mathbf{S} \rangle & -\frac{\partial W_E}{\partial \tau} \cdot \text{Id}_3 \end{array} \right]$$

Son formalisme ne remplit la mission de passage entre une matrice F et la matrice F* correspondante que si les deux relations suivantes sont vérifiées simultanément :

$$\langle {}^{(3)} \mathbf{H} | \cdot | {}^{(3)} \mathbf{E} \rangle = 0$$

$$\frac{4\pi}{c} \cdot \langle {}^{(3)} \mathbf{H} | \cdot | {}^{(3)} \mathbf{S} \rangle = -(1 + m)$$

Concernant la seconde, comme le vecteur de Poynting est par définition orthogonal au champ magnétique, il faut que $m = -1$ et cette matrice se laisse aussi réécrire (voir l'Equ.(20) aussi longtemps que le champs électrique, non seulement n'est pas nul mais sa norme euclidienne non plus :

$${}^{(4)}[M] = \left[\begin{array}{cc} -1 & \langle {}^{(3)} \mathbf{H} | \\ \frac{16 \cdot \pi \cdot \epsilon_0}{|\mathbf{E}|^2 \cdot c} \cdot | {}^{(3)} \mathbf{S} \rangle & -\text{Id}_3 \end{array} \right]; |\mathbf{E}|^2 \neq 0$$

La première relation correspond exactement aux cas pour lesquels la méthode de Cramer ne peut pas être utilisée puisqu'elle implique : $|\mathbf{F}| = 0$ et le système $\mathbf{F}^* = \mathbf{M} \cdot \mathbf{F}$ est tel que la représentation F n'est pas inversible. L'analyse périenne -alliée à la définition du vecteur de Poynting- donne une réponse pour toutes les situations dans lesquelles le vecteur \mathbf{M} est colinéaire au champ magnétique; exactement là où la méthode de Cramer est incapable de le faire. C'est là toute l'information contenue dans l'Equ.(21).

En dehors de ces cas particuliers, bien que le vecteur de Poynting reste orthogonal au champ magnétique -par définition-, les Equ.(24) et (25) laissent une énorme marge de liberté, notamment pour le choix de la valeur de m. Je n'approfondirai pas le sujet puisque, je le répète, il s'agit ici d'un échauffement consistant à dégrossir les problématiques soulevées par l'usage de l'analyse périenne. Je noterai encore que la nullité de la seconde forme fondamentale de l'électromagnétisme, in extenso la racine carré de $|\mathbf{F}|$, emmène en principe la discussion vers l'analyse de systèmes linéaires dégénérés.

4. Compte tenu de la définition du vecteur de Poynting, il n'est pas nécessaire de préciser la condition :

$$\langle {}^{(3)} \mathbf{S} | \cdot | {}^{(3)} \mathbf{E} \rangle = 0$$

2 Représentations de l'adjonction tensorielle dans $M(4, \mathbb{C})$

2.1 Premiers éléments de l'exploration

Remarque 2.1. *Préliminaires : conventions et sémantique.*

Les ouvrages universitaires présentent habituellement les deux représentations F et F^* dans le cadre du calcul tensoriel et plus rarement dans celui des algèbres matricielles. Je renvoie ici pour preuve à l'ouvrage d'A. Lichnerowicz [[05] ; 1955]⁵, au cours de l'Université de Berkeley [[07] ; 1972] et à ceux de l'école normale supérieure [[11] ; 2016] ou, pour les anglophones, à la référence mondialement connue [[02] ; chapitre 4, en américain]. Dans ce contexte historique, les diverses représentations mathématiques des champs électromagnétiques (EM) apparaissent comme les illustrations idéales de certains aspects du calcul différentiel, des concepts d'algèbre extérieure, de déterminant et de tenseur adjoint.

Relier entre elles par des formules les diverses représentations fait aussi partie des curiosités légitimes des mathématiciens. Les relations données par exemple dans [[05] ; p. 16] indiquent bien comment passer des composantes du tenseur champ EM à son *tenseur adjoint*. La plus importante d'entre elles (ne porte pas de numéro et s'écrit :

$$**F_{Lichnerowicz} = -F(ici)$$

Je m'en servirai d'ailleurs un peu plus tard pour définir un des critères du cahier des charges que devra remplir toute représentation matricielle de *l'adjonction tensorielle* ; voir définition 2.1 plus bas. Si j'insiste un peu ici sur ce point, ce n'est pas tant pour le plaisir de faire de la terminologie mais pour attirer le regard sur des détails techniques cruciaux et sur le fait que la sémantique joue un rôle essentiel dans une classification efficace des objets mathématiques. Elle précise les choses et évite les confusions.

A titre d'exemple : le tenseur adjoint de la représentation F est noté $*F$ chez Lichnerowicz. Il ne doit *a priori pas* être confondu avec ma notation $F^* = M.F$ qui, elle, représente les composantes deux fois contravariantes du tenseur champ EM, F :

$$*F_{Lichnerowicz} \neq F^*(ici)$$

C'est la raison pour laquelle (i) il faut lire attentivement les conventions d'écriture des ouvrages scientifiques et (ii) je préfère noter les différentes représentations du tenseur champ EM : $F(\downarrow, \downarrow)$, $F(\uparrow, \downarrow)$, $F(\downarrow, \uparrow)$, $F(\uparrow, \uparrow)$. Dans la première partie de ce chapitre, j'ai donc cherché à relier $F^* = F(\uparrow, \uparrow)$ et $F(\downarrow, \downarrow)$. Poursuivre sur cette voie logique exige d'introduire les représentations similaires du tenseur adjoint, soit les : $*F(\downarrow, \downarrow)$, $*F(\uparrow, \downarrow)$, $*F(\downarrow, \uparrow)$, $*F(\uparrow, \uparrow)$.

Définition 2.1. *Application/foncteur : adjonction tensorielle*

S'il était souhaité faire en sorte que des matrices, notée génériquement $[\chi]$, reproduisent à leur manière l'application faisant correspondre son *tenseur adjoint* à une représentation F du champ EM, il faudrait leur imposer les conditions suivantes :

1. Elles devraient être des éléments de $M(4, \mathbb{C})$ ou de n'importe quel ensemble de matrices carrées (4-4) noté génériquement $M(4, \mathbb{K})$;

5. certes déjà un peu ancien -1955- mais fort instructif et reparu récemment aux éditions Gabay.

2. Elles devraient être définies par :

$$adj_A : F \in M(4, C) \xrightarrow{adj_A} adj_A(F) = {}^*F = {}^{(4)}[\chi] \cdot F \in M(4, C)$$

et satisfaire la relation indispensable :

$$[\chi] \in M(4, K); {}^{(4)}[\chi]^2 = -Id_4 \quad (26)$$

Cette action sur $M(4, C)$ rend bien compte du fait que la double adjonction fait correspondre à une représentation donnée du champ EM (ici : la forme deux fois covariante $F = F(\downarrow, \downarrow)$) son inverse additif :

$$\begin{array}{c} F \\ \downarrow \\ (adj_A) \circ (adj_A) \\ \downarrow \\ adj_A(adj_A(F)) = adj_A({}^*F) = {}^{(4)}[\chi] \cdot \{ {}^{(4)}[\chi] \cdot F \} = {}^{(4)}[\chi]^2 \cdot F = -F = {}^{**}F \end{array}$$

3. Elles devraient assurer le même rôle que le tenseur entièrement antisymétrique de rang quatre.

Remarque 2.2. *Caractérisation des matrices admissibles à représenter l'adjonction tensorielle sur la base du deuxième critère.*

La formule générale établie plus haut, Equ.(7), permet de poser en particulier :

$$\begin{aligned} & {}^{(4)}[\chi]^2 \quad (27) \\ & = \\ & \left[\begin{array}{cc} d & \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \\ |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle & {}^{(3)}[\chi] \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cc} d & \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \\ |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle & {}^{(3)}[\chi] \end{array} \right] \\ & = \\ & \left[\begin{array}{cc} d^2 + \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \cdot |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle & d \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | + \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \cdot {}^{(3)}[\chi] \\ d \cdot |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle + {}^{(3)}[\chi] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle & {}^{(3)}[\chi]^2 + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{e}, {}^{(3)}\mathbf{d}) \end{array} \right] \end{aligned}$$

La matrice carrée s'identifie à l'inverse additif de l'identité de rang quatre chaque fois que le système des quatre conditions suivantes est valide :

$$\begin{aligned} & d^2 + \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \cdot |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle = -1 \quad (28) \\ & d \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | + \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \cdot {}^{(3)}[\chi] = \langle \mathbf{0} | \\ & d \cdot |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle + {}^{(3)}[\chi] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle = | \mathbf{0} \rangle \\ & {}^{(3)}[\chi]^2 + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{e}, {}^{(3)}\mathbf{d}) = -Id_3 \end{aligned}$$

La résolution de ce système d'équations ouvre une longue et difficile exploration qui fait l'objet du reste de ce document. Une classification claire des solutions possibles n'apparaîtra que progressivement au cours de l'exposé ; au niveau de la sous-section 2.4. Pour favoriser la compréhension de l'exposé et de la démarche, j'introduis encore deux définitions sémantiques :

Définition 2.2. *Matrice envisageable :*

Un élément de $M(4, C)$ est dit être une matrice envisageable lorsqu'il existe une raison valable de penser qu'il est raisonnable de prendre le temps tester si ses constituants (coin scalaire, ailes et coeur) vérifient les quatre conditions du système (28).

Définition 2.3. *Matrice admissible :*

Un élément de $M(4, \mathbb{C})$ est dit être une matrice admissible lorsque ses constituants (coin scalaire, ailes et coeur) vérifient les quatre conditions du système (28).

Remarque 2.3. *Premier sous-ensemble de matrices respectant le deuxième critère trivialement.*

Les éléments de ce sous-ensemble s'obtiennent sans calcul en annulant les ailes de la matrice.

$${}^{(3)}\mathbf{d} = {}^{(3)}\mathbf{e} = {}^{(3)}\mathbf{0} \quad (29)$$

Ce choix a pour conséquence de fixer $d = \pm i$ ($i^2 + 1 = 0$) et de repousser la question au rang inférieur. La manoeuvre d'investigation au moyen de l'analyse périenne peut alors être répétée et permet d'aboutir à l'ensemble de matrices diagonales dont les composantes valent $+i$ ou $-i$.

$${}^{(4)}[\chi] = \begin{bmatrix} \pm i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm i \end{bmatrix} \quad (30)$$

Il y a donc apparemment 16 éléments dans ce premier sous-ensemble de solutions ; il sera retrouvé plus tard dans cet exposé au niveau de la Rem.2.17.

Remarque 2.4. *Première relation remarquable sur $M(3, \mathbb{C})$ et sa conséquence sur les matrices envisageables.*

Exceptionnellement sur $M(3, \mathbb{C})$, la formule suivante peut se démontrer avec un peu d'algèbre :

$$|T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{d}, {}^{(3)}\mathbf{e}) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{e}, {}^{(3)}\mathbf{d})| = 0 \quad (31)$$

Preuve - De fait :

$$\begin{aligned} & \forall (\mathbf{h}, \mathbf{g}) : |T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) + T_2(\otimes)(\mathbf{g}, \mathbf{h})| \\ & = \\ & \left| \begin{array}{ccc} 2.h^1.g^1 & h^2.g^1 + h^1.g^2 & h^3.g^1 + h^1.g^3 \\ h^2.g^1 + h^1.g^2 & 2.h^2.g^2 & h^3.g^2 + h^2.g^3 \\ h^3.g^1 + h^1.g^3 & h^2.g^3 + h^3.g^2 & 2.h^3.g^3 \end{array} \right| \\ & = \\ & \left| \begin{array}{ccc} A = 2.h^1.g^1 & B = h^2.g^1 + h^1.g^2 & C = h^3.g^1 + h^1.g^3 \\ B = h^2.g^1 + h^1.g^2 & D = 2.h^2.g^2 & E = h^3.g^2 + h^2.g^3 \\ C = h^3.g^1 + h^1.g^3 & E = h^2.g^3 + h^3.g^2 & F = 2.h^3.g^3 \end{array} \right| \end{aligned}$$

Et les calculs in extenso livrent :

$$\begin{aligned} & A.(D.F - E^2) - B.(B.F - C.E) + C.(B.E - C.D) \\ & = A.D.F - A.E^2 - B^2.F + B.C.E + C.B.E - C^2.D \\ & = -2.h^1.g^1.(h^3.g^2 + h^2.g^3)^2 - 2.h^2.g^2.(h^3.g^1 + h^1.g^3)^2 \\ & \quad - 2.h^3.g^3.(h^2.g^1 + h^1.g^2)^2 \\ & \quad + 8.h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 + 2.(h^2.g^1 + h^1.g^2).(h^3.g^1 \\ & \quad + h^1.g^3).(h^2.g^3 + h^3.g^2) \\ & = -2.h^1.g^1.(h^3.g^2)^2 - 2.h^1.g^1.(h^2.g^3)^2 - 4.h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2.h^2.g^2.(h^3.g^1)^2 - 2.h^2.g^2.(h^1.g^3)^2 - 4.h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 \\
& -2.h^3.g^3.(h^1.g^2)^2 - 2.h^3.g^3.(h^2.g^1)^2 - 4.h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 \\
& \quad + 8.h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 \\
& + 2.[h^2.h^3.(g^1)^2 + h^2.h^1.g^1.g^3 + h^1.h^3.g^1.g^2 \\
& \quad + (h^1)^2.g^2.g^3].(h^2.g^3 + h^3.g^2) \\
& = -2.h^1.g^1.(h^3.g^2)^2 - 2.h^1.g^1.(h^2.g^3)^2 \\
& \quad - 2.h^2.g^2.(h^3.g^1)^2 - 2.h^2.g^2.(h^1.g^3)^2 \\
& \quad - 2.h^3.g^3.(h^1.g^2)^2 - 2.h^3.g^3.(h^2.g^1)^2 \\
& \quad - 4.h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 \\
& \quad + 2.[h^3.g^3.(h^2.g^1)^2 + h^1.g^1.(h^2.g^3)^2 \\
& \quad + h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 + h^2.g^2.(h^1.g^3)^2] \\
& + 2.[h^2.g^2.(h^3.g^1)^2 + h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 \\
& \quad + h^1.g^1.(h^3.g^2)^2 + h^3.g^3.(h^1.g^2)^2] \\
& = 0
\end{aligned}$$

□

La confrontation entre la formule (l'équation :) (31) et l'Equ.(28-4) génère une contrainte s'appliquant de façon obligatoire sur le coeur de toute matrice envisageable; précisément :

$$|Id_3 + \frac{1}{2} \cdot \{^{(3)}[\chi]^2 + (^{(3)}[\chi]^2)^t\}| = 0 \quad (32)$$

Remarque 2.5. *Seconde relation remarquable sur $M(3, C)$ et sa conséquence sur les matrices envisageables.*

Une autre formule générale, assez facile à démontrer, s'écrit :

$$T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{e}, ^{(3)}\mathbf{d}) - T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{d}, ^{(3)}\mathbf{e}) = {}_{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{e} \wedge ^{(3)}\mathbf{d}) \quad (33)$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
& T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{d}, ^{(3)}\mathbf{e}) - T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{e}, ^{(3)}\mathbf{d}) \\
& = \\
& \left[\begin{array}{ccc} d^1.e^1 & d^2.e^1 & d^3.e^1 \\ d^1.e^2 & d^2.e^2 & d^3.e^2 \\ d^1.e^3 & d^2.e^3 & d^3.e^3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{ccc} e^1.d^1 & e^2.d^1 & e^3.d^1 \\ e^1.d^2 & e^2.d^2 & e^3.d^2 \\ e^1.d^3 & e^2.d^3 & e^3.d^3 \end{array} \right] \\
& = \\
& \left[\begin{array}{ccc} 0 & d^2.e^1 - e^2.d^1 & d^3.e^1 - e^3.d^1 \\ d^1.e^2 - e^1.d^2 & 0 & d^3.e^2 - e^3.d^2 \\ d^1.e^3 - e^1.d^3 & d^2.e^3 - e^2.d^3 & 0 \end{array} \right] \\
& = \\
& \left[\begin{array}{ccc} 0 & -(\mathbf{d} \wedge \mathbf{e})^3 & (\mathbf{d} \wedge \mathbf{e})^2 \\ (\mathbf{d} \wedge \mathbf{e})^3 & 0 & -(\mathbf{d} \wedge \mathbf{e})^1 \\ -(\mathbf{d} \wedge \mathbf{e})^2 & (\mathbf{d} \wedge \mathbf{e})^1 & 0 \end{array} \right] \\
& = \\
& {}_{[J]}\Phi(\mathbf{d} \wedge \mathbf{e})
\end{aligned}$$

Puisqu'il faut respecter la quatrième condition définissant les représentations de l'adjonction tensorielle (rappel : Equ.(28-4)) :

$${}^{(3)}[\chi]^2 = -Id_3 - T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{e}, {}^{(3)}\mathbf{d})$$

Il vient par transposition :

$$({}^{(3)}[\chi]^2)^t = -Id_3 - T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{d}, {}^{(3)}\mathbf{e})$$

Et une deuxième contrainte s'applique de façon obligatoire sur le carré du coeur d'une matrice envisageable ; à savoir :

$$({}^{(3)}[\chi]^2)^t - {}^{(3)}[\chi]^2 = {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{e} \wedge {}^{(3)}\mathbf{d}) \quad (34)$$

□

Lemme 2.1. Des ailes colinéaires

Lorsque les ailes d'une matrice envisageable respectant l'Equ.(28-4) sont colinéaires, le carré de son coeur est une matrice symétrique ; par conséquent, le coeur de cette matrice vaut plus ou moins une fois son transposé.

Preuve - Si :

$${}^{(3)}\mathbf{d} = k.\mathbf{e} \quad (35)$$

L'Equ.(34) permet de déduire :

$$({}^{(3)}[\chi]^2)^t - {}^{(3)}[\chi]^2 = {}^{(3)}[0]$$

Puisque de façon générale sur $M(3, \mathbb{C})$:

$$({}^{(3)}[\chi]^2)^t = ({}^{(3)}[\chi]^t)^2 \quad (36)$$

Il est aisé d'aboutir à :

$${}^{(3)}[\chi]^t = \pm {}^{(3)}[\chi]$$

□

et, au passage, l'Equ.(32), devient :

$$|Id_3 + {}^{(3)}[\chi]^2| = 0 \quad (37)$$

Remarque 2.6. Une exigence facilitant la classification systématique des matrices envisageables

À partir de maintenant, je considère le système des quatre conditions/Equ.(28) de manière plus globale, comme un tout. Soit le produit scalaire euclidien nul suivant obtenu en combinant les deux ailes d'une matrice envisageable :

$$\begin{aligned} & 0 \\ & = \\ & \langle \mathbf{0} | \cdot | \mathbf{0} \rangle \\ & = \\ & \langle (28 - 2) | \cdot | (28 - 3) \rangle \\ & = \\ & (d. \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | + \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \cdot {}^{(3)}[\chi]) \cdot (d. | {}^{(3)}\mathbf{e} \rangle + {}^{(3)}[\chi] \cdot | {}^{(3)}\mathbf{e} \rangle) \end{aligned}$$

$$d^2 \cdot \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle + 2.d \cdot \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot |^{(3)} [\chi] \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle + \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot |^{(3)} [\chi]^2 \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle = 0 \quad (38)$$

En injectant la quatrième condition dans le dernier terme, Equ.(28-4), je trouve qu'il s'écrit aussi :

$$- \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot \{ Id_3 + T_2(\otimes)(^{(3)} \mathbf{e}, ^{(3)} \mathbf{d}) \} \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle$$

Or il est facile de montrer que :

$$T_2(\otimes)(^{(3)} \mathbf{e}, ^{(3)} \mathbf{d}) \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle = |\mathbf{e}|^2 \cdot |^{(3)} \mathbf{d} \rangle$$

En injectant ce résultat intermédiaire dans la relation précédente, il vient :

$$- \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle - |\mathbf{e}|^2 \cdot |\mathbf{d}|^2$$

et le calcul initial peut se poursuivre avec :

$$(d^2 - 1) \cdot \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle + 2.d \cdot \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot |^{(3)} [\chi] \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle - |\mathbf{e}|^2 \cdot |\mathbf{d}|^2 = 0$$

En injectant la première condition, (28-1), il vient :

$$-(d^2 - 1) \cdot (1 + d^2) + 2.d \cdot \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot |^{(3)} [\chi] \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle - |\mathbf{e}|^2 \cdot |\mathbf{d}|^2 = 0$$

Finalement, il existe à première vue une infinité de solutions au problème posé car les quatre conditions se laissent condenser en l'unique exigence :

$$2.d \cdot \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot |^{(3)} [\chi] \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle = d^4 + |\mathbf{e}|^2 \cdot |\mathbf{d}|^2 - 1 \quad (39)$$

Proposition 2.1. *Sous certaines conditions que je vais préciser, les ailes des matrices envisageables peuvent être rendues équivalentes.*

La comparaison des deux relations suivantes :

$$(28 - 2) \cdot |\mathbf{e} \rangle = d \cdot \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot |\mathbf{e} \rangle + \{ \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot |^{(3)} [\chi] \} \cdot |\mathbf{e} \rangle = 0$$

$$\langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot (28 - 3) = d \cdot \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle + \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot \{ |^{(3)} [\chi] \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle \} = 0$$

ouvre une discussion logique. Chaque aile prise isolément devant être nulle, le fait de la multiplier par n'importe quoi, que ce soit à droite ou à gauche ne change rien au fait que le résultat sera toujours nul. Comme a priori écrire $0 = 0$ est une tautologie, les deux lignes ci-dessus sont forcément toujours égales entre elles et nulles. Ce qui contient implicitement la possibilité d'écrire comme je l'ai d'ailleurs déjà fait au sein de la proposition :

$$(28 - 2) \cdot |\mathbf{e} \rangle = \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot (28 - 3) = 0$$

Or, une comparaison effective conduit à devoir poser :

$$\{ \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot |^{(3)} [\chi] \} \cdot |\mathbf{e} \rangle = \langle^{(3)} \mathbf{d} | \cdot \{ |^{(3)} [\chi] \cdot |^{(3)} \mathbf{e} \rangle \}$$

Un développement in extenso de cette égalité s'écrit :

$$(d^1, d^2, d^3) \cdot \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} = (d^p \cdot \chi_{p1}, d^p \cdot \chi_{p2}, d^p \cdot \chi_{p3})$$

et :

$$(d^p \cdot \chi_{p1}, d^p \cdot \chi_{p2}, d^p \cdot \chi_{p3}) \cdot (e^1, e^2, e^3)$$

$$= (d^p \cdot \chi_{p1}) \cdot e^1 + (d^p \cdot \chi_{p2}) \cdot e^2 + (d^p \cdot \chi_{p3}) \cdot e^3 = (d^p \cdot \chi_{pq}) \cdot e^q$$

De façon similaire :

$$\begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^1 \\ e^2 \\ e^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_{1q} \cdot e^q \\ \chi_{2q} \cdot e^q \\ \chi_{3q} \cdot e^q \end{bmatrix}$$

et :

$$(d^1, d^2, d^3) \cdot \begin{bmatrix} \chi_{1q} \cdot e^q \\ \chi_{2q} \cdot e^q \\ \chi_{3q} \cdot e^q \end{bmatrix} =$$

$$d^1 \cdot (\chi_{1q} \cdot e^q) + d^2 \cdot (\chi_{2q} \cdot e^q) + d^3 \cdot (\chi_{3q} \cdot e^q) = d^p \cdot (\chi_{pq} \cdot e^q)$$

Les deux manipulations devant donner le même résultat, il faut pouvoir écrire (chose faussement anodine) :

$$(d^p \cdot \chi_{pq}) \cdot e^q = d^p \cdot (\chi_{pq} \cdot e^q) \quad (40)$$

Conclusion : L'égalité n'est possible que si la discussion mathématique se développe sur un espace (\mathbb{K}, \cdot) dont la multiplication “.” est associative. \square

Lemme 2.2. Des ailes équivalentes

Lorsque la discussion mathématique se développe sur un espace (\mathbb{K}, \cdot) dont la multiplication “.” est associative, il est justifié de poser :

$$\forall (\mathbf{e}, \mathbf{d}) \in E^2(3, K) : (28 - 2) \cdot |\mathbf{e}\rangle = \langle^{(3)} \mathbf{d}| \cdot (28 - 3) \quad (41)$$

Lorsque cette relation s'applique aux ailes du carré d'une matrice envisageable, ces ailes sont dites équivalentes. Quand une matrice envisageable dont les ailes sont équivalentes est partiellement admissible parce qu'elles respectent les Equ.(28-2 et 3), la relation ci-dessus est nulle.

