Méthode extrinsèque de décomposition des produits vectoriels déformés.

Collection : “La Théorie de la Question (E)”

©Thierry PERIAT.

19 juillet - 13 septembre 2022

©Thierry PERIAT : Méthode extrinsèque de décomposition des produits vectoriels déformés, ISBN 978-2-36923-006-9, EAN 9782369230069, collection “La Théorie de la Question (E)”.

1 Définitions essentielles.

Cette section regroupe les définitions dont il sera fait usage tout au long du document.

1.1 Produit tensoriel classique.

Voir la référence [01].

1.2 Produit extérieur classique.

Voir la référence [01].

1.3 Cube déformant.

Dans cette théorie, un cube A de type (D-D-D) est un ensemble de D^3 éléments choisis arbitrairement dans un ensemble K qui ont été ordonnés au niveau des noeuds d'un réseau cubique. Parce que ce type de construction peut se comprendre comme l'empilement de D matrices (D-D) de M(D, K), la composante générique d'un cube peut se définir par le symbole :

$$A \equiv A^{\alpha}_{\chi\beta} = A^{ligne}_{profondeur,\, colonne}$$

Dans ce document K désigne le corps commutatif des nombres réels, R, ou celui des nombres complexes, C.

1.4 Cube symétrique.

Un cube A est dit symétrique lorsque toutes ses composantes vérifient la relation :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} - A^{\alpha}_{\beta\chi} = 0$$

1.5 Cube antisymétrique.

Un cube A est dit antisymétrique lorsque toutes ses composantes vérifient la relation :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\alpha}_{\beta\chi} = 0$$

1.6 Cube réduit.

Un cube A est dit réduit lorsque toutes ses composantes vérifient la relation :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} - A^{\beta}_{\chi\alpha} = 0$$

1.7 Cube antiréduit.

Un cube A est dit antiréduit lorsque toutes ses composantes vérifient la relation :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\beta}_{\chi\alpha} = 0$$

1.8 Cube doublement contracté.

Un cube peut a priori subir une combinaison des deux actions, symétrisation (resp. antisymétrisation) et réduction (antiréduction). Sur les quatre combinaisons théoriquement envisageables, deux annulent le cube entièrement et les deux autres, (symétrie, réduction) et (antisymétrie, antiréduction), livrent un objet mathématique dont le nombre de composantes a été drastiquement réduit.

1.9 Produit tensoriel déformé.

Ici R représente l'ensemble des nombres réels et C celui des nombres complexes. Soit E(D, R) un espace vectoriel de dimension entière D bâti sur le corps commutatif des nombres réels ; il est rapporté à sa base générique ${}^{(D)}\Omega$: ($\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_i$, ..., $\mathbf{e}_D$). Soit deux éléments $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$ dans cet espace ou dans C $\otimes$ E(D, R). Soit A un cube de type (D-D-D) dont les D^3 composantes sont choisies dans R ou/et C. Par définition, un produit tensoriel déformé par le cube A est noté $\otimes_A$; c'est une *opération binaire interne*[1] agissant sur des paires ($\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$) de la façon conventionnelle suivante :

$$\forall (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in \{C \otimes E(D, R)\}^2$$

$$\downarrow \otimes_A$$

$$\otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = A^k_{ij} \cdot q^i_1 \cdot q^j_2 \cdot \mathbf{e}_k \in \{C \otimes E(D, R)\}$$

1. Ce qui signifie qu'elle assure une interaction entre deux arguments pris dans un ensemble de départ et que le résultat de l'interaction se trouve aussi dans cet ensemble de départ.

1.10 Produit extérieur déformé.

Dans un état d'esprit s'inspirant de la définition classique des produits extérieurs, dans ce qui suit, un *produit extérieur déformé* est également une opération binaire interne notée $\wedge_A$ agissant sur des paires $(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)$ de la façon conventionnelle suivante :

$$\forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, \{C \,\otimes\, E(D,\, R)\}^2$$
$$\downarrow \wedge_A$$
$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,-\, \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) \,\in\, \{K \,\otimes\, E(D,\, R)\}$$

Dans le langage des composantes :

$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, A^k_{ij} \,.\, (q^i_1 \,.\, q^j_2 \,-\, q^i_2 \,.\, q^j_1) \,.\, \mathbf{e}_k$$

Il est évident que le qualificatif *extérieur* est ici abusif et trompeur puisque le résultat sera toujours dans l'ensemble de départ. Les spécialistes de la sémantique se chargeront de trouver l'adjectif qui convient le mieux. Toujours est-il que cette définition conventionnelle se traduit dans le langage des composantes ; chacune d'elle peut se comprendre comme une somme de trois sous-sommes :

$$\{\sum_{i<j} A^k_{ij} \,.\, (q^i_1 \,.\, q^j_2 - q^j_2 \,.\, q^j_1)\} + \{\sum_{i=j} A^k_{ij} \,.\, (q^i_1 \,.\, q^j_2 - q^j_2 \,.\, q^j_1)\} + \{\sum_{i>j} A^k_{ij} \,.\, (q^i_1 \,.\, q^j_2 - q^j_2 \,.\, q^j_1)\}$$

