La question de l'absence de neutre pour les algèbres involutives bâties sur des espaces équipés d'un produit de Lie déformé.

Collection : "La Théorie de la Question (E)"

©Thierry PERIAT.

18 novembre 2022

©Thierry PERIAT : La question de l'absence de neutre pour les algèbres involutives bâties sur des espaces équipés d'un produit de Lie déformé, ISBN 978-2-36923-003-8, EAN 9782369231158, collection "La Théorie de la Question (E)".

Table des matières

1 Les algèbres involutives bâties sur les espaces équipés d'un produit de Lie déformé. 1

1.1 Rappel du contexte. 1
1.2 Les traditionnelles difficultés techniques structurelles. 2
1.3 Les caractéristiques du neutre à gauche. 3
1.4 Lemme du neutre à gauche sur V. 7
1.5 Conclusion. 12
1.6 Travaux personnels. 13
1.7 Ouvrages et cours consultés. 13

1 Les algèbres involutives bâties sur les espaces équipés d'un produit de Lie déformé.

1.1 Rappel du contexte.

Dans un document précédent [a] :

1. J'ai rappelé les conditions permettant de doter l'espace vectoriel $\{E(D, K), \otimes_A\}$ d'une structure d'algèbre involutive.
2. J'ai défini l'élément adjoint comme étant égal au carré.
3. J'ai analysé les conséquences de la définition générique d'une algèbre involutive et de ce choix.
4. Je les ai transcrites sous la forme de conditions nécessaires s'imposant aux éléments de l'espace vectoriel $\{E(D, K), \otimes_A\}$.

5. J'ai commencé à préciser ces conditions lorsque l'étude physique s'intéresse au terme gravitationnel apparaissant dans la formulation de la version covariante de la loi de Lorentz (électromagnétisme).

Les enseignements essentiels obtenus dans le document [a] peuvent grossièrement se résumer ainsi :

1. Lorsque le corps K est commutatif, les indices bas du cube A doivent être dotés de la propriété d'antisymétrie ; voir la sémantique de cette théorie dans [b].
2. Il résulte de la contrainte précédente que l'étude des espaces dotés d'un produit tensoriel déformé par un cube dont les indices bas sont dotés de la propriété de symétrie nécessite la découverte de relations transformant ce produit en son homologue construit sur un cube dont les indices bas doivent être dotés de la propriété d'antisymétrie. Cette difficulté technique a été examinée en détail pour le terme gravitationnel dans [a].
3. L'accession à la structure d'algèbre involutive s'accompagne de la nécessité de travailler avec le groupe cyclique U_3.
4. Les stabilisateurs de l'espace vectoriel de la discussion jouent un rôle essentiel dans l'acquisition de cette structure.

1.2 Les traditionnelles difficultés techniques structurelles.

Le fait de devoir travailler avec des cubes déformant dont les indices bas doivent être dotés de la propriété d'antisymétrie lorsque K est un corps commutatif revient à dire que l'exploration s'intéressant aux algèbres involutives de l'espace vectoriel $\mathrm{V} = \{\mathrm{E(D, K)}, \otimes_A\}$ se restreint naturellement aux parties de cet espace vectoriel pour lesquelles le produit tensoriel déformé est un produit de Lie déformé. Ces parties-là peuvent être équipées d'une structure d'algèbre de Lie sous certaines conditions qui ont déjà été explicitées dans d'autres parties de mon travail.

Or, parallèlement à cet état de fait :

1. Les produits de Lie (déformés ou non) sont des opérations binaires anticommutatives ; pour une introduction au concept, voir [c].
2. L'anticommutativité interdit l'existence d'un élément neutre à gauche et à droite, égal et unique, et donc la définition d'une structure de groupe de Lie ; voir la sous-section 1.3 ci-dessous pour une démonstration précise.

Soit, X, un groupe de Lie inconnu en principe associé à une des algèbres de Lie de l'espace vectoriel V ; soit $L(\mathrm{X})$ cette algèbre de Lie. La théorie se trouve ainsi être équipable « d'une algèbre de Lie » sans être en mesure d'identifier le groupe « de Lie » X, qui lui correspondrait en principe.

Cette difficulté majeure n'est pas nouvelle et elle se contourne habituellement en introduisant « la ruse de l'involution ».