Proposition 2.2. *Quand les ailes d'une matrice envisageable sont équivalentes, son coin scalaire est solution d'un polynôme de degré quatre.*

Preuve : Quand les ailes sont équivalentes, il est permis d'écrire :

$$(28 - 2) \cdot |\mathbf{e}\rangle = \langle^{(3)} \mathbf{d}| \cdot (28 - 3)$$

Dans ce cas, en injectant l'Equ.(28-1) dans l'un quelconque des deux termes de l'Equ.(41), il vient :

$$d^3 + d - \{ \langle^{(3)} \mathbf{d}| \cdot \langle^{(3)} [\chi] \} \cdot |\mathbf{e}\rangle = 0 \quad (42)$$

La juxtaposition de cette condition et de l'Equ.(39) impose :

$$2 \cdot d \cdot (d^3 + d) = d^4 + |\mathbf{e}|^2 \cdot |\mathbf{d}|^2 - 1$$

qui se résume à :

$$d^4 + 2 \cdot d^2 - |\mathbf{e}|^2 \cdot |\mathbf{d}|^2 + 1 = 0$$

La condition (28-1) peut aussi se transcrire avec :

$$s = \langle \mathbf{e}, \mathbf{d} \rangle = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d}) = |\mathbf{e}| \cdot |\mathbf{d}| \cdot \cos \theta = -(1 + d^2)$$

En multipliant le polynôme de degré quatre obtenu deux lignes plus haut par le carré du cosinus de l'angle θ que font les ailes entre elles, il vient :

$$\cos^2 \theta . d^4 + 2 . \cos^2 \theta . d^2 - \cos^2 \theta . |\mathbf{e}|^2 . |\mathbf{d}|^2 + \cos^2 \theta = 0$$

C'est-à-dire :

$$\cos^2 \theta . d^4 + 2 . \cos^2 \theta . d^2 - (1 + d^2)^2 + \cos^2 \theta = 0$$

Soit encore :

$$\cos^2 \theta . d^4 + 2 . \cos^2 \theta . d^2 - (1 + 2 . d^2 + d^4) + \cos^2 \theta = 0$$

Ou :

$$(\cos^2 \theta - 1) . d^4 + 2 . (\cos^2 \theta - 1) . d^2 + (\cos^2 \theta - 1) = 0$$

qu'une formule trigonométrique très simple permet d'écrire après un changement de signe :

$$\sin^2 \theta . (d^2 + 1)^2 = 0 \quad (43)$$

La condition contient bien un polynôme de degré quatre dépendant de d. \square

Théorème 2.1. Des ailes équivalentes

Lorsque les ailes de matrices envisageables sont équivalentes, il ne peut se présenter que deux sous-ensembles de situations :

1. Ces ailes équivalentes sont colinéaires car $\sin \theta = 0$, quelle que soit une valeur de d qui serait solution d'un polynôme de degré trois dont le coefficient de degré zéro est proportionnel à une forme quadratique dépendant de l'aile \mathbf{e} et du cœur de la matrice envisageable; c'est un cas particulier de l'Equ.(42) lorsque l'Equ.(35) est validée :

$$d^3 + d - k . \{ \langle^{(3)} \mathbf{e} | . {}^{(3)}[\chi] \rangle . |\mathbf{e} \rangle = 0 \quad (44)$$

A ce stade de l'exploration, les matrices appartenant à ce sous-ensemble et dont il peut raisonnablement être envisagé de savoir si elles sont admissibles ou non ont donc les formalismes suivants :

$${}^{(4)}[\chi] = \begin{bmatrix} d & k . \langle^{(3)} \mathbf{e} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{e} \rangle & {}^{(3)}[\chi] = {}^{(3)}[\chi]^t \end{bmatrix}; {}^{(4)}[\chi] = \begin{bmatrix} d & k . \langle^{(3)} \mathbf{e} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{e} \rangle & {}^{(3)}[\chi] = -[\chi]^t \end{bmatrix} \quad (45)$$

2. Quelle que soit l'orientation relative des ailes (èquiv. : elles ne sont pas systématiquement colinéaires), le coin scalaire des matrices envisageables ne peut appartenir qu'à l'ensemble $\{-i, +i\}$; dit autrement : ce coin est une racine complexe de moins un. De plus, l'Equ.(35) ne s'applique pas et l'Equ.(42) prend la forme particulière :

$$\{ \langle^{(3)} \mathbf{d} | . {}^{(3)}[\chi] \rangle . |\mathbf{e} \rangle = 0 \quad (46)$$

A ce stade de l'exploration, les matrices appartenant à ce sous-ensemble et dont il peut raisonnablement être envisagé de savoir si elles sont admissibles ou non ont donc les formalismes suivants :

$${}^{(4)}[\chi] = \begin{bmatrix} i & \langle^{(3)} \mathbf{d} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{e} \rangle & {}^{(3)}[\chi] = {}^{(3)}[\chi]^t \end{bmatrix}; {}^{(4)}[\chi] = \begin{bmatrix} i & \langle^{(3)} \mathbf{d} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{e} \rangle & {}^{(3)}[\chi] = -[\chi]^t \end{bmatrix}$$

$${}^{(4)}[\chi] = \begin{bmatrix} -i & \langle^{(3)} \mathbf{d} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{e} \rangle & {}^{(3)}[\chi] = {}^{(3)}[\chi]^t \end{bmatrix}; {}^{(4)}[\chi] = \begin{bmatrix} -i & \langle^{(3)} \mathbf{d} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{e} \rangle & {}^{(3)}[\chi] = -[\chi]^t \end{bmatrix}$$

Corollaire 2.1. *physique*

Malgré son air anodin, ce résultat peut potentiellement avoir des répercussions importantes sur le calcul des invariants et du tenseur impulsion-énergie d'un champ EM [[05] ; p. 17]. Avant même de rentrer dans les détails d'un quelconque calcul, le fait que le coin scalaire d'une représentation admissible de l' *adjonction tensorielle* ne puisse avoir au plus que trois valeurs va également limiter le nombre de représentations du tenseur impulsion-énergie. Ce simple constat suggère que le nombre d'objets physiques décrits de la sorte est limité. S'il existe un lien simple entre ces représentations mathématiques et la notion de particule élémentaire, cette théorie est en train de dessiner un chemin permettant de compléter le modèle standard en proposant une explication rationnelle à la question des trois générations de particules (exemple type : électron, muon, tau).

2.2 Le coeur des matrices admissibles

Lemme 2.3. *Le déterminant des coeurs admissibles*

Le déterminant d'un coeur vaut toujours plus ou moins le coin scalaire de la représentation admissible à laquelle il appartient.

Preuve : Le déterminant du coeur d'une matrice admissible respecte en particulier l'Equ(28-4). Celle-ci fournit une information supplémentaire qui, confrontée avec l'Equ.(28-1) livre obligatoirement le résultat essentiel :

$$|^{(3)}[\chi]^2| = -|Id_3 + T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{d}, ^{(3)}\mathbf{e})| = -(\langle ^{(3)}\mathbf{d} | \cdot | ^{(3)}\mathbf{e} \rangle + 1) = d^2$$

D'où il ressort immédiatement que :

$$|^{(3)}[\chi]| = \pm d \tag{47}$$

□

Nota bene : En conséquence de quoi, il ne peut être nul que si d est nul. Ainsi, si au sein d'une discussion logique la valeur $d = 0$ n'est pas acceptable, le déterminant du coeur ne peut pas non plus être nul.

Remarque 2.7. *Le formalisme des coeurs induit à partir du produit des ailes.*

Un retour en arrière sur la Rem.2.6 et sur la proposition 2.1 met en exergue le rôle fondamental de l'articulation des ailes entre elles. Par exemple, ce que j'ai nommé l'équivalence des ailes, réduit la généralité de l'Equ.(39) en la ramenant à l'Equ.(43) qui sert de fondement au théorème 2.1 sur les ailes équivalentes. L'observation visuelle du produit des ailes d'une matrice envisageable, in extenso l'Equ.(38) :

$$d^2. \langle ^{(3)}\mathbf{d} | \cdot | ^{(3)}\mathbf{e} \rangle + 2.d. \langle ^{(3)}\mathbf{d} | \cdot | ^{(3)}[\chi] \cdot | ^{(3)}\mathbf{e} \rangle + \langle ^{(3)}\mathbf{d} | \cdot | ^{(3)}[\chi]^2 \cdot | ^{(3)}\mathbf{e} \rangle = 0$$

induit l'existence de la relation particulière⁶ :

$$(Y_0) : \forall (\mathbf{e}, \mathbf{d}) : d^2 \cdot Id_3 + 2.d \cdot ^{(3)}[\chi] + ^{(3)}[\chi]^2 = 0 \tag{48}$$

qui, grâce à l'utilisation de l'Equ.(28-4), mène au formalisme :

$$(Z_0) : ^{(3)}[\chi] = \alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d}) \tag{49}$$

⁶. Je montrerai au niveau de la Rem.2.12 que ce n'est pas la formulation la plus générale de ce que l'Equ.(38) permet d'induire.

pour lequel *en particulier*, la paire (α_0, β_0) se définit précisément par :

$$\alpha_0 = \frac{1 - d^2}{2d}; \beta_0 = \frac{1}{2d}; d \neq 0 \quad (50)$$

Le carré de ce type de coeur vaut :

$${}^{(3)}[{}_0\chi]^2 = \alpha_0^2 \cdot Id_3 + (2 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 + \beta_0^2 \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d})) \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d}) \quad (51)$$

Ces résultats sont le fruit d'une induction visuelle. Pour se convaincre de la recevabilité de cette relation induite, il suffit de la multiplier à droite par l'aile \mathbf{e} , puis à gauche par l'aile \mathbf{d} . C'est un formalisme que je vais commencer à analyser plus en détail. Pour alléger les écritures, je pose par convention :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d}) = T; T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{e}) = T^t \quad (52)$$

et :

$$\text{Trace } T = \text{Trace } T^t = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d}) = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}) = s \quad (53)$$

Remarque 2.8. *Sur la cohérence du formalisme des coeurs induit à partir du produit des ailes.*

En remplaçant ${}^{(3)}[{}_0\chi]$ par le formalisme que lui confère l'Equ.(49) dans l'Equ.(48), il vient :

$$d^2 \cdot Id_3 + 2 \cdot d \cdot \{\alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T\} + \{\alpha_0^2 \cdot Id_3 + (2 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 + \beta_0^2 \cdot s) \cdot T\} = 0$$

Qui, après réorganisation, s'écrit aussi :

$$(d + \alpha_0)^2 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot (2 \cdot d + 2 \cdot \alpha_0 + \beta_0 \cdot s) \cdot T = 0 \quad (54)$$

Cette relation est vérifiée lorsque :

$$d + \alpha_0 = 0; \beta_0^2 \cdot s = 0$$

Ce qui, lorsque les liens entre α_0 , β_0 et d ne sont pas a priori connus, peut être validé dans deux grands sous-ensembles de situations; soit :

$$d + \alpha_0 = 0; \beta_0 = 0, \forall s \quad (55)$$

Soit :

$$d + \alpha_0 = 0; s = 0, \forall \beta_0 \quad (56)$$

Compte tenu de la définition des paramètres α_0 et β_0 en fonction de d , telle qu'elle apparaît dans l'Equ.(50), il est aisé d'en déduire que la validation du formalisme du coeur est obtenu ici lorsque, simultanément :

$$-\alpha_0 = d = \pm i; \beta_0 = \frac{1}{\pm 2 \cdot i}; s = 0 \quad (57)$$

Définition 2.4. *Par convention du langage, dans cette théorie, chaque matrice ayant le formalisme :*

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{c|c} \pm i & \langle {}^{(3)} \mathbf{d} | \\ \hline | {}^{(3)} \mathbf{e} \rangle & \mp i \cdot Id_3 \pm \frac{1}{2 \cdot i} \cdot T \end{array} \right]; s = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d}) = 0 \quad (58)$$

est appelée une "équerre".

Une équerre doit essentiellement son nom au fait qu'elle représente une paire de vecteurs orthogonaux.

Proposition 2.3. *Une équerre est une matrice admissible.*

Preuve : Il est facile de vérifier à l'aide de l'Equ.(7) que le carré d'une équerre vaut $-\text{Id}_4$. Elle satisfait donc le système des équations (28). En conséquence de quoi elle est admissible à être testée vis-à-vis du troisième critère de représentabilité de l'adjonction tensorielle. \square

Proposition 2.4. *Les solutions triviales de la Rem.(2.3) sont des équerres dont les ailes/branches sont nulles.*

Preuve : évidente; $\mathbf{e} = \mathbf{d} = \mathbf{0} \Rightarrow s = 0, T = [0]$. \square

Remarque 2.9. *Sur les spineurs de Elie Cartan dans E3.*

L'ensemble des équerres contient un sous-ensemble bâti à l'aide de spineurs d'E. Cartan pour l'espace $E(3, C)$; pour de plus amples détails, voir la référence .[[09]; en anglais]

2.3 Les mères admissibles

Définition 2.5. *Par convention du langage, dans cette théorie, chaque matrice dont le coeur a le formalisme générique de l'Equ.(49) sans que la paire (α_0, β_0) soit obligatoirement définie par les Equ.(50) et (57) mais respecte le lemme 2.3 sur le déterminant des coeurs, in extenso est telle que :*

$${}^{(4)}[\chi] = \begin{bmatrix} \pm|\alpha_0 \cdot \text{Id}_3 + \beta_0 \cdot T| & \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \\ |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle & \alpha_0 \cdot \text{Id}_3 + \beta_0 \cdot T \end{bmatrix} \quad (59)$$

est appelée une "mère".

Définition 2.6. *Par convention du langage, dans cette théorie, l'élément (α_0, β_0, s) de C^3 représente les trois coordonnées d'une mère.*

Remarque 2.10. *Mère et équerre.*

Une équerre est une forme particulière de mère. Toute mère n'est pas une équerre.

Remarque 2.11. *Complément sur le déterminant du coeur d'une mère.*

La validité du lemme2.3 sur le déterminant du coeur d'une matrice admissible repose entièrement sur le respect des Equ.(28-4) et (28-1) qui sont deux des quatres conditions indispensables à vérifier. Le résultat obtenu ne dépend donc pas du formalisme qui sera découvert ensuite pour cette matrice admissible ${}^{(4)}[\chi]$. Une matrice admissible pourrait éventuellement être une mère. Ceci permet de tenir le raisonnement suivant au sujet du coeur d'une mère :

1. *Sur un certain type de déterminants :* Il est possible et facile de montrer ce que valent les déterminants du type suivant :

$$\forall \lambda \in C : |T - \lambda \cdot \text{Id}_3| = -\lambda^2 \cdot (\lambda - s); T = T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d}) \quad (60)$$

2. *Le déterminant du carré des coeurs admissibles :* A cause de l'Equ.(28-4), le carré de n'importe quel coeur admissible est du type précédent à un signe moins près. Ce qui permet d'utiliser la formule générique précédente avec $\lambda = -1$ et en positionnant le signe moins devant le résultat ; ainsi, l'Equ.(60) fournit :

$$|{}^{(3)}[\chi]^2| = -|T + \text{Id}_3| = -(s + 1)$$

A cause de l'Equ.(28-1) qui est sensée être validée pour les matrices admissibles, il vient obligatoirement :

$$|^{(3)}[\chi]^2| = d^2$$

et donc, puisque le déterminant du carré d'une matrice vaut le carré du déterminant de cette matrice :

$$|^{(4)}[\chi]| = \pm d$$

C'est bien l'Equ.(47) obtenue au niveau du lemme 2.3.

3. Le déterminant du coeur d'une mère : Dans le cas particulier d'une mère, un ratio du coeur est une matrice du type considéré au point 1 si la coordonnée β n'est pas nulle :

$$\forall \alpha_0 \neq 0 : \frac{1}{\beta_0} \cdot ^{(3)}[\chi] = \frac{\alpha_0}{\beta_0} \cdot Id_3 + T$$

Le déterminant de ce ratio peut donc se calculer avec la formule générique énoncée au point 1 en posant $\lambda = -\alpha_0/\beta_0$; ainsi :

$$\forall \beta_0 \neq 0 : \left| \frac{1}{\alpha_0} \cdot ^{(3)}[\chi] \right| = -\left(-\frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\alpha_0}{\beta_0} - s\right)$$

La singularité sur β_0 disparaît grâce aux règles habituelles régissant les déterminants; en multipliant la relation ci-dessus par le cube de β_0 , il vient :

$$\forall \alpha_0, \beta_0 : |^{(3)}[\chi]| = \alpha_0^2 \cdot (\alpha_0 + s \cdot \beta_0) \quad (61)$$

4. Confrontation logique : En confrontant les points 2 et 3, tout en tenant compte de l'Equ.(28-1), il peut sembler que les coordonnées du coeur d'une mère soient liées par la relation :

$$\forall \alpha_0, \beta_0, s : \alpha_0^4 \cdot (\alpha_0 + s \cdot \beta_0)^2 - d^2 = 0 \quad (62)$$

Cette formule doit être utilisée en se souvenant que les relations de départ; in extenso : les Equ.(50) et (28-1) génèrent un lien de dépendance spécifique entre chacune des coordonnées et le paramètre d , puisque :

$$\alpha = \frac{1 - d^2}{2d}; \beta = \frac{1}{2d}; s = -(1 + d^2); d \neq 0$$

Ainsi, s'il est une seule grandeur dont la connaissance semble essentielle, c'est bien celle du coin scalaire : d . La logique veut donc qu'il faille préférer replacer dans la formule qui vient d'être obtenue (l'Equ.(62)) les expressions de chaque coordonnée en fonction de sa dépendance à d ; concrètement il faut vouloir résoudre :

$$\frac{(1 - d^2)^4}{2^4 \cdot d^4} \cdot \left\{ \frac{1 - d^2}{2d} - \frac{(1 + d^2)}{2d} \right\}^2 = d^2$$

qui s'écrit aussi plus simplement :

$$\frac{(1 - d^2)^4}{2^4 \cdot d^4} \cdot d^2 = d^2 \rightarrow \frac{(1 - d^2)^4}{2^4 \cdot d^4} = 1 \rightarrow \frac{(1 - d^2)}{2 \cdot d} = \pm i \rightarrow d = \pm i$$

Il est alors facile d'en déduire les trois coordonnées, grâce aux Equ.(50) et (28-1). Je retrouve ainsi l'Equ.(57). Les valeurs permettent aussi de valider les conditions :

$$d + \alpha = 0; \beta^2 \cdot s = 0$$

qui, à leur tour, légitiment les Equ.(48) et (49).

Conclusion : L'Equ.(62) est cohérente avec l'ensemble des résultats acquis précédemment.

Remarque 2.12. *Sur la non-unicité des représentations.*

En fait, la relation (38) issue du produit des ailes peut aussi tout simplement se réécrire plus généralement :

$$\forall (\mathbf{e}, \mathbf{d}) : \langle \mathbf{e} | \{d^2 \cdot Id_3 + 2.d \cdot {}^{(3)}[\chi] + {}^{(3)}[\chi]^2\} | \mathbf{d} \rangle = 0$$

et elle ne contraint pas la matrice entre les parenthèses à être nulle. Les considérations exposées au niveau des Rem.2.7 et 2.8 ne concernent en réalité qu'un ensemble de situations particulières annulant cette matrice. De sorte que rien n'interdit d'écrire en général :

$$\forall (\mathbf{e}, \mathbf{d}) : \exists [H] = d^2 \cdot Id_3 + 2.d \cdot {}^{(3)}[\chi] + {}^{(3)}[\chi]^2 ; \langle \mathbf{e} | [H] | \mathbf{d} \rangle = 0 \quad (63)$$

En injectant l'Equ.(28-4) à cet endroit de la progression, il suit :

$$\forall (\mathbf{e}, \mathbf{d}) : \exists [H] = (d^2 - 1) \cdot Id_3 + 2.d \cdot {}^{(3)}[\chi] - T$$

ou encore :

$$\forall (\mathbf{e}, \mathbf{d}), \exists [H] : 2.d \cdot {}^{(3)}[\chi] = (1 - d^2) \cdot Id_3 + T + [H] \quad (64)$$

Si je suppose à cet endroit que la matrice inconnue $[H]$ a aussi le formalisme du coeur d'une mère (hypothèse), alors :

$$\forall (\mathbf{e}, \mathbf{d}), \exists (\alpha, \beta) \in C^2 : [H] = \alpha \cdot Id_3 + \beta T \quad (65)$$

et il vient du coup :

$$2.d \cdot {}^{(3)}[\chi] = (1 + \alpha - d^2) \cdot Id_3 + (1 + \beta) \cdot T \quad (66)$$

Cette équation peut se comprendre comme une généralisation de l'Equ.(49). Elle figure une situation analogue à la précédente dans laquelle le coeur d'une matrice envisageable est celui d'une mère chaque fois que le coin scalaire d n'est pas nul. Le formalisme de l'Equ.(49) demeure valable :

$${}^{(3)}[0\chi] = \alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d})$$

à condition cette fois-ci de définir la paire (α_0, β_0) par :

$$\alpha_0 = \frac{1 + \alpha - d^2}{2d} ; \beta_0 = \frac{1 + \beta}{2d} ; d \neq 0 \quad (67)$$

La cohérence de cette approche peut être vérifiée en remplaçant $[\chi]$ dans l'Equ.(63) ; il vient cette fois-ci :

$$d^2 \cdot Id_3 + 2.d \cdot \{\alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T\} + \{\alpha_0^2 \cdot Id_3 + (2.\alpha_0.\beta_0 + \beta_0^2.s) \cdot T\} = [H]$$

Qui, après réorganisation, s'écrit aussi :

$$(d + \alpha_0)^2 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot (2.d + 2.\alpha_0 + \beta_0.s) \cdot T = \alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T \quad (68)$$

Cette relation est vérifiée lorsque, simultanément :

$$(d + \alpha_0)^2 = \alpha \quad (69)$$

$$\beta_0 \cdot (2.d + 2.\alpha_0 + \beta_0.s) = \beta \quad (70)$$

La relation (28-1) reste également vraie et s'ajoute aux relations précédentes :

$$s = -(1 + d^2)$$

La contrainte sur le déterminant du coeur reste évidemment vraie ; rappel, Equ. (62) :

$$\forall \alpha, \beta, s : \alpha_0^4.(\alpha_0 + s.\beta_0)^2 - d^2 = 0$$

Ainsi, plus précisément, cette généralisation induit trois contraintes incontournables :

$$\forall \alpha, \beta, d : (d + \frac{1 + \alpha - d^2}{2d})^2 = \alpha \quad (71)$$

$$\forall \alpha, \beta, d : \frac{1 + \beta}{2d} . (2.d + 2. \frac{1 + \alpha - d^2}{2d} - \frac{1 + \beta}{2d} . (1 + d^2)) = \beta \quad (72)$$

$$\forall \alpha, \beta, d : \frac{(1 + \alpha - d^2)^4}{2^4.d^4} . (\frac{1 + \alpha - d^2}{2d} - (1 + d^2) . \frac{1 + \beta}{2d})^2 - d^2 = 0 \quad (73)$$

Chaque mère reste caractérisée par ses trois coordonnées α, β , et s ; elles dépendent de d . Concernant l'admissibilité de ces mères, il faut vérifier via l'Equ.(7) que :

$${}^{(4)}[\chi]^2 = \left[\begin{array}{cc} |\alpha_0 . Id_3 + \beta_0 . T|^2 + s & \langle {}^{(3)} \mathbf{d} | . R \\ R . |{}^{(3)} \mathbf{e} \rangle & \alpha_0^2 . Id_3 + (2.\alpha_0.\beta_0 + \beta_0^2 . s + 1) . T \end{array} \right]$$

nota bene : expression dans laquelle

$$R = (\alpha_0 \pm |\alpha_0 . Id_3 + \beta_0 . T|) . Id_3 + \beta_0 . T \quad (74)$$

peut être identifiée avec :

$${}^{(4)}[\chi]^2 = \left[\begin{array}{cc} -1 & \langle {}^{(3)} \mathbf{0} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{0} \rangle & -Id_3 \end{array} \right]$$

C'est le cas chaque fois que la forme particulière suivante du système (28) est validée :

$$\begin{aligned} |\alpha_0 . Id_3 + \beta_0 . T|^2 + s &= -1 \\ \langle {}^{(3)} \mathbf{d} | . R &= \langle {}^{(3)} \mathbf{d} | . \{(\alpha_0 \pm |\alpha_0 . Id_3 + \beta_0 . T|) . Id_3 + \beta_0 . T\} = \langle {}^{(3)} \mathbf{0} | \\ R . |{}^{(3)} \mathbf{e} \rangle &= \{(\alpha_0 \pm |\alpha_0 . Id_3 + \beta_0 . T|) . Id_3 + \beta_0 . T\} . |{}^{(3)} \mathbf{e} \rangle = |{}^{(3)} \mathbf{0} \rangle \\ \alpha_0^2 . Id_3 + (2.\alpha_0.\beta_0 + \beta_0^2 . s + 1) . T &= -Id_3 \end{aligned}$$

La première condition, l'Equ.(28-1), ne pose pas vraiment de problème ; cf. toutes les réflexions sur le déterminant des coeurs des mères, la Rem.2.11 et son Equ.(62). La quatrième condition, l'Equ.(28-4), introduit une restriction forte de la généralité en ce sens qu'elle oblige à ne retenir que deux valeurs possibles pour α_0 :

$$\alpha_0 = \pm i \quad (75)$$

Autrement dit, les coordonnées α, β, d et s peuvent varier comme elles veulent (ou presque) pourvu que leurs diverses combinaisons redonnent une de ces deux valeurs là pour α_0 !

$$\alpha_0 = \frac{1 + \alpha - d^2}{2d} = \pm i ; d \neq 0 \quad (76)$$

J'en déduis presque sans calcul que :

$$\alpha = (d \pm i)^2 ; d \neq 0 \quad (77)$$

C'est aussi la conclusion à laquelle permet d'aboutir l'Equ.(71)⁷. Mais l'Equ.(28-4) introduit une seconde restriction ; à savoir :

$$2.\alpha_0.\beta_0 + \beta_0^2 . s + 1 = 0 \quad (78)$$

7. mais avec un peu plus d'algèbre que je laisse le soin aux lecteurs de réaliser !