La deuxième est nulle et il est facile de constater que :

$$A^k_{12} \,.\, (q^1_1 \,.\, q^2_2 \,-\, q^1_2 \,.\, q^2_1) \,;\, A^k_{21} \,.\, (q^2_1 \,.\, q^1_2 \,-\, q^2_2 \,.\, q^1_1)$$
$$A^k_{1j} \,.\, (q^1_1 \,.\, q^j_2 \,-\, q^1_2 \,.\, q^j_1) \,;\, A^k_{j1} \,.\, (q^j_1 \,.\, q^1_2 \,-\, q^j_2 \,.\, q^1_1)$$
$$A^k_{1D} \,.\, (q^1_1 \,.\, q^D_2 \,-\, q^1_2 \,.\, q^D_1) \,;\, A^k_{D1} \,.\, (q^D_1 \,.\, q^1_2 \,-\, q^D_2 \,.\, q^1_1)$$
$$etc.$$

Par conséquent :

$$\forall\, A,\, \forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, \{C \,\otimes\, E(D,\, R)\}^2 \,:$$
$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \sum_{i<j} (A^k_{ij} \,-\, A^k_{ji}) \,.\, (q^i_1 \,.\, q^j_2 \,-\, q^j_1 \,.\, q^i_2) \,.\, \mathbf{e}_k$$

Remarque 1.1. *Préliminaire.*

Les produits extérieurs déformés par des cubes symétriques sont tous nuls :

$$\forall\, A :\, A^k_{ij} \,=\, A^k_{ji} \,\Rightarrow\, \forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2),\, \wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \mathbf{0}$$

Ces cubes, contrairement aux apparences, ont une grande importance physique comme je vais le démontre dans un autre travail consacré à justifier la formule de Y. Koide sur les masses des trois générations de leptons [b].

Remarque 1.2. *Un lien formel entre le produit extérieur et le produit tensoriel déformé.*

N'importe quel cube A permet la définition formelle d'un cube antisymétrique [2] noté $^{-}$A :

$$^{-}A_{ij}^{k} \,=\, \frac{1}{2}\,.\,(A_{ij}^{k} \,-\, A_{ji}^{k})$$

Lorsqu'un produit tensoriel est déformé par la partie antisymétrique $^{-}$A d'un cube A, alors :

$$\otimes_{^{-}A}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$
$$=$$
$$^{-}A_{ij}^{k}\,.\,q_1^i\,.\,q_2^j\,.\,\mathbf{e}_k$$
$$=$$
$$\sum_{i<j} {}^{-}A_{ij}^{k}\,.\,q_1^i\,.\,q_2^j\,.\,\mathbf{e}_k \,+\, \sum_{i=j} {}^{-}A_{ij}^{k}\,.\,q_1^i\,.\,q_2^j\,.\,\mathbf{e}_k \,+\, \sum_{i>j} {}^{-}A_{ij}^{k}\,.\,q_1^i\,.\,q_2^j\,.\,\mathbf{e}_k$$

A cause de l'antisymétrie, la deuxième sous-somme disparait et :

$$\otimes_{^{-}A}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \sum_{i<j} {}^{-}A_{ij}^{k}\,.\,(q_1^i\,.\,q_2^j \,-\, q_1^j\,.\,q_2^i)\,.\,\mathbf{e}_k \,=\, \frac{1}{2}\,.\,\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

De sorte qu'un produit tensoriel déformé par la partie antisymétrique $^{-}$A d'un cube A vaut formellement la moitié du produit extérieur déformé par ce cube reconstitué mentalement à partir des composantes de $^{-}$A.

Remarque 1.3. *Sur le cube déformant un produit extérieur.*

— Ce cube est a priori et en général quelconque ; ce qui signifie qu'il n'y a aucune obligation à ce qu'il soit antisymétrique sur ses indices bas. De sorte qu'il existe une différence cruciale entre (i) travailler avec la partie antisymétrique d'un cube quelconque et (ii) manipuler un cube totalement antisymétrique.

— En tenant compte de la remarque précédente, il est aisé de voir que n'importe quel produit extérieur déformé par n'importe quel cube A peut toujours s'exprimer en fonction de la partie antisymétrique $^{-}$A de ce cube de la manière qui suit :

$$\forall\, A :\, \wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, 2\,.\,\sum_{i<j} {}^{-}A_{ij}^{k}\,.\,(q_1^i\,.\,q_2^j \,-\, q_1^j\,.\,q_2^i)\,.\,\mathbf{e}_k$$

Il est effectivement nul lorsque le cube A est entièrement symétrique ou lorsque les deux arguments sont égaux.

