Cohomologie pour les espaces équipés d'un produit tensoriel déformé.

Introduction

Collection : "La Théorie de la Question (E)"

©Thierry PERIAT.

17 août 2022

©Thierry PERIAT : Cohomologie cyclique pour les espaces équipés d'un produit tensoriel déformé, ISBN 978-2-36923-007-6, EAN 9782369230076, collection "La Théorie de la Question (E)".

1 Introduction.

1.1 Contexte et motivation.

Ce document s'appuie sur les travaux [01 ; pp. 19-25], [02 ; pp. 17-43], [03 ; pp.15-28] pour tenter d'appliquer la notion de cocycle cyclique de dimension n aux espaces vectoriels équipés d'un produit tensoriel déformé.

Ce pourrait être, par exemple, l'espace $V_D(\mathbb{C}, A) = \{\mathbb{C} \otimes E(D, \mathbb{R}), \otimes_A\}$ qui est celui des vecteurs dont les D composantes sont des éléments du corps des nombres complexes, $\mathbb{C}$, interagissant entre eux par le biais d'un produit tensoriel déformé par un cube A de type (D-D-D) de nombres éventuellement complexes.

La motivation sous-jacente de cette exploration débutée en 2006 reste une transposition des résultats qui pourront être acquis ici au cas particulier que constitue la configuration ($D = 4$, $A = \Gamma(2)$) ; elle correspond à un espace de dimension quatre dont les éléments sont déformés par le cube (4-4-4) des symboles de Christoffel de la seconde espèce [04].

1.2 Définition d'une application n fois linéaire.

Sur l'espace $V_D(\mathbb{C}, A)$, les composantes d'un produit tensoriel déformé sont des formes bilinéaires de $\{\mathbb{C} \otimes E(D, \mathbb{R})\} \times \{\mathbb{C} \otimes E(D, \mathbb{R})\}$ vers $\mathbb{C}$:

$$f_2^\chi : (\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) \rightarrow f_2^\chi(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) = A^\chi_{\beta\alpha} \cdot q_2^\beta \cdot q_1^\alpha = \{\otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)\}^\chi$$

Le produit tensoriel déformé par un troisième élément $\mathbf{q}_3$ de ce premier produit tensoriel déformé aura pour composantes des formes trilinéaires de $\{\mathbb{C} \otimes$ E(D,

$\mathbb{R})\}^3$ vers $\mathbb{C}$:

$$f_3^{\chi} : (\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)$$
$$\downarrow$$
$$f_3^{\epsilon}(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1)$$
$$=$$
$$A^{\epsilon}_{\delta\chi} \cdot q_3^{\delta} \cdot (A^{\chi}_{\beta\alpha} \cdot q_2^{\beta} \cdot q_1^{\alpha})$$
$$=$$
$$A^{\epsilon}_{\delta\chi} \cdot A^{\chi}_{\beta\alpha} \cdot q_3^{\delta} \cdot q_2^{\beta} \cdot q_1^{\alpha}$$
$$=$$
$$\{\otimes_A(\mathbf{q}_3, \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1))\}^{\epsilon}$$

etc... Le produit tensoriel de n éléments de $\mathrm{V}_D(\mathbb{C}, \mathrm{A})$ sera donc une forme n fois linéaire ; ce fait justifie de vouloir étudier la fonction vectorielle :

$$\tau(\mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_n) = \otimes_A(\mathbf{q}_n, \otimes_A(\mathbf{q}_{n-1}, ..., \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) \underbrace{...)}_{n-2\,fois}$$

Ou, de manière équivalente, les formes n-linéaires :

$$f_n^{\beta_n}(\mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_n)$$
$$=$$
$$A^{\beta_{n-1}}_{\alpha_n\beta_{n-2}} \cdot q_n^{\alpha_n} \cdot (.... (A^{\beta_3}_{\alpha_4\beta_2} \cdot q_4^{\alpha_4} \cdot (A^{\beta_2}_{\alpha_3\beta_1} \cdot q_3^{\alpha_3} \cdot (A^{\beta_1}_{\alpha_2\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot q_1^{\alpha_1})))...)$$
$$=$$
$$A^{\beta_{n-1}}_{\alpha_n\beta_{n-2}} \cdot .... \cdot A^{\beta_3}_{\alpha_4\beta_2} \cdot A^{\beta_2}_{\alpha_3\beta_1} \cdot A^{\beta_1}_{\alpha_2\alpha_1} \cdot q_n^{\alpha_n} \cdot .... \cdot q_4^{\alpha_4} \cdot q_3^{\alpha_3} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot q_1^{\alpha_1}$$