Sachant que la valeur de α_0 est maintenant imposée, l'Equ.(76), et que l'Equ.(28-1) permet de (oblige à) poser $s = -(1 + d^2)$, il vient :

$$(1 + d^2) \cdot \beta_0^2 + 2 \cdot \mp i \cdot \beta_0 - 1 = 0 \quad (79)$$

Ce trinôme du second degré en β_0 se résoud traditionnellement :
 — à condition que $d \notin \{-i, +i\}$, en calculant son discriminant :

$$\Delta = (\mp i)^2 - (-1) \cdot (1 + d^2) = d^2 \quad (80)$$

Il en suit :

$$\beta_0 = \frac{\pm i \pm d}{1 + d^2} ; d \notin \{-i, +i\} \quad (81)$$

et dans le cadre de cette remarque :

$$\beta_0 = \frac{\pm i \pm d}{1 + d^2} = \frac{1 + \beta}{2d} ; d \notin \{-i, 0, +i\}$$

— si $d = \pm i$; dans ce cas, il est clair que :

$$\beta_0 = \frac{1}{\mp 2i} \quad (82)$$

Cette seconde éventualité joue un rôle important par la suite.

Remarque 2.13. *Critères de classification pour les mères.*

A cet endroit, un petit retour en arrière sur l'Equ.(44) s'impose ; lorsque le coeur est celui d'une mère, le polynôme s'écrit :

$$d^3 + d - \{ \langle^{(3)} \mathbf{d} | (\alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T) \rangle \cdot |\mathbf{e} \rangle = 0$$

Un peu d'algèbre va permettre de modifier cette expression ; comme de façon générale :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d}) \cdot |\mathbf{e} \rangle = |\mathbf{e}|^2 \cdot |\mathbf{d} \rangle \\ \langle \mathbf{d} | \cdot |\mathbf{d} \rangle = |\mathbf{d}|^2$$

Il vient :

$$d^3 + d - (\alpha_0 \cdot s + \beta_0 \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot |\mathbf{e}|^2) = 0$$

Je peux maintenant remplacer α_0 et β_0 par leurs valeurs imposées, grâce aux Equ.(67), (76) et soit (81), soit (82). Il y a deux configurations possibles :

— $d \notin \{-i, 0, +i\}$; l'Equ.(43) ne peut être validée que si l'angle θ entre les ailes \mathbf{e} et \mathbf{d} est nul. Ces ailes sont donc colinéaires. Il faut utiliser les Equ.(76) et (81) :

$$d^3 + d - (\pm i \cdot s + \frac{\pm i \pm d}{1 + d^2} \cdot |\mathbf{e}|^2 \cdot |\mathbf{d}|^2) = 0 \quad (83)$$

Ici $\sin \theta = 0$ parce que les ailes sont colinéaires, exceptionnellement :

$$s^2 = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d})^2 = |\mathbf{e}|^2 \cdot |\mathbf{d}|^2$$

De sorte que le polynôme devient :

$$d^3 + d - (\pm i \cdot s + \frac{\pm i \pm d}{1 + d^2} \cdot s^2) = 0$$

Mais si l'Equ.(28-1) s'applique, ce qui doit être le cas pour les matrices admissibles, il s'écrit encore :

$$(-d + 2 \cdot \mp i + \mp d) \cdot s = 0$$

Dans les conditions imposées par cette configuration, soit le jeu des signes moins et plus annule le facteur devant s et il n'y a pas de contraintes supplémentaires engendrées par l'existence du polynôme. Soit il faut que s s'anulle; auquel cas, puisque les ailes sont ici colinéaires, ces ailes sont obligatoirement des spineurs de Cartan.

— $d \in \{-i, 0, +i\}$; l'Equ.(43) est validée quel que soit l'angle θ entre les ailes e et d . Il faut utiliser les Equ.(76) et (82) pour analyser :

$$d^3 + d - (\pm i \cdot s + \frac{1}{\mp 2i} \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot |\mathbf{e}|^2) = 0 \quad (84)$$

— $d = \pm i$:

$$\Rightarrow s = -(1 + d^2) = 0 \Rightarrow (84) \rightarrow |\mathbf{d}|^2 \cdot |\mathbf{e}|^2 = 0$$

Une des deux ailes au moins doit être un spineur de Cartan.

— $d = 0$:

$$\Rightarrow s = -(1 + d^2) = -1 \Rightarrow (84) \rightarrow \mp i + \frac{1}{\mp 2i} \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot |\mathbf{e}|^2 = 0$$

Le produit du carré des normes euclidiennes des ailes a une valeur fixe.

Remarque 2.14. *Les coordonnées des matrices $[H]$.*

Arrivé à ce stade de l'exploration, je remarque à nouveau que les coordonnées d'une mère dépendent toutes les trois d'un paramètre libre d :

$$\alpha = (d \pm i)^2 \quad (85)$$

$$d \notin \{-i, +i\} : \beta = \frac{2 \cdot d \cdot (\pm i \pm d)}{1 + d^2} - 1; d \in \{-i, 0, +i\} : \beta = \frac{d}{\pm i} - 1 \quad (86)$$

$$s = -(1 + d^2)$$

Remarque 2.15. *Le déterminant de la matrice R .*

Le déterminant de la matrice R est du même type que celui qui a été introduit au point 1 de la Rem.2.11, Equ.(60). De fait, β_0 étant non nul :

$$\frac{1}{\beta_0} \cdot R = \frac{\alpha_0 \pm d}{\beta_0} \cdot Id_3 + T; \beta_0 \neq 0$$

En posant :

$$\lambda = -\frac{\alpha_0 \pm d}{\beta_0}; \beta_0 \neq 0$$

La formule (57) peut être utilisée; elle livre :

$$|\frac{1}{\beta_0} \cdot R| = (\frac{\alpha_0 \pm d}{\beta_0})^2 \cdot \{\frac{\alpha_0 \pm d}{\beta_0} + s\}; \beta_0 \neq 0$$

Et finalement :

$$|R| = (\alpha_0 \pm d)^2 \cdot \{\alpha_0 \pm d + s \cdot \beta_0\} \quad (87)$$

Deux configurations peuvent se présenter :

— $d \notin \{-i, +i\}$

$$|R| = (\pm i \pm d)^2 \cdot \left\{ \pm i \pm d + s \cdot \frac{\pm i \pm d}{1 + d^2} \right\}$$

Mais comme l'Equ.(28-1) doit s'appliquer, il est clair que forcément :

$$|R| = 0$$

La matrice R est dégénérée.

— $d \in \{-i, 0, +i\}$; dans ce cas $s \in \{0, -1\}$ et

$$|R| = (\pm i \pm d)^2 \cdot \left\{ \pm i \pm d + s \cdot \frac{1}{\pm 2i} \right\}$$

Selon les combinaisons sur les signes plus et moins, la combinaison $(\pm i \pm d) \in \{-2i, -i, 0, i, 2i\}$ et la matrice R est ou non dégénérée puisque son déterminant $|R| \in \{-8i, -1/2i, 0, +1/2i, +8i\}$.

Remarque 2.16. *La question des ailes.*

Il n'y a plus qu'à régler la question de la nullité des ailes du carré des mères :

$$\langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \cdot R = \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \cdot \{(\alpha_0 \pm |\alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T|) \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T\} = \langle {}^{(3)}\mathbf{0} |$$

$$R \cdot |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle = \{(\alpha_0 \pm |\alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T|) \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T\} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle = |{}^{(3)}\mathbf{0} \rangle$$

Deux types de situations peuvent a priori exister :

— Une annulation pure et simple de la matrice R , indépendamment des ailes ; elle mènerait à :

$$\alpha_0 \pm d = 0 ; \beta_0 = 0$$

La coordonnée β_0 peut s'annuler quand β vaut -1 et ceci est réalisé lorsque $d = 0$.

— La matrice R est dégénérée.

2.4 Classification des mères admissibles

Toutes les considérations précédentes peuvent maintenant être réunies dans un raisonnement logique plus structuré. L'admissibilité concerne les mères de $M(4, \mathbb{C})$; voir la Def.2.5 :

$${}^{(4)}[\chi] = \begin{bmatrix} d & \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \\ |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle & \alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T \end{bmatrix}$$

Par convention :

$$T = T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d}) ; s = \mathbf{e} \cdot \mathbf{d}$$

Le lemme 2.3 sur le déterminant des coeurs et sa conséquence logique concernant le coeur des mères, l'Equ.(62), s'appliquent. Le carré d'une mère se calcule avec l'aide de l'Equ.(7) et vaut :

$${}^{(4)}[\chi]^2 = \begin{bmatrix} d^2 + s & \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \cdot \{(d + \alpha_0) \cdot I + \beta_0 \cdot T\} \\ \{(d + \alpha_0) \cdot I + \beta_0 \cdot T\} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle & \alpha_0^2 \cdot Id_3 + (2 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 + \beta_0^2 \cdot s + 1) \cdot T \end{bmatrix} \quad (88)$$

Avant de rentrer dans le détail des calculs, il est judicieux de noter deux identités remarquables s'appliquant aux tables de Pythagore :

$$\langle \mathbf{d} | \cdot T = |\mathbf{d}|^2 \cdot \langle \mathbf{e} | ; T \cdot | \mathbf{e} \rangle = |\mathbf{e}|^2 \cdot |\mathbf{d} \rangle \quad (89)$$

De sorte que le carré d'une mère s'écrit aussi :

$${}^{(4)}[\chi]^2 = \left[\begin{array}{cc} d^2 + s & (d + \alpha_0) \cdot \langle {}^{(3)} \mathbf{d} | + \beta_0 \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot \langle \mathbf{e} | \\ (d + \alpha_0) \cdot |\mathbf{e} \rangle + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2 \cdot |\mathbf{d} \rangle & \alpha_0^2 \cdot Id_3 + (2 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 + \beta_0^2 \cdot s + 1) \cdot T \end{array} \right] \quad (90)$$

L'objectif de ce document consiste à explorer et découvrir les circonstances dans lesquelles ce carré s'identifie avec $-Id_4$. Cette identification est réalisée chaque fois que le système des Equ.(28) l'est ; il prend ici la forme particulière :

$$\left[\begin{array}{cc} d^2 + s = -1 & (d + \alpha_0) \cdot \langle {}^{(3)} \mathbf{d} | + \beta_0 \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot \langle \mathbf{e} | = \langle \mathbf{0} | \\ (d + \alpha_0) \cdot |\mathbf{e} \rangle + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2 \cdot |\mathbf{d} \rangle = |\mathbf{0} \rangle & \alpha_0^2 \cdot Id_3 + (2 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 + \beta_0^2 \cdot s + 1) \cdot T = -Id_3 \end{array} \right]$$

Les ailes de ce carré introduisent un système, (A), de deux équations vectorielles linéaires dépendant des deux ailes de la mère :

$$\begin{aligned} (d + \alpha_0) \cdot |{}^{(3)} \mathbf{d} \rangle + \beta_0 \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot |\mathbf{e} \rangle &= |\mathbf{0} \rangle \\ \beta_0 \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot |\mathbf{d} \rangle + (d + \alpha_0) \cdot |{}^{(3)} \mathbf{e} \rangle &= |\mathbf{0} \rangle \end{aligned}$$

Deux types de situations peuvent survenir :

Remarque 2.17. *Quand le système induit par les ailes n'est pas dégénéré.*

Le système (A) n'est pas dégénéré ; ceci se traduit par :

$$(d + \alpha_0)^2 - \beta_0^2 \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot |\mathbf{e}|^2 \neq 0 ; \mathbf{d} = \mathbf{e} = \mathbf{0} \Rightarrow s = 0, T = [0] \quad (91)$$

Le formalisme des mères envisageables se réduit à :

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{cc} d & \langle {}^{(3)} \mathbf{0} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{0} \rangle & \alpha_0 \cdot Id_3 \end{array} \right]$$

et elles doivent permettre de valider :

$$\left[\begin{array}{cc} d^2 = -1 & \langle \mathbf{0} | \\ |\mathbf{0} \rangle & \alpha_0^2 \cdot Id_3 = -Id_3 \end{array} \right]$$

Ce qui ne laisse pas d'autre choix que de poser :

$$d^2 = \alpha_0^2 = -1$$

Le respect du lemme 2.3 et le fait que $(i)^3 = -i$ (respectivement que $(-i)^3 = +i$) permettent de comprendre que ces situations ne concernent que les mères :

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{cc} i & \langle {}^{(3)} \mathbf{0} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{0} \rangle & i \cdot Id_3 \end{array} \right] ; {}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{cc} i & \langle {}^{(3)} \mathbf{0} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{0} \rangle & -i \cdot Id_3 \end{array} \right] \quad (92)$$

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{cc} -i & \langle {}^{(3)} \mathbf{0} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{0} \rangle & i \cdot Id_3 \end{array} \right] ; {}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{cc} -i & \langle {}^{(3)} \mathbf{0} | \\ |{}^{(3)} \mathbf{0} \rangle & -i \cdot Id_3 \end{array} \right]$$

Remarque 2.18. *Quand le système induit par les ailes est dégénéré.*

La dégénérescence du système (A) se traduit par la nullité de son déterminant :

$$(d + \alpha_0)^2 - \beta_0^2 \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot |\mathbf{e}|^2 = 0 \quad (93)$$

Relation à laquelle il faut ajouter les exigences issues de la diagonale du carré :

$$\alpha_0^2 = d^2 + s = -1 ; 2 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 + \beta_0^2 \cdot s + 1 = 0$$

Une fois de plus, il n'y a pas d'autre choix que de poser :

$$\alpha_0 = \pm i \quad (94)$$

Il en résulte deux trinômes du second degré en β_0 :

$$\alpha_0 = +i : s.\beta_0^2 + 2.i.\beta_0 + 1 = 0 \quad (95)$$

$$\alpha_0 = -i : s.\beta_0^2 - 2.i.\beta_0 + 1 = 0 \quad (96)$$

Là encore, un aiguillage décisionnel apparaît :

1. **Le produit scalaire des ailes est nul** $s = 0$; auquel cas :

$$\alpha_0 = +i : \beta_0 = -\frac{1}{2i} \quad (97)$$

$$\alpha_0 = -i : \beta_0 = \frac{1}{2i} \quad (98)$$

Ces valeurs doivent ensuite être reportées dans le déterminant du système dégénéré (A) : l'Equ.(93). Ce déterminant peut se lire comme un trinôme du second degré en d .

$$\alpha_0 = +i : (d + i)^2 + \frac{1}{4}.\|\mathbf{d}\|^2.\|\mathbf{e}\|^2 = 0 \quad (99)$$

$$\alpha_0 = -i : (d - i)^2 + \frac{1}{4}.\|\mathbf{d}\|^2.\|\mathbf{e}\|^2 = 0 \quad (100)$$

Le discriminant de ce trinôme en d vaut :

$$\alpha_0 = \pm i : \Delta(d) = (\pm i)^2 - (-1.\frac{1}{4}.\|\mathbf{d}\|^2.\|\mathbf{e}\|^2) = (\frac{i}{2}.\|\mathbf{d}\|.\|\mathbf{e}\|)^2 \quad (101)$$

et donc :

$$\alpha_0 = +i : d(+, \pm) = -i \pm \frac{i}{2}.\|\mathbf{d}\|.\|\mathbf{e}\| \quad (102)$$

$$\alpha_0 = -i : d(-, \pm) = i \pm \frac{i}{2}.\|\mathbf{d}\|.\|\mathbf{e}\| \quad (103)$$

Il n'y a plus qu'à vérifier le lemme du déterminant des ailes ; il impose l'Equ.(62) qui prend ici la forme particulière suivante puisque $s = 0$:

$$\forall \alpha_0, \beta_0, s : \alpha_0^6 - d^2 = 0 \quad (104)$$

Sachant que l'Equ.(28-1) impose :

$$s(+, +) = -(1 + d(+, +)^2) = \|\mathbf{d}\|.\|\mathbf{e}\| - \frac{1}{4}.\|\mathbf{d}\|^2.\|\mathbf{e}\|^2 = s(-, -)$$

$$s(+, -) = -(1 + d(+, -)^2) = -\|\mathbf{d}\|.\|\mathbf{e}\| - \frac{1}{4}.\|\mathbf{d}\|^2.\|\mathbf{e}\|^2 = s(-, +)$$

Et qu'ici $s = 0$, il en découle obligatoirement que : (i) $d^2 = -1$ ou $d = \pm i$; (ii) l'Equ.(62) est vérifiée parce que $(\pm i)^6 - (-1) = -1 + 1 = 0$; (iii) $\|\mathbf{d}\|.\|\mathbf{e}\| = 0$. Cette configuration est telle que $d \in \{-i, +i\}$ et elle contient les sous-cas suivants : (a) $\|\mathbf{d}\| = 0, \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{e} = \mathbf{0}$, (b) $\|\mathbf{e}\| = 0, \mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ et $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, (c) $\|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{d}\| = 0$ avec $\mathbf{e}, \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ et $s = 0$. Ces sous-cas correspondent respectivement à : un spineur et un vecteur nul pour (a) et (b), et à deux spineurs orthogonaux (c). Quand les deux ailes sont nulles, les configurations triviales sont retrouvées. Les mères suivantes font partie des situations examinées lorsque $s = 0$:

$$\left[\begin{array}{cc} +i & \langle^{(3)} \mathbf{d} | \\ |^{(3)} \mathbf{0} \rangle & -i . Id_3 \end{array} \right] ; \left[\begin{array}{cc} -i & \langle^{(3)} \mathbf{d} | \\ |^{(3)} \mathbf{0} \rangle & i . Id_3 \end{array} \right] ; |^{(3)} \mathbf{d} | = 0 \quad (105)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} +i & \langle^{(3)} \mathbf{0} | \\ \hline |^{(3)} \mathbf{e} \rangle & -i \cdot Id_3 \end{array} \right]; \left[\begin{array}{c|c} -i & \langle^{(3)} \mathbf{0} | \\ \hline |^{(3)} \mathbf{e} \rangle & i \cdot Id_3 \end{array} \right]; |^{(3)} \mathbf{e} \rangle = 0 \quad (106)$$

Ainsi que :

$$\left[\begin{array}{c|c} -i & \langle^{(3)} \mathbf{d} | \\ \hline |^{(3)} \mathbf{e} \rangle & i \cdot Id_3 - \frac{1}{2i} \cdot T \end{array} \right]; \left[\begin{array}{c|c} i & \langle^{(3)} \mathbf{d} | \\ \hline |^{(3)} \mathbf{e} \rangle & -i \cdot Id_3 - \frac{1}{2i} \cdot T \end{array} \right] \quad (107)$$

$$|^{(3)} \mathbf{d} \rangle = |^{(3)} \mathbf{e} \rangle = 0$$

Concernant ces dernières, il est possible de dire qu'elles sont en quelque sorte des *équerres isotropiques* ; voir la Def. 2.4. et l'Equ.(58).

2. **Le produit scalaire des ailes n'est pas nul**, $s \neq 0$: le produit scalaire euclidien des deux ailes n'est pas nul ; auquel cas il convient de calculer le discriminant :

$$\Delta(\beta_0) = (\pm i)^2 - s = -1 - \{-(1 + d^2)\} = d^2 \quad (108)$$

De sorte que :

$$\alpha_0 = +i : \beta_0(+, +) = \frac{-i + d}{s} = -\frac{-i + d}{d^2 + 1} = -\frac{-i + d}{(d + i) \cdot (d - i)} = -\frac{1}{d + i} \quad (109)$$

$$\alpha_0 = +i : \beta_0(+, -) = \frac{-i - d}{s} = \frac{1}{d - i} \quad (110)$$

$$\alpha_0 = -i : \beta_0(-, +) = \frac{i + d}{s} = \frac{1}{d - i} = \beta_0(+, -)$$

$$\alpha_0 = -i : \beta_0(-, -) = \frac{i - d}{s} = -\frac{1}{d + i} = \beta_0(+, +)$$

Les deux valeurs permises de β_0 peuvent maintenant être réinjectées dans le trinôme de degré deux dépendant de d (i.e. : le discriminant dégénéré du système (A)).

$$d^2 + 2.i.d - 1 - \frac{1}{(d + i)^2} \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot |\mathbf{e}|^2 = 0$$

$$d^2 + 2.i.d - 1 - \frac{1}{(d - i)^2} \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot |\mathbf{e}|^2 = 0$$

$$d^2 - 2.i.d - 1 - \frac{1}{(d + i)^2} \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot |\mathbf{e}|^2 = 0$$

$$d^2 - 2.i.d - 1 - \frac{1}{(d - i)^2} \cdot |\mathbf{d}|^2 \cdot |\mathbf{e}|^2 = 0$$

Avant de poursuivre, je remarque que la coordonnée β_0 ne peut pas être définie lorsque, *selon les circonstances*, d vaut plus ou moins le nombre imaginaire i .