2. Il est aisé de vérifier que les composantes de n'importe quel cube peuvent s'écrire :

$$^{-}A_{ij}^{k} \,+\, {}^{-}A_{ji}^{k} \,=\, \frac{1}{2}\,.\,(A_{ij}^{k} \,-\, A_{ji}^{k}) \,+\, \frac{1}{2}\,.\,(A_{ji}^{k} \,-\, A_{ij}^{k}) \,=\, 0 \quad \square$$

Exemple 1.1. *Le cas des espaces de dimension trois ($D = 3$).*

Dans les espaces tri-dimensionnels :

$$\forall A, \forall (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in C \otimes E^2(3, R), \forall k = 1, 2, 3 :$$

$$(\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2))^k$$

$$=$$

$$B^k_{12} . (q^1_1 . q^2_2 - q^1_2 . q^2_1) + B^k_{23} . (q^2_1 . q^3_2 - q^2_2 . q^3_1) + B^k_{13} . (q^1_1 . q^3_2 - q^1_2 . q^3_1)$$

Ici :

$$B^k_{ij} = A^k_{ij} - A^k_{ji} = 2 . {}^- A^k_{ij}$$

La relation se laisse réécrire :

$$(\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2))^k$$

$$=$$

$$B^k_{23} . (q^2_1 . q^3_2 - q^3_1 . q^2_2) - B^k_{13} . (q^3_1 . q^1_2 - q^1_1 . q^3_2) + B^k_{12} . (q^1_1 . q^2_2 - q^2_1 . q^1_2)$$

Expression dans laquelle il est facile de reconnaitre les composantes du produit vectoriel classique $\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2$:

$$(\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2))^k = B^k_{23} . (\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^1 - B^k_{13} . (\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^2 + B^k_{12} . (\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^3$$

De sorte qu'il semble naturel d'introduire la matrice :

$$[B^*] = \begin{bmatrix} B^1_{23} & -B^1_{13} & B^1_{12} \\ B^2_{23} & -B^2_{13} & B^2_{12} \\ B^3_{23} & -B^3_{13} & B^3_{12} \end{bmatrix} \in M(3, C)$$

Les composantes de la partie antisymétrique du cube A se laissent regrouper sous la forme d'une matrice carrée (3-3) qui peut conventionnellement s'écrire :

$${}^{(3)}[{}^- A] = \begin{bmatrix} B^1_{12} & B^2_{12} & B^3_{12} \\ B^1_{23} & B^2_{23} & B^3_{23} \\ B^1_{13} & B^2_{13} & B^3_{13} \end{bmatrix} \in M(3, C)$$

Soit le produit matriciel :

$${}^{(3)}[J]^t . {}^{(3)}[{}^- A]$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} B^1_{12} & B^2_{12} & B^3_{12} \\ B^1_{23} & B^2_{23} & B^3_{23} \\ B^1_{13} & B^2_{13} & B^3_{13} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} B^1_{23} & B^2_{23} & B^3_{23} \\ -B^1_{13} & -B^2_{13} & -B^3_{13} \\ B^1_{12} & B^2_{12} & B^3_{12} \end{bmatrix}$$

Il permet de conclure que :

$$[B^*] = {}^{(3)}[^-A]^t \, . \, {}^{(3)}[J]$$

$$| \wedge_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) > = {}^{(3)}[^-A]^t \, . \, {}^{(3)}[J] \, . \, |\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2 >$$

... et que n'importe quel produit extérieur déformé résulte effectivement d'une déformation du produit vectoriel classique ; la matrice ${}^{(3)}[^-\mathrm{A}]$ s'appelle la *matrice déformante normalisée* et la matrice ${}^{(3)}[\mathrm{B}^*]$ s'appelle la *matrice déformante effective.*

1.11 Produit de Lie déformé.

Lorsque :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\alpha}_{\beta\chi} = 0$$

La définition du produit extérieur déformé mène à :

$$\forall \, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in \{C \otimes E(D,\, R)\}^2 \; :$$

$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = 2 \, . \sum_{i<j} A^k_{ij} \, . \, (q^i_1 \, . \, q^j_2 - q^j_1 \, . \, q^i_2) \, . \, \mathbf{e}_k$$

Par ailleurs, dans ce cas, le cube A se réduit à sa partie anti-symétrique.

