Les algèbres involutives bâties sur des espaces équipés d'un produit de Lie déformé.

Compléments sur les algèbres involutives bâties sur des espaces équipés d'un produit vectoriel déformé et problèmes fondamentaux.

Collection : "La Théorie de la Question (E)"

©Thierry PERIAT.

23 novembre 2022

©Thierry PERIAT : Les algèbres involutives bâties sur des espaces équipés d'un produit de Lie déformé ; compléments sur les algèbres involutives bâties sur des espaces équipés d'un produit vectoriel déformé et problèmes fondamentaux, ISBN 978-2-36923-005-2, EAN 9782369230052, collection "La Théorie de la Question (E)".

Table des matières

1 Ensemble de données élémentaires.

1.1 Objectif.

Je poursuis ici ce que j'ai nommé la piste de l'involution. Les deux premiers chapitres ont permis de définir les caractéristiques de l'involution pour les espaces équipés d'un produit tensoriel déformé [a - 1] et de préciser la notion de pseudo-neutre à gauche [a - 2].

Dans ce document, il s'agit seulement de compléter les premiers résultats acquis sur les espaces de dimension trois équipés d'un produit vectoriel déformé et de repositionner la recherche d'algèbres involutives sur les espaces dotés d'un produit de Lie déformé dans un contexte théorique plus général en lien avec celui des algèbres de Lie.

1.2 Normalisation des écritures en dimension trois.

Proposition 1.1. *Les cubes (3-3-3) antisymétriques se réduisent à des éléments de M(3, K).*

Démonstration. Elle est assez simple. En partant du principe que le corps K est de caractéristique différente de deux, et en se rendant compte que tout cube de type (3-3-3) est la superposition de trois matrices carrée (3-3), il devient facile de comprendre que chaque matrice constitant un cube antisymétrique est antisymétrique. Par suite, sa diagonale est nulle et elle ne contient au plus que trois entrées distinctes. En considérant les trois matrices de ce type dont un élément A de $\boxplus^-$ est constitué, j'obtiens neuf (trois fois trois) scalaires que je peux repositionner de manière arbitraire dans un élément de M(3, K). □

Proposition 1.2. *Les composantes de toute matrice [A] de M(3, K = R ou C) résultant de l'anti-symétrisation des indices bas (équiv. de la réduction) d'un cube A de type (3-3-3) peuvent toujours se réécrire de manière normalisée.*

Démonstration. Les neuf entrées non forcément nulles du cube A de type (3-3-3) initial peuvent toujours être regroupées, *par convention de classement et de l'écriture*, comme suit :

$$[A] = \begin{bmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_3 & A^2_3 & A^3_3 \\ A^1_1 & A^2_1 & A^3_1 \\ A^1_2 & A^2_2 & A^3_2 \end{bmatrix}$$

Cette particularité de l'écriture résulte du fait que toute paire d'indices (α, β) pris dans le sous-ensemble $\mathrm{Ind}_3 = \{1, 2, 3\}$ des entiers naturels de telle sorte que $\alpha < \beta$ peut toujours se remplacer par l'indice absent de cette paire ; soit par exemple ϵ cet indice absent. □

De toute évidence, l'écriture normalisée obtenue de la sorte ne coincide pas avec la convention *ligne - colonne* habituellement utilisée dans la littérature mathématique ; à savoir :

$$\begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix} = [A^\diamond]$$

Proposition 1.3. *La convention ligne - colonne peut être respectée en introduisant la matrice :*

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \; |K| = 1$$

Démonstration. Cette affirmation se vérifie aisément en constatant que :

$$[A] = \{[A^\diamond] \, . \, [K]\}^t$$

La matrice transposée $[\mathrm{K}]^t$ est l'une des trois matrices représentant le groupe des tétraèdres dans les espaces de dimension trois [01 ; annex J, pp. 653-655]. Elle est aussi un élément générant le groupe cyclique U3 [02 ; p.18] (Z3 dans la langue allemande). Par convention du langage, la matrice [A] est la *matrice déformante*, $[\mathrm{A}]^t$.[J] est la *matrice déformante effective* et enfin $[\mathrm{A}^\diamond]$ est la *matrice déformante normalisée* ; finalement toutes ces matrices sont liées entre elles par la relation :

$$[A]^t \, . \, [J] = [A^\diamond] \, . \, [K] \, . \, [J]$$

□

1.3 Caractérisation de l'involution dans les espaces de dimension trois.

L'application des relations générales trouvées dans [a - 2] aux espaces de dimension trois permet de définir l'involution par :

$$\eta = 1, 2, 3 : \sum_{\alpha<\beta=2}^{3} B^\eta_{\alpha\beta} \, . \, (a^\alpha \, . \, x^\beta - x^\alpha \, . \, a^\beta) = x^\eta$$

avec :

$$B^\eta_{\alpha\beta} = \sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^\eta_{\delta\gamma} \, . \, C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \, ; \, C^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} = A^\gamma_{\alpha\beta} \, . \, a^\delta - A^\delta_{\alpha\beta} \, . \, a^\gamma$$

Ceci peut être réécrit avec l'aide de la matrice [B([A], **a**)] :

$$[\mathbf{a}, \mathbf{x}]_{[B([A], \mathbf{a})]} = \mathbf{x}$$

avec :

$$B^\eta_{\alpha\beta} = \sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^\eta_{\delta\gamma} \, . \, (A^\gamma_{\alpha\beta} \, . \, a^\delta - A^\delta_{\alpha\beta} \, . \, a^\gamma)$$

La normalisation des écritures conduit à réécrire les entrées de la matrice [B([A], **a**)] de façon simplifiée :

$$B^\eta_\epsilon = \sum_{\delta<\gamma=2}^{3} A^\eta_{\delta\gamma} \,.\, C^{\gamma\delta}_\epsilon \,;\, C^{\gamma\delta}_\epsilon = A^\gamma_\epsilon \,.\, a^\delta - A^\delta_\epsilon \,.\, a^\gamma = A^{[\gamma}_\epsilon \,.\, a^{\delta]}$$

Et, en écrivant $(\gamma\delta) \equiv \mu$, à :

$$B^\eta_\epsilon = \sum_{\mu=1}^{3} A^\eta_\mu \,.\, C^\mu_\epsilon$$

Ou, de façon condensée :

$$[B^\diamond] = [A^\diamond] \,.\, [C^\diamond]$$

1.4 La matrice normalisée [C$^\diamond$].

Au sein d'une discussion dans laquelle les indices doivent être choisis dans Ind$_3$, l'indice μ constitué par la concaténation d'une paire d'indices obligatoirement distincts est forcément celui qui n'apparait pas déjà dans la paire en question ; de sorte que :

$$\mu = 1 : C^{(2,3)}_\epsilon = C^1_\epsilon = A^2_\epsilon \,.\, a^3 - A^3_\epsilon \,.\, a^2 = A^{[2}_\epsilon \,.\, a^{3]}$$

$$\mu = 2 : C^{(3,1)}_\epsilon = C^2_\epsilon = A^3_\epsilon \,.\, a^1 - A^1_\epsilon \,.\, a^3 = A^{[3}_\epsilon \,.\, a^{1]}$$

$$\mu = 3 : C^{(1,2)}_\epsilon = C^3_\epsilon = A^1_\epsilon \,.\, a^2 - A^2_\epsilon \,.\, a^1 = A^{[1}_\epsilon \,.\, a^{2]}$$