Je remarque aussi que toutes ces circonstances se résument seulement à deux fois trois, selon que le signe devant le produit des normes euclidiennes des ailes vaut plus ou moins un :

$$(d + i)^2 = |\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}|$$

$$(d + i)^2 = -|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}|$$

$$d^2 + 1 = |\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}|$$

$$\begin{aligned} d^2 + 1 &= -|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}| \\ (d - i)^2 &= |\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}| \\ (d - i)^2 &= -|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}| \end{aligned}$$

Elles contiennent les douzes cas suivants :

$$\begin{aligned} (c-1) : d + i &= \sqrt{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}|} & (111) \\ (c-2) : d + i &= -\sqrt{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}|} \\ (c-3) : d + i &= i \cdot \sqrt{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}|} \\ (c-4) : d + i &= -i \cdot \sqrt{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}|} \\ (c-5, 6) : d &= \pm \sqrt{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}| - 1} \\ (c-7, 8) : d &= \pm i \cdot \sqrt{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}| + 1} \\ (c-9) : d - i &= \sqrt{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}|} \\ (c-10) : d - i &= -\sqrt{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}|} \\ (c-11) : d - i &= i \cdot \sqrt{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}|} \\ (c-12) : d - i &= -i \cdot \sqrt{|\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{e}|} \end{aligned}$$

Tous ces cas assurent en principe du respect du système des Equ.(28). Comme le système est dégénéré mais que $s \neq 0$, les deux ailes sont proportionnelles et, plus simplement, il est possible d'écrire :

$$|\mathbf{e}\rangle = -\frac{d + \alpha_0}{\beta_0 \cdot |\mathbf{d}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle \quad (112)$$

$$|\mathbf{d}\rangle = -\frac{d + \alpha_0}{\beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{e}\rangle \quad (113)$$

Ce qui correspond maintenant à :

$$\alpha_0 = +i : |\mathbf{e}\rangle = -\frac{d + i}{\beta_0 \cdot |\mathbf{d}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle$$

Mais, dixit les Equ.(109) et (110), selon le cas, ceci correspond soit à :

$$\alpha_0 = +i : |\mathbf{e}\rangle = -\frac{d + i}{\beta_0(+,+).|\mathbf{d}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle$$

soit à :

$$\alpha_0 = +i : |\mathbf{e}\rangle = -\frac{d + i}{\beta_0(+,-).|\mathbf{d}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle$$

ou encore, soit à :

$$\alpha_0 = +i : |\mathbf{e}\rangle = \frac{(d + i)^2}{|\mathbf{d}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle$$

soit à :

$$\alpha_0 = +i : |\mathbf{e}\rangle = -\frac{d^2 + 1}{|\mathbf{d}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle$$

Et enfin (voir plus haut au dessus de l'Equ.(111), à :

$$\alpha_0 = +i : |\mathbf{e}\rangle = \pm \frac{|\mathbf{e}|}{|\mathbf{d}|} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle \quad (114)$$

Il reviendrait au même de dire que les versions normalisées des ailes non isotropiques (leurs normes ne sont pas nulles) sont égales au signe près peut-être.

Comme les ailes sont ici colinéaires, il en résulte obligatoirement que :

$$\widehat{(\mathbf{e}, \mathbf{d})} = \theta = N.\pi, N \in Z \Rightarrow \cos\theta = \pm 1$$

et :

$$s = \mathbf{e}.\mathbf{d} = \langle \mathbf{e}, \mathbf{d} \rangle_{Id_3} = \pm |\mathbf{e}|.|\mathbf{d}| \quad (115)$$

Contrairement aux apparences et à ce que j'ai pensé un peu vite dans une première analyse de cette relation, l'angle entre les ailes est contraint par leur colinéarité; mais les normes de chacune des ailes peuvent être choisies librement pourvu que leur multiplication redonne plus ou moins s . Une autre conséquence est aussi que :

$$T = T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d}) = \pm \frac{|\mathbf{e}|}{|\mathbf{d}|} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{d}) = \pm \frac{s}{|\mathbf{d}|^2} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{d}), |\mathbf{d}| \neq 0 \quad (116)$$

Il reste à reporter ces résultats dans le formalisme type d'une mère et à identifier celles qui sont admissibles. Pour tenter de répondre à cette question cruciale, je vais éviter de choisir un cas précis de l'Equ.(111), partir du principe que $\alpha_0 = +i$ et uniquement considérer le fait que $s = \pm 1$. Soit le carré d'une matrice envisageable calculée avec l'Equ.(7) :

$$\begin{aligned} & {}^{(4)}[\chi]^2 \\ & = \\ & \left[\begin{array}{cc} d^2 + s & (d + \alpha_0). \langle {}^{(3)} \mathbf{d} | + \beta_0.|\mathbf{d}|^2. \langle \mathbf{e} | \\ (d + \alpha_0).|\mathbf{e} \rangle + \beta_0.|\mathbf{e}|^2.|\mathbf{d} \rangle & \alpha_0^2.Id_3 + (2.\alpha_0.\beta_0 + \beta_0^2.s + 1).T \end{array} \right] \\ & = \\ & \left[\begin{array}{cc} d^2 + s & (d + i). \langle {}^{(3)} \mathbf{d} | + \beta_0.|\mathbf{d}|^2. \langle \mathbf{e} | \\ (d + i).|\mathbf{e} \rangle + \beta_0.|\mathbf{e}|^2.|\mathbf{d} \rangle & -Id_3 + (2.i.\beta_0 + \beta_0^2.s + 1).T \end{array} \right] \end{aligned}$$

Les Equ.(112) et (113) permettent d'éliminer la présence de β_0 dans les ailes, quelle que soit la valeur précise de cette coordonnée; mieux encore, elles annulent systématiquement les ailes :

$$\left[\begin{array}{cc} d^2 + s & \langle \mathbf{0} | \\ |\mathbf{0} \rangle & -Id_3 + (2.i.\beta_0 + \beta_0^2.s + 1).T \end{array} \right]$$

Il est judicieux de noter à cet endroit qu'en ayant débuté ce raisonnement avec la phrase : "Je vais éviter de choisir un cas précis de l'Equ.(111), partir du principe que $\alpha_0 = -i$ et uniquement considérer le fait que $s = \pm 1$.", les Equ.(112) et (113) auraient permis d'aboutir au même constat, c'est-à-dire à l'annulation systématique des ailes du carré. L'unique différence aurait été que ce carré s'écrive :

$$\left[\begin{array}{cc} d^2 + s & \langle \mathbf{0} | \\ |\mathbf{0} \rangle & -Id_3 + (-2.i.\beta_0 + \beta_0^2.s + 1).T \end{array} \right]$$

Mais restons pour l'heure avec $\alpha_0 = +i$. Si je considère maintenant le cas où $\beta_0 = \beta_0(+, +)$, Equ.(109) :

$$\begin{aligned} & {}^{(4)}[\chi]^2 \\ & = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} d^2 + s \\ |\mathbf{0}\rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle \mathbf{0}| \\ -Id_3 + (-2.i.\frac{1}{d+i} + \frac{s}{(d+i)^2} + 1).T \end{array} \right] \\ & = \\ & \left[\begin{array}{c} d^2 + s \\ |\mathbf{0}\rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle \mathbf{0}| \\ -Id_3 + \frac{-2.i.(d+i) + s + (d+i)^2}{(d+i)^2}.T \end{array} \right] \\ & = \\ & \left[\begin{array}{c} d^2 + s \\ |\mathbf{0}\rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle \mathbf{0}| \\ -Id_3 + \frac{s+1+d^2}{(d+i)^2}.T \end{array} \right] \end{aligned}$$

En ayant choisi $\beta_0 = \beta_0(+, -)$, Equ.(110), je serais parvenu au résultat similaire :

$${}^{(4)}[\chi]^2 = \left[\begin{array}{c} d^2 + s \\ |\mathbf{0}\rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle \mathbf{0}| \\ -Id_3 + \frac{s+1+d^2}{(d-i)^2}.T \end{array} \right]$$

Dans un cas comme dans l'autre, il reste à contraindre la validité de l'Equ.(28-1) ; ce qui se traduit concrètement ici par :

— si $s = 1$, alors il faut absolument que :

$$d^2 = -2$$

Les matrices suivantes sont admissibles :

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{c} i.\sqrt{2} \\ \frac{1}{|\mathbf{d}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle^{(3)}\mathbf{d}| \\ i.Id_3 - \frac{i-i.\sqrt{2}}{|\mathbf{d}|^2} . T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \end{array} \right] ; |\mathbf{d}| \neq 0 \quad (117)$$

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{c} i.\sqrt{2} \\ \frac{1}{|\mathbf{d}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle^{(3)}\mathbf{d}| \\ i.Id_3 - \frac{i+i.\sqrt{2}}{|\mathbf{d}|^2} . T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \end{array} \right] ; |\mathbf{d}| \neq 0$$

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{c} -i.\sqrt{2} \\ \frac{1}{|\mathbf{d}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle^{(3)}\mathbf{d}| \\ i.Id_3 - \frac{i-i.\sqrt{2}}{|\mathbf{d}|^2} . T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \end{array} \right] ; |\mathbf{d}| \neq 0$$

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{c} -i.\sqrt{2} \\ \frac{1}{|\mathbf{d}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle^{(3)}\mathbf{d}| \\ i.Id_3 - \frac{i+i.\sqrt{2}}{|\mathbf{d}|^2} . T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \end{array} \right] ; |\mathbf{d}| \neq 0$$

— si $s = -1$, alors le produit scalaire des ailes colinéaires qui vaut ici exceptionnellement le produit des normes euclidiennes de ces siles est égal à moins un.

$$s = \mathbf{e} \cdot \mathbf{d} = |\mathbf{e}| \cdot |\mathbf{d}| = -1$$

Mais quand $s = -1$, c'est aussi un fait que le coin Nord-Ouest du carré de la matrice vaut $d^2 - 1$. Il ne peut être égal à -1 que si d est nul. Si d est nul et que $s = -1$, la coordonnée devant T dans le coeur du carré s'annule. Ces circonstances forment un tout cohérent validant (28-1) et (28-4) simultanément.

$$d = 0$$

Toutes ces longues et fastidieuses réflexions aboutissent aux seules matrices admissibles suivantes lorsque (i) les ailes sont colinéaires, (ii) leur produit scalaire n'est pas nul mais égal à moins un :

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{1}{|\mathbf{d}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle^{(3)}\mathbf{d}| \\ i.Id_3 - \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{|\mathbf{d}|^2} . T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \end{array} \right] ; |\mathbf{d}| \neq 0 \quad (118)$$

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ -\frac{1}{|\mathbf{d}|^2} \cdot |^{(3)}\mathbf{d}\rangle \end{array} \begin{array}{c} \langle^{(3)}\mathbf{d}| \\ -i.Id_3 + \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{|\mathbf{d}|^2} . T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \end{array} \right] ; |\mathbf{d}| \neq 0$$

Une situation spéciale ; soit le carré obtenu préalablement pour le cas où $\alpha_0 = +i$:

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{c|c} d^2 + s & \langle \mathbf{0} | \\ \hline | \mathbf{0} \rangle & -Id_3 + (2.i.\beta_0 + \beta_0^2.s + 1).T \end{array} \right]$$

Et soit à remarquer que son analyse sur la base du critère $s = \pm n$ a qu'un caractère pédagogique puisque l'Equ.(115) n'impose en réalité aucune valeur particulière à s , sauf peut-être de ne pas être nulle. Soit enfin à se souvenir de l'identité remarquable concernant les racines cubique de l'unité dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes :

$$1 + j + j^2 = 0$$

Pourquoi ne pas alors se poser la question de savoir s'il est plausible et cohérent de poser :

$$\begin{aligned} 2.i.\beta_0 &= j \\ \beta_0^2.s &= j^2 \end{aligned}$$

En raisonnant par l'absurde, c'est-à-dire en supposant a priori que la réponse est affirmative, il vient :

$$\beta_0 = \frac{j}{2.i} \Rightarrow \beta_0^2 = -\frac{j^2}{4} = \frac{j^2}{s} \Rightarrow s = -4$$

Comme il faut valider (28-1), il vient :

$$d^2 + s = -1 \Rightarrow d^2 = 3 \Rightarrow d = \pm\sqrt{3}$$

Il en résulte que les matrices suivantes sont admissibles :

$${}^{(4)}[\chi] = \pm \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{3} & \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \\ \hline -\frac{4}{|\mathbf{d}|^2} \cdot | {}^{(3)}\mathbf{d} \rangle & i.Id_3 + \frac{j}{2.i} \cdot \frac{1}{|\mathbf{d}|^2} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \end{array} \right]; |\mathbf{d}| \neq 0$$

Le même type de raisonnement peut être recommencé en proposant :

$$\begin{aligned} 2.i.\beta_0 &= j^2 \\ \beta_0^2.s &= j \end{aligned}$$

Il en résulterait :

$$\beta_0^2 = -\frac{j^2}{4} = \frac{j}{s} \Rightarrow s = -\frac{4}{j} \Rightarrow d^2 = -(1 + \frac{4}{j})$$

etc.

2.5 Rendre compte du rôle du tenseur complètement antisymétrique de rang quatre

Remarque 2.19. *Hypothèse de l'adjoint algébrique.*

L'intérêt de cette remarque n'apparaîtra pas en première lecture. Elle trouvera toute son utilité ultérieurement ; en particulier lorsque le troisième critère de représentabilité de l'*adjonction tensorielle* sera étudié ; voir la Rem :2.22.

Elle part du principe qu'il existe une transformation W qui ferait de $F^* = F(\uparrow, \uparrow)$ l'adjoint algébrique de $F = F(\downarrow, \downarrow)$. Puisqu'il existe un ensemble de matrices M

telles que $F^* = M.F$, s'il existe une transformation W non dégénérée permettant d'interpréter F^* comme l'adjointe de F , alors $F^* = W.F.W^{-1}$, et il existe des situations telles que $F^*.W = W.F$. Une fois encore je fais appel au formalisme périen et je définis :

$${}^{(4)}[W] = \begin{bmatrix} t & \langle {}^{(t)}\mathbf{T} | \\ | {}^{(3)}\mathbf{t} \rangle & {}^{(3)}[w] \end{bmatrix}$$

Ce qui permet de calculer :

$${}^{(4)}[F]^* . {}^{(4)}[W] \quad (119)$$

$$\begin{aligned} &= \\ &\begin{bmatrix} 0 & -\langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \\ | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t & \langle {}^{(3)}\mathbf{T} | \\ | {}^{(3)}\mathbf{t} \rangle & {}^{(3)}[w] \end{bmatrix} \\ &= \\ &\begin{bmatrix} -\langle {}^{(3)}\mathbf{E} | . | {}^{(3)}\mathbf{t} \rangle & -\langle {}^{(3)}\mathbf{E} | . {}^{(3)}[w] \\ t . | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle + {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) . | {}^{(3)}\mathbf{t} \rangle & {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) . {}^{(3)}[w] + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{T}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et :

$${}^{(4)}[W] . {}^{(4)}[F] \quad (120)$$

$$\begin{aligned} &= \\ &\begin{bmatrix} t & \langle {}^{(3)}\mathbf{T} | \\ | {}^{(t)}\mathbf{t} \rangle & {}^{(3)}[w] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \\ -| {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{bmatrix} \\ &= \\ &\begin{bmatrix} -\langle {}^{(3)}\mathbf{T} | . | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & t . \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | + \langle {}^{(3)}\mathbf{T} | . {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \\ {}^{(3)}[w] . | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & {}^{(3)}[w] . {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{t}, {}^{(3)}\mathbf{E}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

L'égalité des deux produits matriciels, (119) et (120), est obtenue chaque fois que les quatre égalités suivantes sont réalisées simultanément :

$$\langle {}^{(3)}\mathbf{E} | . | {}^{(3)}\mathbf{t} \rangle = \langle {}^{(3)}\mathbf{T} | . | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle \quad (121)$$

$$-\langle {}^{(3)}\mathbf{E} | . {}^{(3)}[w] = t . \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | + \langle {}^{(3)}\mathbf{T} | . {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H})$$

$$t . | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle + {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) . | {}^{(3)}\mathbf{t} \rangle = {}^{(3)}[w] . | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle$$

$${}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) . {}^{(3)}[w] + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{T}) = {}^{(3)}[w] . {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{t}, {}^{(3)}\mathbf{E})$$

L'objectif est de découvrir un ensemble de $(t, \mathbf{T}, \mathbf{t}$ et ${}^{(3)}[w])$ compatibles avec ces égalités.

1. La première exprime le fait que la différence entre les deux vecteurs placés sur l'orthogonale (sous-entendu : à la diagonale) de la matrice recherchée est orthogonale au champ électrique. Elle est trivialement vérifiée si ces deux vecteurs sont égaux ; c'est encore vrai en particulier lorsque ces deux vecteurs valent le champ électrique et que celui-ci est un vecteur isotropique.

$$(121 - 1) : \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | . | {}^{(3)}\mathbf{t} \rangle - \langle {}^{(3)}\mathbf{T} | . | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle = 0$$

2. La deuxième condition peut se laisser transposer en :

$$(121 - 2)^t : -{}^{(3)}[w]^t . | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle = t . | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle + {}_{[J]}\Phi^t({}^{(3)}\mathbf{H}) . | {}^{(3)}\mathbf{w} \rangle$$

3. La troisième s'écrit :

$$(121 - 3) : {}^{(3)}[w] . | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle = t . | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle + {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) . | {}^{(3)}\mathbf{t} \rangle$$

Elles sont compatibles lorsque :

$$\text{— Cas 1 :} \quad ({}^{(3)}[w] = -{}^{(3)}[w]^t ; ({}^{(3)}\mathbf{T} = -{}^{(3)}\mathbf{t} ; \forall t) \quad (122)$$

$$\text{— Cas 2 :} \quad ({}^{(3)}[w] = ({}^{(3)}[w]^t ; ({}^{(3)}\mathbf{T} = ({}^{(3)}\mathbf{t} ; t = 0) \quad (123)$$

4. L'impact sur la quatrième condition est alors tel que :

$$\begin{aligned} \text{— Cas 1 :} \quad T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{E}, ({}^{(3)}\mathbf{T}) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{T}, ({}^{(3)}\mathbf{E})) & \quad (124) \\ & = \\ ({}^{(3)}[w] \cdot {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) - {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot ({}^{(3)}[w]) & \end{aligned}$$

L'impact sur la première condition est alors tel que :

$$\langle ({}^{(3)}\mathbf{E}) \cdot ({}^{(3)}\mathbf{T}) \rangle = 0 \quad (125)$$

Ce qui revient à dire que la trace de la table de Pythagore est nulle. Le formalisme des acteurs présents au sein de cette relation évoque celui des noyaux de type II découverts lors de l'étude systématique des décompositions des produits vectoriels déformés (voir travaux personnels). En effet, s'il existe une fonction f continue, de classe C_2 au moins, et dépendante de trois variables réelles telle que sa Hessienne s'écrive :

$$Hessf = \frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{E}, ({}^{(3)}\mathbf{T}) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{T}, ({}^{(3)}\mathbf{E}))\}$$

alors, l'expression conditionnelle trouvée précédemment peut s'écrire également :

$$\begin{aligned} Hessf + Hess^t f &= ({}^{(3)}[w] \cdot {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) - {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot ({}^{(3)}[w]) \\ &\downarrow \\ Hess^t f + {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot ({}^{(3)}[w]) &= ({}^{(3)}[w] \cdot {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) - Hessf \\ &\downarrow \\ \frac{1}{2} \cdot ({}^{(3)}[w])^{-1} \cdot \{Hess^t f + {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot ({}^{(3)}[w])\} & \\ &= \\ {}_{[J]}\Phi\left(\frac{1}{2} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{H})\right) - \frac{1}{2} \cdot ({}^{(3)}[w])^{-1} \cdot Hessf & \end{aligned}$$

La matrice placée à droite du signe de l'égalité a le formalisme d'une décomposition non-triviale qui aurait été obtenue par une méthode extrinsèque faisant intervenir la forme bilinéaire représentée par la matrice $[T]$, pour un produit déformé du type :

$$|\otimes\left(\frac{1}{2} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{H}, \dots)\right) \rangle = \{ {}_{[J]}\Phi\left(\frac{1}{2} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{H})\right) - \frac{1}{2} \cdot ({}^{(3)}[w])^{-1} \cdot Hessf \} \cdot |\dots \rangle + \mathbf{reste}$$

$$\begin{aligned} \text{— Cas 2 :} \quad T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{E}, ({}^{(3)}\mathbf{T}) - T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{T}, ({}^{(3)}\mathbf{E})) & \quad (126) \\ & = \\ ({}^{(3)}[w] \cdot {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) - {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot ({}^{(3)}[w]) & \end{aligned}$$

Cette relation a ceci d'intéressant que son formalisme rappelle celui des *mimétons* (voir [[a]]), au détail technique important près qu'il ne concerne

que la partie spatiale. Intuitivement, sur la base des considérations exposées dans [a], il doit exister des configurations de la matrice triviale $\Phi(\mathbf{H})$ pour lesquelles le terme à droite de l'égalité peut s'interpréter comme une variation infinitésimale de la partie spatiale de la transformation. Le terme à gauche de l'égalité vaut quant à lui la décomposition triviale du produit vectoriel entre les vecteurs \mathbf{E} et \mathbf{T} ; voir l'Equ.(33). Ainsi, peut-être au signe moins près :

$${}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{E} \wedge {}^{(3)}\mathbf{T}) = \delta^{(3)}[w] \quad (127)$$

A cause de l'Equ.(123) caractérisant ce cas 2, l'Equ.(121-1) est ici une lapalissade (évidence).

Remarque 2.20. *Les liens entre matrices de passage et représentations de l'adjonction tensorielle.*

Cette remarque s'inscrit dans la lignée logique débutée avec la précédente. Tout comme elle, elle cherche à savoir si l'arsenal mathématique traditionnel dispose déjà des représentations matricielles capable de jouer le rôle de l'adjonction tensorielle. Il s'agit ici de savoir s'il existe des matrices de passage entre F^* et F , notée génériquement $[M]$, pouvant jouer un rôle similaire à celui des représentations de l'adjonction tensorielle. Quand tel est le cas, alors :

$${}^*F = F^* \quad (128)$$

Ce qui équivaut à :

$$[\chi].F = [M].F ; [\chi]^2 = -Id_4 \quad (129)$$

Soit encore :

$$\{[\chi] - [M]\}.F = 0 ; [\chi]^2 = -Id_4$$

Cette relation amène à considérer logiquement au moins deux types de situations :

1. **Le premier type** concerne l'éventualité d'une égalité entre les deux représentations :

$$[\chi] = [M] ; [\chi]^2 = -Id_4 \quad (130)$$

Proposition 2.5. *Les matrices de passage entre les représentations F^* et F d'un champ EM, telles qu'elles ont été définies au § 1.5, ne peuvent jamais être exactement égalées avec une des matrices $[\chi]$ caractérisant l'adjonction tensorielle.*

Preuve : A l'aide de l'analyse périenne des matrices, c'est-à-dire de l'Equ.(7) et du formalisme générique indiqué au niveau de la Rem.1.3 pour la matrice de passage $[M]$, il vient :

$$\begin{aligned} & {}^{(4)}[M]^2 \quad (131) \\ & = \\ & \left[\begin{array}{cc} -1 - \frac{1}{2} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | {}^{(3)}\mathbf{N} \rangle & \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \\ | {}^{(3)}\mathbf{N} \rangle & -Id_3 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cc} -1 - \frac{1}{2} \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | {}^{(3)}\mathbf{N} & \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \\ | {}^{(3)}\mathbf{N} \rangle & -Id_3 \end{array} \right] \\ & = \\ & \left[\begin{array}{cc} m^2 & (m-1) \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{M} | \\ (m-1) \cdot | {}^{(3)}\mathbf{N} \rangle & Id_3 + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{N}, {}^{(3)}\mathbf{M}) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ce produit matriciel devrait être égalé avec :

$$\left[\begin{array}{cc} -1 & \langle {}^{(3)}\mathbf{0} | \\ | {}^{(3)}\mathbf{0} \rangle & -Id_3 \end{array} \right]$$

Cette égalisation ne peut visiblement jamais être réalisée car il n'y a pas de valeur de m la validant. \square

2. **Le second type** correspond aux situations pour lesquelles l'écart entre les deux matrices doit donner une matrice dégénérée :

$$|[\chi] - [M]| = 0 \quad (132)$$

↓

$$\left| \begin{bmatrix} d & \langle^{(3)} \mathbf{d} | \\ |^{(3)} \mathbf{e} \rangle & ^{(3)}[\chi] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 - \frac{1}{2} \langle^{(3)} \mathbf{M} \cdot |^{(3)} \mathbf{N} \rangle & \langle^{(3)} \mathbf{M} | \\ |^{(3)} \mathbf{N} \rangle & -Id_3 \end{bmatrix} \right| = 0$$

Je viens de montrer que la différence entre une représentation des matrices de passage et une représentation de l'*adjonction tensorielle* devait être une matrice dont le déterminant est nul. Concernant ce sujet, lorsque la double hypothèse suivante est émise :

$$F^* = M \cdot F; {}^*F = \chi \cdot F \quad (133)$$

et que les matrices $[\chi]$ et $[M]$ sont inversibles, il devient possible de proposer :

$$F = [M]^{-1} \cdot F^* = [\chi]^{-1} \cdot {}^*F; |M| \neq 0, |\chi| \neq 0 \quad (134)$$

De sorte que les inverses de ces matrices sont reliables entre eux si les représentations du champ EM sont elles-même inversibles⁸ :

$$[M]^{-1} = [\chi]^{-1} \cdot {}^*F \cdot (F^*)^{-1} \quad (135)$$

$$[M]^{-1} \cdot F^* \cdot ({}^*F)^{-1} = [\chi]^{-1} \quad (136)$$

$$|F^*| \neq 0; |{}^*F| \neq 0 \quad (137)$$

Mais tout ceci ne fait pas beaucoup avancer la quête en cours.