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\alpha}_{\beta\chi} = 0 \Rightarrow {}^-A^{\alpha}_{\chi\beta} = \frac{1}{2} \, . \, (A^{\alpha}_{\chi\beta} - A^{\alpha}_{\beta\chi}) = A^{\alpha}_{\chi\beta} \Rightarrow A = {}^-A$$

Il devient ainsi possible de définir un produit de Lie déformé de manière conventionnelle en posant simplement :

$$\forall \, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in \{C \otimes E(D,\, R)\}^2 \; :$$

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{^-A} = \sum_{i<j} {}^-A^k_{ij} \, . \, (q^i_1 \, . \, q^j_2 - q^j_1 \, . \, q^i_2) \, . \, \mathbf{e}_k = \frac{1}{2} \, . \, \wedge_{^-A} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

Exemple 1.2. *Le cas des espaces de dimension trois (suite).*

Dans les espaces de dimension trois (D = 3), le cube générique A de type (3-3-3) se résume à la matrice ... $[^-\mathrm{A}]$. De plus, en tenant compte de la relation trouvée à la fin de la remarque 1.2, il vient :

$$\otimes_{^-A}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \sum_{i<j} {}^-A^k_{ij} \, . \, (q^i_1 \, . \, q^j_2 - q^j_1 \, . \, q^i_2) \, . \, \mathbf{e}_k = \frac{1}{2} \, . \, \wedge_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{^-A}$$

Ce qui montre l'équivalence entre un produit tensoriel déformé par un cube entièrement antisymétrique et un produit de Lie déformé par ce cube.

1.12 Enoncé du problème traité.

Un document précédent, [a], s'est intéressé à la question de savoir si et quand un produit vectoriel [3] déformé par un élément [A] de M(3, $\mathbb{C}$) acceptait une ou des décompositions non-nécessairement triviales autorisant à poser sur l'espace dual $\mathbb{C} \otimes$ E(3, $\mathbb{R}$) :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >= [P] . |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

La discussion a mis en exergue un certain nombre d'informations importantes permettant d'aboutir à des réponses concrètes à la question posée :

- Lorsqu'une décomposition non-triviale du type symbolisé par la relation précédente existe, elle est toujours associée avec une polynomiale de degré deux écrite en fonction des trois composantes du projectile $\mathbf{q}_1$; elle est notée par convention $\Lambda(\mathbf{q}_1)$.
- Parmi toutes les polynomiales issues d'une telle décomposition, il est essentiel de distinguer celle qui sont propres de celles qui ne le sont pas.
- Les polynomiales propres se caractérisent par une Hessienne dont le déterminant n'est pas nul (elle n'est pas dégénérée) et admettent un vecteur singulier ${}_{\Lambda}\mathbf{s}$.
- Toutes les polynomiales qui ne sont pas dans la catégorie précédente sont dites impropres.
- Quelle que soit la catégorie à laquelle la polynomiale appartient, la question posée ne reçoit qu'une réponse partielle en ce sens que l'usage de la méthode intrinsèque ne livre au mieux que le formalisme de la partie matricielle (dite aussi principale) de la décomposition.
- Il est absolument nécessaire de faire appel à d'autres méthodes mathématiques pour découvrir la partie vectorielle (dite également résiduelle) des décomposition.

Ainsi, la question posée dans ce document est-elle : « Quelle stratégie faut-il en oeuvre pour découvrir les deux arguments d'une décomposition, in extenso la paire ([P], $\mathbf{z}$), lorsque sa partie principale a été obtenue au préalable par l'usage de la méthode intrinsèque ? »

2 Méthode extrinsèque.

2.1 Illustration du concept par un exemple.

Dans son essence, la méthode dite extrinsèque se caractérise par les quatre points suivants :

1. Elle part du principe qu'il existe au moins une forme bilinéaire agissant sur les éléments de C $\otimes$ E(D, R) et que celle-ci se laisse représenter par un élément [E] de M(D, C). Nota bene : dans les applications physiques de cette méthode, il pourrait en particulier s'agir de la métrique spatiale locale.

3. Synonyme : produit de Lie dans un espace de dimension trois ; D = 3.

2. Elle introduit deux polynomiales P_i, pour i = 1, 2, mesurant le degré de réalisation d'une décomposition non-triviale présumée et représentée par une paire ($\mathbf{z}$, [P]) de C × E(D, R) × M(D, C) d'un produit tensoriel déformé ; par exemple ici, ceux du type $\otimes_A(\mathbf{q},\, \mathrm{d}\mathbf{x})$:

$$P_1(\mathbf{q}) \;=< \mathbf{q}\,,\, |\otimes_A(\mathbf{q},\, d\mathbf{x}) > \,-\{[P]\,.\,|d\mathbf{x} > +|\mathbf{z} >\} >_{[E]} \;+ P_1(\mathbf{0})$$

$$P_2(d\mathbf{x}) \;=< d\mathbf{x}\,,\, |\otimes_A(\mathbf{q},\, d\mathbf{x}) > \,-\{[P]\,.\,|d\mathbf{x} > +|\mathbf{z} >\} >_{[E]} \;+ P_2(\mathbf{0})$$

La première des deux est une polynomiale de degré deux dont l'argument est le projectile $\mathbf{q}$ tandis que la seconde en est une autre dépendant de la cible d$\mathbf{x}$.