En disposant les entrées dans le respect de la convention *ligne - colonne*, je trouve les neuf relations suivantes :

$$C^1_1 = A^2_1 \,.\, a^3 - A^3_1 \,.\, a^2 \,;\, C^1_2 = A^2_2 \,.\, a^3 - A^3_2 \,.\, a^2 \,;\, C^1_3 = A^2_3 \,.\, a^3 - A^3_3 \,.\, a^2$$

$$C^2_1 = A^3_1 \,.\, a^1 - A^1_1 \,.\, a^3 \,;\, C^2_2 = A^3_2 \,.\, a^1 - A^1_2 \,.\, a^3 \,;\, C^2_3 = A^3_3 \,.\, a^1 - A^1_3 \,.\, a^3$$

$$C^3_1 = A^1_1 \,.\, a^2 - A^2_1 \,.\, a^1 \,;\, C^3_2 = A^1_2 \,.\, a^2 - A^2_2 \,.\, a^1 \,;\, C^3_3 = A^1_3 \,.\, a^2 - A^2_3 \,.\, a^1$$

Elles se laissent condenser en :

$$[C^\diamond] = \begin{bmatrix} 0 & a^3 & -a^2 \\ -a^3 & 0 & a^1 \\ a^2 & -a^1 & 0 \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix}$$

Ou encore :

$$[C^\diamond] = {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) \,.\, [A^\diamond]$$

1.5 Interprétation de la matrice normalisée [C$^\diamond$] dans le cadre de la théorie des spineurs d'E. Cartan.

Le formalisme normalisé de l'hyper-cube C, in extenso : la matrice [C$^\diamond$], permet d'écrire par transposition à cause de l'antisymétrie naturelle de la matrice rotation ${}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})$:

$$[C^\diamond]^t \;=\; -[A^\diamond]^t \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})$$

De sorte que, par addition :

$$\frac{1}{2}\,.\,\{[C^\diamond] \,+\, [C^\diamond]^t\} \;=\; -\frac{1}{2}\,.\,\{[A^\diamond]^t \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) \,-\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})\,.\,[A^\diamond]\}$$

L'objet mathématique placé à gauche du signe de l'égalité représente la partie symétrique de la matrice [C$^\diamond$]. La matrice placée à droite évoque les réflexions d'E. Cartan exposées dans [03 ; chapitre IX, pp. 145-147, (1)] à cause de la présence de la matrice rotation ${}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})$.

La similitude des écritures est complète chaque fois que (i) la représentation normalisée de la matrice déformante [A] est symétrique et (ii) l'argument **a** de la rotation est un infiniment petit. Dans ce cas, la partie symétrique de la matrice [C$^\diamond$] impliquée dans la description d'une involution est aussi une représentation de la variation infinitésimale de la matrice déformante normalisée [A$^\diamond$] ; en clair :

$$\{[A^\diamond]^t \,=\, [A^\diamond],\, arg({}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})) \,\sim\, 0\} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\,.\,\{[C^\diamond]^t \,+\, [C^\diamond]^t\} \;=\; -\delta[A^\diamond]$$

1.6 La matrice normalisée [B$^\diamond$].

Il devient dès lors facile d'en déduire une expression normalisée de la matrice [B] dont il sera fait usage plus tard dans ce document :

$$[B^\diamond] \;=\; [A^\diamond]\,.\,[C^\diamond] \;=\; [A^\diamond]\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})\,.\,[A^\diamond]$$

Proposition 1.4. *L'involution ne transforme jamais la matrice déformante normalisée [$A^\diamond$] en la matrice identité Id_3.*

Démonstration. Le déterminant de la matrice rotation ${}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})$ est toujours nul, quel que soit son argument :

$$\forall\,\mathbf{a}\,:\, |{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})| \;=\; -a^3\,.\,(-a^2\,.\,a^1) \,-\, a^2\,.\,(-a^3\,.\,-a^1) \,=\, 0 \;\Rightarrow\; |C^\diamond| \,=\, 0 \,\neq\, 1$$

Par conséquent, ni le déterminant de la matrice normalisée [C$^\diamond$], ni celui de la matrice normalisée [B$^\diamond$], ne peut être égal à plus un qui est la valeur du déterminant de la matrice identité Id$_3$. □

En revanche, quelle que soit la matrice déformante normalisée [A$^\diamond$], in extenso : que son déterminant soit ou non nul, la matrice [B([A], **a**)] résultant du comportement involutif de la paire ([A], **a**) a toujours un déterminant nul lorsque j'écris la relation :

$$([A],\mathbf{a}) \,\in\, M(3,\,K) \,\times\, V \,:\, \exists\,\mathbf{x} \in V \;:\; [\mathbf{a},\,[\mathbf{a},\mathbf{x}]_A]_A \;=\; [\mathbf{a},\mathbf{x}]_{[B([A],\,\mathbf{a})]} \;=\; \mathbf{x}$$

De sorte que, même si le vecteur **a** n'est pas un pseudo-neutre à gauche dans V = {E(D, K), $\otimes_{[A]}$, A $\in$ M(3, K)}, l'involution le contraint à le devenir dans W = {E(3, K), $\otimes_{[B]}$, B $\in$ M(3, K)} ; il en résulte :

$$\forall\, |_{[A]}\Phi(\mathbf{a})| \;:\; |[B([A],\,\mathbf{a})]| \;=\; |_{[B([A],\,\mathbf{a})]}\Phi(\mathbf{a})| \;=\; 0$$

1.7 Interprétation de l'involution dans le cadre de la théorie de la relativité générale.

Dans [a - 2 ; p.6, §2.1], j'ai constaté que l'hyper-cube (D-D-D-D) noté C présentait des anti-symétries permettant d'évoquer une similitude avec l'hyper-cube (4-4-4-4) des composantes du tenseur de Riemann exprimé dans un espace de dimension quatre.

Comme il est rappelé dans [04 ; p.82, § avant l'Equ.(4)], n'importe quel tenseur ayant ces propriétés dans un espace de dimension quatre peut servir à définir une métrique locale dans un espace de dimension six E_6 de bivecteurs aussi longtemps que le tenseur de second ordre qui lui est associé n'est pas singulier.