1.3 Les caractéristiques du neutre à gauche.

Soit **a** un quelconque élément de V et soit $\mathbf{n}_g$ l'élément neutre à gauche pour tous les éléments de V. S'il existe effectivement, alors il doit satisfaire la condition :

$$\exists\, \mathbf{n}_g \in V \,:\, \forall \mathbf{a} \in V,\, [\mathbf{n}_g, \mathbf{a}]_A = \mathbf{a}$$

Cette condition se traduit dans la base canonique Ω à laquelle l'espace V peut être rapporté par un ensemble de D combinaisons linéaires :

$$\exists\, \mathbf{n}_g \in V \,:\, \forall \mathbf{a} \in V, \forall \chi = 1, ..., D, \sum_{\alpha<\beta=2}^{\beta=D} A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, (n^{\alpha}_g \,.\, a^{\beta} - a^{\alpha} \,.\, n^{\beta}_g) = a^{\chi}$$

Cet ensemble se laisse réorganiser en un système de D combinaisons linéaires écrites en fonction des D composantes du neutre à gauche dont l'existence a été présumée. Ce système se laisse formuler dans une écriture mixte mélangeant matrices et vecteurs de la manière suivante (convention de Dirac) :

$$[?] \,.\, |\mathbf{n}_g >= |\mathbf{a}>$$

... à condition de définir (convention ligne = α - colonne = β) :

$$[?] = [?^{\alpha}{}_{\beta}] = [A^{\alpha}_{\beta\chi} \,.\, a^{\chi}]$$

... et de ne pas oublier que les indices bas du cube sont dotés de la propriété d'antisymétrie.

$$A^{\alpha}_{\beta\chi} + A^{\alpha}_{\chi\beta} = 0 \iff A \in \boxplus^{-}$$

Compte tenu des travaux antérieurs concernant la notion de décomposition triviale d'un produit de Lie déformé, il vient simplement que :

$$[?] = [?^{\alpha}{}_{\beta}] = [A^{\alpha}_{\beta\chi} \,.\, a^{\chi}] = [-A^{\alpha}_{\chi\beta} \,.\, a^{\chi}] = -{}_{A}\Phi(\mathbf{a})$$

Et le système à résoudre admet donc finalement et en général la formulation condensée :

$${}_{A}\Phi(\mathbf{a}) \,.\, |\mathbf{n}_g >= -|\mathbf{a}>,\, A \in \boxplus^{-}$$

Ce résultat peut s'obtenir bien plus rapidement en se servant de la bilinéarité et de l'anticommutativité naturelle du produit de Lie ainsi que des premières connaissances acquises sur les décompositions triviales ; voir par exemple l'origine du concept dans [d].

$$\exists\, \mathbf{n}_g \in V \,:\, \forall \mathbf{a} \in V,\, [\mathbf{n}_g, \mathbf{a}]_A = \mathbf{a} \Rightarrow \exists\, \mathbf{n}_g \in V \,:\, \forall \mathbf{a} \in V,\, -[\mathbf{a}, \mathbf{n}_g]_A = \mathbf{a}$$

Cette relation peut se traduire sur l'espace dual par :

$$-{}_{A}\Phi(\mathbf{a}) \,.\, |\mathbf{n}_g >= |\mathbf{a}> \Rightarrow {}_{A}\Phi(\mathbf{a}) \,.\, |\mathbf{n}_g >= -|\mathbf{a}>$$

Proposition 1.1. *Le système à résoudre est dégénéré.*

Démonstration. Rappel : lorsque le cube A déformant est un élément de l'ensemble $\boxplus^-$, le produit tensoriel déformé par ce cube devient un produit de Lie. Il en résulte en particulier que :

$$\forall\, \mathbf{a} \in V,\ [\mathbf{a},\, \mathbf{a}]_A = \mathbf{0}$$

En conséquence de quoi, la représentation triviale de cette condition dans l'espace dual s'écrit :

$$\forall\, \mathbf{a} \in V,\ {}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{a}> = |\mathbf{0}>$$

De deux choses l'une :

1. soit le vecteur **a** est le vecteur nul de V et la condition est une tautologie sans intérêt ;
2. soit le vecteur **a** n'est pas le vecteur nul de V et dans le cas présent il faut nécessairement que :

$$\forall\, \mathbf{a} \in V - \{\mathbf{0}\} : |{}_A\Phi(\mathbf{a})| = 0$$

Le système à résoudre est donc nécessairement dégénéré. Ce simple constat suffit à démontrer l'absence d'un neutre unique à gauche sur V et, par ricochet, d'un neutre tout court sur V. □

Lemme 1.1. *Domaine de définition des algèbres involutives et de Lie sur V.*

Plus exactement et pour autant, les paires (A, **a**) de l'ensemble $\boxplus^-$ x V respectant l'égalité précédente sont les seules avec lesquelles la recherche des parties de V pouvant être équipées d'une algèbre involutive et/ou d'algèbre de Lie peut s'entreprendre.

$$\mathbf{a} \in V \Rightarrow |{}_A\Phi(\mathbf{a})| = 0,\, \forall\, A \in \boxplus^-$$

Définition 1.1. *Application interne involutive.*

Une application f, interne sur un ensemble E, sera dite involutive vis-à-vis d'un élément **x** de cet ensemble si la répétition de l'action de f sur la gauche de cet élément laisse celui-ci inchangé :

$$\exists\, \mathbf{x} \in E \overset{f}{\to} f(\mathbf{x}) \in V : f(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \iff f \in Invol(f)(\mathbf{x})$$

Concernant la logique pure et l'application de cette définition à la problématique explorée dans ce document, il n'y a a priori pas de lien préétabli connu entre les deux propriétés suivantes : (i) L'application f est une involution ; (ii) l'application f permet de doter V d'une structure d'algèbre involutive.