1.3 L'exemple des formes bilinéaires.

La question posée est : « Le fait de changer l'ordre des arguments, change-t-il aussi le résultat du calcul ? » Une première façon de répondre consiste à observer ce qui se passe pour un produit tensoriel déformé pris isolément. Soit, pour commencer, une discussion se plaçant sur $\{\mathbb{C} \otimes \mathrm{E}(\mathrm{D}, \mathbb{R})\}$; par définition du produit tensoriel déformé par un cube A :

$$\otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = A^{\chi}_{\alpha\beta} \cdot q_1^{\alpha} \cdot q_2^{\beta} \cdot \mathbf{e}_{\chi}$$

De même :

$$\otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) = A^{\chi}_{\alpha\beta} \cdot q_2^{\alpha} \cdot q_1^{\beta} \cdot \mathbf{e}_{\chi}$$

Il s'agit donc de comparer :

$$A^{\chi}_{11} \cdot q_1^1 \cdot q_2^1 + A^{\chi}_{12} \cdot q_1^1 \cdot q_2^2 + ... + A^{\chi}_{1D} \cdot q_1^1 \cdot q_2^D$$
$$+ ...$$
$$+ A^{\chi}_{j1} \cdot q_1^j \cdot q_2^1 + A^{\chi}_{j2} \cdot q_1^j \cdot q_2^2 + ... + A^{\chi}_{jD} \cdot q_1^j \cdot q_2^D$$

...

$$+\ldots$$

$$+\, A^{\chi}_{D1} \cdot q_1^D \cdot q_2^1 \,+\, A^{\chi}_{D2} \cdot q_1^D \cdot q_2^2 \,+\, \ldots \,+\, A^{\chi}_{DD} \cdot q_1^D \cdot q_2^D$$

Et :

$$A^{\chi}_{11} \cdot q_2^1 \cdot q_1^1 \,+\, A^{\chi}_{12} \cdot q_2^1 \cdot q_1^2 \,+\, \ldots \,+\, A^{\chi}_{1D} \cdot q_2^1 \cdot q_1^D$$

$$+\ldots$$

$$+\, A^{\chi}_{j1} \cdot q_2^j \cdot q_1^1 \,+\, A^{\chi}_{j2} \cdot q_2^j \cdot q_1^2 \,+\, \ldots \,+\, A^{\chi}_{jD} \cdot q_2^j \cdot q_1^D$$

$$+\ldots$$

$$+\, A^{\chi}_{D1} \cdot q_2^D \cdot q_1^1 \,+\, A^{\chi}_{D2} \cdot q_2^D \cdot q_1^2 \,+\, \ldots \,+\, A^{\chi}_{DD} \cdot q_2^D \cdot q_1^D$$

Sachant que la discussion se déroule sur le corps des nombres complexes, il est aisé de parvenir à :

$$\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2) \,-\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1) \,=\, A^{\chi}_{\alpha\beta} \cdot (q_1^{\alpha} \cdot q_2^{\beta} \,-\, q_2^{\alpha} \cdot q_1^{\beta}) \cdot \mathbf{e}_{\chi}$$

Chaque composante est la somme de D^2 termes dont D sont nuls. Par ailleurs, l'inversion des indices $(\alpha,\, \beta)$ fournit le terme $(\beta,\, \alpha)$ aisément confrontable au terme $(\alpha,\, \beta)$:

$$A^{\chi}_{\beta\alpha} \cdot (q_1^{\beta} \cdot q_2^{\alpha} \,-\, q_2^{\beta} \cdot q_1^{\alpha})$$

In fine, il vient :

$$\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2) \,-\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1) \,=\, \sum_{\alpha\,<\,\beta} (A^{\chi}_{\alpha\beta} \,-\, A^{\chi}_{\beta\alpha}) \cdot (q_1^{\alpha} \cdot q_2^{\beta} \,-\, q_2^{\alpha} \cdot q_1^{\beta}) \cdot \mathbf{e}_{\chi}$$