Remarque 2.21. *Les conséquences des liens entre une matrice de passage et une représentation d'un adjoint tensoriel.*

En fait, le calcul tensoriel fournit les relations de jonction entre les composantes du champ EM et celles du tenseur adjoint [[05]; p. 16, (8-2)]. Les matrices $[M]$ et $[\chi]$ peuvent donc en principe être reliées l'une à l'autre via les composantes du tenseur complètement antisymétrique de rang quatre $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$. C'est la relation essentielle, stratégique, sur laquelle je vais baser le reste de l'exploration du troisième critère :

$$[({}^*F)_{\gamma\delta}] = \frac{1}{2} \cdot [\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot (F^*)^{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} \cdot [\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot (M)_{\alpha\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\beta}] = [(\chi)_{\gamma\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\delta}] \quad (138)$$

Ainsi, sachant que les matrices $[\chi]$ déterminent l'univers des possibilités algébriques (parce qu'elles caractérisent l'*adjonction tensorielle*) tandis que les matrices $[M]$ sont directement reliées à des grandeurs physiques, l'importance stratégique des premières, déjà évoquée au niveau du corollaire 2.1 ressort clairement.

Soit, pour échauffement, les calculs suivants (Les lecteurs aguerris peuvent poursuivre directement vers la Rem.2.22) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \eta_{0123} \cdot \{ (M)_{00} \cdot (F)_{01} + (M)_{01} \cdot (F)_{11} + (M)_{02} \cdot (F)_{21} + (M)_{03} \cdot (F)_{31} \} \\ & = \\ & (\chi)_{20} \cdot (F)_{03} + (\chi)_{21} \cdot (F)_{13} + (\chi)_{22} \cdot (F)_{23} + (\chi)_{23} \cdot (F)_{33} \end{aligned}$$

⁸. Ce qui exclut d'emblée les configurations physiques dans lesquelles le champ électrique est orthogonal au champ magnétique; voir Equ.(4).

En inversant 2 et 3 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \eta_{0132} \cdot \{(M)_{00} \cdot (F)_{01} + (M)_{01} \cdot (F)_{11} + (M)_{02} \cdot (F)_{21} + (M)_{03} \cdot (F)_{31}\} \\ = \\ (\chi)_{30} \cdot (F)_{02} + (\chi)_{31} \cdot (F)_{12} + (\chi)_{32} \cdot (F)_{22} + (\chi)_{33} \cdot (F)_{32} \end{aligned}$$

La première et la troisième ligne sont identiques à un signe moins près (à cause de l'inversion des indices 2 et 3 dans le tenseur η). Il est donc possible de confronter la deuxième ligne avec moins une fois la quatrième ligne. Cette confrontation doit se faire en n'oubliant pas que :

$$F_{\alpha\beta} = -F_{\beta\alpha}$$

Il en résulte les premières identifications :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot (M)_{02} &= (\chi)_{31} \\ \frac{1}{2} \cdot (M)_{03} &= -(\chi)_{21} \\ (\chi)_{22} &= (\chi)_{33} \end{aligned}$$

Tout ce qui peut simplement être identifié l'ayant été, il reste les égalités :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \{(M)_{00} \cdot (F)_{01} + (M)_{02} \cdot (F)_{21}\} \\ = \\ (\chi)_{20} \cdot (F)_{03} + (\chi)_{22} \cdot (F)_{23} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (\chi)_{20} \cdot (F)_{03} + (\chi)_{21} \cdot (F)_{13} \\ = \\ (\chi)_{30} \cdot (F)_{02} + (\chi)_{31} \cdot (F)_{21} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \{(M)_{00} \cdot (F)_{01} + (M)_{03} \cdot (F)_{31}\} \\ = \\ (\chi)_{30} \cdot (F)_{02} + (\chi)_{33} \cdot (F)_{23} \end{aligned}$$

Ces premiers aperçus montrent le côté fastidieux du déchiffrement des équations condensées. La crainte que l'ensemble des contraintes aboutisse à annuler tout ou partie des inconnues est grande. Soit maintenant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \eta_{2301} \cdot \{(M)_{20} \cdot (F)_{03} + (M)_{21} \cdot (F)_{13} + (M)_{22} \cdot (F)_{23} + (M)_{23} \cdot (F)_{33}\} \\ = \\ (\chi)_{00} \cdot (F)_{01} + (\chi)_{01} \cdot (F)_{11} + (\chi)_{02} \cdot (F)_{21} + (\chi)_{03} \cdot (F)_{31} \end{aligned}$$

En inversant 0 et 1 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \eta_{2310} \cdot \{(M)_{20} \cdot (F)_{03} + (M)_{21} \cdot (F)_{13} + (M)_{22} \cdot (F)_{23} + (M)_{23} \cdot (F)_{33}\} \\ = \\ (\chi)_{10} \cdot (F)_{00} + (\chi)_{11} \cdot (F)_{10} + (\chi)_{12} \cdot (F)_{20} + (\chi)_{13} \cdot (F)_{30} \end{aligned}$$

Là encore, la première et la troisième ligne sont identiques à un signe moins près (à cause de l'inversion des indices 0 et 1 dans le tenseur η). Il est donc possible de confronter la deuxième ligne avec moins une fois la quatrième ligne. Il en résulte les identifications :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot (M)_{20} &= (\chi)_{13} \\ \frac{1}{2} \cdot (M)_{21} &= -(\chi)_{03} \\ (\chi)_{00} &= (\chi)_{11}\end{aligned}$$

La première d'entre elles, quand elle est comparée avec la première du groupe de trois obtenues précédemment, suggère l'espoir d'avoir in fine la relation simple :

$$\frac{1}{2} \cdot [M] = [\chi]$$

Mais la proposition 2.5 et sa conséquence immédiate, l'Equ.(132), doivent inciter à la prudence. Tout ce qui peut simplement être identifié l'ayant été, il reste les égalités suivantes :

$$\frac{1}{2} \cdot \eta_{2301} \cdot \{(M)_{20} \cdot (F)_{03} + (M)_{22} \cdot (F)_{23}\} = (\chi)_{00} \cdot (F)_{01} + (\chi)_{02} \cdot (F)_{21}$$

et :

$$(\chi)_{02} \cdot (F)_{21} + (\chi)_{03} \cdot (F)_{31} = (\chi)_{12} \cdot (F)_{02} + (\chi)_{13} \cdot (F)_{03}$$

qui exprime un lien entre le champ magnétique et le champ électrique; enfin :

$$\frac{1}{2} \cdot \eta_{2301} \cdot \{(M)_{21} \cdot (F)_{13} + (M)_{22} \cdot (F)_{23}\} = (\chi)_{11} \cdot (F)_{01} + (\chi)_{12} \cdot (F)_{02}$$

qui en exprime un autre et obscurcit encore un peu plus l'idée qu'il est possible de se faire sur les représentations matricielles de l'adjonction tensorielle au travers des matrices $[\chi]$.

Remarque 2.22. *Le troisième critère définissant l'adjonction tensorielle.*

Je vais tenter d'abrèger un peu ce supplice algébrique en notant que l'investigation débutée au cours de la remarque précédente porte sur la recevabilité (vraisemblance) de l'Equ.(138) :

$$\frac{1}{2} \cdot \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot (M)_{\alpha\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\beta} = (\chi)_{\gamma\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\delta}$$

— Elle est évidemment vérifiée lorsque $[M] \cdot F = [\chi] \cdot F = 0$ mais que $[M] \neq [\chi]$ puisque l'égalité entre les deux matrices est interdite par la validation de la proposition 2.5. Comme le déterminant de la matrice F n'est pas systématiquement nul (voir l'Equ.4), un moyen simple de systématiquement valider ces égalités est de considérer que les matrices $[M]$ et $[\chi]$ appartiennent toutes deux à l'ensemble des matrices de $M(4, \mathbb{C})$ dont le déterminant est nul. Mais cette éventualité doit aussi être écartée car elle est incompatible avec l'obligation :

$$[\chi]^2 = -Id_4 \Rightarrow |\chi|^2 = (-1)^4 = 1 \neq 0 \quad (139)$$

Les seules circonstances susceptibles de valider cette trivialité sont celles pour lesquelles le déterminant de la matrice F est nul; c'est-à-dire celles dans lesquelles le champ électrique est orthogonal au champ magnétique (voir Sous-sect.1.4). Et encore ne s'agit-il que d'une condition nécessaire mais pas forcément suffisante. Le calcul détaillé montre en réalité que l'égalité $F \cdot M = F^* = 0$ entraîne obligatoirement : $\mathbf{E} = \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Cette éventualité mathématique ne présente pas un intérêt physique immédiat.

- En dehors de la pseudo-trivialité précédente, il convient de tenir compte des remarques suivantes. L'inversion de deux indices dans les composantes du tenseur η équivaut à une multiplication de celui-ci par moins un ; tandis que la répétition de l'un quelconque de ces indices annule la composante concernée par cette répétition.

1. De sorte qu'une inversion des deux derniers indices fournit :

$$\frac{1}{2} \cdot \eta_{\alpha\beta\delta\gamma} \cdot (M)_{\alpha\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\beta} = -\frac{1}{2} \cdot \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot (M)_{\alpha\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\beta} = (\chi)_{\delta\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\gamma}$$

et que la somme des deux lignes est nulle :

$$(\chi)_{\gamma\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\delta} + (\chi)_{\delta\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\gamma} = 0$$

Ce qui se condense sous forme matricielle en :

$$[\chi] \cdot F + \{[\chi] \cdot F\}^t = [\chi] \cdot F - F \cdot [\chi]^t = 0 \quad (140)$$

2. Avec une inversion portant sur les deux premiers indices, il vient :

$$\frac{1}{2} \cdot \eta_{\beta\alpha\gamma\delta} \cdot (M)_{\beta\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\alpha} = (\chi)_{\gamma\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\delta}$$

Ce qui entraîne l'obligation d'écrire :

$$\frac{1}{4} \cdot \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \{(M)_{\alpha\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\beta} - (M)_{\beta\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\alpha}\} = (\chi)_{\gamma\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\delta} \quad (141)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot \{(M)_{\alpha\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\beta} + (M)_{\beta\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\alpha}\} = 0 \quad (142)$$

3. Il peut aussi être remarqué que les produits :

$$\frac{1}{2} \cdot \eta^{\lambda\mu\gamma\delta} \cdot \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} \cdot (M)_{\alpha\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\beta} = \eta^{\lambda\mu\gamma\delta} \cdot (\chi)_{\gamma\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\delta}$$

deviennent grâce à la formule [[10] ; p. 21, note de bas de page] :

$$(\delta_{\beta}^{\lambda} \cdot \delta_{\alpha}^{\mu} - \delta_{\alpha}^{\lambda} \cdot \delta_{\beta}^{\mu}) \cdot (M)_{\alpha\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\beta} = \eta^{\lambda\mu\gamma\delta} \cdot (\chi)_{\gamma\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\delta}$$

Ici, à cause des remarques faites sur la pseudo-trivialité, il n'est pas souhaité que le terme placé à droite du signe de l'égalité s'annule. Il faut donc à tous prix que les indices λ et μ soient distincts l'un de l'autre. De sorte qu'il n'y a que deux couples d'indices (α, β) n'annulant pas les termes à gauche de l'égalité ; ce sont les couples (λ, μ) et (μ, λ) . Il reste donc :

$$(M)_{\mu\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\lambda} - (M)_{\lambda\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\mu} = \eta^{\lambda\mu\gamma\delta} \cdot (\chi)_{\gamma\epsilon} \cdot (F)_{\epsilon\delta} \quad (143)$$

Finalement, la seule relation exploitable pour le moment est celle qui a été obtenue au premier alinéa de cette énumération : Equ.(140). Et elle ne contient pas la matrice de passage ! J'en examine maintenant les conséquences ; il vient :

$$\begin{aligned} & {}^{(4)}[F] \cdot {}^{(4)}[\chi] \\ & = \\ & \left[\begin{array}{cc} 0 & \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \\ -|{}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cc} d & \langle {}^{(3)}\mathbf{d} | \\ |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle & {}^{(3)}[\chi] \end{array} \right] \\ & = \end{aligned} \quad (144)$$

$$\left[\begin{array}{cc} \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \cdot | {}^{(3)}\mathbf{e} \rangle & \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \cdot {}^{(3)}[\chi] \\ -d \cdot | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle + [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot | {}^{(3)}\mathbf{e} \rangle & [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot {}^{(3)}[\chi] - T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{d}) \end{array} \right]$$

et :

$${}^{(4)}[\chi]^t \cdot {}^{(4)}[F] \quad (145)$$

=

$$\left[\begin{array}{cc} d & \langle {}^{(e)}\mathbf{e} | \\ | {}^{(3)}\mathbf{d} \rangle & {}^{(3)}[\chi]^t \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{cc} 0 & \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \\ -| {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{array} \right]$$

=

$$\left[\begin{array}{cc} -\langle {}^{(3)}\mathbf{e} | \cdot | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & d \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | + \langle {}^{(3)}\mathbf{e} | \cdot [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \\ -{}^{(3)}[\chi]^t \cdot | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & {}^{(3)}[\chi]^t \cdot [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{d}, {}^{(3)}\mathbf{E}) \end{array} \right]$$

L'Equ.(140) impose d'égaliser les deux produits matriciels : les Equ.(144) et Equ.(145). Il en résulte le système suivant :

1. le vecteur \mathbf{e} doit être orthogonal au champ électrique :

$$\langle {}^{(3)}\mathbf{e} | \cdot | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle = 0 \quad (146)$$

2. Les ailes sont telles que :

$$\langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \cdot {}^{(3)}[\chi] = d \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | + \langle {}^{(3)}\mathbf{e} | \cdot [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \quad (147)$$

$$-d \cdot | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle + [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot | {}^{(3)}\mathbf{e} \rangle = -{}^{(3)}[\chi]^t \cdot | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle$$

Mais en transposant la première des deux :

$${}^{(3)}[\chi]^t \cdot | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle = d \cdot | {}^{(3)}\mathbf{E} \rangle + [J]\Phi^t({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot | {}^{(3)}\mathbf{e} \rangle$$

et en la multipliant ensuite par moins un, la seconde est obtenue ; les deux relations ailées n'en font qu'une.

3. Les coeurs satisfont à :

$$[J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot {}^{(3)}[\chi] - T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{d})$$

=

$${}^{(3)}[\chi]^t \cdot [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{d}, {}^{(3)}\mathbf{E})$$

Ce qui peut encore se réécrire :

$$[J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot {}^{(3)}[\chi] - {}^{(3)}[\chi]^t \cdot [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \quad (148)$$

=

$$T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{d}, {}^{(3)}\mathbf{E}) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{E}, {}^{(3)}\mathbf{d})$$

Ces équations traduisent le troisième critère caractérisant une matrice de $M(4, \mathbb{C})$ susceptible de représenter l'*adjonction tensorielle*. Elles joueront un rôle décisif dans la partie physique de ce document. En attendant, elles permettent d'énoncer la :

Proposition 2.6. *Une représentation $[W]$ d'un adjoint algébrique ne peut jamais se confondre avec une représentation $[\chi]$ d'une adjonction tensorielle.*

Preuve : A cause d'un signe moins, l'Equ.(148) ne peut pas être identifiée avec celle qui a été obtenue pour le cas 1 au cours de l'exploration menée dans la Rem.2.19, Equ.(124) :

$$\begin{aligned} & T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{T}, ^{(3)}\mathbf{E}) + T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{E}, ^{(3)}\mathbf{T}) \\ & = \\ & ^{(3)}[w] \cdot [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{H}) - [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{H}) \cdot ^{(3)}[w] \\ & ^{(3)}[w] = -^{(3)}[w]^t ; ^{(3)}\mathbf{T} = -^{(3)}\mathbf{t} ; \forall t \end{aligned}$$

En effet, à condition de poser d'abord :

$$^{(3)}\mathbf{d} = -^{(3)}\mathbf{T}$$

L'Equ.(148) devient :

$$\begin{aligned} & ^{(3)}[\chi]^t \cdot [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{H}) - [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{H}) \cdot ^{(3)}[\chi] \\ & = \\ & T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{T}, ^{(3)}\mathbf{E}) + T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{E}, ^{(3)}\mathbf{T}) \end{aligned}$$

De sorte que même en posant en plus :

$$^{(3)}[\chi]^t = ^{(3)}[w] \Rightarrow ^{(3)}[\chi] = [w]^t = -^{(3)}[w]$$

Il suit :

$$\begin{aligned} & T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{T}, ^{(3)}\mathbf{E}) + T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{E}, ^{(3)}\mathbf{T}) \\ & = \\ & ^{(3)}[w] \cdot [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{H}) + [J]\Phi(^{(3)}\mathbf{H}) \cdot ^{(3)}[w] \end{aligned}$$

qui, à cause d'un signe moins, ne coïncide pas avec l'Equ.(124).

L'explication est à chercher dans le fait que le travail se fait ici avec F et qu'il s'est fait avec F* au cours de la Rem. 2.19. Une identification avec le cas 2 ne serait pas plus fructueuse parce que le signe moins non concordant se retrouverait cette fois-ci au niveau des tables de Pythagore. \square

Lemme 2.4. *Une matrice $[\chi]$ représentant l'adjonction tensorielle ne peut jamais coïncider avec une transformation $[W]$ définissant l'adjonction algébrique.*

2.6 Les conséquences du troisième critère

Remarque 2.23. *Bilan intermédiaire.*

Arrivé à ce stade de l'exploration, un bilan intermédiaire peut être formulé. En travaillant avec l'hypothèse selon laquelle les matrices recherchées sont essentiellement des mères (voir Def. 2.5), les formalismes des mères admissibles ont été découverts puis classifiés au niveau des sous-sections 2.3 et 2.4.

Les relations nécessaires à valider le troisième critère, les Equ.(146), (147) et (148) ont ensuite été mises en évidence au niveau de la Rem.2.22.

Il est également clair que les représentations matricielles de l'adjonction tensorielle à la recherche desquelles se consacre cette étude ne peuvent être ni des matrices de passage entre F et F*, ni des représentations d'une adjonction, au sens algébrique du terme : voir la proposition 2.5 et le lemme 2.4.

Je me propose de poursuivre cette progression logique en testant la compatibilité du formalisme des mères admissibles avec les exigences issues du respect des équations validant le troisième critère..

Remarque 2.24. *Le rôle joué par les équations définissant le troisième critère.*

Le respect du troisième critère de validation -voir la Rem.2.22- se traduit par diverses restrictions qui sont toutes des conséquences des importantes Equ.(146), (147) et (148). Par exemple, comme suite logique de l'action de l'Equ.(31) sur l'Equ.(148), il sera nécessaire de s'assurer du fait que le coeur des matrices admissibles choisies satisfait la condition :

$$|_{[J]}\Phi^{(3)}(\mathbf{H}).^{(3)}[\chi] - ^{(3)}[\chi]^t \cdot |_{[J]}\Phi^{(3)}(\mathbf{H})| = 0 \quad (149)$$

Proposition 2.7. *Le formalisme générique du coeur d'une mère est compatible avec le troisième critère de représentabilité de l'adjonction tensorielle.*

Preuve :

— Compatibilité avec l'Equ.(149). Soit le coeur d'une quelconque mère ; puisque (identités remarquables) :

$$|_{[J]}\Phi(\mathbf{H}).T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d}) = T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{H} \wedge \mathbf{d}) \quad (150)$$

et :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{e}).|_{[J]}\Phi(\mathbf{H}) = T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d} \wedge \mathbf{H}) \quad (151)$$

Il vient que :

$$\begin{aligned} & |_{[J]}\Phi^{(3)}(\mathbf{H}).^{(3)}[\chi] - ^{(3)}[\chi]^t \cdot |_{[J]}\Phi^{(3)}(\mathbf{H}) \quad (152) \\ & = \\ & |_{[J]}\Phi^{(3)}(\mathbf{H}).\{\alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T\} - \{\alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T\}^t \cdot |_{[J]}\Phi^{(3)}(\mathbf{H}) \\ & = \\ & \beta_0 \cdot \{|_{[J]}\Phi^{(3)}(\mathbf{H}) \cdot T - T^t \cdot |_{[J]}\Phi^{(3)}(\mathbf{H})\} \\ & = \\ & \beta_0 \cdot \{T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{H} \wedge \mathbf{d}) - T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d} \wedge \mathbf{H})\} \\ & =^9 \\ & 2 \cdot \beta_0 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{H} \wedge \mathbf{d}) \end{aligned}$$

Or toute table de Pythagore pour le produit tensoriel classique (non déformé) est une matrice dont le déterminant est nul ; c.q.f.d.

— Ensuite, l'application particulière de l'Equ.(146) au formalisme des mères, Equ.(49), détermine le domaine d'application physique de cette étude. Soit la formulation spécifique de l'Equ.(148) obtenue à la fin de l'item précédent :

$$\begin{aligned} & T_2(\otimes)(\mathbf{E}, \mathbf{d}) + T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{E}) \quad (153) \\ & = \\ & 2 \cdot \beta_0 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{H} \wedge \mathbf{d}) \end{aligned}$$

Pour qu'elle devienne mathématiquement plausible il suffit de poser :

$$\forall \mathbf{d}, \exists \epsilon : \epsilon \cdot \beta_0 \cdot \mathbf{e} = \mathbf{H} \wedge \mathbf{d} \quad (154)$$

9. L'antisymétrie du produit vectoriel classique permet de poursuivre avec :

Cette relation valide l'Equ.(148) mais elle demande à être précisée pour pouvoir en déduire des prédictions physiques,

Lorsque par exemple $\mathbf{d} = \mathbf{E}$, elle établit un lien clair entre le vecteur \mathbf{e} et la vitesse de propagation du champ, elle même a priori colinéaire au vecteur de Poynting de ce champ.

$$\mathbf{e} = \mathbf{S} \equiv \mathbf{v}$$

Lorsque par exemple $\mathbf{d} = \mathbf{v}$, elle établit un lien clair entre le vecteur \mathbf{e} et le champ électrique \mathbf{E} :

$$\mathbf{e} \equiv \mathbf{E}$$

Avec ce choix, l'Equ.(154) devient une expression de la très classique loi de Lorentz.