Exemple 1.1. *Application aux produits de Lie sur V.*

Par application de la définition ci-dessus, le produit de Lie $[...,\, ...]_A$ est une involution chaque fois qu'il existe un élément **x** de V tel que :

$$(A, \mathbf{a}) \in \boxplus^- \times V : \exists\, \mathbf{x} \in V : [\mathbf{a},\, [\mathbf{a}, \mathbf{x}]_A]_A = \mathbf{x} \tag{1}$$

Remarque 1.1. *Involution et élément neutre à gauche sur V.*

Proposition 1.2. *Si une application $f = [\mathbf{a},\ldots]_A$ est involutive pour un élément $\boldsymbol{x}$ de V, alors il existe automatiquement un cube $B(A,\, \boldsymbol{a})$ de $\boxplus^-$ tel que le vecteur $\boldsymbol{a}$ se comporte comme un élément neutre à gauche pour le vecteur $\boldsymbol{x}$ au sein d'un produit de Lie déformé par le cube $B(A,\, \boldsymbol{a})$; concrètement :*

$$Equ.(1) \;\Rightarrow\; \exists\, B(A,\, \mathbf{a}) \,\in\, \boxplus^- \;:\; [\mathbf{a}, \mathbf{x}]_{B(A,\, \mathbf{a})} \;=\; \mathbf{x}$$

Démonstration. *1. Existence et définition du cube B.* J'écris tout simplement l'Equ.(1) en me servant de la définition des produits de Lie déformés ; ainsi les composantes du vecteur $\mathbf{X}$ défini par :

$$\mathbf{X} \;=\; [\mathbf{a}, \mathbf{x}]_A$$

... sont données par les relations :

$$\forall\, \eta \;=\; 1,\, ...,\, D \;:\; X^\gamma \;=\; \sum_{\alpha<\beta=2}^{\gamma=D} A^\gamma_{\alpha\beta} \,.\, (a^\alpha \,.\, x^\beta \;-\; a^\beta \,.\, x^\alpha)$$

... et l'involution se traduit par :

$$\mathbf{a} \,\in\, E(D,\, K) \;:\; [\mathbf{a}, \sum_{\gamma=1}^{\gamma=D} X^\gamma \,.\, \mathbf{e}_\gamma]_A \;=\; \mathbf{x}$$

Ou, plus précisément encore, par :

$$\forall\, \eta \;=\; 1,\, ...,\, D \;:$$

$$\sum_{\delta<\gamma=2}^{\gamma=D} A^\eta_{\delta\gamma} \,.\, \{a^\delta \,.\, \sum_{\alpha<\beta=2}^{\beta=D} A^\gamma_{\alpha\beta} \,.\, (a^\alpha \,.\, x^\beta - x^\alpha \,.\, a^\beta) - a^\gamma \,.\, \sum_{\alpha<\beta=2}^{\beta=D} A^\delta_{\alpha\beta} \,.\, (a^\alpha \,.\, x^\beta - x^\alpha \,.\, a^\beta)\}$$
$$=$$
$$x^\eta$$

En regroupant les facteurs semblables :

$$\sum_{\delta<\gamma=2}^{\gamma=D} A^\eta_{\delta\gamma} \,.\, \{ \sum_{\alpha<\beta=2}^{\beta=D} (A^\gamma_{\alpha\beta} \,.\, a^\delta \;-\; A^\delta_{\alpha\beta} \,.\, a^\gamma) \,.\, (a^\alpha \,.\, x^\beta \;-\; a^\beta \,.\, x^\alpha)\} \;=\; x^\eta$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{\alpha<\beta=2}^{\beta=D} \{ \sum_{\delta<\gamma=2}^{\gamma=D} A^\eta_{\delta\gamma} \,.\, (A^\gamma_{\alpha\beta} \,.\, a^\delta \;-\; A^\delta_{\alpha\beta} \,.\, a^\gamma) \,.\, (a^\alpha \,.\, x^\beta \;-\; a^\beta \,.\, x^\alpha)\} \;=\; x^\eta$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{\alpha<\beta=2}^{\beta=D} (\sum_{\delta<\gamma=2}^{\gamma=D} A^\eta_{\delta\gamma} \,.\, C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(A,\, \mathbf{a})) \,.\, (a^\alpha \,.\, x^\beta \;-\; x^\alpha \,.\, a^\beta) \;=\; x^\eta$$