Lemme 1.1. *Cubes symétriques et corps commutatifs.*

Les cubes symétriques sur leurs indices bas agissant sur des vecteurs dont les composantes sont des éléments d'un corps commutatif assurent l'invariance du produit tensoriel qu'ils déforment lorsque les arguments en sont permutés.

$$A^{\chi}_{\alpha\beta} \,=\, A^{\chi}_{\beta\alpha} \,\Rightarrow\, \otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2) \,=\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1)$$

Il n'y a aucune certitude à ce que l'affirmation inverse soit vraie puisqu'elle implique seulement :

$$\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2) \,=\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1) \,\Rightarrow\, \forall\, \chi \,:\, \sum_{\alpha\,<\,\beta} (A^{\chi}_{\alpha\beta} \,-\, A^{\chi}_{\beta\alpha}) \cdot (q_1^{\alpha} \cdot q_2^{\beta} \,-\, q_2^{\alpha} \cdot q_1^{\beta}) \,=\, 0$$

Définition 1.1. *Anneau anti-commutatif.*

Un anneau est un ensemble muni d'une addition et d'une multiplication, soit $\{\mathbb{A},\, +,\, .\}$ sa désignation symbolique générique, tel que :

— $\{\mathbb{A},\, +\}$ est un groupe additif abélien ;
— la multiplication est associative et distributive par rapport à l'addition.

Un anneau n'est donc pas nécessairement muni d'une multiplication commutative. Par convention, un anneau anti-commutatif désigne un anneau muni d'une multiplication anticommutative ; celle-ci satisfait la relation :

$$\forall\, a_1,\, a_2 \,\in\, \{\mathbb{A},\, +,\, .\} \,:\, a_1 \,.\, a_2 \,+\, a_2 \,.\, a_1 \,=\, 0_{\{\mathbb{A},\, +\}}$$

L'inversion de l'ordre des arguments lors d'une multiplication change le signe du résultat. Pour distinguer ces anneaux, ils seront noté $\mathbb{A}^*$. Quelques données élémentaires sur l'anti-commutativité peuvent se lire dans [a].

Remarque 1.1. *Formes bilinéaires impliquant des éléments d'un anneau anti-commutatif.*

Reprenant la discussion débutée plus haut en :
- travaillant désormais avec des formes bilinéaires de $\{\mathbb{A} \otimes \mathrm{E}(\mathrm{D},\, \mathbb{R})\}^2$ vers $\mathbb{A}$;
- reprenant le calcul des produits tensoriels déformés par un unique cube A ;
- reconfrontant

$$\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)\, et\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1)$$

Il est aisé de parvenir à :

$$\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2) \,+\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1) \,=\, A^\chi_{\alpha\beta} \cdot (q_1^\alpha \cdot q_2^\beta \,+\, q_2^\alpha \cdot q_1^\beta) \,.\, \mathbf{e}_\chi$$

Chaque composante est la somme de D^2 termes indiciables par une paire $(\alpha,\, \beta)$. Les D termes du type $(\alpha,\, \alpha)$ s'écrivent :

$$A^\chi_{\alpha\alpha} \cdot (q_1^\alpha \cdot q_2^\alpha \,+\, q_2^\alpha \cdot q_1^\alpha)$$

Ils sont nuls à cause de l'anti-commutativité. Par ailleurs, l'inversion des indices $(\alpha,\, \beta)$ fournit le terme $(\beta,\, \alpha)$:

$$A^\chi_{\beta\alpha} \cdot (q_1^\beta \cdot q_2^\alpha \,+\, q_2^\beta \cdot q_1^\alpha)$$

Son addition avec le terme $(\alpha,\, \beta)$ fournit :

$$A^\chi_{\alpha\beta} \cdot (q_1^\alpha \cdot q_2^\beta \,+\, q_2^\alpha \cdot q_1^\beta) \,+\, A^\chi_{\beta\alpha} \cdot (q_1^\beta \cdot q_2^\alpha \,+\, q_2^\beta \cdot q_1^\alpha)$$

In fine, il est aisé d'observer que :