Les travaux initiés par A. Z. Petrov entre 1950 et 1960 (par exemple dans [04]) ont évolué ensuite vers la classification de Petrov-Penrose concernant les spineurs. Ils ont permis de dégager des travaux d'A. Einstein un sous-ensemble intéressant de situations physiques ; précisément : celles pour lesquelles le tenseur de Ricci est nul. Cet auteur a pu démontré qu'il était alors possible de réduire le tenseur de Riemann (quadri-dimensionnel) à une matrice symétrique de M(3, C) ; voir, en allemand : [05 ; §92, pp. 312-319].

Sachant que les données astronomiques actuelles encouragent à penser que notre univers est globalement plat et vide, il devient raisonnable de réfléchir dans le cadre de la logique thermodynamique et d'affirmer que les volumes vides et plats de cet univers représentent statistiquement les situations de loin les plus probables ; voir par exemple [06].

Ce constat encourage également à envisager, ne serait-ce qu'à titre pédagogique, une identification entre une représentation normalisée symétrique de l'hyper-cube C impliqué dans la description de l'involution et ce que je nommerai une matrice de Petrov :

$$[C^\diamond]^t \;=\; [C^\diamond] \;=\; [D(Petrov)[05; p.316, (92, 17)]]$$

Pour pouvoir envisager cette identification, la forme normalisée de l'hyper-cube doit être symétrique. Comme la matrice rotation $_{[J]}\Phi(\mathbf{a})$ est naturellement antisymétrique, l'identification évoquée ici ne peut concerner que des matrices déformantes dont la représentation normalisée [A$^\diamond$] satisfait la condition :

$$\{[A^\diamond]^t \,.\, _{[J]}\Phi(\mathbf{a}) \;+\; _{[J]}\Phi(\mathbf{a}) \,.\, [A^\diamond]\} \;=\; ^{(3)}[0]$$

Cette condition nécessaire à pouvoir confronter la question de l'involution algébrique avec les travaux de Petrov permet de mettre en exergue deux sous-ensembles de situations :

1. Celles pour lesquelles la représentation normalisée [A$^\diamond$] est antisymétrique :
$$[A^\diamond]^t \,=\, -[A^\diamond] \,\Rightarrow\, [A^\diamond]\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) \,=\, _{[J]}\Phi(\mathbf{a})\,.\,[A^\diamond]$$
Auquel cas la représentation normalisée [A$^\diamond$] commute avec la matrice rotation $_{[J]}\Phi(\mathbf{a})$.
2. Celles pour lesquelles la représentation normalisée [A$^\diamond$] est symétrique :
$$[A^\diamond]^t \,=\, [A^\diamond] \,\Rightarrow\, [A^\diamond]\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{a}) \,=\, -_{[J]}\Phi(\mathbf{a})\,.\,[A^\diamond]$$
Auquel cas la représentation normalisée [A$^\diamond$] anticommute avec la matrice rotation $_{[J]}\Phi(\mathbf{a})$.

2 De l'usage calibré des méthodes de décomposition.

Il est possible de prolonger les résultats de la sous-section précédente en faisant intervenir ceux qu'induit l'usage calibré des méthodes de décomposition [e] et [f].

2.1 Complément sur le formalisme des décompositions non-triviales.

Toujours dans ce contexte particulier, il faut écrire pour les calibrages de type I que [a - 2 ; exemple 1.2, p.10] :

$$[E]^{-1} \,=\, -\epsilon\,.\,[A]^t\,.\,[J] \,=\, -\epsilon\,.\,[A^\diamond]\,.\,[K]\,.\,[J]$$

Et :
$$[P]_\epsilon \,=\, -[E]^{-1}\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})] \,+\, \frac{1}{\epsilon}\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{a})\}$$
Je note au passage parce que ce fait aura son importance ultérieurement :

$$|[E]^{-1}| \,=\, -\epsilon\,.\,|[A]^t|\,.\,|J| \,=\, -\epsilon\,.\,|A|\,.\,-1 \,=\, \pm 1$$

Un calcul simple utilisant la relation de continuité concernant les décompositions triviales mène à :

$$[P] \,=\, _{[A]}\Phi(\mathbf{a}) \,-\, \frac{1}{2}\,.\,[E]^{-1}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})]$$

Or la représentation de la partie principale de la décomposition non-triviale du produit vectoriel $[\mathbf{a},\,\mathbf{x}]_{[A]}$ résultant de l'usage de la méthode extrinsèque s'écrit [e ; remarque 2.3] :

$$[P] \,=\, _{[A]}\Phi(\mathbf{a}) \,-\, \frac{1}{2}\,.\,[E]^{-1}\,.\,[Hess_{(\mathbf{x},\,0)}\Xi(\mathbf{x})]$$

La cohérence du calibrage de type I lorsque l'argument **a** est un pseudo-neutre à gauche (synonyme : le vecteur singulier de la polynomiale Λ) impose donc de choisir les éléments **x** de telle sorte que :

$$[E]^{-1} . \{[Hess_{(\mathbf{x},\,0)}\Xi(\mathbf{x})] \,-\, [Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})]\} \,=\, {}^{(3)}[0]$$

L'égalité des Hessiennes des polynomiales auxquelles appartiennent les arguments de la paire ($\mathbf{a}$, $\mathbf{x}$) représente ainsi un cas particulier intéressant de ce type de calibrage puisqu'il permet de relier $\Xi(\mathbf{x})$ et $\Lambda(\mathbf{a})$ et notemment d'exprimer la partie vectorielle résiduelle de la décomposition non-triviale en partant de [e ; remarque 2.3] :

$$|\mathbf{z} >= [E]^{-1} . |\mathbf{Grad_x}\Xi(\mathbf{x}) >$$

Dans le cas général, il faut absolument que le déterminant de la différence des Hessiennes soit nul :

$$|[Hess_{(\mathbf{x},\,0)}\Xi(\mathbf{x})] \,-\, [Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})]| \,=\, 0$$

2.2 Remarque logique sur la notion de neutralité à gauche.

L'égalité $[\mathbf{a},\, \mathbf{x}]_{[A]} = \mathbf{x}$ caractérise la quasi-neutralité à gauche du vecteur **a** de V par rapport au vecteur **x**. Elle autorise toujours à écrire $[\mathbf{x},\, \mathbf{a}]_{[A]} =$ -**x**. Ce qui ne permet pas de dire que **x** se comporte comme un pseudo-neutre à gauche par rapport au vecteur **a**. Le vecteur **x** se comporterait comme un pseudo-neutre à gauche par rapport au vecteur **a** si l'égalité -$\mathbf{x} = \mathbf{a}$ était vérifiée ; auquel cas le produit étudié serait nul et, sauf s'il est nul, le vecteur **x** ne serait plus neutre à gauche pour le vecteur **a** et vis-versa. Tout ceci pour dire que la fonction *être neutre à gauche par rapport à* n'est pas réflexive et que l'étude des pseudo-neutres à gauche ne force pas à faire interagir la fonction $[\mathbf{a},\, ...]_{[A]}$ avec un élément du sous-ensemble $\mathrm{N}_g(\mathrm{V})$ des neutres à gauche.