...

$$C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(A,\,\mathbf{a}) \;=\; A^{\gamma}_{\alpha\beta}\,.\,a^{\delta} \;-\; A^{\delta}_{\alpha\beta}\,.\,a^{\gamma}$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{\alpha<\beta=2}^{\beta=D} B^{\eta}_{\alpha\beta}(A,\,\mathbf{a})\,.\,(a^{\alpha}\,.\,x^{\beta} \;-\; x^{\alpha}\,.\,a^{\beta}) \;=\; x^{\eta}$$

$$B^{\eta}_{\alpha\beta}(A,\,\mathbf{a}) \;=\; \sum_{\delta<\gamma=2}^{\gamma=D} A^{\eta}_{\delta\gamma}\,.\,C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(A,\,\mathbf{a})$$

Finalement :

$$\forall\,\eta = 1,\,...,\,D\;:\;\sum_{\alpha<\beta=2}^{\beta=D} B^{\eta}_{\alpha\beta}(A,\,\mathbf{a})\,.\,(a^{\alpha}\,.\,x^{\beta} \;-\; x^{\alpha}\,.\,a^{\beta}) \;=\; x^{\eta}$$

Il revient au même d'écrire :

$$Equ.(1)\;\Rightarrow\;\exists\,B(A,\,\mathbf{a})\,\in\,\boxplus\;:\;[\mathbf{a},\mathbf{x}]_{B(A,\,\mathbf{a})} \;=\; \mathbf{x}$$

Avec :

$$B^{\eta}_{\alpha\beta}(A,\,\mathbf{a}) \;=\; \sum_{\delta<\gamma=2}^{\gamma=D} A^{\eta}_{\delta\gamma}\,.\,C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(A,\,\mathbf{a})$$

Et :

$$C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}(A,\,\mathbf{a}) \;=\; A^{\gamma}_{\alpha\beta}\,.\,a^{\delta} \;-\; A^{\delta}_{\alpha\beta}\,.\,a^{\gamma}$$

2. Ensemble d'appartenance du cube B. Puisque le cube A est anti-symétrique :

$$C^{\gamma\delta}_{\beta\alpha} \;=\; A^{\gamma}_{\beta\alpha}\,.\,a^{\delta} \;-\; A^{\delta}_{\beta\alpha}\,.\,a^{\gamma} \;=\; -C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$$

Par ailleurs :

$$C^{\delta\gamma}_{\alpha\beta} \;=\; A^{\delta}_{\alpha\beta}\,.\,a^{\gamma} \;-\; A^{\gamma}_{\alpha\beta}\,.\,a^{\delta} \;=\; -C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$$

De sorte que :

1. Les composantes de l'hyper-cube C possèdent des anti-symétries semblables à celles qu'ont les composantes du tenseur de Riemann lorsque celui-ci est exprimé dans un espace de dimension quatre [01 ; §4.3.2, p. 110].

   Toutefois, avant de tirer de ce constat des conclusions abusives, il faut se souvenir que *cet hyper-cube n'est pas nécessairement un tenseur* et que ce travail se développe dans un environnement D-dimensionnel alors que la théorie de la relativité générale s'épanouit dans un univers quadridimensionnel.

   Pour autant, puisque les formulations quadri- et tri-dimensionnelles du tenseur de Riemann se laissent relier entre elles grâce à la célèbre formule de Gauss-Codazzi [02 ; p. 514, (21.75) et (21.76)], il pourra être ultérieurement intéressant de rechercher des circonstances mathématiques puis physiques autorisant à lier cet hyper-cube C au tenseur de Riemann.

2. La relation suivante s'applique :

$$B^{\eta}_{\beta\alpha} = \sum_{\delta<\gamma=2}^{\gamma=D} A^{\eta}_{\delta\gamma} \,.\, C^{\gamma\delta}_{\beta\alpha} = -\sum_{\delta<\gamma=2}^{\gamma=D} A^{\eta}_{\delta\gamma} \,.\, C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = -B^{\eta}_{\alpha\beta}$$

   Les indices bas du cube B sont donc aussi dotés de la propriété d'antisymétrie sur ses indices bas : B $\in \boxplus^{-}$.

3. Soit V = {E(D, K), $\otimes_A$, A $\in \boxplus^{-}$} et W = {E(D, K), $\otimes_B$, B $\in \boxplus^{-}$} ; un élément **a** de V involutif sur V se comporte comme le ferait un neutre à gauche sur W.