A condition :
— d'introduire le vecteur $\mathbf{D}$ décrivant la décomposition la décomposition présumée :

$$|\mathbf{D} >= [P]\,.\,|d\mathbf{x} > +|\mathbf{z} >$$

— et d'utiliser la définition du produit tensoriel déformé,
elle s'écrit plus précisément dans le langage des composantes :

$$P_1(\mathbf{q}) \;=\; e_{mn}\,.\,q^m\,.\,A^n_{pr}\,.\,q^p\,.\,dx^r \;-\; e_{mn}\,.\,q^m\,.\,D^n \;+\; P_1(\mathbf{0})$$

La polynomiale P_1 est donc caractérisée par les coefficients suivants *quand le cube A est anti-symétrique* :

$$_{P_1}d_{mp} \;=\; e_{mn}\,.\,A^n_{pr}\,.\,dx^r \equiv -\,[E]\,.\,_A\Phi(d\mathbf{x}) \;=\; [_{P_1}D]$$

$$_{P_1}d_m \;=\; -e_{mn}\,.\,D^n \equiv -\,[E]\,.\{[P]\,.\,|d\mathbf{x} > +|\mathbf{z} >\} \;=\; |_{P_1}\mathbf{d}^* >$$

$$_{P_1}d \;=\; P_1(\mathbf{0})$$

3. Une troisième caractéristique de la méthode extrinsèque est qu'elle cherche toujours à vouloir identifier les polynomiales introduites et calculées de la manière exposée au travers de l'exemple ci-dessus avec un développement limité à l'ordre deux inclus de ces polynomiales. Concrètement et toujours dans le cadre de l'exemple traité ici, elle propose ensuite d'écrire que :

$$P_1(\mathbf{q}) \\ = \\ P_1(\mathbf{0}) + \;< \mathbf{Grad}_{\mathbf{q}} P_1(\mathbf{q}),\, \mathbf{q} >_{Id} \,+ \frac{1}{2}\,.\, < \mathbf{q},\, \{[Hess_{(\mathbf{q},\,0)} P_1(\mathbf{q})]\,.\,|\mathbf{q} >\} >_{Id}$$

De sorte que cette méthode livre encore pour la polynomiale P_1 (toujours et uniquement lorsque le cube A est antisymétrique) :
— Concernant les termes de degré deux :

$$\frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{q},\,0)} P_1(\mathbf{q})] \;=\; -[E]\,.\,_A\Phi(d\mathbf{x})$$

— Concernant les termes de degré un :

$$\mathbf{Grad}_{(\mathbf{q})} P_1(\mathbf{q}) \;=\; -[E]\,.\{[P]\,.\,|d\mathbf{x} > +|\mathbf{z} >\}$$

— Concernant les termes de degré zéro :

$$P_1(\mathbf{0}) \;=\; 0(3)$$

Remarque 2.1. *Validité d'une identification avec un développement de Taylor lorsque le cube A est antisymétrique.*

Sachant par ailleurs que le gradient de la polynomiale $\mathrm{P}_1(\mathbf{q})$ peut être calculé à l'aide de la formule-type habituelle [4] et qu'il vaut :

$$|\mathbf{Grad_q} P_1(\mathbf{q}) >$$

$$=$$

$$\{[_{P_1}D] \,+\, [_{P_1}D]^t\} \,.\, |\mathbf{q} > \,+ |_{P_1}\mathbf{d}^* >$$

$$=$$

$$\{_A\Phi(d\mathbf{x}) \,.\, [E]^t \,-\, [E] \,.\, _A\Phi(d\mathbf{x})\} \,.\, |\mathbf{q} > \,- [E] \,.\, \{[P] \,.\, |d\mathbf{x} > \,+ |\mathbf{z} >\}$$

Pour les produits déformés par des cubes antisymétriques, l'identification entre la polynomiale P_1 et son développement limité à l'ordre deux inclus n'est réalisable de façon cohérente que lorsque :

$$\{_A\Phi(d\mathbf{x}) \,.\, [E]^t \,-\, [E] \,.\, _A\Phi(d\mathbf{x})\} \,.\, |\mathbf{q} > = \, |\mathbf{0} > \tag{1}$$