- Compatibilité des relations de cohérence avec les Equ.(146) et (147) :
Lorsque par exemple $\mathbf{d} = \mathbf{E}$, le vecteur de Poynting étant par définition orthogonal au champ électrique, l'Equ.(146) est vérifiée de facto, comme suite immédiate de l'Equ.(154) :

$$\langle \mathbf{e} | \cdot | \mathbf{E} \rangle = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}) = 0$$

L'Equ.(147) est plus subtile à traiter ; elle a pour transposée :

$${}^{(3)}[\chi]^t \cdot | \mathbf{E} \rangle = d \cdot |^{(3)}\mathbf{E} \rangle + [J] \Phi^t({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot |^{(3)}\mathbf{E} \rangle$$

Dans le cas où le coeur est celui d'une mère, elle devient :

$$\{\alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{d}, \mathbf{e})\} \cdot | \mathbf{E} \rangle = d \cdot |^{(3)}\mathbf{E} \rangle - [J] \Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot |^{(3)}\mathbf{E} \rangle \quad (155)$$

Ou encore ici :

$$\alpha_0 \cdot | \mathbf{E} \rangle + \beta_0 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{E}, \mathbf{S}) \cdot | \mathbf{E} \rangle = d \cdot |^{(3)}\mathbf{E} \rangle - [J] \Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot |^{(3)}\mathbf{E} \rangle$$

C'est-à-dire :

$$\alpha_0 \cdot | \mathbf{E} \rangle + \beta_0 \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \cdot | \mathbf{S} \rangle = d \cdot |^{(3)}\mathbf{E} \rangle - | \mathbf{H} \wedge \mathbf{E} \rangle$$

A cause des relations de cohérence (154) et en supposant que β_0 n'est pas nul :

$$\alpha_0 \cdot | \mathbf{E} \rangle + \beta_0 \cdot |\mathbf{E}|^2 \cdot | \mathbf{S} \rangle = d \cdot |^{(3)}\mathbf{E} \rangle - \frac{1}{\beta_0} \cdot | \mathbf{S} \rangle$$

Cette nouvelle formulation est rendue trivialement cohérente en posant :

$$d = \alpha_0 ; |\beta_0 \cdot \mathbf{E}|^2 = -1 \quad (156)$$

Il existe cependant d'autres solutions. Pour les visualiser, il convient de refaire apparaître la matrice Φ dépendant du champ magnétique.

Lorsque par exemple $\mathbf{d} = \mathbf{v}$, la discussion ne peut se poursuivre qu'avec des champs électriques isotropiques ; in extenso : ce sont des spineurs de Cartan. Ceci tient au fait que la validation de l'Equ.(146) oblige ici à poser :

$$\langle \mathbf{e} | \cdot | \mathbf{E} \rangle = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) = |\mathbf{E}|^2 = 0$$

Cette obligation contraint fortement le choix des mères : voir la classification au niveau de la sous-section 2.4 et peut-être tout particulièrement

la Rem.2.18, ainsi que les Equ.(106) et (107). Concernant l'Equ.(147), il convient d'analyser maintenant l'Equ.(155) dans la mouture particulière :

$$\{\alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{v}, \mathbf{E})\} \cdot |\mathbf{E}\rangle = d \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle - {}_{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{H}) \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle$$

Il s'agit de :

$$\alpha_0 \cdot |\mathbf{E}\rangle + \beta_0 \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \cdot |\mathbf{E}\rangle = d \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle - {}_{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{H}) \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle$$

Mais puisque le champ électrique est orthogonal à la vitesse, il ne reste que :

$$\alpha_0 \cdot |\mathbf{E}\rangle = d \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle - {}_{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{H}) \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle$$

ou encore :

$$\{{}_{[J]}\Phi(\mathbf{H}) - (\alpha_0 - d) \cdot Id_3\} \cdot |\mathbf{E}\rangle = |\mathbf{0}\rangle$$

Si le champ électrique n'est pas systématiquement nul (ce qui n'aurait aucun intérêt physique), le scalaire $(\alpha_0 - d)$ est valeur propre de la matrice triviale Φ dépendant du champ magnétique local. La nullité du déterminant :

$$|{}_{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{H}) - h \cdot Id_3| = -h^3 - h \cdot |\mathbf{H}|^2; h = d - \alpha_0$$

implique nécessairement deux types de situations :

$$|\mathbf{H}|^2 = -(d - \alpha_0)^2$$

$$d - \alpha_0 = 0$$

Concernant l'étude menée dans le cadre de ce document, il a été prouvé de nombreuses fois que les seules valeurs autorisées pour α_0 sont $-i$ et $+i$. Ici encore, il convient de consulter la classification de la sous-section 2.4 au niveau de la Rem.2.18 pour découvrir les valeurs de $(d \pm i)$ compatibles avec le fait qu'une mère puisse représenter l'*adjonction tensorielle*. Que s soit nul ou pas n'a pas d'importance puisqu'ici $\mathbf{e} = \mathbf{E} \neq 0$ et $|\mathbf{E}| = 0$. Toutes les situations compatibles coïncident avec des champs magnétiques isotropiques : $|\mathbf{H}| = 0$. Le formalisme des équerres isotropiques, Equ.(107), est le seul qui réponde au cahier des charges. Une conséquence supplémentaire et curieuse étant que la vitesse du champ doit aussi être un spineur !

— Autre exigence : en multipliant l'Equ.(147) :

$${}^{(3)}[\chi]^t \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle = d \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle + {}_{[J]}\Phi^t(^{(3)}\mathbf{H}) \cdot |^{(3)}\mathbf{e}\rangle$$

par \mathbf{e} à gauche, il vient :

$$\langle \mathbf{e} | \cdot \{ {}^{(3)}[\chi]^t \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle \} = d \cdot \langle \mathbf{e} | \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle + \langle \mathbf{e} | \cdot \{ {}_{[J]}\Phi^t(^{(3)}\mathbf{H}) \cdot |^{(3)}\mathbf{e}\rangle \}$$

Or l'Equ.(146) et les règles s'appliquant au produit vectoriel classique annulent le terme placé à droite; de sorte que l'Equ.(147) génère la forme bilinéaire nulle :

$$w = \{ \langle {}^{(3)}\mathbf{e} | \cdot {}^{(3)}[\chi] \} \cdot |\mathbf{E}\rangle = 0 \quad (157)$$

Pour le cas particulier où le coeur est celui d'une mère la forme bilinéaire précédente devient :

$$w = \{ \langle {}^{(3)}\mathbf{e} | \cdot \{ \alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T \} \} \cdot |\mathbf{E}\rangle$$

Elle se développe en :

$$w = \alpha_0 \cdot \langle \mathbf{e} | \cdot |^{(3)}\mathbf{E}\rangle + \beta_0 \cdot \{ \langle {}^{(3)}\mathbf{e} | \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d}) \} \cdot |\mathbf{E}\rangle$$

Or un développement précis livre :

$$\{ \langle {}^{(3)}\mathbf{e} | . T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{d}) \rangle . |\mathbf{E}\rangle = \langle \mathbf{e}, \mathbf{d} \rangle . \langle \mathbf{e}, \mathbf{E} \rangle$$

Dés le moment où le coeur figurant dans la forme w est celui d'une mère, cette forme est automatiquement nulle à cause de l'Equ.(146). □

Remarque 2.25. *La validation du troisième critère et la classification.*

Les champs vectoriels impliqués dans la partie mathématique de cette discussion (les ailes \mathbf{d} et \mathbf{e} des matrices recherchées) sont en général et a priori distincts l'un de l'autre; et distincts du champ électrique \mathbf{E} .

Ainsi, l'existence des Equ.(146), (147) et (148) n'impose pas au vecteur \mathbf{d} , l'aile Nord d'une matrice envisageable, de se confondre systématiquement avec le champ électrique local \mathbf{E} ; pas plus qu'elle ne lui impose de s'identifier avec la vitesse de ce champ. L'interprétation physique correcte des ailes constitue d'ailleurs un des défis de ce travail.

En revanche, la validation du troisième critère -dont l'essence est surtout physique- ne s'oppose pas à ce qu'il se confonde parfois avec l'un ou l'autre des champs physiques envisageables dans une discussion portant sur la description de la propagation et du comportement des champs électromagnétiques; si, par exemple :

$${}^{(3)}\mathbf{d} = {}^{(3)}\mathbf{E}$$

la discussion et l'utilisation de la classification établie dans la sous-section 2.4 concerneront des mères ayant le formalisme suivant :

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{cc} |\alpha_0 . Id_3 + \beta_0 . T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{E}, \mathbf{E})| & \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \\ |\mathbf{H} \wedge \mathbf{E} \rangle & \alpha_0 . Id_3 + \beta_0 . T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{E}, \mathbf{E}) \end{array} \right]$$

Si, autre exemple :

$${}^{(3)}\mathbf{d} = {}^{(3)}\mathbf{v}$$

la discussion portera au contraire sur les mères ayant le formalisme :

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{cc} |\alpha_0 . Id_3 + \beta_0 . T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{v})| & \langle {}^{(3)}\mathbf{v} | \\ |\mathbf{H} \wedge \mathbf{v} \rangle & \alpha_0 . Id_3 + \beta_0 . T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{array} \right]$$

Sinon, de façon générale, les mathématiques autorisent à écrire (en absence de précisions sur \mathbf{d}) :

$${}^{(4)}[\chi] = \left[\begin{array}{cc} |\alpha_0 . Id_3 + \beta_0 . T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d})| & \langle \mathbf{d} | \\ |\mathbf{H} \wedge \mathbf{d} \rangle & \alpha_0 . Id_3 + \beta_0 . T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) \end{array} \right] \tag{158}$$

La suite de l'exploration consiste à appliquer les considérations générales développées au cours de la sous-section 2.4 aux diverses interprétations données au vecteur \mathbf{d} . Compte tenu des connaissances concernant les ondes électromagnétiques planes (dites aussi transversales), il est extrêmement tentant de se concentrer sur la proposition $\mathbf{d} = \mathbf{v}$. Le champ électrique de ces ondes valide automatiquement l'Equ.(146) : $\mathbf{E} . \mathbf{v} = 0$ [[10]; p. 132].

Quelle que soit l'interprétation retenue, je note dès à présent que la catégorie des matrices admissibles au titre du deuxième critère (rappel : $[\chi]^2 = -Id_4$ et le système des Equ.(28) l'accompagnant) dont le système des ailes est (i) dégénéré et (ii) tel que $\mathbf{s} = \mathbf{e} . \mathbf{d} \neq 0$ (voir Rem.2.18 seconde partie) constitue un sous-ensemble

problématique de solutions pour le problème posé puisqu'il oblige à considérer des situations pour lesquelles il faudrait pouvoir écrire :

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{d} \equiv \mathbf{d}$$

Ce qui est a priori insensé en général et en particulier pour les ondes transversales lorsque $\mathbf{d} = \mathbf{v}$ car le champ électrique est alors orthogonal à la direction de la propagation.

En revanche, il est raisonnable d'envisager l'existence de champs électriques longitudinaux, colinéaires au vecteur d'onde (qui donne la direction de la propagation) dans le cas des champs de Coulomb [[10]; p. 149, (51,5)].

Ce qui indique une fois de plus la nécessité (i) de préciser le contexte physique dans lequel les discussions ont lieu, (ii) d'envisager des champs électriques "de nature mixte" dans une discussion théorique générale et (iii) de penser que la réalisation simultanée des deuxième et troisième critères de représentabilité de l'*adjonction tensorielle* dont les manifestations sont des matrices obtenues dans la seconde partie de la Rem.2.18 ne peut concerner que la partie longitudinale des champs électriques. Malgré toutes ces précautions, une équivalence telle que celle qui est écrite ci-dessus n'a de sens mathématique que dans le cadre d'une discussion se plaçant sur $E(3, \mathbb{C})$ en impliquant des spineurs de Cartan et la notion de surface immergée; voir mon approche dans [[e]].

3 Partie physique : représentation des particules

3.1 Interprétation dans le cadre des représentations paramétriques des rotations

Remarque 3.1. *Le lien avec l'intensité d'un flux d'énergie moyenné dans le temps.*

Les rotations dans l'espace acceptent des représentations paramétriques; celle d'Euler en est un exemple connu mais particulier. Plus généralement peut-être, une rotation se laisse représenter par l'exponentielle matricielle d'une matrice S antisymétrique (ce n'est pas un scoop) :

$$\begin{aligned} \Omega(S, \sigma) &= \exp^S = Id_3 + \frac{\sin\sigma}{\sigma} \cdot S + \frac{1 - \cos\sigma}{\sigma^2} \cdot S^2 + \dots; S^t = -S \\ \sigma &\geq 0; \sigma^2 &= -\frac{1}{2} \cdot Tr S^2; S^3 &= -\sigma \cdot S \end{aligned}$$

Le carré d'une matrice anti-symétrique est une matrice symétrique. De sorte que les premiers termes de cette paramétrisation peuvent toujours se laisser réorganiser sous la forme d'une somme entre une matrice symétrique et une matrice antisymétrique :

$$\Omega(S, \sigma) = \exp^S \sim \left\{ Id_3 + \frac{1 - \cos\sigma}{\sigma^2} \cdot S^2 \right\} + \frac{\sin\sigma}{\sigma} \cdot S$$

Les mères capables de représenter l'*adjonction tensorielle* sans être réduites à des formalismes triviaux ont des coeurs constitués par la somme d'une partie symétrique proportionnelle à la matrice identité Id_3 et d'une table de Pythagore a priori quelconque. Pour autant, toutes ces tables de Pythagore se laissent décomposer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) & \tag{159} \\ &= \\ \frac{1}{2} \cdot \{ T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) \} &+ \frac{1}{2} \cdot \{ T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) - T_2^t(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) \} \end{aligned}$$

L'Equ.(33) permet de poursuivre avec :

$$\begin{aligned} T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) & \quad (160) \\ & = \\ \frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d})\} + {}_{[J]}\Phi((\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}) \wedge \mathbf{d}) \end{aligned}$$

Le coeur d'une mère compatible avec la représentation de l'adjonction tensorielle, telle que je la définis dans ce document, peut donc toujours s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & {}^{(3)}[\chi] & (161) \\ & = \\ \alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d})\} \\ & + \\ \beta_0 \cdot {}_{[J]}\Phi((\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}) \wedge \mathbf{d}) \end{aligned}$$

Ce formalisme se laisse identifier avec celui d'une représentation paramétrique d'une rotation dans l'espace chaque fois qu'il est mathématiquement permis d'écrire :

$$\alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d})\} = Id_3 + \frac{1 - \cos\sigma}{\sigma^2} \cdot S^2 \quad (162)$$

et :

$$\beta_0 \cdot {}_{[J]}\Phi((\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}) \wedge \mathbf{d}) = \frac{\sin\sigma}{\sigma} \cdot S \quad (163)$$

Cette exploration acquiert ici son intérêt physique puisque je constate que la coordonnée β_0 , plus exactement son carré, se laisse aisément relier à l'intensité d'un flux d'énergie moyenné dans le temps [[15] ; p. 486, (62)] :

$$\beta_0^2 = \frac{\sin^2\sigma}{\sigma^2} \equiv \frac{I}{I_{max}} \quad (164)$$

dés le moment où la matrice antisymétrique S impliquée dans cette discussion est identifiée avec la matrice rotation suivante :

$$S = {}_{[J]}\Phi((\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}) \wedge \mathbf{d}) \quad (165)$$

Remarque 3.2. *Le lien avec les produits vectoriels décomposés non-trivialement.*

Soit maintenant un produit vectoriel classique. Je suppose que ce produit accepte a priori des décompositions non forcément triviales notées génériquement ($[P]$, \mathbf{Z}) ; in extenso, j'écris donc :

$$\exists ([P], \mathbf{Z}) \in M(3, C) \times E(3, C) : |\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}\rangle = {}^{(3)}[P] \cdot |\mathbf{Y}\rangle + |\mathbf{Z}\rangle \quad (166)$$

La réalisation de décompositions de ce type s'accompagne de l'existence d'une polynomiale de degré au plus égal à deux : $\Lambda(\mathbf{X})$:

$$\Lambda(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{X} | \cdot \{[D] \cdot |\mathbf{X}\rangle\} + \langle \mathbf{d}^* | \cdot |\mathbf{X}\rangle - |^{(3)}[P]| \quad (167)$$

Si elle est non-dégénérée, sa Hessienne est inversible. Cette polynomiale a alors un vecteur singulier \mathbf{s} à chaque instant de la chronologie locale. Le formalisme des parties principales des décompositions, les matrices $[P]$, a été étudié de manière assez exhaustive dans [[c]] et [[d]]. Il s'exprime de la sorte :

$$[P] = -\frac{1}{2} \cdot Hess_{(\mathbf{x},0)}\Lambda(\mathbf{X}) - {}_{[J]}\Phi(\Lambda\mathbf{s}) \quad (168)$$

Il est concevable de relier chacune de ces matrices avec le coeur d'une mère apte à représenter l'*adjonction tensorielle*, via l'Equ.(161) et en posant :

$${}^{(3)}[\chi] = \beta_0 \cdot [P] \quad (169)$$

Auquel cas ceci revient à poser simultanément :

$$(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}) \wedge \mathbf{d} = -\beta_0 \cdot \mathbf{\Lambda} \mathbf{s} \quad (170)$$

et :

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d})\} \\ = \\ -\frac{\beta_0}{2} \cdot Hess_{(\mathbf{x}, 0)} \Lambda(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (171)$$

Dans [[e]], j'ai montré que l'identification entre la partie principale [P] et une paramétrisation d'Euler est envisageable. Un certain nombre de relations accompagnent cette éventualité. Elles sont précisées dans [[e], pp. 19-20] et permettent finalement de *reconstituer* la polynomiale $\Lambda(\mathbf{X})$:

— degré deux :

$$[d_{ab}] = \{1 - (\eta^0)^2\} \cdot Id_3 - \frac{1}{(\eta^0)^2} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{\Lambda} \mathbf{s}, \mathbf{\Lambda} \mathbf{s}); \eta^0 \neq 0, 1$$

— degré un :

$$\mathbf{d}^* = 2 \cdot \{(\eta^0)^2 - 1 + \frac{\langle \mathbf{\Lambda} \mathbf{s}, \mathbf{\Lambda} \mathbf{s} \rangle Id_3}{2 \cdot (\eta^0)^2}\} \cdot \mathbf{\Lambda} \mathbf{s}; \eta^0 \neq 0, 1$$

— degré zéro :

$$d = -|{}^{(3)}[P]| = \frac{|[d_{ab}] + [d_{ab}]^t|}{8} + \langle \mathbf{\Lambda} \mathbf{s}, \mathbf{\Lambda} \mathbf{s} \rangle_{[d_{ab}]}; \eta^0 \neq 0, 1$$

Comme la Hessienne de la polynomiale Λ forcément associée avec cette décomposition vaut à un instant donné $[D] + [D]^t$ [[e]; p. 3], il vient :

$$-\frac{\beta_0}{2} \cdot Hess_{(\mathbf{x}, 0)} \Lambda(\mathbf{X}) = \beta_0 \cdot (\eta_0^2 - 1) \cdot Id_3 + \frac{\beta_0}{\eta_0^2} \cdot T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{s}, {}^{(3)}\mathbf{s}) \quad (172)$$

Une comparaison avec l'Equ.(171) fournit :

$$\alpha_0 = \beta_0 \cdot (\eta_0^2 - 1) \quad (173)$$

et :

$$\frac{1}{2} \cdot \{T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d})\} = \frac{1}{\eta_0^2} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{\Lambda} \mathbf{s}, \mathbf{\Lambda} \mathbf{s}) \quad (174)$$

La cohérence et la signification physique de cette dernière équation doivent encore être testées par confrontation avec l'Equ.(170). Elle s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0^2}{2} \cdot \{T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}, \mathbf{d})\} \\ = \\ \frac{1}{\eta_0^2} \cdot T_2(\otimes)((\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}) \wedge \mathbf{d}, (\mathbf{H} \wedge \mathbf{d}) \wedge \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (175)$$

Remarque 3.3. *La question de l'interprétation physique des mères.*

Lorsque $\mathbf{d} = \mathbf{v}$: Il s'agit de vérifier la recevabilité de :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0^2}{2} \cdot \{T_2(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{v}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{v})\} & \quad (176) \\ = \\ \frac{1}{\eta_0^2} \cdot T_2(\otimes)((\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}, (\mathbf{H} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}) \end{aligned}$$

qui vaut grosso modo (à un facteur près peut-être) :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0^2}{2} \cdot \{T_2(\otimes)(\mathbf{E}, \mathbf{v}) + T_2(\otimes)(\mathbf{v}, \mathbf{E})\} & \quad (177) \\ \equiv \\ \frac{1}{\eta_0^2} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{E} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{E} \wedge \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Mais ici, exceptionnellement, l'Equ.(153) peut être invoquée; elle livre :

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot \beta_0^3}{2} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{E}, \mathbf{E}) & \quad (178) \\ \equiv \\ \frac{1}{\eta_0^2} \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{E} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{E} \wedge \mathbf{v}) \end{aligned}$$

dont l'interprétation est tout, sauf évidente. Elle suggère un vague lien avec les conditions initiales des Bowen-York et l'idée qu'il ne sera pas possible de valider cette approche sans passer par la question des décompositions non triviales des produits vectoriels. Question iconoclaste : "Les particules élémentaires sont-elles des trous noirs en mouvement?"