□

1.4 Lemme du neutre à gauche sur V.

Les résultats acquis au cours de la sous-section précédente peuvent se résumer sous la forme d'un lemme. Soit V = {E(D, K), $\otimes_A$, A $\in \boxplus^{-}$}, un espace vectoriel de dimension finie et entière D (i) bâti sur un corps commutatif K et (ii) doté d'un produit tensoriel déformé par un cube A dont les indices bas vérifient la propriété d'antisymétrie.

1. **Existence d'un crochet de Lie.** Le produit tensoriel déformé par le cube A $\in \boxplus^{-}$ définit de facto un produit de Lie déformé sur V.
2. **Absence de neutre.** Il n'existe pas de neutre sur V (en particulier, parce qu'il n'y en a pas à gauche).
3. **Définition des pseudo-neutres.** En revanche, il existe des sous-ensembles de V dont la dimension est forcément inférieure à D dont les éléments pourraient avoir un comportement mimant celui d'un neutre à gauche ; ces sous-ensembles se définissent via les deux relations suivantes et leurs éléments seront désormais qualifiés de *pseudo-neutre* à gauche :

$$\mathbf{n}_g \in V \,:\, {}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{n}_g >= -|\mathbf{a}>,\, A \in \boxplus^{-},\, |{}_A\Phi(\mathbf{a})| = 0$$

4. **La représentation duale d'un pseudo-neutre à gauche est une inversion.** Soit $\mathbf{n}_g$ un *pseudo-neutre* à gauche de V agissant sur un quelconque élément **...** de V. Cette action dans V se représente dans l'espace dual V* par une action à droite sur la représentation dans M(D, K) de l'application (A, **...**) et cette action duale aboutit à une inversion de l'argument de cette représentation :

$$[\mathbf{n}_g, ...]_A \rightarrow {}_A\Phi(...)\,.\,|\mathbf{n}_g >= -|...>,\, A \in \boxplus^{-},\, |{}_A\Phi(...)| = 0$$

5. **Absence de décomposition triviale pour les produits de Lie dont le projectile est un pseudo-neutre à gauche.** Soit, pour rappel du travail démarré dans [d], le schéma directeur expliquant le passage entre l'espace V et son dual V*, quelle que soit la nature du cube A, lorsque

la représentation duale de l'application linéaire (A, **a**) est une décomposition triviale ${}_A\Phi(\mathbf{a})$:

$$\begin{tikzcd}
(A,\, \mathbf{a}) \in Cubes \times V \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\Psi"] & & \\
\pi_A(\mathbf{a},\, .) \in L(V) \arrow[r, "rep"] \arrow[d, "*"] & rep(\pi_A(\mathbf{a},\, .)) = ({}_A\Phi(\mathbf{a}),\, \mathbf{0}) & \\
|\pi_A(\mathbf{a},\, .)> \in \underbrace{M(D,\, K) \times K^D}_{\subset K^D} \arrow[r, "\equiv"] & {}_A\Phi(\mathbf{a}) \,.\, |.> + |\mathbf{0}> \in V^* \arrow[u, "\zeta"] &
\end{tikzcd}$$

Le comportement d'un *pseudo-neutre* à gauche de V fait naître l'idée selon laquelle, dans l'espace des représentations duales, l'action répétée de ce pseudo-neutre à gauche redonne l'élément sur lequel s'applique son action ; plus précisément, à la double action dans V :

$$[\mathbf{n}_g,\, [\mathbf{n}_g,\, ...]_A]_A \;=\; [\mathbf{n}_g,\, ...]_A \;=\; ...$$

... semble correspondre une série d'actions oscillant entre V et V* et se laissant décrire par (une flèche rouge indique un passage de V vers V* et une flèche bleue un passage inverse de V* vers V) :

$$... \rightarrow {}_A\Phi(...) \,.\, |\mathbf{n}_g> = -|...> \;\rightarrow\; -\, ... \rightarrow {}_A\Phi(-...) \,.\, |\mathbf{n}_g> = |...> \;\rightarrow ...$$

Proposition 1.3. *Pour autant, à cause de la condition exigeant la nullité du déterminant de la représentation duale triviale de l'application (A, **a**), il n'existe pas de décomposition duale triviale pour un produit de Lie déformé par le cube A de $\boxplus^-$ lorsque le projectile est un pseudo-neutre à gauche de V.*

Concrètement :

$$[\mathbf{n}_g,\, ...]_A \;=\; -[...,\, \mathbf{n}_g]_A \;\in\; V \underbrace{\rightarrow}_{NON} -{}_A\Phi(...) \,.\, |\mathbf{n}_g> \in V^*$$

Démonstration. Si ceci était possible :

— Cette action livrerait dans V* la relation :

$$|[\mathbf{n}_g,\, ...]_A> = {}_A\Phi(\mathbf{n}_g) \,.\, |\mathbf{a}> = |\mathbf{a}>$$

Cette relation devant être vérifiée pour n'importe quel élément **a** de V, il faudrait nécéssairement que :

$${}_A\Phi(\mathbf{n}_g) \;=\; Id_D \;\Rightarrow\; |{}_A\Phi(\mathbf{n}_g)| \;=\; \pm 1 \neq 0$$

Il en résulterait que le déterminant de la représentation triviale duale vaudrait un et non pas zéro ; de sorte que l'élément $\mathbf{n}_g$ ne pourrait pas être dans V et qu'il ne pourrait donc pas en être un neutre ou un pseudo-neutre à gauche.