Exemple 2.1. *Le cas des polynomiales continues.*

Elles le sont *en particulier* lorsque la polynomiale P_1 est continue ; en effet, dans ce cas-là, sa Hessienne est symétrique et ceci permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} \cdot \{[Hess_{(\mathbf{q},\,0)} P_1(\mathbf{q})] \,-\, [Hess_{(\mathbf{q},\,0)} P_1(\mathbf{q})]^t\}$$

$$=$$

$$-[E] \,.\, _A\Phi(d\mathbf{x}) \,+\, _A\Phi(d\mathbf{x}) \,.\, [E]^t$$

$$=$$

$$[0]$$

Remarque 2.2. *Introduction au lien avec les spineurs d'E. Cartan.*

Ces relations, en apparence anodines, permettent de connecter ce travail avec celui d'Elie Cartan sur les spineurs [02 ; chapitre IX]. En effet, chaque fois que la décomposition triviale bâtie sur un cube antisymétrique sera la représentation d'un bivecteur et que la représentation [E] sera symétrique, la condition validant l'identification entre la polynomiale $\mathrm{P}_1(\mathbf{q})$ et un développement limité à l'ordre deux inclus s'écrira :

$$\delta[E] \,.\, |\mathbf{q} > = \, |\mathbf{0} >$$

4. Elle s'obtient en calculant les dérivées partielles successives.

Remarque 2.3. *Les arguments de la décomposition non-triviale.*

L'application de cette démarche d'identification avec un développement de Taylor à la polynomiale P_2 permet d'aboutir aux relations :

— Termes de degré deux :

$$[P] \;=\; {}_{A}\Phi(\mathbf{q}) \;-\; \frac{1}{2}\,.\,[E]^{-1}\,.\,[Hess_{d\mathbf{x}}P_2(d\mathbf{x})]$$

— Termes de degré un :

$$|\mathbf{z}> = \;-[E]^{-1}\,.\,|\mathbf{Grad}_{(d\mathbf{x})}P_2(d\mathbf{x})>$$

— Terme de degré zéro :

$$P_2(\mathbf{0}) \;=\; 0(3)$$

Dans les espaces de dimension trois (D = 3), il suffit de remplacer le symbole A représentant le cube (3-3-3) antisymétrique par la matrice déformante normalisée (3-3), $[^{-}\mathrm{A}]$.

4. Enfin, quatrième et dernière caractéristique de la méthode dite extrinsèque, elle ne fonctionne que par approximation.

   En effet, une fois que les polynomiales P_1 et P_2 ont été identifiées avec un développement limité, l'annulation des différences scalaires $P_1(\mathbf{q})$ - $P_1(\mathbf{0})$ ou $P_2(d\mathbf{x})$ - $P_2(\mathbf{0})$ dit seulement que l'une des trois situations suivantes est réalisée :

   (a) Le premier des deux arguments du produit scalaire de type $<...,\, ...>_{[E]}$ est nul.

   (b) Les arguments de ce produit scalaire sont orthogonaux entre eux sans qu'aucun d'eux soit nul.

   (c) Le second des deux arguments du produit scalaire de type $<...,\, ...>_{[E]}$ est nul.

   Seule la dernière éventualité correspond aux réponses recherchées : La décomposition non-triviale présumée est exacte.

3 Confrontation des méthodes dans les espaces de dimension trois.

3.1 Domaine de définition et énoncé.

Je réduis à partir d'ici la discussion aux espaces de dimension trois.

Puisque dans les espaces de dimension trois, un produit tensoriel déformé par un cube antisymétrique est égal à un produit de Lie déformé par ce cube, la nécessaire confrontation entre la méthode de décomposition intrinsèque (incomplète parce qu'elle ne précise pas le résidu et parce qu'elle ne fonctionne que pour les espaces de dimension trois lorsque le cube déformant est antisymétrique) et la méthode de décomposition extrinsèque (complète mais approximative) peut être réalisée.

Elle s'opère en comparant les parties principales de ces décompositions pour un même produit vectoriel déformé ; en l'occurence ici : $[\mathbf{q},\, d\mathbf{x}]_{[A]}$ lorsque les composantes du cube A satisfont la relation : $\mathrm{A}^{\alpha}{}_{\chi\beta} + \mathrm{A}^{\alpha}{}_{\beta\chi} = 0$.