2.3 Décompositions possibles dans le cadre de l'involution.

La relation signant le caractère involutif de la paire ([A], **a**) vis-à-vis du vecteur **x** sans que le vecteur **a** soit un pseudo-neutre à gauche vis-à-vis de ce vecteur, s'écrit (rappel) :

$$([A], \mathbf{a}) \,\in\, M(3,\, K) \,\times\, V : \exists\, \mathbf{x} \in\, V \;:\; [\mathbf{a},\, [\mathbf{a}, \mathbf{x}]_A]_A \,=\, [\mathbf{a}, \mathbf{x}]_{[B([A],\, \mathbf{a})]} \,=\, \mathbf{x}$$

Le vecteur **a** est un élément de $\mathrm{N}_g(\mathrm{W})$; il faut donc tenir compte de l'obligation de décomposer les produits vectoriels du type $[\mathbf{a},\, ...]_{[B]}$ non-trivialement,

Pour autant, un problème technique surgit parce que :

Proposition 2.1. *Il n'est pas possible d'utiliser les décompositions dont les parties principales non-triviales sont de type I.*

Démonstration. Il est important de se remémorer la structure formelle des parties principales des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés. Le fait qu'elles aient été obtenues à l'aide de la méthode intrinsèque ou

...

de la méthode extrinsèque ne joue plus aucun rôle lorsqu'un calibrage des deux méthodes est possible et réalisé. Si c'était effectivement le cas ici, il faudrait en principe écrire :

$$|[\mathbf{a},\mathbf{x}]_{[B([A],\,\mathbf{a})]} >$$

$$=$$

$$-[F]^{-1}\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})] \,+\, \frac{1}{\epsilon}\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})\}\,.\,|\mathbf{x}> \,+|...>$$

Avec en particulier ici :

$$[F]^{-1}$$

$$=$$

$$-\epsilon\,.\,[B]^t\,.\,[J]$$

$$=$$

$$-\epsilon\,.\,[B^\diamond]\,.\,[K]\,.\,[J]$$

$$=$$

$$-\epsilon\,.\,[A^\diamond]\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})\,.\,[A^\diamond]\,.\,[K]\,.\,[J]$$

Le déterminant du produit matriciel placé à droite du signe de l'égalité est nul à cause de la présence de la matrice rotation :

$$|[F]^{-1}| \,=\, 0 \,\neq\, \pm 1$$

Or, les parties principales non-triviales utilisées pour aboutir au formalisme utilisé ci-dessus sont de type I, voir [a - 2] ; concrètement, elles correspondent aux décompositions de produits vectoriels déformés associées avec des polynomiales propres et leur structure formelle est telle que, voir [f] et [a - 2] :

$$[P] \,=\, \underbrace{-[E]^{-1}}_{tel\,que\,:\,-|E^{-1}|\,=\,\pm 1\,\neq\,0}\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,\underbrace{[Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})]}_{|Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})|\,\neq\,0} + \frac{1}{\epsilon}\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a})\}$$

Par conséquent, le fait que *la partie déformante* (le premier facteur du produit matriciel ci-dessus) a un déterminant nul dans le cas de l'involution constitue une obstruction à l'usage du raisonnement tenu dans [a - 2]. □

Proposition 2.2. *L'usage d'un calibrage tel qu'il est expliquè dans [e] implique l'existence d'une relation de continuité entre les décompositions triviales des produits vectoriels déformés de diverses manières et la validité de cette relation interdit d'envisager des décompositions triviales dans V.*

Démonstration. Comme le vecteur **a** est a priori quelconque dans V quand il sert à définir une involution, il peut sembler sensé de penser qu'il n'est pas interdit d'envisager l'existence des décompositions triviales des produits vectoriels du type $[\mathbf{a},\,\mathbf{x}]_{[A]}$ sur V ; concrètement qu'il soit permis d'écrire :

$$\exists\,{}_{[A]}\Phi(\mathbf{a})\,:\,|[\mathbf{a},\mathbf{x}]_A> =\,{}_{[A]}\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{x}>$$

$$\exists\,_{[A]}\Phi(\mathbf{a})\,:\,|[\mathbf{a},[\mathbf{a},\mathbf{x}]_A]_A]>=\,_{[A]}\Phi(\mathbf{a})\,.\,\{_{[A]}\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{x}>\}\,=\,_{[A]}\Phi^2(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{x}>$$

Or, comme je l'ai rappelé dans [a - 2], la réalisation des calibrages de type I et II exige la validité de la relation de continuité :

$$_{[A]}\Phi(\mathbf{a})\,=\,[A]^t\,.\,[J]\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{a}),\,|A|\,=\,\pm 1$$

Il en résulte que le déterminant de la représentation duale triviale de la paire ([A], **a**) doit être nul puisque celui de la représentation duale triviale de la paire ([J], **a**) l'est ; voir ci-dessus démonstration de la proposition 1.4 :

$$|_{[A]}\Phi(\mathbf{a})|\,=\,0$$

Dans ce contexte, l'argument vectoriel de toute paire ([A], **a**) peut toujours être interprété comme un peudo-neutre à gauche dans V et sa représentation duale triviale de la paire ([A], **a**) n'existe pas ; voir la démonstration de la proposition 1.3 dans [a - 2]. □

3 La nécessité de contourner les obstructions pour progresser sur la route de l'involution.

Les deux dernières propositions constituent une obstruction de taille à la démarche de calibrage présentée dans [e] et pauffinée dans [a - 2]. Elles obligent à reconsidérer les raisonnements faits depuis le début. Le début de la démarche suivie jusqu'à ce jour peut se schématiser par :

$$\begin{tikzcd}
|[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2]_{[A]}>=\,[A]^t\,.\,[J]\,.\,|\mathbf{q}_1\,\wedge\,\mathbf{q}_2> \arrow[r, "Si\,\exists\,([P],\mathbf{z})"] \arrow[d] & |[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2]_{[A]}>=\,[P]\,.\,|\mathbf{q}_2>+|\mathbf{z}> \arrow[d, "Alors"] \\
_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1)\,=\,[A]^t\,.\,[J]\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_1),\,|A|\,=\,\pm 1 \arrow[dr] & \Lambda(\mathbf{q}_1)=|[P]-_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1)| \arrow[d] \\
 & \Lambda(\mathbf{q}_1)=|[P]-[A]^t\,.\,[J]\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_1)|
\end{tikzcd}$$

La méthode extrinsèque fait trois hypothèses réalistes : (i) la géométrie locale joue un rôle dans les calculs humains ; (ii) la décomposition est approximative et (iii) il est légitime de rechercher une polynomiale P_1 dont le développement limité à l'ordre deux se laisse raisonnablement comparer avec l'erreur de réalisation, s_1, de la décomposition ([P], **z**) dont l'existence est présumée.