— La répétition de cette action livrerait dans V* la relation :

$$_A\Phi^2(...) \,=\, Id_D$$

Ce qui impliquerait :

$$|_A\Phi(...)|^2 \,=\, 1 \iff |_A\Phi(...)| \,=\, \pm 1 \neq 0$$

□

J'aurai l'occasion de revenir ultérieurement sur cette démonstration car elle servira de point de départ à une autre.

6. **Simplification du déterminant de la représentation duale non-triviale.** Soit $\mathrm{N}_g(\mathrm{V})$ l'ensemble des pseudo-neutres à gauche de V ; les acquis précédents permettent a minima de dire qu'il contient l'ensemble des éléments de V dont la représentation duale triviale a un déterminant nul :

$$\{\mathbf{n}_g \in V \,:\, |_A\Phi(\mathbf{n}_g)| \,=\, 0\} \,\subset\, N_g(V) \,\subset\, V$$

Il n'est pas certain que cet ensemble ne contienne pas encore d'autres éléments puisqu'il vient d'être démontré la nécessité d'écrire que les représentations duales doivent être non-triviales :

$$\begin{tikzcd}
(A,\, \mathbf{n}_g) \,\in\, Cubes \times V \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "\Psi"] & \\
\pi_A(\mathbf{n}_g,\, \centerdot) \,\in\, L(V) \arrow[r, "rep"] \arrow[d, "*"] & rep(\pi_A(\mathbf{n}_g,\, \centerdot)) = ([P],\, \mathbf{z}) \\
|\pi_A(\mathbf{n}_g,\, \centerdot) > \in \underbrace{M(D,\, K) \,\times\, K^D}_{\subset K^D} \arrow[r, "\equiv"] & [P]\,.\,|\centerdot > + |\mathbf{z} > \in V^* \arrow[u, "\zeta"]
\end{tikzcd}$$

Sachant qu'il existe au moins une méthode mathématique apte à fournir une paire ([P], **z**) lorsque V est équipé d'un produit scalaire non dégénéré représenté par la matrice inversible [E] (je viens de citer la méthode dite extrinséque de décomposition des produits tensoriels déformés ; voir [e ; section 2]) et que cette méthode fournit le formalisme générique suivant pour chaque paire ([P], **z**) obtenue lors de la décomposition du produit $[\mathbf{n}_g,\, \centerdot]_A$:

$$[P] \,=\, {}_A\Phi(\mathbf{n}_g) \,-\, \frac{1}{2}\,.\,[E]^{-1}\,.\,Hess_{\centerdot}P_2(\centerdot)$$

... la nullité du déterminant de la représentation duale triviale simplifie légèrement l'expression du déterminant de la représentation duale non-triviale :

$$|P| \,=\, |_A\Phi(\mathbf{n}_g) \,-\, \frac{1}{2}\,.\,[E]^{-1}\,.\,Hess_{\centerdot}P_2(\centerdot)| \,=\, ...$$

...

Exemple 1.2. *Le cas des espaces de dimension trois.*

Dans les espaces de dimension trois, les investigations précédentes ont en particulier permis de se rendre compte de la possibilité de calibrer la méthode extrinsèque avec une méthode intrinsèque [f]. Comme expliqué dans [e], il existe deux scénarios réalisant ce calibrage. A supposer que la polynomiale $\Lambda(\mathbf{n}_g) = |[\mathrm{P}] - {}_{[A]}\Phi(\mathbf{n}_g)|$ soit propre (synonyme : sa Hessienne n'est pas dégénérée), le scénario de jonction de type I livre un formalisme alternatif pour la partie principale ${}^{(3)}[\mathrm{P}]$ de la décomposition d'un produit vectoriel déformé prenant ici le visage [e ; Equ.(2), p.11] :

$$[P]_{|A|} = |A| \,.\, [A]^t \,.\, [J] \,.\, \{\frac{1}{2} \,.\, [Hess_{(\mathbf{n}_g,0)}\Lambda(\mathbf{n}_g)] + \frac{1}{|A|} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})\},\ \epsilon = \pm 1$$

Grâce :