Dans ce cas le cube déformant est ramené à un élément de M(3, C), A → [⁻A], et il s'agit de découvrir les situations autorisant à identifier :

$$[P]_{|A|,\,intr.} \;=\; |A|\,.\,[^{-}A]^{t}\,.\,[J]\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{q},0)}\Lambda(\mathbf{q})] \;+\; \frac{1}{|A|}\,.\,{}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})\},\; |A| \;=\; \pm 1 \tag{2}$$

Avec :

$$[P]_{extr.} \;=\; {}_{[^{-}A]}\Phi(\mathbf{q}) \;-\; \frac{1}{2}\,.\,[E]^{-1}\,.\,[HessP_{2}(d\mathbf{x})] \tag{3}$$

3.2 Scénarios.

Il y a deux scénarios rendant l'identification possible ; chacun se caractérise par un triplé de relations :

— Scénario de type I :

1. Relation de continuité entre les décompositions triviales au cours des déformations :

$$_{[^{-}A]}\Phi(\mathbf{q}) \;=\; [^{-}A]^{t}\,.\,[J]\,.\,{}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s}) \tag{4}$$

2. Relation d'interdépendance entre la déformation [⁻A] et la forme bilinéaire non-dégénérée [E] permettant de calculer les scalaires associés aux décompositions (les polynomiales P_1 et P_2) :

$$|A|\,.\,[^{-}A]^{t}\,.\,[J] \;=\; -\frac{1}{\alpha}\,.\,[E]^{-1},\; \alpha \;\neq\; 0 \tag{5}$$

3. Relation d'interdépendance entre la polynomiale Λ issue de l'usage de la méthode intrinsèque et la polynomiale P_2 issue de l'usage de la méthode extrinsèque au travers de leurs Hessiennes :

$$[Hess_{(\mathbf{q},0)}\Lambda(\mathbf{q})] \;=\; \alpha\,.\,[HessP_{2}(d\mathbf{x})]$$

— Scénario de type II :

1. Relation de continuité entre les décompositions triviales au cours des déformations :

$$_{[^{-}A]}\Phi(\mathbf{q}) \;=\; [^{-}A]^{t}\,.\,[J]\,.\,{}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})$$

2. A un facteur de proportionalité près, elle promeut la forme bilinéaire [E] au rang de métrique de Cartan bâtie sur une aire [03 ; p. 16, (V)] :

$$[Hess_{(\mathbf{q},0)}\Lambda(\mathbf{q})] \;=\; -[E]^{-1}$$

3. Les valeurs des composantes de la Hessienne de la seconde polynomiale (P_2), définissent au signe moins près ($|\mathrm{A}| = \pm 1$) celles de la déformation [⁻A] :

$$[Hess_{d\mathbf{x}}P_{2}(d\mathbf{x})] \;=\; |A|\,.\,[^{-}A]^{t}\,.\,[J]$$

3.3 Commentaires.

— La relation de continuité entre les décompositions triviales (celles de l'espace classique et celles de l'espace déformé) est indépendante du scénario retenu (I ou II).

— Lorsque l'espace est euclidien, tridimensionnel et classique, c'est-à-dire non déformé, alors [A] = [J], |A| = -1, et cette relation impose la coincidence entre le projectile, ici $\mathbf{q}$, et le vecteur singulier de la polynomiale intrinsèque, Λ.

$$[A] = [J] \Rightarrow \mathbf{q} = {}_{\Lambda}\mathbf{s} \tag{6}$$

A contrario, il faut s'attendre à ce que cette coincidence disparaisse dans les espaces déformés.

— Dans le cadre du scénario I, la relation d'interdépendance rendant l'usage de la méthode intrinsèque équivalent à celui de la méthode extrinsèque ne traduit rien d'autre que le fait important suivant :

L'inverse de la matrice [E] représentant la forme bilinéaire non-dégénérée servant à mettre la méthode extrinsèque en oeuvre vaut, peut-être à un signe moins près (|A| = ± 1), deux fois la matrice déformante effective du produit vectoriel classique ; en effet :

$$|A|\,.\,[B^*] = |A|\,.\,{}^{(3)}[^-A]^t\,.\,{}^{(3)}[J] = -[E]^{-1} \tag{7}$$

$$|\wedge_{[^-A]}(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)> = 2\,.\,|[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2]_{[^-A]}> = {}^{(3)}[^-A]^t\,.\,{}^{(3)}[J]\,.\,|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2>$$

$$\Downarrow$$

$$[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2]_{[^-A]} = -\frac{|A|}{2}\,.\,{}^{(3)}[E]^{-1}\,.\,|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2> \tag{8}$$

Par conséquent, je peux énoncer le :

3.4 Lemme.

Lemme 3.1. *Critère de concordance des méthodes de décomposition des produits vectoriels déformés.*

Dans les espaces de dimension trois, la recherche des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés peut se faire en utilisant conjointement deux méthodes mathématiques a priori distinctes : l'intrinsèque [a] et l'extrinsèque. Il existe deux scénarios (I et II) assurant la coincidence des parties principales des décompositions non-triviales obtenues par l'une et l'autre.