3.1 Un premier scénario de contournement des obstructions.

Dans un état d'esprit similaire, il existe une manière alternative de procéder en supposant que : (i) la géométrie locale joue un rôle dans les calculs humains ; (ii) la décomposition est approximative et (iii) un moyen de lever l'indétermination consiste à identifier de force la possible erreur, s_1, avec la polynomiale Λ

résultant obligatoirement de l'existence de la décomposition (i. e. à poser $s_1 = \Lambda_1$) puis à minimiser cette erreur (i. e. à poser $s_1 \to 0$) :

$$\begin{array}{ccc}
|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >= [A]^t \,.\, [J] \,.\, |\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2 > & \xrightarrow{Si\,\exists\,([P], \mathbf{z})} & |[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >= [P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > +|\mathbf{z} > \\
\Big\downarrow{\scriptstyle Si\,\exists\,([P], \mathbf{z}, s)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle Alors} \\
s_1 =< \mathbf{q}_1|, |[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} > - \{[P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > +|\mathbf{z} >\} >_{[G]} & \longleftrightarrow & \Lambda(\mathbf{q}_1) = |[P] -_{[A]} \Phi(\mathbf{q}_1)|
\end{array}$$

La première étape de ce scénario ($s_1 = \Lambda_1$) mène à poser trois relations (une par degré) :

$$s_1 \,=\, \Lambda(\mathbf{q}_1) \,-\, |P|$$

$$-[G] \,.\, \{[P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > +|\mathbf{z} >\} \,=\, \mathbf{d}$$

$$[G] \,.\,_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1) \,=\, [D]$$

Pratiquer de la sorte ne dit cependant encore rien sur la ou sur les façons de découvrir les inconnues de la question (E), [P] et $\mathbf{z}$, en fonction des données connues : $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, [G], [A].

3.2 Réalisation du scénario.

Pour minimiser au maximum l'erreur il convient de faire tendre le scalaire associé au projectile vers zéro : $s_1 \to 0$.

La troisième relation, alliée à la relation de continuité liant les décompositions triviales, permet de voir que la matrice des coefficients de degré deux de la polynomiale Λ est toujours nul dans le cadre du nouveau scénario :

$$|D| \,=\, 0$$

Définition 3.1. ***Table de Pythagore construite autour du produit tensoriel classique.***

Soit $\mathbf{h}$ et $\mathbf{g}$ deux vecteurs quelconques de E(3, K = R ou C). Une table de Pythagore construite autour du produit tensoriel classique est un élément de M(3, C) comparable à une table de multiplication liant les arguments de la paire ($\mathbf{h}$, $\mathbf{g}$) à l'aide de la multiplication définie sur R (ou C) de la façon suivante :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \,=\, \begin{bmatrix} h^1 \,.\, g^1 & h^2 \,.\, g^1 & h^3 \,.\, g^1 \\ h^1 \,.\, g^2 & h^2 \,.\, g^2 & h^3 \,.\, g^2 \\ h^1 \,.\, g^3 & h^2 \,.\, g^3 & h^3 \,.\, g^3 \end{bmatrix}$$

J'en infère que n'importe quelle paire ($\mathbf{h}$, $\mathbf{g}$) de $E^2(3, K)$ permet de construire une table de Pythagore bâtie autour du produit tensoriel classique et je constate que :

$$\forall\,(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \,\in\, E^2(3,\, K) \,:\, |T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})| \,=\, 0$$

Par conséquent, n'importe laquelle de ces paires peut servir à définir une matrice [D] des coefficients de degré deux dans le cadre du scénario que je suis en train d'examiner ; ce sera la première illustration du scénario proposé.

L'investigation menée dans [f] livre une autre information importante toujours vraie, à savoir :

$$[Hess_{(\mathbf{q}_1,\,0)}\Lambda(\mathbf{q}_1)] \,=\, [D] \,+\, [D]^t$$

Elle est obtenue en dérivant deux fois de manière ordinaire la polynomiale Λ tout en supposant que ses coefficients ne varient pas avec les composantes du projectile $\mathbf{q}_1$; j'en déduis :

$$[G]\,.\,_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1) \,+\, _{[A]}\Phi^t(\mathbf{q}_1)\,.\,[G]^t \,=\, [Hess_{(\mathbf{q}_1,\,0)}\Lambda(\mathbf{q}_1)]$$

De plus dans le cas de l'illustration du scénario à l'aide d'une table de Pythagore classique :

$$\exists\,(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,\in\, E^2(3,\,K)\,:\,[D] \,=\, T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})$$

... et je constate que cette hypothèse mène à :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,+\, T_2^t(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,=\, [Hess_{(\mathbf{q}_1,\,0)}\Lambda(\mathbf{q}_1)]$$

Proposition 3.1. *Le déterminant des Hessiennes associées à la première illustration du scénario alternatif est nul.*

Démonstration. Le calcul in extenso livre :

$$|T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,+\, T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h})|$$

$$=$$

$$\begin{vmatrix} 2.h^1.g^1 & h^2.g^1 \,+\, h^1.g^2 & h^3.g^1 \,+\, h^1.g^3 \\ h^2.g^1 \,+\, h^1.g^2 & 2.h^2.g^2 & h^3.g^2 \,+\, h^2.g^3 \\ h^3.g^1 \,+\, h^1.g^3 & h^2.g^3 \,+\, h^3.g^2 & 2.h^3.g^3 \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{vmatrix} A \,=\, 2.h^1.g^1 & B \,=\, h^2.g^1 \,+\, h^1.g^2 & C \,=\, h^3.g^1 \,+\, h^1.g^3 \\ B \,=\, h^2.g^1 \,+\, h^1.g^2 & D \,=\, 2.h^2.g^2 & E \,=\, h^3.g^2 \,+\, h^2.g^3 \\ C \,=\, h^3.g^1 \,+\, h^1.g^3 & E \,=\, h^2.g^3 \,+\, h^3.g^2 & F \,=\, 2.h^3.g^3 \end{vmatrix}$$