— aux diverses relations établies au cours de l'élaboration de la méthode intrinsèque [f ; p. 9] :

$$[T] = \epsilon \,.\, [J]^t \,.\, ([A]^{-1})^t$$

$$[T]^t = \epsilon \,.\, [A]^{-1} \,.\, [J]$$

Ainsi que [f ; sous-section 1.6, p. 13] :

$$[T]^{-1} = \epsilon \,.\, [A]^t \,.\, [J]$$

Sans oublier [f ; p.14] :

$$|A|^2 = 1$$

— aux relations de jonction de type I établies au cours du calibrage [e ; Equ.(7), p. 12] :

$$[E]^{-1} = -\epsilon \,.\, [A]^t \,.\, [J]$$

Et [e ; Equ.(4) et (5)] :

$${}_{[A]}\Phi(\mathbf{n}_g) = [A]^t \,.\, [J] \,.\, {}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})$$

— aux relations liant les éléments du groupe cyclique U_6 :

$$[J]^2 = -[J]^t,\ [J]^3 = -Id_3,\ [J]^4 = -[J],\ [J]^5 = [J]^t,\ [J]^6 = Id_3$$

Il semble judicieux de remarquer finalement que :

$${}^{(3)}[E]^{-1} + {}^{(3)}[T]^{-1} = {}^{(3)}[0]$$

> Dès le moment où il est souhaité faire coincider les résultats livrés par la méthode extrinsèque et par la méthode intrinsèque pour un même produit vectoriel déformé par la matrice [A] de M(3, K) dans le cadre d'un scénario de type I, le choix de la forme quadratique supposée être représentée par la matrice non-dégénérée [E] définissant le produit scalaire sur V n'est pas libre.

Pour simplifier les écritures, il est permis de poser :

$$|A| = \epsilon = \pm 1$$

Ces constats permettent alors de relier rationellement le vecteur singulier ${}_{\Lambda}\mathbf{s}$ de la polynomiale propre $\Lambda(\mathbf{n}_g)$ au pseudo-neutre $\mathbf{n}_g$ par la relation matricielle :

$${}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s}) = [E] \, . \, {}_{\{[J]\,.\,([E]^{-1})^t\}}\Phi(\mathbf{n}_g)$$

Sachant par ailleurs que (voir les données élémentaires sur les produits vectoriels déformés) que de manière générale dans les espaces de dimension trois [g]) :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[X]} >= [X]^t \, . \, [J] \, . \, |\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2 >, \forall [X] \in M(3, K)$$

Il est assez facile d'en déduire que :

$${}_{[X]}\Phi(\mathbf{q}_1) = [X]^t \, . \, [J] \, . \, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_1)$$

L'application de cette relation générale au cas étudié ici fournit :

$${}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s}) = {}_{[J]}\Phi(\mathbf{n}_g) \Rightarrow {}_{\Lambda}\mathbf{s} = \mathbf{n}_g$$

J'en déduis au passage que :

Dès le moment où il est souhaité faire coincider les résultats livrés par la méthode extrinsèque et par la méthode intrinsèque pour un même produit vectoriel déformé par la matrice [A] de M(3, K) dans le cadre d'un scénario de type I, le neutre à gauche coincide avec le vecteur singulier de polynomiale propre $\Lambda(\mathbf{n}_g)$ et le déterminant de la représentation triviale du vecteur singulier est nul quand le vecteur $\mathbf{n}_g$ est un pseudo-neutre à gauche.

$$|{}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})| = |{}_{[J]}\Phi(\mathbf{n}_g)| = 0$$

Ce constat établit donc un lien fort entre la propriété de neutralité mathématique pour le produit vectoriel déformé et l'annulation de toutes les pentes d'une polynomiale propre. Il est tentant d'interpréter cette neutralité mathématique comme étant l'analogue d'un principe de minimisation ; les exemples physiques de minimisation ne manquent pas : minimisation de la longueur du parcours, minimisation de l'énergie dépensée, etc.

Tout ceci mène finalement à écrire :

$$[P]_{\epsilon} = -[E]^{-1} \, . \, \{\frac{1}{2} \, . \, [Hess_{(\mathbf{n}_g,0)}\Lambda(\mathbf{n}_g)] + \frac{1}{\epsilon} \, . \, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{n}_g)\}$$

Enfin, la méthode intrinsèque permet de calculer le déterminant des parties principales. Dans le cas des polynomiales propres continues, ce calcul livre ici :

$$|P| = - < \mathbf{n}_g, \, \mathbf{n}_g >_{[Hess_{(\mathbf{n}_g,0)}\Lambda(\mathbf{n}_g)]} - \frac{|Hess_{(\mathbf{n}_g,0)}\Lambda(\mathbf{n}_g)|}{8}$$