Lemme 1.2. *Cubes symétriques et anneaux anti-commutatifs.*

Les cubes symétriques sur leurs indices bas agissant sur des vecteurs dont les composantes sont des éléments d'un anneau anti-commutatif assurent le changement de signe du produit tensoriel qu'ils déforment lorsque les arguments en sont permutés.

$$\forall\, \mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2 \,\in\, \mathbb{A}^* \,\otimes\, E(D,\, \mathbb{R}) \,:$$
$$A^\chi_{\alpha\beta} \,=\, A^\chi_{\beta\alpha} \,\Rightarrow\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1) \,=\, -\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)$$

Ce constat constitue le préalable indispensable à la construction d'un cocycle cyclique de dimension un ; je calque ma sémantique sur celle utilisée dans [01 ; bas de page 21].

Remarque 1.2. *Second critère pour un cocycle de dimension un.*

M'inspirant du propos tenu dans [01 ; bas de page 20], je vais maintenant calculer :

$$\tau(\otimes_A(\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_1),\, \mathbf{q}_2) \,-\, \tau(\mathbf{q}_0,\, \otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)) \,+\, \tau(\otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_0),\, \mathbf{q}_1)$$

... en partant du principe qu'en dimension un, la fonction τ se confond avec le produit tensoriel déformé par le cube A : $\otimes_A$; par conséquent, il s'agit de calculer :

$$\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_1),\, \mathbf{q}_2) \,-\, \otimes_A(\mathbf{q}_0,\, \otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)) \,+\, \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_0),\, \mathbf{q}_1)$$

Or si le triplé $(\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_0)$ formait un territoire de Jacobi (synonyme : respectait l'identité de Jacobi), il faudrait écrire :

$$\otimes_A(\mathbf{q}_0, \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)) \,=\, \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1), \mathbf{q}_2) \,+\, \otimes_A(\mathbf{q}_1, \otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_2))$$

Et, à cause de l'anti-commutativité du produit tensoriel déformé par le cube A, il est possible d'écrire :

$$\otimes_A(\mathbf{q}_1, \otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_2)) \,=\, \otimes_A(\mathbf{q}_1, - \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_0)) \,=\, \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_0),\, \mathbf{q}_1)$$

Par conséquent :

Théorème 1.1. *Définition d'un cocycle cyclique de dimension un.*

A condition d'extrapoler la démarche exposée dans [01 ; bas de page 20] aux fonctions τ et $\otimes_A$ lorsque la discussion implique des vecteurs dont les composantes appartiennent à un anneau non-commutatif $\mathbb{A}^*$, le second critère nécessaire à définir un cocycle cyclique de dimension un est rempli lorsque le produit tensoriel déformé anti-commutatif dont l'espace $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$ est équipé le dote d'une structure d'algèbre de Lie. Comme, dans ces conditions, le premier critère est également satisfait par la fonction bilinéaire τ, celle-ci définit bien un cocycle cyclique de dimension un.

1.4 Généralisation aux fonctions trilinéaires.

Pour rappel, la question posée consiste à se demander ce qui se passe lorque l'ordre des arguments est modifié par inversion ou permutation cyclique. Les formes trilinéaires vont permettre de commencer à généraliser la réponse à ce questionnement. La discussion est désormais limitée aux espaces vectoriels dont les éléments ont des composantes dans un anneau non-commutatif $\mathbb{A}^*$; un double produit tensoriel déformé par un même cube symétrique A s'écrit :

$$\tau(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_3) \,=\, \otimes_A(\mathbf{q}_3,\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1))$$

Dans le langage des composantes sur la base canonique Ω à laquelle l'espace vectoriel de la discussion peut être rapporté, il s'agit stricto sensu de :

$$\tau(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_3) \,=\, (A^{\epsilon}_{\delta\chi} \,.\, q^{\delta}_3 \,.\, (A^{\chi}_{\beta\alpha} \,.\, q^{\beta}_2 \,.\, q^{\alpha}_1)) \,.\, \mathbf{e}_{\epsilon}$$

Remarque 1.3. *Premier critère pour un cocycle de dimension deux.*

En se servant une première fois de l'anti-commutativité du produit tensoriel déformé :

$$\tau(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_3) \,=\, \otimes_A(\mathbf{q}_3,\, -\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2))$$

Puis une seconde fois :

$$\tau(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_3) \,=\, \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2),\, \mathbf{q}_3)$$

Par conséquent :

$$\tau(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_3) \,=\, \tau(\mathbf{q}_3,\, \mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1)$$

Le premier critère nécessaire à définir un cocycle cyclique de dimension deux est rempli.