Par conséquent :

$$A\,.\,(D\,.\,F \,-\, E^2) \,-\, B\,.\,(B\,.\,F \,-\, C\,.\,E) \,+\, C\,.\,(B\,.\,E \,-\, C\,.\,D)$$

$$\begin{aligned} &= A\,.\,D\,.\,F \,-\, A\,.\,E^2 \,-\, B^2\,.\,F \,+\, B\,.\,C\,.\,E \,+\, C\,.\,B\,.\,E \,-\, C^2\,.\,D \\ &= \,-\,2.h^1.g^1\,.\,(h^3.g^2 \,+\, h^2.g^3)^2 \,-\, 2.h^2.g^2\,.\,(h^3.g^1 \,+\, h^1.g^3)^2 \\ &\quad -\,2.h^3.g^3\,.\,(h^2.g^1 \,+\, h^1.g^2)^2 \\ &\quad +\,8.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3 \,+\, 2.(h^2.g^1 \,+\, h^1.g^2)\,.\,(h^3.g^1 \\ &\quad +\,h^1.g^3)\,.\,(h^2.g^3 \,+\, h^3.g^2) \\ &= \,-2.h^1.g^1\,.\,(h^3.g^2)^2 \,-\, 2.h^1.g^1\,.\,(h^2.g^3)^2 \,-\, 4.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3 \\ &\quad -2.h^2.g^2\,.\,(h^3.g^1)^2 \,-\, 2.h^2.g^2\,.\,(h^1.g^3)^2 \,-\, 4.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3 \end{aligned}$$

$$-2.h^3.g^3\,.\,(h^1.g^2)^2\;-\;2.h^3.g^3\,.\,(h^2.g^1)^2\;-\;4.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$
$$+\,8.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$
$$+\,2.[h^2.h^3.(g^1)^2\;+\;h^2.h^1.g^1.g^3\;+\;h^1.h^3.g^1.g^2$$
$$+\,(h^1)^2.g^2.g^3]\,.\,(h^2.g^3\;+\;h^3.g^2)$$
$$=\;-2.h^1.g^1\,.\,(h^3.g^2)^2\;-\;2.h^1.g^1\,.\,(h^2.g^3)^2$$
$$-2.h^2.g^2\,.\,(h^3.g^1)^2\;-\;2.h^2.g^2\,.\,(h^1.g^3)^2$$
$$-2.h^3.g^3\,.\,(h^1.g^2)^2\;-\;2.h^3.g^3\,.\,(h^2.g^1)^2$$
$$-\,4.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$
$$+\,2.[h^3.g^3\,.\,(h^2.g^1)^2\;+\;h^1.g^1.(h^2.g^3)^2$$
$$+\,h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3\;+\;h^2.g^2\,.\,(h^1.g^3)^2]$$
$$+\,2.[h^2.g^2.(h^3.g^1)^2\;+\;h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$
$$+\,h^1.g^1\,.\,(h^3.g^2)^2\;+\;h^3.g^3\,.\,(h^1.g^2)^2]$$
$$=\;0$$

□

Proposition 3.2. *Le formalisme des tables de Pythagore est similaire à celui des parties principales des décompositions non-triviales obtenues par la méthode intrinsèque.*

Démonstration. Il est facile de constater que :

$$\forall\,\mathbf{h},\,\mathbf{g}\,\in\,E(3,\,C)\;:$$
$$T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})$$
$$=$$
$$\frac{1}{2}\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\;+\;T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h})\}\;+\;\frac{1}{2}\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\;-\;T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h})\}$$

... et de vérifier que :

$$\forall\,\mathbf{h},\,\mathbf{g}\,\in\,E(3,\,C)\;:$$
$${}_{[J]}\Phi(\frac{1}{2}\,.\,\mathbf{h}\,\wedge\,\mathbf{g})\;=\;\frac{1}{2}\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\;-\;T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h})\}$$

Par conséquent :

$$\forall\,\mathbf{h},\,\mathbf{g}\,\in\,E(3,\,C)\;:$$
$$T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\;=\;\frac{1}{2}\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\;+\;T_2^t(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\}\;+\;{}_{[J]}\Phi(\frac{1}{2}\,.\,\mathbf{h}\,\wedge\,\mathbf{g})$$

Ce formalisme s'apparente fortement à celui des *noyaux* des décompositions non-triviales obtenues pour les produits vectoriels déformés du type [**projectile**, ...]$_{[A]}$ par la méthode intrinsèque exposée dans [f]. Il s'identifie précisément avec lui chaque fois que les circonstances permettent :

— de découvrir une polynomiale P(**projectile**) telle que :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) + T_2^t(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) = Hess_{(\mathbf{projectile},0)}P(\mathbf{projectile})$$

C'est bien ce qui se passe dans le cadre du scénario alternatif exploré ici puisque :

$$P = \Lambda$$

— de considérer que la moitié du produit vectoriel classique $\mathbf{h} \wedge \mathbf{g}$ joue un rôle similaire à celui du vecteur singulier d'une polynomiale propre. L'observation attentive des relations permet de comprendre que le vecteurs dont les trois composantes sont ($-n_{12}$, n_{13}, $-n_{23}$) joueront ici ce rôle.

$$\frac{1}{2}\,.\,\mathbf{h} \wedge \mathbf{g} \equiv (-n_{12},\, n_{13},\, -n_{23})$$

□

En l'ayant au préalable pris soin de compléter le scénario alternatif par la relation :

$$[P] = [Y]\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}),\ \forall\,|Y|$$

Tous les constats accumulés jusqu'à ce point autorisent à réécrire les trois relations caractérisant ce scénario alternatif comme suit :

$$s_1 = \Lambda(\mathbf{q}_1)$$

$$-[G]\,.\,\{[Y]\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\,.\,|\mathbf{q}_2> + |\mathbf{z}>\} = \mathbf{d}$$

$$[G]\,.\,{}_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1) = T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})$$

La nouvelle inconnue [Y] joue le rôle dévolu au produit matriciel $[A]^t$.[J] apparu dans l'élaboration de la méthode intrinsèque. Elle n'est cependant plus assujetie à devoir avoir un déterminant égal à plus ou moins un. Pour pouvoir harmoniser cette approche avec celle menée dans [f; v1, p.15, (1-82)], je préciserai ma proposition par :

$$[Y] = |A|\,.\,[A]^t\,.\,[J]\,.\,[G]$$

Par ailleurs, pour que ce scénario alternatif ne soit pas accusé de déplacer le problème vers l'ensemble des nouvelles inconnues, **h**, **g**, [Y] sans avoir au passage donné les solutions recherchées, certains cas particuliers peuvent d'ores et déjà être envisagés :

$$\mathbf{h} = \mathbf{q}_1,\ \mathbf{g} = \mathbf{q}_2$$

Auquel cas :

$$[P] = |A|\,.\,[A]^t\,.\,[J]\,.\,[G]\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2),\ \forall\,|A|,\,|G|$$

$$s_1 = \Lambda(\mathbf{q}_1)$$

$$-[G]\,.\,\{|A|\,.\,[A]^t\,.\,[J]\,.\,[G]\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\,.\,|\mathbf{q}_2> + |\mathbf{z}>\} = \mathbf{d}$$

$$\Downarrow$$

$$-[G]\,.\,\{<\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2>\,.\,|A|\,.\,[A]^t\,.\,[J]\,.\,[G]\,.\,|\mathbf{q}_2> + |\mathbf{z}>\} = \mathbf{d}$$

$$[G]\,.\,_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1) \;=\; T_2(\otimes)(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)$$