Avec la contrainte obligatoire signant le fait que la polynomiale Λ est propre :

$$|Hess_{(\mathbf{n}_g,0)}\Lambda(\mathbf{n}_g)| \neq 0$$

A priori, il peut donc exister des décompositions non-triviales de produits vectoriels du type $[\mathbf{n}_g, \boldsymbol{.}]_{[A]}$ dont le déterminant est occasionnellement nul ; c'est le cas lorsque simultanément :

$$< \mathbf{n}_g, \mathbf{n}_g >_{[Hess_{(\mathbf{n}_g,0)}\Lambda(\mathbf{n}_g)]} + \frac{|Hess_{(\mathbf{n}_g,0)}\Lambda(\mathbf{n}_g)|}{8} = 0$$

$$|Hess_{(\mathbf{n}_g,0)}\Lambda(\mathbf{n}_g)| \neq 0$$

J'ai démontré dans [h] que les parties principales de type I à déterminant nul permettent de bâtir des opérateurs quantiques.

7. Soit V = $\{$E(D, K), $\otimes_A$, A $\in \boxplus^-\}$ et W = $\{$E(D, K), $\otimes_B$, B $\in \boxplus^-\}$; un élément **a** de V involutif sur V pour l'application (A, **a**) se comporte comme un *pseudo-neutre* à gauche de W. Il est effectivement un pseudo-neutre à gauche de W dès le moment où, en plus, $|_B\Phi(\mathbf{a})| = 0$.

1.5 Conclusion.

Le document a mis un point d'honneur à explorer la question de l'élément neutre pour les algèbres involutives bâties sur des espaces vectoriels équipés d'un produit de Lie déformé.

Sans surprise, il a pu à nouveau démontrer l'absence de neutre sur ces algèbres. En revanche il a prouvé l'existence de pseudo-neutres à gauche, génériquement noté $\mathbf{n}_g$; il les a caractérisés et il a démontré par la logique que les produits de Lie déformés respectant la relation $[\mathbf{n}_g, \boldsymbol{.}]_A = \boldsymbol{.}$ n'avaient pas de décomposition triviale sur le dual de V = $\{$E(D, K), $\otimes_A$, A $\in \boxplus^-\}$.

En illustrant ensuite ces considérations générales au travers de l'exemple des espaces de dimension trois, il a pu enfin finaliser le calibrage de type I des méthodes de décomposition, voir [e], et préciser le formalisme des représentations duales non-triviales des décompositions des produits vectoriels du type $[\mathbf{n}_g, \boldsymbol{.}]_A$. Il a ainsi démontré l'existence, dans cette théorie, d'un lien conceptuel fort entre la pseudo-neutralité à gauche et un principe de minimalisation des variations autour de la décomposition duale triviale inexistante.

Enfin, il a rappelé que certaines des parties principales non-triviales pouvaient être des représentations d'opérateurs quantiques.

Chemin faisant, ce document a commencé à défricher les liens entre l'involution et la neutralité à gauche. L'exploration théorique de l'involution sur les algèbres équipés d'un produit de Lie déformé sera poursuivie dans d'autres documents.

©Thierry PERIAT, version du 18 novembre 2022.

Références

1.6 Travaux personnels.

[a] PERIAT, T. : Algèbres involutives de la théorie des produits tensoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-018-2, EAN 9782369230182, v1, 4 novembre 2022, 26 pages.

[b] PERIAT, T. : Sémantique de la Théorie de la Question (E) ; www.cosmoquant.fr/pages/fondations/outils-mathematiques... ; une page.

[c] PERIAT, T. : Données élémentaires sur l'anticommutativité ; ISBN 978-2-36923-086-1, EAN 9782369230861, v3, 1 août 2022, 28 pages.

[d] PERIAT, T. : Introduction au concept de décomposition des produits déformés ; ISBN 978-2-36923-002-1, EAN 9782369230021, v1, 7 novembre 2022, 6 pages.

[e] PERIAT, T. : Méthode extrinsèque de décomposition des produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-006-9, EAN 9782369230069, v1, 13 septembre 2022, 14 pages.

[f] PERIAT, T. : Méthode intrinsèque de décomposition des produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, v2, 14 août 2018, 27 pages.

[g] PERIAT, T. : Aspects mathématiques de la théorie des produits tensoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-028-1, EAN 9782369230281, v1, 25 octobre 2019, 12 pages.

[h] PERIAT, T. : Théorie quantique des champs appliquée aux produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-151-6, EAN 9782369231516, v1, 28 octobre 2022, 35 pages.

1.7 Ouvrages et cours consultés.

[01] Gourgoulhon, E. : Relativité Générale, parcours recherche, astronomie, astrophysique et ingénierie spatiale, cours de master 2, année 2012-2013 ; Observatoire de Paris, Universités Paris VI, Paris VII et Paris XI, 324 pages.

[02] M.T.W. : Gravitation, ©1973 by W. H. Freeman and Company.