Quel que soit le scénario adopté pour coller avec une réalité physique, la coincidence forcée des résultats se traduit par une relation de continuité entre la décomposition triviale dans un espace non déformé et la décomposition triviale dans l'espace déformé :

$$\underbrace{{}_{[^-A]}\Phi(\mathbf{q})}_{decomp.\,triv.\,extr.} = [^-A]^t\,.\,[J]\,.\,{}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})$$

Dans le cadre du scénario I, les parties principales coincident lorsque la forme bilinéaire [E] utilisée pour mettre en oeuvre la méthode extrinsèque en complément à la méthode intrinsèque est choisie de telle sorte :

1. qu'elle n'est pas dégénérée ($|\mathrm{E}| \neq 0$) ;
2. que la moitié de son inverse coincide à un signe moins près avec la déformation effective agissant sur le produit vectoriel classique.

Un moyen simple de faire coincider les deux scénarios possibles est d'imposer les relations :

$$[HessP_2(d\mathbf{x})] = |A| \,.\, [^{-}A]^t \,.\, [J] = -[E]^{-1} = [Hess_{(\mathbf{q},0)}\Lambda(\mathbf{q})] \qquad (9)$$

Ces situations exceptionnelles laissent entrevoir la possibilité d'appliquer les résultats de ce document au sein de l'approche développée par Elie Cartan dans [03] ; en particulier, elles permettent de penser que la géométrie peut être un des facteurs participant à la déformation de la définition du produit vectoriel lorsque la géométrie est induite par des aires.

4 Remerciements.

Etant ancien élève des classes préparatoires aux grandes écoles (mathématiques supérieures et spéciales section P' de l'école Sainte-Geneviève, Versailles, en 1974-1975), retraité de l'art dentaire (doctorat d'état en chirurgie dentaire, Paris, 1982 ; certificat en radioprotection dentaire sur la période 2007-2022) et self-made man dans le domaine de la physique mathématique que j'étudie désormais par passion, je prie le lectorat de faire preuve d'un sens critique aigu lorsqu'il parcourt mes documents.

Je remercie chaleureusement tous les auteurs acceptant, comme moi, de mettre leurs travaux à libre disposition du public. Vos commentaires éclairés seront toujours bien venus.

Thierry PERIAT, version du 13 septembre 2022.

Références

5 Livres, ouvrages et cours.

[01] Delachet, A. : Le calcul tensoriel, collection « Que sais-je ? », imprimerie des presses universitaires de France, 1974, n°1336.

[02] Cartan, E. : The theory of spinors ; ISBN 0-486-64070-1, translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)", Hermann, 1937 - 154 p. Dover Publications, Inc. New York ©by Hermann, Paris (1966), 157 pages.

[03] Cartan, E. : Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire ; « Actualités scientifiques et industrielles », numéro 72, exposés de géométrie publiés

sous la direction de monsieur Elie Cartan, membre de l'institut et professeur à la Sorbonne ; Hermann et Cie, éditeurs, Paris, 1933, 46 pages (partie centrale de l'exposé).

6 Travaux personnels précisant le contexte de la discussion menée dans ce document.

[a] PERIAT, T. : Décompositions intrinsèques des produits vectoriels déformés ; ISBN-978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, 14 août 2018.

[b] PERIAT, T. : Cosmologie et algèbres de Lie, le cas des espaces de dimension trois équipés de produits extérieurs déformés et d'une métrique de FRW - La préservation de la vitesse de propagation de la lumière et la formule du Professeur Koide ; ISBN-978-2-36923-136-3, EAN 9782369231363, 5 juillet 2022.

Table des matières

1 Définitions essentielles. **1**
- 1.1 Produit tensoriel classique. . . . 1
- 1.2 Produit extérieur classique. . . . 1
- 1.3 Cube déformant. . . . 1
- 1.4 Cube symétrique. . . . 1
- 1.5 Cube antisymétrique. . . . 2
- 1.6 Cube réduit. . . . 2
- 1.7 Cube antiréduit. . . . 2
- 1.8 Cube doublement contracté. . . . 2
- 1.9 Produit tensoriel déformé. . . . 2
- 1.10 Produit extérieur déformé. . . . 3
- 1.11 Produit de Lie déformé. . . . 6
- 1.12 Enoncé du problème traité. . . . 7

2 Méthode extrinsèque. **7**
- 2.1 Illustration du concept par un exemple. . . . 7

3 Confrontation des méthodes dans les espaces de dimension trois. **10**
- 3.1 Domaine de définition et énoncé. . . . 10
- 3.2 Scénarios. . . . 11
- 3.3 Commentaires. . . . 12
- 3.4 Lemme. . . . 12

4 Remerciements. **13**

5 Livres, ouvrages et cours. **13**

6 Travaux personnels précisant le contexte de la discussion menée dans ce document. **14**