Cette formulation contraint considérablement le domaine de définition du problème mais il a l'avantage de le réduire désormais à la découverte de la dernière inconnue : **z**. Pour la découvrir, il faut revenir sur la formulation précise des coefficients de degré un de la polynomiale Λ. Je l'ai donné dans [f; v1, pp. 3-4] et dans [f; v2, p.5] :

$$\begin{gathered} d_1 \\ = \\ A^1_{12}\,.\,(p_{31}\,.\,p_{23} - p_{21}\,.\,p_{33}) + A^2_{12}\,.\,(p_{33}\,.\,p_{11} - p_{31}\,.\,p_{13}) \\ +A^3_{12}\,.\,(p_{21}\,.\,p_{13} - p_{11}\,.\,p_{23}) + A^1_{13}\,.\,(p_{21}\,.\,p_{32} - p_{22}\,.\,p_{31}) \\ +A^2_{13}\,.\,(p_{31}\,.\,p_{12} - p_{11}\,.\,p_{32}) + A^3_{13}\,.\,(p_{11}\,.\,p_{22} - p_{21}\,.\,p_{12}) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} d_2 \\ = \\ A^1_{12}\,.\,(p_{32}\,.\,p_{23} - p_{22}\,.\,p_{33}) + A^2_{12}\,.\,(p_{12}\,.\,p_{33} - p_{32}\,.\,p_{13}) \\ +A^3_{12}\,.\,(p_{13}\,.\,p_{22} - p_{12}\,.\,p_{23}) + A^1_{23}\,.\,(p_{21}\,.\,p_{32} - p_{31}\,.\,p_{22}) \\ +A^2_{23}\,.\,(p_{31}\,.\,p_{12} - p_{32}\,.\,p_{11}) + A^3_{23}\,.\,(p_{22}\,.\,p_{11} - p_{21}\,.\,p_{12}) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} d_3 \\ = \\ A^1_{13}\,.\,(p_{32}\,.\,p_{23} - p_{22}\,.\,p_{33}) + A^2_{13}\,.\,(p_{12}\,.\,p_{33} - p_{32}\,.\,p_{13}) \\ +A^3_{13}\,.\,(p_{13}\,.\,p_{22} - p_{12}\,.\,p_{23}) + A^1_{23}\,.\,(p_{21}\,.\,p_{33} - p_{31}\,.\,p_{23}) \\ +A^2_{23}\,.\,(p_{31}\,.\,p_{13} - p_{33}\,.\,p_{11}) + A^3_{23}\,.\,(p_{23}\,.\,p_{11} - p_{21}\,.\,p_{13}) \end{gathered}$$

J'ai même précisé dans [f; v2, p.7] à quoi ils se réduisent lorsque le cube (3-3-3) est antisymétrique et antiréduit (voir la sémantique dans [–]; le symbole ψ est un paramètre scalaire arbitraire) :

$$d_1 = \psi\,.\,\{(p_{21}\,.\,p_{13} \;-\; p_{31}\,.\,p_{12}) \;+\; p_{11}\,.\,(p_{32} \;-\; p_{23})\}$$

$$d_2 = \psi\,.\,\{(p_{21}\,.\,p_{32} \;-\; p_{12}\,.\,p_{23}) \;+\; p_{22}\,.\,(p_{13} \;-\; p_{31})\}$$

$$d_3 = \psi\,.\,\{(p_{32}\,.\,p_{13} \;-\; p_{31}\,.\,p_{23}) \;+\; p_{33}\,.\,(p_{21} \;-\; p_{12})\}$$

Quoiqu'il en soit de la nature de la matrice [A], elle est supposée être connue dès le début de l'investigation, au même titre que le contexte géomètrique l'est au travers de la représentation [G] du tenseur métrique local. Comme la paire ($\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$) est aussi une donnée initiale connue du problème, la matrice [P] est connue. Il ne reste donc plus qu'à calculer les coefficients de degré un de la polynomiale Λ, puis à se servir de la deuxième relation du système illustrant le scénario de contournement pour isoler la dernière inconnue **z**. Une métrique localement dégénérée ($|\mathrm{G}| = 0$) empêche la réalisation de ce scénario ; sinon :

$$|\mathbf{z}> = \,-[G]^{-1}\,.\,|\mathbf{d}> \,-\, <\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2>\,.\,|A|\,.\,[A]^t\,.\,[J]\,.\,[G]\,.\,|\mathbf{q}_2>$$

3.3 Contrôle de cohérence et application à l'involution.

Comme ici (rappel) :

$$[P] \,=\, |A| \,.\, [A]^t \,.\, [J] \,.\, [G] \,.\, T_2(\otimes)(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2),\, \forall\, |A|,\, |G| \,\neq\, 0$$

Tout ce scénario aboutit à la relation inattendue :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >$$

$$=$$

$$[P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

$$=$$

$$\underbrace{|A| \,.\, [A]^t \,.\, [J] \,.\, [G] \,.\, T_2(\otimes)(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)}_{[P]} \,.\, |\mathbf{q}_2 >$$

$$\underbrace{-\, [G]^{-1} \,.\, |\mathbf{d} > \,-\, < \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 > \,.\, |A| \,.\, [A]^t \,.\, [J] \,.\, [G] \,.\, |\mathbf{q}_2 >}_{\mathbf{z}}$$

$$=$$

$$-[G]^{-1} \,.\, |\mathbf{d} >$$

Et donc à la contrainte :

$$_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1) \,.\, |\mathbf{q}_2 > = \,-[G]^{-1} \,.\, |\mathbf{d} >$$

Soit encore :

$$[G] \,.\, _{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1) \,.\, |\mathbf{q}_2 > = \,-|\mathbf{d} >$$

Et enfin à cause de la troisième relation du scénario :

$$< \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 > \,.\, |\mathbf{q}_2 > = \,-|\mathbf{d} >$$

Autrement formulé : dans ce scénario et dans le contexte le rendant plausible, la donnée de la paire d'arguments $(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)$ détermine automatiquement celle des coefficients de degré un de la polynomiale Λ résultant de l'existence présumée d'un écart à la décomposition triviale du produit vectoriel déformé $[\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2]_{[A]}$. En particulier :

1. L'orthogonalité euclidienne des arguments annule les coefficients de degré un et force la polynomiale Λ à être une forme quadratique.

$$< \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 > = \,0 \,\Rightarrow\, \mathbf{d} \,=\, \mathbf{0}$$

2. En absence d'orthogonalité entre les arguments :

$$< \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 > \neq\, 0$$

Il devient possible d'écrire :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} > = < \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 > \,.\, [G]^{-1} \,.\, |\mathbf{q}_2 >$$

Cette relation ressemble beaucoup à une relation définissant un pseudo-neutre à gauche et elle coincide avec en écrivant :

$$[A]\,.\,[G] \sim [B([A],\,\mathbf{q}_1)]$$

Cette condition ne pourra être utilisée dans l'investigation sur l'involution que lorsque la matrice [A] aura un déterminant nul (|A| = 0) ; ce qui, dans le cadre de ce scénario, est parfaitement envisageable.