3.2 Première forme invariante et tenseur impulsion-énergie du champ EM.

La littérature classique introduit comme première forme invariante l'écriture suivante [[05]; p. 17] :

$$\Psi = \frac{1}{2} \cdot F_{\alpha\beta} \cdot F^{\alpha\beta} = \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$$

Au risque de faire bondir mes maîtres par cette remarque outreucidente, je trouve que cette définition prête à confusion; en effet : "Comment la multiplication des composantes tensorielles doit-elle se comprendre? S'agit-il du produit des matrices F et F* dont la trace est ensuite calculée? Rien ne vaut mieux qu'une vérification; soit le produit matriciel classique :

$$\begin{aligned} & [F_{\alpha\beta}] \cdot [F^{\alpha\beta}] \\ = \\ & \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix} \\ = \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^2 & ({}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{H}))_x & ({}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{H}))_y & ({}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{H}))_z \\ -({}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{H}))_x & E_x^2 + H_x^2 - \mathbf{H}^2 & E_x \cdot E_y + H_x \cdot H_y & E_x \cdot E_z + H_x \cdot H_z \\ -({}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{H}))_y & E_x \cdot E_y + H_x \cdot H_y & E_y^2 + H_y^2 - \mathbf{H}^2 & E_y \cdot E_z + H_y \cdot H_z \\ -({}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{H}))_z & E_x \cdot E_z + H_x \cdot H_z & E_y \cdot E_z + H_y \cdot H_z & E_z^2 + H_z^2 - \mathbf{H}^2 \end{bmatrix}$$

Il est alors effectivement possible de constater que :

$$\begin{aligned} & \text{Trace}\left\{\frac{1}{2} \cdot [F_{\alpha\beta}] \cdot [F^{\alpha\beta}]\right\} \quad (179) \\ & = \\ & \frac{1}{2} \cdot \{\mathbf{E}^2 + E_x^2 + H_x^2 + E_y^2 + H_y^2 + E_z^2 + H_z^2 - 3 \cdot \mathbf{H}^2\} \\ & = \\ & \mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2 \end{aligned}$$

Dans l'analyse périenne des matrices, le produit matriciel peut s'écrire :

$$[F_{\alpha\beta}] \cdot [F^{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^2 & \langle ({}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{H})) \rangle \\ -|({}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{H})) \rangle & T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{E}, ({}^{(3)}\mathbf{E})) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{H}, ({}^{(3)}\mathbf{H})) - \mathbf{H}^2 \cdot Id_3 \end{bmatrix}$$

Dans [[10]; p. 95], le produit matriciel apparait sous une forme semblable à celle qui est donnée dans [Lichnerowicz] :

$$\Lambda = -\frac{1}{16 \cdot \pi} \cdot F_{\alpha\beta} \cdot F^{\alpha\beta}$$

En tenant compte des définitions habituelles :

— du vecteur de Poynting [[10]; p. 90, (31,2)] :

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4 \cdot \pi} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{E} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{H}))$$

— de l'énergie par unité de volume du champ EM [10; p. 90, (31, 5)] :

$$\frac{\partial W_{EM}}{\partial \tau} = \frac{1}{8 \cdot \pi} \cdot ({}^{(3)}\mathbf{E}^2 + ({}^{(3)}\mathbf{H}^2))$$

— du tenseur de tension de Maxwell [10; 97, (33,3)] :

$$({}^{(3)}[\sigma]) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \{T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{E}, ({}^{(3)}\mathbf{E})) + T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{H}, ({}^{(3)}\mathbf{H}))\} - \frac{\partial W_{EM}}{\partial \tau} \cdot Id_3$$

le produit matriciel qui vient d'être calculé ci-avant s'écrit aussi :

$$4 \cdot \Lambda = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \mathbf{E}^2 & -\frac{1}{c} \cdot \langle ({}^{(3)}\mathbf{S}) \rangle \\ \frac{1}{c} \cdot |({}^{(3)}\mathbf{S}) \rangle & -({}^{(3)}[\sigma]) - \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \mathbf{E}^2 \end{bmatrix} \quad (180)$$

Il n'est pas inutile de remarquer la proximité de ce formalisme avec celui de la matrice donnée avec [[10]; p. 95, (32,15)] et devant fournir une première idée de la version deux fois contravariante du tenseur impulsion-énergie :

$$T(\uparrow, \uparrow) = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_{EM}}{\partial \tau} & \frac{1}{c} \cdot \langle ({}^{(3)}\mathbf{S}) \rangle \\ \frac{1}{c} \cdot |({}^{(3)}\mathbf{S}) \rangle & -({}^{(3)}[\sigma]) \end{bmatrix}$$

Les deux matrices se ressemblent fort sans être égales :

$$4 \cdot \Lambda \neq T(\uparrow, \uparrow)$$

Le lien exact est d'ailleurs donné formellement par [[05] ; p. 17, (9-1)], et avec des explications exhaustives dans [[10] ; p. 96, (33,1)] :

$$T(\uparrow, \uparrow) = \frac{1}{4.\pi} . \left\{ \frac{1}{4} . G^{-1} . \Psi - [F^{\alpha\rho}] . [F^{\beta}{}_{\rho}] \right\} ; G^{-1} = G(\uparrow, \uparrow) ; \Psi = -8.\pi.\Lambda$$

En partant de [[05] ; p. 17, (9-1)], il vient :

$$T(\downarrow, \downarrow) = \frac{\Psi}{2} . G(\downarrow, \downarrow) - [F_{\alpha\rho}] . [F^{\beta}{}_{\rho}] ; \Psi = -8.\pi.\Lambda$$

Or les règles habituelles du calcul tensoriel fournissent très précisément, voir par exemple [[03] ; p. 77, (14.28)] :

$$[F^{\beta}{}_{\rho}] = [g_{\beta\gamma}] . [F^{\gamma\rho}] = G . (F^*)^t$$

Sauf erreur de ma part, le lien peut donc s'écrire dans le langage matriciel de la façon surprenante suivante :

$$T(\downarrow, \downarrow) = -4.\pi . \Lambda . G - F . F^* . G^t = F . F^* . \left\{ \frac{1}{4} . G - G^t \right\}$$

En particulier dans le vide, là où il est admis que la géométrie soit celle de Minkowski ($G = \eta$), il vient :

$$T(\downarrow, \downarrow) = -4.\pi . \Lambda . \eta - F . F^* . \eta$$

ou encore, puisque $\eta^2 = \text{Id}_4$:

$$T(\downarrow, \downarrow) . \eta = -4.\pi . \Lambda - F . F^* = -\frac{3}{4} . F . F^*$$

3.3 La seconde forme invariante

Définition 3.1. La seconde forme invariante

La forme adjointe du champ EM intervient directement dans l'expression de la seconde forme invariante d'un champ EM [[05] ; p. 17, pas de numéro et avec un facteur différent de celui apparaissant dans 02], [[02] ; p. 110, (4.22)]. Cette expression peut aussi se retrouver dans des cours plus récents [[11] ; p. 87, (5.51) et (5.52)] :

$$\Phi = F_{\alpha\beta} . {}^*F^{\alpha\beta} = -\frac{8}{c} . (\mathbf{E} . \mathbf{H})$$

Une confrontation visuelle avec l'Equ.(4) obtenue au début de ce document montre que cette forme invariante est reliée à la racine carrée du déterminant de la représentation matricielle de la forme deux fois covariante du champ :

$$\frac{c^2}{64} . \Phi^2 = |F|$$

Cette formule n'est en réalité exacte que pour les espaces de dimension quatre tels que le déterminant de la matrice représentant leur tenseur métrique vaut $g = 1$; voir par exemple [[05] ; p. 17].

Remarque 3.4. La question technique à laquelle il faut répondre

Techniquement, ce document d'étude se focalise sur la question de savoir s'il existe des représentations matricielles d'un tenseur complètement anti-symétrique de rang quatre. Formellement, les investigations menées jusqu'ici semblent pouvoir permettre de répondre positivement au questionnement posé. Mais les matrices trouvées (les $[\chi]$) remplissent-elles toutes les fonctions, ont-elles toutes les propriétés, attendues d'elles pour permettre de prétendre qu'elles jouent bien un rôle équivalent à ce tenseur? S'il existe des représentations matricielles de l'adjonction tensorielle, et si la logique utilisée pour le calcul de la première forme invariante d'un champ EM s'applique encore ici, alors la seconde forme invariante devrait aussi pouvoir résulter du calcul suivant :

$$Trace\left\{\frac{1}{2} \cdot [F_{\alpha\epsilon}] \cdot [{}^*F^{\epsilon\beta}]\right\} = Trace\left\{\frac{1}{2} \cdot [F_{\alpha\epsilon}] \cdot [\chi_{\epsilon\gamma}] \cdot [F_{\gamma\beta}]\right\}$$

Qu'en est-il réellement ?

Exemple 3.1. Le cas d'un système (A) dégénéré

Les représentations matricielles de l'adjonction tensorielle ont ici un formalisme très précis qui s'écrit synthétiquement de la façon suivante :

$${}^{(4)}[\chi] = \begin{bmatrix} \pm d & k \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{e} | \\ |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle & K \end{bmatrix}; \forall k \in C^*$$

Pour les détails techniques : voir la Rem.2.18, le cas $s \neq$; ici :

$$K_{\pm} = \pm i \cdot Id_3 + k \cdot \beta_0 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{e}); k = -\frac{d \pm i}{\beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2}$$

Sur la base de la définition 3.1, je crois que ce formalisme permet de calculer la forme adjointe de F de la façon suivante :

$${}^*F = [\chi] \cdot F = \begin{bmatrix} \pm d & k \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{e} | \\ |{}^{(3)}\mathbf{e} \rangle & K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \\ -|{}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{bmatrix} \quad (181)$$

Grâce à l'Equ.(7), il s'agirait de :

$${}^*F = \begin{bmatrix} -k \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{E} & \pm d \cdot \langle \mathbf{E} | + k \cdot \langle \mathbf{e} | [J]\Phi(\mathbf{H}) \\ -K \cdot |\mathbf{E} \rangle & K \cdot [J]\Phi(\mathbf{H}) + T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{E}) \end{bmatrix}; \forall k \in C^* \quad (182)$$

Sans tenir compte de ce que livrerait le calcul tensoriel habituel, je peux maintenant calculer la seconde forme invariante avec la même logique :

$$[\Phi] = F \cdot {}^*F = \begin{bmatrix} 0 & \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \\ -|{}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & [J]\Phi(\mathbf{H}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}) & \pm d \cdot \langle \mathbf{E} | + k \cdot \langle \mathbf{e} | [J]\Phi(\mathbf{H}) \\ -K \cdot |\mathbf{E} \rangle & K \cdot [J]\Phi(\mathbf{H}) + T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{E}) \end{bmatrix} \quad (183)$$

L'Equ.(7) permet de poursuivre avec :

$$\begin{aligned} & [\Phi] \quad (184) \\ & = \\ & \left[\begin{array}{cc} -\mathbf{E} \cdot \{K \cdot |\mathbf{E} \rangle\} & \langle \mathbf{E} | \cdot \{K \cdot [J]\Phi(\mathbf{H}) + T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{E})\} \\ k \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{E}) \cdot |\mathbf{E} \rangle - [J]\Phi(\mathbf{H}) \cdot \{K \cdot |\mathbf{E} \rangle\} & [L] \end{array} \right] \end{aligned}$$

Avec comme équation explicative :

$$[L] = [J]\Phi(\mathbf{H}) \cdot \{K \cdot [J]\Phi(\mathbf{H}) + T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{E})\} - T_2(\otimes)(\mathbf{E}, d \cdot \langle \mathbf{E} | + k \cdot \langle \mathbf{e} | [J]\Phi(\mathbf{H})) \quad (185)$$

Plus précisément, puisque les identités remarquables suivantes existent :

$$\{d. \langle \mathbf{E} | + k. \langle \mathbf{e} |_{[J]} \Phi(\mathbf{H})\}^t = d. |\mathbf{E} \rangle + k. {}_{[J]} \Phi^t(\mathbf{H}). |\mathbf{e} \rangle = d. \mathbf{E} - k. \mathbf{H} \wedge \mathbf{e} \quad (186)$$

$$K. {}_{[J]} \Phi(\mathbf{H}) = \{\alpha_0. Id_3 + \beta_0. T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{e})\}. {}_{[J]} \Phi(\mathbf{H}) = \alpha_0. {}_{[J]} \Phi(\mathbf{H}) + \beta_0. T_2(\otimes)(\mathbf{e} \wedge \mathbf{H}, \mathbf{e}) \quad (187)$$

$${}_{[J]} \Phi(\mathbf{H}). T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{E}) = T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{H} \wedge \mathbf{E}) \quad (188)$$

$${}_{[J]} \Phi^2(\mathbf{H}) = T_2(\otimes)(\mathbf{H}, \mathbf{H}) - |\mathbf{H}|^2. Id_3 \quad (189)$$

$$K. |\mathbf{E} \rangle = \{\alpha_0. Id_3 + \beta_0. T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{e})\}. |\mathbf{E} \rangle = \alpha_0. \mathbf{E} + \beta_0. (\mathbf{e}. \mathbf{E}). \mathbf{e} \quad (190)$$

$$- \mathbf{E}. \{K. |\mathbf{E} \rangle\} = -\alpha_0. |\mathbf{E}|^2 - \beta_0. (\mathbf{e}. \mathbf{E})^2 \quad (191)$$

$$- {}_{[J]} \Phi(\mathbf{H}). \{K. |\mathbf{E} \rangle\} = - {}_{[J]} \Phi(\mathbf{H}). \{\alpha_0. \mathbf{E} + \beta_0. (\mathbf{e}. \mathbf{E}). \mathbf{e}\} = -\alpha_0. \mathbf{H} \wedge \mathbf{E} - \beta_0. (\mathbf{e}. \mathbf{E}). \mathbf{H} \wedge \mathbf{e} \quad (192)$$

$${}_{[J]} \Phi(\mathbf{H}). \{K. {}_{[J]} \Phi(\mathbf{H}) + T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{E})\} \quad (193)$$

=

$$\alpha_0. T_2(\otimes)(\mathbf{H}, \mathbf{H}) - \alpha_0. |\mathbf{H}|^2. Id_3 + \beta_0. T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{H} \wedge (\mathbf{H} \wedge \mathbf{E}))$$

=

$$\alpha_0. T_2(\otimes)(\mathbf{H}, \mathbf{H}) - \alpha_0. |\mathbf{H}|^2. Id_3 + \beta. T_2(\otimes)(\mathbf{e}, (\mathbf{H}. \mathbf{E}). \mathbf{H} - |\mathbf{H}|^2. \mathbf{E})$$

=

$$\alpha_0. T_2(\otimes)(\mathbf{H}, \mathbf{H}) - \alpha_0. |\mathbf{H}|^2. Id_3 + \beta_0. (\mathbf{H}. \mathbf{E}). T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{H}) - \beta_0. |\mathbf{H}|^2. T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{E})$$

Il vient finalement :

$$[\Phi] \quad (194)$$

=

$$\left[\begin{array}{l} -\alpha_0. |\mathbf{E}|^2 - \beta_0. (\mathbf{e}. \mathbf{E})^2 \\ \alpha_0. \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} + (\mathbf{e}. \mathbf{E}). (k. \mathbf{E} - \beta_0. \mathbf{H} \wedge \mathbf{e}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \langle \mathbf{E} |. \{K. {}_{[J]} \Phi(\mathbf{H}) + T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{E})\} \\ [L] \end{array} \right]$$

Avec pour complément :

$$[L] \quad (195)$$

=

$$\alpha_0. T_2(\otimes)(\mathbf{H}, \mathbf{H}) - \alpha_0. |\mathbf{H}|^2. Id_3 + \beta. (\mathbf{H}. \mathbf{E}). T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{H})$$

$$- \beta_0. |\mathbf{H}|^2. T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{E}) - d. T_2(\otimes)(\mathbf{E}, \mathbf{E}) - k. T_2(\otimes)(\mathbf{E}, \mathbf{H} \wedge \mathbf{e})$$

Il ne reste plus *en principe* qu'à calculer la trace de la matrice $[\Phi]$:

$$Trace[\Phi] \quad (196)$$

=

$$-\alpha_0. |\mathbf{E}|^2 - \beta_0. (\mathbf{e}. \mathbf{E})^2 + Trace[L]$$

=

$$-(\alpha_0 + d). |\mathbf{E}|^2 - \beta_0. (\mathbf{e}. \mathbf{E})^2 - 2. \alpha_0. |\mathbf{H}|^2 + \beta_0. (\mathbf{H}. \mathbf{E}). (\mathbf{e}. \mathbf{H}) - \beta_0. |\mathbf{H}|^2. (\mathbf{e}. \mathbf{E}) - k. \mathbf{E}. (\mathbf{H} \wedge \mathbf{e})$$

Conclusion : 1) A première vue, il est difficile d'y reconnaître Φ ou son carré ; 2) A ce stade, il n'a pas été tenu compte des contraintes introduites par le respect du troisième critère - voir les Equ.(146), (147) et (148). S'il était tenu compte à cet endroit de l'Equ.(146), cette expression se réduirait d'emblée et systématiquement à :

$$Trace[\Phi] \quad (197)$$

=

$$-(\alpha_0 + d). |\mathbf{E}|^2 - 2. \alpha_0. |\mathbf{H}|^2 + \beta_0. (\mathbf{H}. \mathbf{E}). (\mathbf{e}. \mathbf{H}) - k. \mathbf{E}. (\mathbf{H} \wedge \mathbf{e})$$

Remarque 3.5. *Une aile Ouest comme champ magnétique*

En posant intuitivement et naïvement :

$$\mathbf{e} = \mathbf{H} \quad (198)$$

Cette expression se simplifie en :

$$\begin{aligned} & Trace[\Phi] \quad (199) \\ & = \\ & -(\alpha_0 + d) \cdot |\mathbf{E}|^2 - \beta_0 \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E})^2 - 2 \cdot \alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 + \beta_0 \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) - \beta \cdot |\mathbf{H}|^2 \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}) - k \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{H} \wedge \mathbf{H}) \\ & = \\ & -(\alpha_0 + d) \cdot |\mathbf{E}|^2 - \beta_0 \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E})^2 - 2 \cdot \alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 \end{aligned}$$

Mais en posant $\mathbf{e} = \mathbf{H}$ et en tenant maintenant compte de l'Equ.(146), j'ai sans m'en rendre immédiatement compte considéré le cas d'un champ EM dont les deux composantes vectorielles sont orthogonales :

$$\mathbf{e} = \mathbf{H} \xrightarrow{(146)} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}) = \Phi = 0 \quad (200)$$

L'expression se réduit alors à :

$$Trace[\Phi] = -(\alpha_0 + d) \cdot |\mathbf{E}|^2 - 2 \cdot \alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 \quad (201)$$

Dans le cadre de cette approche et de l'hypothèse consistant à poser $\mathbf{e} = \mathbf{H}$, si la trace de la matrice Φ représente bien la seconde forme invariante de l'électromagnétisme, alors elle doit être nulle et les calculs précédents aboutissent bien au fait connu que, dans ce cas physique là, le carré des normes des composantes vectorielles du champ doivent être proportionnelles entre elles. Ici, l'adéquation entre la théorie mathématique et les connaissances physiques aboutit à :

$$Trace[\Phi] = -(\alpha_0 + d) \cdot |\mathbf{E}|^2 - 2 \cdot \alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 = 0 \quad (202)$$

Lemme 3.1. *Adjonction tensorielle et champ magnétique*

L'utilisation d'une représentation matricielle admissible de l'*adjonction tensorielle* dans laquelle (i) le système (A) des ailes est dégénéré et (ii) l'aile est proportionnelle au champ magnétique pour le calcul de la seconde forme invariante de l'électromagnétisme livre des prédictions cohérentes avec la théorie classique de l'électromagnétisme pour les ondes planes progressives [[15]; pp. 205-207] à condition de pouvoir poser que :

$$|\mathbf{H}|^2 = \frac{1}{c^2} \cdot |\mathbf{E}|^2$$

Ce qui se traduit ici par :

$$-\frac{\alpha_0 + d}{2 \cdot \alpha_0} = \frac{1}{c^2} \quad (203)$$

Or, dans ce document, les système (A) dégénérés de la classification établie au niveau de la Rem.2.18 livrent des valeurs non systématiquement nulles pour $(d \pm i)$ à partir du moment où la quantité $s = (\mathbf{e} \cdot \mathbf{d})$ qui vaut ici $k \cdot |\mathbf{H}|^2$ n'est pas nulle. Ces valeurs sont répertoriées dans l'Equ.(111).

A titre d'illustration, le cas (c-1) va livrer en particulier :

$$-\frac{i + d}{2 \cdot i} = = -\frac{\sqrt{k} \cdot |\mathbf{H}|}{2i} = \frac{1}{c^2}$$

Mais comme ici :

$$k = -\frac{d + i}{\beta_0 \cdot |\mathbf{H}|^2} = -\frac{\sqrt{k} \cdot |\mathbf{H}|}{\beta_0 \cdot |\mathbf{H}|^2} \Rightarrow \sqrt{k} = -\frac{1}{\beta_0 \cdot |\mathbf{H}|}$$

Par conséquent, le cas (c-1) décrit un domaine physique pour lequel les indices sont complexes [[15], exposé complémentaire, p. 572] puisque :

$$2.i.\beta_0 = c^2$$

Remarque 3.6. *Une aile Ouest comme champ électrique.*

Je remarque qu'en posant intuitivement :

$$\mathbf{e} = \mathbf{E} \tag{204}$$

ce qui, dans ce document, coïncide peu ou prou à l'exemple $\mathbf{d} = \mathbf{v}$, l'étude aborde des zones physiques dans lesquelles les champs électriques sont des spineurs de Cartan ; voir la Rem.2.24 pour les premières explications. Ainsi, il faudra prendre soin, à cause de l'Equ.(146) de se souvenir du fait que :

$$\mathbf{e} = \mathbf{E} \xrightarrow{(146)} |\mathbf{E}|^2 = 0 \tag{205}$$

Comme dans cet exemple, les ailes sont colinéaires, il en découle forcément que :

$$|\mathbf{d}|^2 = 0 \tag{206}$$

L'expression de la trace de la matrice $[\Phi]$ se simplifie en :

$$\begin{aligned} & Trace[\Phi] \tag{207} \\ & = \\ & -(\alpha_0 + d) \cdot |\mathbf{E}|^2 - \beta_0 \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})^2 - 2.\alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 + \beta_0 \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) - \beta_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - k \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{H} \wedge \mathbf{E}) \\ & = \\ & -2.\alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 + \beta_0 \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E})^2 - k \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{H} \wedge \mathbf{E}) \end{aligned}$$

Finalement, puisque le vecteur de Poynting est orthogonal au champ électrique, le dernier terme disparaît et il reste que :

$$Trace[\Phi] = -2.\alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 + \beta_0 \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E})^2 \tag{208}$$

Lemme 3.2. *Adjonction tensorielle et champ électrique*

L'utilisation d'une représentation matricielle de l'adjonction tensorielle, dans laquelle l'aile est proportionnelle au champ électrique pour le calcul de la seconde forme invariante de l'électromagnétisme est cohérente avec la théorie de l'électromagnétisme à partir du moment où (i) cette utilisation se limite aux zones géographiques de l'espace dans lesquelles ces champs électriques sont isotropiques (équiv. : des spineurs de Cartan) et (ii) la relation ci-dessous est vérifiée :

$$Trace[\Phi] = -2.\alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 + \beta_0 \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E})^2 = -\frac{8}{c} \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) \tag{209}$$

Cette relation de cohérence donne des valeurs précises ; en calculant le discriminant :

$$\Delta(\Phi) = \frac{64}{c^2} + 8.\alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot |\mathbf{H}|^2$$

Il vient :

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) = \frac{1}{2.\beta_0} \cdot \left\{ -\frac{8}{c} \pm \sqrt{\frac{64}{c^2} + 8.\alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot |\mathbf{H}|^2} \right\}$$

Remarque 3.7. *Aile Ouest et vecteur de Poynting*

Comme je l'ai indiqué tout au long de ce document, il n'est pas du tout évident de donner un sens physique au vecteur \mathbf{e} . Les deux précédentes interprétations ont cependant livré de précieuses informations sur la manière de pratiquer une analyse réaliste du résultat concernant cette trace.

1. Il convient d'abord de proposer une interprétation. Jusqu'à présent, celle-ci a été faite sur la base de l'intuition. Toutefois, il se peut qu'il n'y ait pas une seule et unique interprétation physique possible pour ce vecteur. C'est ce qu'indique déjà l'Equ.(154).

Par contre, au sein de cette théorie relatant les représentations matricielles de l'*adjonction tensorielle* aux représentations paramétriques des rotations dans un espace de dimension trois, le choix d'un vecteur \mathbf{d} implique celui d'un vecteur singulier, Equ.(170).

Sachant qu'un vecteur singulier est un vecteur signant une minimisation des pentes d'une polynomiale (la notion du moindre effort ou des variations adiabatiques), le contexte physique étudié guidera le choix.

Dans cet état d'esprit et pour la pédagogie, j'expose ma troisième illustration ; elle fait appel au vecteur de Poynting d'un champ EM :

$$\mathbf{e} = \mathbf{S} = \frac{c}{4.\pi} \cdot {}^{(3)}\mathbf{E} \wedge {}^{(3)}\mathbf{H} \quad (210)$$

Je note que dans cette étude, ce choix revient à avoir posé $\mathbf{d} = \mathbf{E}$. Cet exemple a déjà été abordé à deux reprises dans le document.

2. Il faut ensuite injecter la proposition faite dans l'expression générale de la trace.

$$\begin{aligned} & Trace[\Phi] \quad (211) \\ & = \\ & -(\alpha_0 + d) \cdot |\mathbf{E}|^2 - \beta_0 \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{E})^2 - 2.\alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 + \beta_0 \cdot (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}) \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}) - \beta_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}) - k \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{H} \wedge \mathbf{S}) \end{aligned}$$

3. Ici, il faut remarquer que -par définition- le vecteur de Poynting est orthogonal au champ magnétique et au champ électrique ; il en résulte en particulier que l'Equ.(146) est validée d'emblée :

$$(\mathbf{S} \cdot \mathbf{E}) = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}) = 0 \quad (212)$$

Il en résulte aussi une simplification drastique de la trace :

$$\begin{aligned} & Trace[\Phi] \quad (213) \\ & = \\ & -(\alpha_0 + d) \cdot |\mathbf{E}|^2 - 2.\alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 - \frac{k.c}{4.\pi} \cdot \mathbf{E} \cdot (\mathbf{H} \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})) \end{aligned}$$

4. Il faut regrouper les termes équivalents en privilégiant de faire apparaître le carré de la norme euclidienne du champ électrique, celle du champ magnétique et le carré de la seconde forme invariante du champ EM. Compte tenu des règles s'appliquant au produit vectoriel classique, il vient :

$$-(\alpha_0 + d) \cdot |\mathbf{E}|^2 - 2.\alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 - \frac{k.c}{4.\pi} \cdot \mathbf{E} \cdot (|\mathbf{H}|^2 \cdot \mathbf{E} - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{H})$$

Puis :

$$-(\alpha_0 + d) \cdot |\mathbf{E}|^2 - 2.\alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 - \frac{k.c}{4.\pi} \cdot \{|\mathbf{E}|^2 \cdot |\mathbf{H}|^2 - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H})^2\}$$

Soit encore plus simplement :

$$-(\alpha_0 + d) \cdot |\mathbf{E}|^2 - 2.\alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 - \frac{k.c}{4.\pi} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})^2 \quad (214)$$

5. Il convient d'égaliser ce résultat avec le résultat classique :

$$Trace[\Phi] = -(\alpha_0 + d) \cdot |\mathbf{E}|^2 - 2 \cdot \alpha_0 \cdot |\mathbf{H}|^2 - \frac{k \cdot c}{4 \cdot \pi} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})^2 = -\frac{8}{c} \cdot (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) \quad (215)$$

6. Il est judicieux enfin de reconsidérer les résultats généraux de la Rem.2.22 et de bien se souvenir que ces résultats sont sensés s'appliquer dans un contexte physique pour lequel les ailes forment un système dégénéré (in extenso : elles sont colinéaires). C'est le choix délibéré et pédagogique fait au début de cette partie consacrée à l'étude de la seconde forme invariante de l'électromagnétisme.