Remarque 1.4. *Associativité du produit tensoriel déformé.*

Comme indiqué plus haut :

$$\otimes_A(\mathbf{q}_3,\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1)) \,=\, (A^{\epsilon}_{\delta\chi} \,.\, q^{\delta}_3 \,.\, (A^{\chi}_{\beta\alpha} \,.\, q^{\beta}_2 \,.\, q^{\alpha}_1)) \,.\, \mathbf{e}_\epsilon$$

La multiplication est supposée être distributive par rapport à l'addition :

$$\otimes_A(\mathbf{q}_3,\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1)) \,=\, (A^{\epsilon}_{\delta\chi} \,.\, (q^{\delta}_3 \,.\, A^{\chi}_{\beta\alpha} \,.\, q^{\beta}_2 \,.\, q^{\alpha}_1)) \,.\, \mathbf{e}_\epsilon$$

Elle est également supposée être anti-commutative :

$$\otimes_A(\mathbf{q}_3,\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1)) \,=\, (A^{\epsilon}_{\delta\chi} \,.\, (-A^{\chi}_{\beta\alpha} \,.\, q^{\delta}_3 \,.\, q^{\beta}_2 \,.\, q^{\alpha}_1)) \,.\, \mathbf{e}_\epsilon$$

L'utilisation réitérée et successive de ces deux propriétés aboutit à :

$$\otimes_A(\mathbf{q}_3,\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_1)) \,=\, (A^{\chi}_{\beta\alpha} \,.\, A^{\epsilon}_{\delta\chi} \,.\, q^{\delta}_3 \,.\, q^{\beta}_2 \,.\, q^{\alpha}_1) \,.\, \mathbf{e}_\epsilon$$

Par ailleurs, la définition du produit tensoriel déformé fournit également :

$$\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_3,\, \mathbf{q}_2),\, \mathbf{q}_1) \,=\, (A^{\epsilon}_{\chi\delta} \,.\, (A^{\chi}_{\beta\alpha} \,.\, q^{\beta}_3 \,.\, q^{\alpha}_2) \,.\, q^{\delta}_1) \,.\, \mathbf{e}_\epsilon$$

En effectuant quelques judicieuses substitutions sur les indices muets :

$$\delta \,\rightarrow\, \alpha,\; \alpha \,\rightarrow\, \beta,\; \beta \,\rightarrow\, \delta$$

$$\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_3,\, \mathbf{q}_2),\, \mathbf{q}_1) \,=\, (A^{\epsilon}_{\chi\alpha} \,.\, (A^{\chi}_{\delta\beta} \,.\, q^{\delta}_3 \,.\, q^{\beta}_2) \,.\, q^{\alpha}_1) \,.\, \mathbf{e}_\epsilon$$

La distributivité de la multiplication vis-à-vis de l'addition permet de trouver que :

$$\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_3,\, \mathbf{q}_2),\, \mathbf{q}_1) \,=\, (A^{\epsilon}_{\chi\alpha} \,.\, A^{\chi}_{\delta\beta} \,.\, q^{\delta}_3 \,.\, q^{\beta}_2 \,.\, q^{\alpha}_1) \,.\, \mathbf{e}_\epsilon$$

Une condition suffisante à assurer l'associativité du produit tensoriel déformé dans le cadre de cette discussion est la relation :

$$\forall\, \mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_3 \;:\; A^{\chi}_{\beta\alpha} \,.\, A^{\epsilon}_{\delta\chi} \,=\, A^{\epsilon}_{\chi\alpha} \,.\, A^{\chi}_{\delta\beta}$$

nota bene : Pour obtenir cette condition, il a été fait usage une seule fois de l'anti-commutativité sur les composantes du cube A ; ici, il a été supposé qu'elles étaient aussi des éléments de $\mathbb{A}^*$. Si ce n'était pas le cas, la même démarche aboutirait à (noter l'inversion des facteurs) :

$$\forall\, \mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_3 \;:\; A^{\epsilon}_{\delta\chi} \,.\, A^{\chi}_{\beta\alpha} \,=\, A^{\epsilon}_{\chi\alpha} \,.\, A^{\chi}_{\delta\beta}$$