En allant un cran plus loin :

$$\{{}_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1) - <\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2>\ .\,[G]^{-1}\}\,.\,|\mathbf{q}_2>=\,|\mathbf{0}>$$

Il existe une configuration ultra-particulière :

$${}_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1)\ = <\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2>\ .\,[G]^{-1}$$

Equivalente à :

$$[G]\,.\,{}_{[A]}\Phi(\mathbf{q}_1)\ =\ T_2(\otimes)(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)\ = <\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2>\ .\,Id_3$$

Dans ce scénario, il existe une configuration ultra-particulière pour lequel le produit scalaire euclidien des arguments de la paire ($\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$) devrait être une valeur propre de la table de Pythagore classique bâtie avec cette paire ; or c'est toujours vrai. Ce scénario semble donc cohérent pour cette configuration-là.

4 Les problèmes fondamentaux.

4.1 Contexte historique.

J'ai, jusqu'à présent réuni les données élémentaires concernant les algèbres involutives pour les espaces vectoriels dotés d'un produit de Lie déformé et focalisé l'attention sur le cas particulier des espace de dimension trois.

Le fait qu'un produit vectoriel déformé est, dans mon approche, un cas particulier de produit de Lie déformé et que tout produit de Lie déformé est naturellement antisymétrique permet d'envisager de placer toute cette exploration (sous-entensu même lorsque la dimension de l'espace n'est pas réduite à valoir trois) dans un contexte ne négligeant pas le concept d'algèbre de Lie.

Pour rappel qui paraitra évident aux experts, il ne suffit pas de doter E(D, K) d'un produit de Lie déformé pour faire de celui-ci une algèbre de Lie puisqu'il faut encore ajouter l'identité de Jacobi. Les passionnés de mathématiques retrouveront avec un certain délice les prémisses de la théorie des algèbres de Lie dans [07]. Ils y trouveront la confirmation de l'affirmation faite dans [a - 2 ; § 1.2, p.2] et démontrée un peu après [a - 2 ; proposition 1.1, p.3-4], à savoir que V = {E(D, K), $\otimes_A$, A $\in \boxplus^-$} n'a pas de neutre et que, par conséquent, ses éléments n'ont pas d'inverse [07 ; bas de la page IV. i. 2].

Plus important, ils y retrouveront également l'exposé des problèmes fondamentaux accompagnant la théorie des algèbres de Lie (note personnelle : mais pas seulement) [07 ; II, pp. 5-6] : 1) la réalisation ; 2) la représentation et 3) la classification.

4.2 Contexte propre à la théorie de la question (E).

Concernant le premier problème fondamental, j'ai déjà montré dans quelques-uns de mes travaux antérieurs qu'il est tout à fait possible d'introduire la notion de produit extérieur déformé au sein de la théorie de la gravitation d'A. Einstein. Sachant que les produits de Lie déformés ne sont, dans mon approche, que des produits extérieurs déformés bâtis sur des cubes dont les indices bas ont la propriété d'antisymétrie, il semble en découler que ces produits de Lie déformés ont une existence assurée au sein du travail d'A. Einstein.

Concernant le deuxième problème, c'est-à-dire celui de la recherche de représentations matricielles des algèbres de Lie constructibles sur la notion de calcul différentiel, il me semble qu'il constitue le centre de la théorie de la question (E). Et c'est bien celui-là que je tente de résoudre au travers de la découverte des décompositions non-triviales. J'en ai commencé la résolution en tentant de fixer les schémas essentiels dans [d].

Il est bien trop tôt pour parler d'une classification.

Références

4.3 Travaux personnels.

[a] PERIAT, T. : 1 - Algèbres involutives de la théorie des produits tensoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-018-2, EAN 9782369230182, v1, 4 novembre 2022, 26 pages.

[a] PERIAT, T. : 2 - La question de l'absence de neutre pour les algèbres involutives bâties sur les espaces équipés d'un produit de Lie déformé ; ISBN 978-2-36923-003-2, EAN 9782369230038, v1, 4 novembre 2022, 13 pages.

[d] PERIAT, T. : Introduction au concept de décomposition des produits déformés ; ISBN 978-2-36923-002-1, EAN 9782369230021, v1, 7 novembre 2022, 6 pages.

[e] PERIAT, T. : Méthode extrinsèque de décomposition des produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-006-9, EAN 9782369230069, v1, 13 septembre 2022, 14 pages.

[f] PERIAT, T. : Méthode intrinsèque de décomposition des produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, v2, 14 août 2018, 27 pages.

4.4 Ouvrages et cours consultés.

[01] Scherz, U. : Quantenmechanik (Eine Einführung mit Anwendungen auf Atome, Moleküle und Festkörper) ; ©1999 B.G. Teubner, Stuttgart - Leipzig (Teubner-Studienbuecher ; Physik), ISBN 3-519-03246-5, 669 pages.

[02] Introduction to group theory for physicists ; State University of New-York at Stony Brook ; January 12, 2011.

[03] Cartan, E. : The theory of spinors, first published by Hermann of Paris in 1966 ; translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)" ; Hermann, 1937 ; Dover Publications, Inc. New York. ©1966 by Hermann, Paris, ISBN 0-486-64070-1, 151 pages.

[04] Petrov, A. Z. : On the spaces determining the gravitational fields. Doklady Akademii Nauk USSR, 1951, vol. XXXI, 149-152.

[05] Landau und Lifschitz : Lehrbuch des theoretischen Physik, Band II : Klassische Feldtheorie, 12., überarbeit. Aufl. ©Akademischer Verlag, Berlin, 1992, ISBN 3-05-501550-9, 480 pages.

[06] Mass and Flavor Mixing Schemes of Quarks and Leptons ; arXiv : hep-ph/9912358v2 24 Feb 2000.

[07] Dubreuil-Jacotin, M.L. : Les travaux de Monsieur E. Cartan : algèbres de Lie, Séminaire de mathématiques (Julia), tome 4 (1936 - 1937), exp. numéro 8, pp.1-37, ©Ecole Normale Supérieure, Paris, 1936-1937, tous droits réservés.