Lemme 3.3. Adjonction tensorielle et vecteur de Poynting

L'utilisation d'une représentation matricielle de l'adjonction tensorielle, dans laquelle les ailes sont proportionnelles au vecteur de Poynting pour le calcul de la seconde forme invariante de l'électromagnétisme redonne des résultats classiques lorsque l'Equ. (215) ci-dessus est vérifiée.

3.4 Quel est le rôle de la polynomiale Lambda ?

Remarque 3.8. Notions de "mère", de "filles" et de "surface d'onde associée"

Comme indiqué dans la sous-section 3.1, Rem.3.2, le formalisme des matrices $[\chi]$ représentant l'adjonction tensorielle porte avec lui la présence sous-jacente d'une polynomiale, Λ , dont il est fondé de se demander (i) quelle est la signification physique exacte et (ii) quel rôle elle joue réellement ?

Les *mères* jouent un rôle crucial dans cette approche et les seules solutions intellectuellement intéressantes pour le problème posé (la représentation matricielle de l'adjonction tensorielle) semblent bien être les solutions non triviales de la Rem.?? :

$$\left[\begin{array}{cc} \pm |^{(3)}\chi| & k \cdot \langle^{(3)}\mathbf{e}| \\ |^{(3)}\mathbf{e}\rangle & ^{(3)}[\chi] \end{array} \right] \forall k \in C^*$$

Puisqu'il existe un lien entre ces matrices et une polynomiale de degré au plus égal à deux définie dans un espace de dimension trois, l'intuition pousse à croire que cette polynomiale pourrait représenter *une surface d'onde* évoluant dans cet espace.

Comme les ondes peuvent se combiner et se décomposer (je pense aux séries et à l'analyse de Fourier), il devient alors raisonnable de se poser la question de savoir s'il est possible de générer des *filles* à l'aide de la mère. La Rem.2.12 sert ici un peu de guide à la démarche.

Pour tenter de répondre à cette interrogation, je commence ici une première investigation à l'aide d'une mère qui jouera un peu le rôle de l'onde plane monochromatique :

$$^{(3)}[{}_0\chi] = \alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{e})$$

Elle est ostensiblement caractérisée par (i) son formalisme, (ii) une paire de nombres complexes (α_0, β_0) et (iii) un élément \mathbf{e} de $E(3, C)$. J'en calcule ensuite les puissances successives à l'aide du produit habituel de deux matrices et de l'Equ.(79) pour le cas $\mathbf{d} = \mathbf{e}$ et en commençant avec $j = 2$:

$$^{(3)}[{}_0\chi]^2 = \alpha_0^2 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot (2 \cdot \alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2) \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{e})$$

Le formalisme du carré de la mère est visiblement le même que celui de la mère. Ce carré ayant été “généré” à partir de la mère, il en est une fille. Je vais donc définir l'ensemble $F(\mathbf{e})$ des éléments de $M(3, C)$ ayant ce formalisme générique.

$$\mathbf{e} \in E(3, C) \xrightarrow{F} F(\mathbf{e}) = \{(\alpha, \beta) \in C^2, [\chi] = \alpha \cdot Id_3 + \beta \cdot T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \in M(3, C)\}$$

Il est aisé de voir que :

$${}^{(3)}[0\chi], {}^{(3)}[0\chi]^2 \in F(\mathbf{e})$$

En effet l'identification formelle :

$${}^{(3)}[1\chi] = \alpha_1 \cdot Id_3 + \beta_1 \cdot T = \alpha_0^2 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot (2\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2) \cdot T = {}^{(3)}[0\chi]^2$$

fournit sans calcul :

$$\alpha_1 = \alpha_0^2; \beta_1 = 2\alpha_0 \cdot \beta_0 + \beta_0^2 \cdot |\mathbf{e}|^2$$

Comme le nombre des acteurs impliqués dans ces calculs est limité et que la confusion n'est pas possible, je noterai désormais la table de Pythagore $T_2(\otimes)(\mathbf{e}, \mathbf{e})$ avec la simple lettre majuscule T. Soit maintenant le calcul de la puissance trois :

$$[0\chi]^3 = [0\chi] \cdot [0\chi]^2 = \{\alpha_0 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot T\} \cdot \{\alpha_0^2 \cdot Id_3 + \beta_0 \cdot (2\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2) \cdot T\}$$

Comme la multiplication est associative sur $M(3, C)$, l'ordre dans lequel je place la puissance un et la puissance deux de la mère n'a pas d'importance; il vient :

$$[0\chi]^3 = \alpha_0^3 \cdot Id_3 + \{\alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot (2\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2) + \beta_0 \cdot \alpha_0^2 + \beta_0^2 \cdot (2\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2) \cdot |\mathbf{e}|^2\} \cdot T$$

Visiblement la puissance trois de la mère est une fille de cette mère :

$${}^{(3)}[0\chi]^3 \in F(\mathbf{e})$$

Parce que :

$$\exists \alpha_2 = \alpha_0^3; \exists \beta_2 = 3\alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot (\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2) + \beta_0^3 \cdot |\mathbf{e}|^4$$

tels que :

$$(\alpha_2, \beta_2) \in C^2 : [2\chi] = [0\chi]^3 = \alpha_2 \cdot Id_3 + \beta_2 \cdot T \in M(3, C)$$

La montée en puissance peut être poursuivie. Plus la puissance sera élevée, plus les calculs seront longs. Il est coutume de chercher une récurrence.

Proposition 3.1. *Existence d'une suite récurrente - Avec un peu de perspicacité et de travail, il est possible de montrer que pour toute puissance entière non nulle p , il existe toujours une paire de nombres complexes (i) bâtie à l'aide de la paire initiale (α_0, β_0) et (ii) telle que :*

$$\begin{aligned} \forall p \in N^*, \exists (\alpha_{p-1}, \beta_{p-1}) \in C^2 : \\ [p-1\chi] = [0\chi]^p = \alpha_{p-1} \cdot Id_3 + \beta_{p-1} \cdot T \in \Omega(\mathbf{e}), \forall \mathbf{e} \text{ fixe} \\ \alpha_{p-1} = \alpha_0^p \\ \beta_{p-1} = \sum_{i=1}^p C_p^i \cdot \alpha_0^{p-i} \cdot \beta_0^i \cdot |\mathbf{e}|^{2 \cdot (i-1)} \end{aligned}$$

Preuve : La formule proposée fait appel aux coefficients de Pascal, les C_p^i [[13], § 3.4, pp. 85-92], et s'inspire de la formule du binôme de Newton. *Il est dans un premier temps* facile de retrouver les résultats simples acquis par le calcul manuel direct :

— Pour $p = 1$:

$$\beta_{1-1} = \sum_{i=1}^1 C_1^i \cdot \alpha_0^{1-i} \cdot \beta_0^i \cdot |\mathbf{e}|^{2 \cdot (i-1)} = C_1^1 \cdot \alpha_0^{1-1} \cdot \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^{2 \cdot (1-1)} = \beta_0$$

— Pour $p = 2$:

$$\begin{aligned} & \beta_{2-1} \\ & = \\ & \sum_{i=1}^2 C_2^i \cdot \alpha_0^{2-i} \cdot \beta_0^i \cdot |\mathbf{e}|^{2 \cdot (i-1)} \\ & = C_2^1 \cdot \alpha_0^{2-1} \cdot \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^{2 \cdot (1-1)} + C_2^2 \cdot \alpha_0^{2-2} \cdot \beta_0^2 \cdot |\mathbf{e}|^{2 \cdot (2-1)} \\ & = \\ & = 2 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 + \beta_0^2 \cdot |\mathbf{e}|^2 \\ & = \\ & \beta_1 \end{aligned}$$

— etc...

Dans un deuxième temps, j'étudie le lien de la formule proposée avec la même formule exprimée à la puissance $p + 1$. Avant de poursuivre, je remarque tout de même que la proposition peut encore s'écrire :

$$\beta_{p-1} = \frac{1}{|\mathbf{e}|^2} \cdot \{(\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2)^p - \alpha_0^p\}; |\mathbf{e}|^2 \neq 0$$

Pour illustration :

$$\begin{aligned} \beta_{1-1} &= \frac{1}{|\mathbf{e}|^2} \cdot \{(\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2) - \alpha_0\} = \beta_0 \\ \beta_{2-1} &= \frac{1}{|\mathbf{e}|^2} \cdot \{(\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2)^2 - \alpha_0^2\} = \frac{1}{|\mathbf{e}|^2} \cdot \{2 \cdot \alpha_0 \cdot \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2 + \beta_0^2 \cdot |\mathbf{e}|^4\} = \beta_1 \\ \beta_{3-1} &= \frac{1}{|\mathbf{e}|^2} \cdot \{(\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2)^3 - \alpha_0^3\} = etc... \end{aligned}$$

Ainsi, il s'agit de relier le coefficient de la puissance p avec celui de la puissance $p + 1$, à savoir :

$$\beta_p = \frac{1}{|\mathbf{e}|^2} \cdot \{(\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2)^{p+1} - \alpha_0^{p+1}\}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} & \beta_p \\ & = \\ & \frac{1}{|\mathbf{e}|^2} \cdot \{(\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2) \cdot (\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2)^p - \alpha_0 \cdot \alpha_0^p\} \\ & = \\ & \alpha_0 \cdot \beta_{p-1} + \beta_0 \cdot (\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2)^p \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\beta_p = \alpha_0 \cdot \beta_{p-1} + \beta_0 \cdot \{(\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2)^p - \alpha_0^p\} + \beta_0 \cdot \alpha_0^p$$

et donc :

$$\beta_p = (\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2) \cdot \beta_{p-1} + \beta_0 \cdot \alpha_0^p$$

Dans un troisième temps, je suppose que la formule proposée est vraie pour la puissance p et j'analyse ce qu'elle implique :

$$\begin{aligned}
& \beta_p \\
& = \\
& (\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2) \cdot \{(\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2) \cdot \beta_{p-2} + \beta_0 \cdot \alpha_0^{p-1}\} + \beta_0 \cdot \alpha_0^p \\
& = \\
& (\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2)^2 \cdot \beta_{p-2} + (\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2) \cdot \beta_0 \cdot \alpha_0^{p-1} + \beta_0 \cdot \alpha_0^p \\
& = \\
& (\alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2)^2 \cdot \beta_{p-2} + \beta_0^2 \cdot |\mathbf{e}|^2 \cdot \alpha_0^{p-1} + 2 \cdot \beta_0 \cdot \alpha_0^p
\end{aligned}$$

Le calcul peut être poussé d'un cran à chaque fois. Il est plus facile de le réaliser en posant :

$$w = \alpha_0 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2$$

Il vient alors successivement :

$$\begin{aligned}
\beta_p & = w^3 \cdot \beta_{p-3} + w \cdot \beta_0 \cdot \alpha_0^{p-2} + w \cdot \beta_0 \cdot \alpha_0^{p-1} + \beta_0 \cdot \alpha_0^p \\
\beta_p & = w^k \cdot \beta_{p-k} + w \cdot \beta_0 \cdot (\alpha_0^{p-k+1} + \dots + \alpha_0^{p-2} + \alpha_0^{p-1}) + \beta_0 \cdot \alpha_0^p \\
\beta_p & = w^p \cdot \beta_0 + w \cdot \beta_0 \cdot (\alpha_0 + \dots + \alpha_0^{p-2} + \alpha_0^{p-1}) + \beta_0 \cdot \alpha_0^p
\end{aligned}$$

La somme présente dans le deuxième terme à droite du signe de l'égalité est celle d'une série géométrique [[14]; M2, pp. 364-365] définie aussi longtemps que le scalaire α_0 diffère de 1 :

$$1 + \alpha_0 + \dots + \alpha_0^{p-2} + \alpha_0^{p-1} = \frac{1 - \alpha_0^p}{1 - \alpha_0}; \alpha_0 \neq 1$$

De sorte que :

$$\alpha_0 + \dots + \alpha_0^{p-2} + \alpha_0^{p-1} = \frac{1 - \alpha_0^p - (1 - \alpha_0)}{1 - \alpha_0} = \alpha_0 \cdot \frac{1 - \alpha_0^{p-1}}{1 - \alpha_0}$$

Et donc que :

$$\beta_p = \beta_0 \cdot \left\{ w^p + w \cdot \alpha_0 \cdot \frac{1 - \alpha_0^{p-1}}{1 - \alpha_0} + \alpha_0^p \right\}; \alpha_0 \neq 1$$

Cette formulation est beaucoup moins restrictive que celle débutant le deuxième temps puisqu'elle est encore définie au cas où (i) l'aile \mathbf{e} est un spineur de Cartan et (ii) la coefficient α_0 vaut un. Concernant la première partie de cette affirmation :

$$|\mathbf{e}|^2 = 0 \Rightarrow w = \alpha_0 \Rightarrow \beta_p = \beta_0 \cdot \left\{ \alpha_0^2 \cdot \frac{1 - \alpha_0^{p-1}}{1 - \alpha_0} + 2 \cdot \alpha_0^p \right\}; \alpha_0 \neq 1$$

Pour la seconde partie de l'affirmation, en regroupant les termes, il vient aussi :

$$|\mathbf{e}|^2 = 0 \Rightarrow w = \alpha_0 \Rightarrow \beta_p = -\beta_0 \cdot \alpha_0^2 \cdot \left\{ \frac{3 \cdot \alpha_0^{p-1} - 2 \cdot \alpha_0^{p-2} - 1}{1 - \alpha_0} \right\}$$

or il est facile de constater que $\alpha_0 = 1$ est solution du polynôme apparaissant au numérateur; donc c.q.f.d. Par ailleurs, aussi longtemps que l'aile n'est pas un spineur de Cartan, la formulation proposée au démarrage du deuxième temps est définie pour $\alpha_0 = 1$ puisqu'elle vaut alors :

$$\beta_{p-1} = \frac{1}{|\mathbf{e}|^2} \cdot \left\{ (1 + \beta_0 \cdot |\mathbf{e}|^2)^p - 1 \right\}; |\mathbf{e}|^2 \neq 0$$

Lemme 3.4. *Toutes les filles issues d'une mère $[_0\chi]$ sont des éléments de la famille $F(e)$; en clair :*

$$\begin{aligned} \forall p \in N, \exists (\alpha_p, \beta_p) \in C^2 : \\ \alpha_p &= \alpha_0^{p+1} \\ \beta_p &= \beta_0 \cdot \{w^p + w \cdot \alpha_0 \cdot \frac{1 - \alpha_0^{p-1}}{1 - \alpha_0} + \alpha_0^p\}; \alpha_0 \neq 1 \\ w &= \alpha_0 + \beta_0 \cdot |e|^2 \\ [_p\chi] &= [_0\chi]^{p+1} = \alpha_p \cdot Id_3 + \beta_p \cdot T \in \Omega(e), \forall e \text{ fixe} \end{aligned}$$

Remarque 3.9. *Une puissance de la mère peut-elle être une représentation de l'adjonction tensorielle ?*

Au départ de cette exploration, j'ai naïvement cru que le formalisme générique des représentations matricielles de l'adjonction tensorielle dépendait intimement du champ EM dont l'adjoint était recherché.

Les nombreuses informations acquises en cours de route ont montré que l'acteur crucial de ce formalisme n'était pas vraiment le champ EM mais une polynomiale probablement en rapport avec une propriété essentielle de ce champ. La manière de connecter le coeur d'une mère et une polynomiale est bien expliquée au niveau de la sous-section 3.1 et de ses deux Rem.3.1 et 3.2.

Les résultats acquis dans la sous-section 2.4, Rem.2.17 et 2.18 montrent qu'il y a finalement très peu de liberté en ce qui concerne le formalisme d'une matrice représentant une *adjonction tensorielle*.

La question suivante consiste à se demander si une *filles* qui résulte d'une élévation à la puissance p de la mère peut être à son tour le coeur d'une représentation matricielle d'une *adjonction tensorielle* ?

Notions d'état et d'évolution entre états dans cette théorie : Je réserve ma réponse à un document ultérieur mais je remarquerai en revanche que "*Vouloir faire d'une puissance de la mère une représentation matricielle d'une adjonction tensorielle*" pose indirectement le problème de l'évolution au sein de cette théorie. Elle introduit aussi la notion d'état de la représentation matricielle de l'*adjonction tensorielle*. Je veux dire par là que, si cette adjonction ne peut avoir qu'une seule représentation à la fois à un instant donné de l'histoire d'un champ EM, mais qu'elle peut changer de visage au cours de cette histoire (Elle peut être une mère puis une puissance de cette mère ou une combinaison des puissances de cette mère, etc.), alors il se pose la question du devenir ou du passé de l'un des visages en particulier lorsque celui-ci n'est plus une représentation de l'adjonction.

3.5 Conclusion

Dans ce document, après avoir défini la manière dont je conçois ce concept (voir Rem.2.1 et définition 2.1 attenante), je me suis essentiellement demandé si le foncteur *adjonction tensorielle* pouvait se laisser représenter de manière matricielle dans $M(4, C)$. J'ai tenté de répondre à cette question en focalisant mon attention sur l'exemple des représentations deux fois covariantes d'un champ EM générique.

Cette longue exploration technique n'avait au départ d'autre motivation que la curiosité intellectuelle et rien n'en garantissait l'utilité physique.

Pourtant, et fort heureusement, elle reçoit des réponses mathématiques positives :

ces représentations matricielles existent et elles peuvent être classifiées ; voir la sous-section 2.4. De plus, elle ouvre ce travail sur l'univers physique de la propagation des champs EM d'une manière que je crois originale ; voir à partir de la section 3.

L'application des résultats mathématiques généraux aux cas particuliers des champs EM réduit définitivement l'ensemble des réponses possibles à un relativement petit nombre de formalismes bien précis. Une manière alternative de calcul redonne les deux formes invariantes d'un champ EM générique ; voir les sous-sections 3.2 et 3.3. Par une confrontation de ces formalismes avec les représentations paramétriques des rotations puis avec la question des décompositions non-triviales des produits vectoriels, sous-section 3.1, je montre que les représentations matricielles non triviales de l'*adjonction tensorielle* sont des objets contenant de précieuses informations sur les propriétés ondulatoires de chaque champ ; en particulier : l'intensité moyennée du flux d'énergie qu'il transporte. Enfin, *the last but not the least*, la démarche permet de retrouver la loi classique de Lorentz pour les environnements inertiels lorsque l'aile Nord est interprétée comme la vitesse de propagation de ce champ.

En conclusion, je dirai que ce travail sert d'apéritif à de plus profonds développements. Il mériterait de se poursuivre avec : (i) une généralisation mathématique de la représentation matricielle des *adjonctions tensorielles* -et pas seulement dans le cas des tenseurs (2, 0) ; (ii) plus de précision sur le lien esquissé entre "état momentané" d'une adjonction tensorielle, "état de la polynomiale associée" et fonction d'onde ; (iii) une étude de l'évolution entre ces états successifs et (iv) une application de tous ces travaux aux situations découvertes dans [[a]] ; je veux dire aux mimétons.

4 Bibliographie

Références

4.1 Livres, ouvrages et cours

- [01] Maxwell, J. C. : A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field ; Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, 155 : 459 - 512 ; a priori consultable sur le site <http://rstl.royalsocietypublishing.org/> sous votre responsabilité.
- [02] Misner, Thorne and Wheeler : Gravitation ; Copyright ©1973 by W. H. Freeman and Company ; ISBN 0-7167-0344-0 Paperback, 1279 pages.
- [03] Fließbach, T. : Allgemeine Relativitätstheorie, 4. Auflage 2003 ; ISBN 3-8274-1356-7, ©2003, 1998, 1995 Spektrum Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg, Berlin, 343 pages.
- [04] (a) Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7. (b) Einstein, A. and Minkowski, H. : The principle of relativity ; translated in English by Saha, M.N. and Bose, S.N. published by the university of Calcutta, 1920 ; available at the Library of the M.I.T. (c) Cartan, E. : Sur les équations de la gravitation d'Einstein ; extrait du journal de mathématiques, 1922, Fasc. numéro 2, édité par Gauthier-Villars et Cie, libraires du bureau des longitudes de l'école Polytechnique, Paris, 1922.
- [05] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme ; collection d'ouvrage à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. Darrois et A. Lichnerowicz. ©1955 by Masson and Cie, éditeurs, 298 pages.

- [06] Waldmann, s. : Lineare Algebra 1 ; Grundlage für Studierende der Mathematik und Physik, ISBN 978-3-662-49913-9, Springer Spektrum, ©Springer Verlag Berlin Heidelberg 2017, 455 pages.
- [07] Purcell, E. M., Guthmann, C., Lallemand, P. : Electricité et magnétisme, Berkely : cours de physique, volume 2 ; ©Librairie Armand Colin, Paris, 1973, 460 pages.
- [09] Cartan, E. The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966 ; translation of the “Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)” ; Hermann, 1937 ; Dover Publications, Inc. New York. ©1966 by Hermann, Paris, ISBN 0-486-64070-1, 151 pages.
- [10] Landau und Lifschitz : Lehrbuch des theoretischen Physik, Band II : Klassische Feldtheorie, 12., ueberarbeit. Aufl. ©Akademischer Verlag, Berlin, 1992, ISBN 3-05-501550-9, 480 pages.
- [11] Raimond, J.M : : Théorie classique des champs ; Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire Kastler Brossel, Département de physique de l'école Normale Supérieure, 12 septembre 2016, 166 pages.
- [13] Gautier, C., Girard, G ; Lentin, A. : Aleph₀, Algèbre, cours de 1^{ere} CDE, Classiques Hachette, ©1970, Librairie Hachette, 160 pages.
- [14] Reif, F. et Turon, P. : Physique statistique, Berkely : cours de physique, volume 5 ; ©Librairie Armand Colin, Paris, 1972, 397 pages.
- [15] Lena, P. et Crawford, Franck. S. Jr : Ondes, Berkely : cours de physique, volume 3 ; ©Librairie Armand Colin, Paris, 1972, 603 pages.
- [16] Caratini, R. (sous la direction de) : Les nombres et l'espace, 50/51 : Les mathématiques ; Bordas encyclopédie en 23 volumes ; ©Bordas Editeurs, Paris, 1972, 184 pages.

4.2 Travaux personnels préliminaires

- [a] PERIAT, T. : Découverte d'un formalisme pour les champs électromagnétiques ; ISBN 978-2-36923-067-0, EAN-9782369230670, v1, 30 mars 2020.
- [b] PERIAT, T. : Aspects mathématiques de la théorie des produits tensoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-028-1, EAN-9782369230281, v2, 25 octobre 2019.
- [c] PERIAT, T. : Décomposition intrinsèques des produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-036-6, EAN-9782369230366, v2, 14 août 2018.
- [d] PERIAT, T. : Théorie quantique des champs appliquée aux produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-151-6, EAN-9782369231516, v2, 11 février 2020.
- [e] PERIAT, T. : Produits vectoriels déformés, spineurs de Cartan et paramétrisation d'Euler ; ISBN 978-2-36923-073-1, EAN-9782369230731, 31 mars 2019.