Remarque 1.5. *Second critère pour un cocycle de dimension deux.*

M'inspirant du propos tenu dans [01 ; bas de page 20], je vais maintenant calculer :

$$\tau(\otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1), \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3) - \tau(\mathbf{q}_0, \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2), \mathbf{q}_3)$$
$$+\tau(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)) - \tau(\otimes_A(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_0), \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

Tenant compte de la définition de la fonction τ, je peux continuer avec :

$$\otimes_A(\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1), \mathbf{q}_2), \mathbf{q}_3) - \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_0, \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)), \mathbf{q}_3)$$
$$+ \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1), \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)) - \otimes_A(\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_0), \mathbf{q}_1), \mathbf{q}_2)$$

Si je suppose que le produit tensoriel est associatif, les deux premiers termes disparaissent et ce calcul se poursuit avec :

$$+ \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1), \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)) - \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_3, \otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)), \mathbf{q}_2)$$

Puis par l'usage de l'anti-commutativité :

$$+ \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1), \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)) + \otimes_A(\mathbf{q}_2, \otimes_A(\mathbf{q}_3, \otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)))$$

Et par celui de l'associativité pour aboutir à la somme :

$$+ \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1), \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)) + \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3), \otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1))$$

... que l'anti-commutativité annule.

Théorème 1.2. *Définition d'un cocycle cyclique de dimension deux.*

A condition d'extrapoler la démarche exposée dans [01 ; bas de page 20] aux fonctions τ et $\otimes_A$ lorsque la discussion implique des vecteurs dont les composantes appartiennent à un anneau non-commutatif $\mathbb{A}^*$, le second critère nécessaire à définir un cocycle cyclique de dimension deux est rempli lorsque le produit tensoriel déformé est associatif. Comme, dans ces conditions, le premier critère est également satisfait par la fonction trilinéaire τ, celle-ci définit bien un cocycle cyclique de dimension deux.

1.5 Associativité et structure d'algèbre de Lie.

Remarque 1.6. *Associativité versus algèbre de Lie.*

Pour des conditions pourtant égales, le critère permettant d'acquérir le label *cocycle cyclique* pour la dimension un diffère de celui qui est nécessaire pour l'acquérir pour la dimension deux. Dans le premier cas, il convient de disposer d'une structure d'algèbre de Lie et dans le second cas le produit tensoriel déformé doit être associatif ; question légitime : « Les deux critères ont-ils compatibles entre eux ? »

Si, pour l'acquisition du label en dimension un, le produit tensoriel déformé

...

anti-commutatif est aussi associatif sans pour autant définir des territoires de Jacobi, alors la combinaison :

$$\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_1),\, \mathbf{q}_2) \,-\, \otimes_A(\mathbf{q}_0,\, \otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)) \,+\, \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_0),\, \mathbf{q}_1)$$

... devient égale à :

$$\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_0),\, \mathbf{q}_1)$$

... parce que l'associativité permet de constater que les deux premiers termes sont égaux au signe moins très. Le terme restant ne s'annule alors que si les arguments du triplé sont liés entre eux de la manière suivante (à cause de l'anti-commutativité) :

$$\mathbf{q}_1 \,=\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_0)$$

Corollaire 1.1. *Existence de territoires de Jacobi induits par l'associativité.*

Soit $(\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_2)$ une paire d'éléments pris au hasard dans l'espace $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$. Le produit tensoriel déformé $\otimes_A$ y est une opération interne et anti-commutative. Par conséquent le produit tensoriel déformé des arguments de la paire considérée est encore un élément dans $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$. La remarque précédente vient de montrer que si le produit tensoriel déformé est en plus associatif, alors le triplé $(\mathbf{q}_0,\, \otimes_A(\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_2),\, \mathbf{q}_2)$ est constitué de trois éléments dans l'espace $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$ et que ce triplé constitue un territoire de Jacobi (synonyme : il satisfait l'identité de Jacobi). Il en découle la :

Proposition 1.1. *L'associativité du produit tensoriel déformé sur une partie des éléments de $V_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$ fait de cette partie une algèbre de Lie ; mais l'inverse est faux.*

Démonstration. De toute évidence, l'existence d'une algèbre de Lie liant une partie des éléments de $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$ entre eux n'impose pas que le produit tensoriel déformé $\otimes_A$ agissent systématiquement sur eux de manière associative. Il n'agit de la sorte que pour les triplés dont l'argument médian est le résultat du produit des arguments extrêmes (voir le corollaire 1.1).

Inversement, en partant de deux éléments pris au hasard dans l'espace $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$, il est possible - grâce à l'associativité- d'en fabriquer un troisième qui fait des trois un territoire de Jacobi. Soit alors à nouveau la combinaison :

$$\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_1),\, \mathbf{q}_2) \,-\, \otimes_A(\mathbf{q}_0,\, \otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)) \,+\, \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_0),\, \mathbf{q}_1)$$

et ses permutations cycliques :

$$\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2),\, \mathbf{q}_0) \,-\, \otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_0)) \,+\, \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_1),\, \mathbf{q}_2)$$

$$\otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_0),\, \mathbf{q}_1) \,-\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \otimes_A(\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_1)) \,+\, \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2),\, \mathbf{q}_0)$$

En admettant que le produit $\otimes_A$ est associatif lorsqu'il agit sur n'importe laquelle des combinaisons des trois arguments, le raisonnement mené précédemment conduit aux trois conditions nécessaires à assurer que la partie $\{\mathbf{q}_0,\, \mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2\}$ soit une algèbre de Lie :

$$\mathbf{q}_1 \,=\, \otimes_A(\mathbf{q}_2,\, \mathbf{q}_0) \,=\, A^{\delta}_{\chi\alpha} \cdot q_2^{\chi} \cdot q_0^{\alpha} \cdot \mathbf{e}_\delta$$

$$\mathbf{q}_2 = \otimes_A(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) = A^{\delta}_{\alpha\beta} \cdot q_0^{\alpha} \cdot q_1^{\beta} \cdot \mathbf{e}_{\delta}$$
$$\mathbf{q}_0 = \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = A^{\delta}_{\beta\chi} \cdot q_1^{\beta} \cdot q_2^{\chi} \cdot \mathbf{e}_{\delta}$$

Ces conditions ne définissent pas précisément les éléments de cette partie mais elles évoquent l'idée que ceux-ci pourraient figurer les côtés d'un triangle. Je laisserai pour le moment cette intuition de côté puisqu'il s'agit ici de démontrer que ces conditions pourraient suffire à définir une algèbre de Lie.

Or :

— J'ai démontré plus haut dans ce document (remarque 1.4) que l'associativité s'obtenait lorsque :

$$\forall\, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \forall\, \epsilon, \delta, \beta, \alpha = 1, ..., D : A^{\chi}_{\beta\alpha} \cdot A^{\epsilon}_{\delta\chi} = A^{\epsilon}_{\chi\alpha} \cdot A^{\chi}_{\delta\beta},\ A^{\chi}_{\delta\beta} = A^{\chi}_{\beta\delta}$$

— J'ai démontré dans [a; lemme 3.2, p. 12] qu'une condition simple et suffisante à définir une algèbre de Lie sur un espace tel que $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*, \otimes_A)$ s'écrit :

$$\forall\, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \forall\, \epsilon, \delta, \beta, \alpha = 1, ..., D : \sum_{\chi} A^{\epsilon}_{\chi\alpha} \cdot A^{\chi}_{\delta\beta} = 0,\ A^{\chi}_{\delta\beta} = A^{\chi}_{\beta\delta}$$

Il est donc clair que :

1. L'associativité et la structure d'algèbre de Lie peuvent s'obtenir indépendemment des éléments de l'espace sur lequel la discussion prend place en imposant des conditions précises aux composantes du cube symétrique déformant le produit tensoriel ;
2. Ces conditions sont *disjointes* (synonyme : elles sont différentes en essence) puisque l'associativité joue sur les positionnements des indices définissant les composantes du cube déformant et identifie deux types de combinaisons ; tandis que la structure d'algébre de Lie annule un des types de combinaisons ;
3. Les conditions nécessaires à obtenir une structure d'algèbre de Lie sont plus contraignantes que celles permettant d'obtenir l'associativité ; en effet : une algèbre de Lie exige l'annulation de toutes les combinaisons alors que l'associativité ne réclame que l'égalité de ces combinaisons sans les forcer à être nulles.
4. La proposition 1.1 ne peut *éventuellement* être démontrée qu'en imposant une contrainte spécifique supplémentaire assurant la formation d'une algèbre de Lie à partir de la seule propriété d'associativité ; ce qui ramène à l'intuition sur les triangles.

Je ne suis pour l'instant pas en mesure de finir la démonstration de la proposition 1.1. □

Remarque 1.7. *Sur la notion d'idempotent.*

Continuant à me référer au propos tenus dans [01 ; bas de page 20], je note le lien entre trois sujets :

— le théorème de Gauss-Bonnet,
— la notion d'idempotent et
— l'invariance des fonctions trilinéaires τ satisfaisant les deux critères faisant d'elles des cocycles cycliques de dimension deux lorsque ces fonctions agissent sur trois arguments égaux entre eux et à un idempotent donné.

Je remarque aussi que le propos tenu sur l'associativité au niveau de la remarque 1.6 permet de commenter un peu la notion d'idempotent. L'anti-commutativité du produit $\otimes_A$ impose la relation :

$$\forall\, \mathbf{q} \,:\, \otimes_A(\mathbf{q},\, \mathbf{q}) \,=\, \mathbf{0}$$

Par conséquent, si le produit tensoriel déformé d'un élément de l'espace $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$ par lui-même s'interprète comme le carré de cet élément, tous les carrés des éléments de cet ensemble sont nuls et le seul idempotent est le vecteur nul.

Il ne semble donc pas possible de faire grand usage de la notion d'idempotent dans le cadre de cette discussion.

1.6 Discussion sur un lien avec les variables de Grassmann.

En revanche, le produit tensoriel déformé anti-commutatif tend une perche formelle vers la notion de variables de Grassmann. Dit autrement, il semble légitime de se demander si les éléments de $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$ peuvent être interprétées comme des variables de Grassmann ?

L'absence d'idempotent non-trivial et l'évocation d'un lien éventuel avec les variables de Grassmann pousse à rechercher des représentations matricielles pour les éléments de $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$. La notion de décomposition triviale d'un produit tensoriel déformé, déjà évoquée lors de travaux préliminaires sur ce type de produits, semble offrir une oportunité naturelle.

Définition 1.2. *Décomposition triviale.*

Dans cette théorie, une décomposition triviale d'un produit tensoriel déformé par un cube A agissant sur les éléments de $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$ est un foncteur de $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$ vers $\mathrm{M}(\mathrm{D},\, \mathbb{A}^*)$, l'ensemble des matrices carrées (D-D) dont les entrées sont dans l'anneau non-commutatif $\mathbb{A}^*$; il agit de la façon suivante :

$$\Phi_A \,:\, \forall\, \mathbf{q}_1 \,\in\, V_D(\mathbb{A}^*,\, A) \xrightarrow{\Phi_A} \Phi_A(\mathbf{q}_1) \,=\, [A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, q_1^{\alpha}] \,\in\, M(D,\, \mathbb{A}^*)$$

La raison pour laquelle ce foncteur porte ce nom se comprend facilement au travers du schéma ci-dessous :

Pour que la matrice image d'un élément de $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\, \otimes_A)$ soit interprétable en tant que variable de Grassmann, il convient de la doter des propriétés caractérisant habituellement une variable de ce type. La première d'entre elles est l'anti-commutativité par rapport au produit matriciel ; précisément :

$$\forall\, \mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2, \,\in\, V_D(\mathbb{A}^*,\, A) \,:\, \Phi_A(\mathbf{q}_1) \,.\, \Phi_A(\mathbf{q}_2) \,+\, \Phi_A(\mathbf{q}_2) \,.\, \Phi_A(\mathbf{q}_1) \;=\; [0]_{M(D,\, \mathbb{A}^*)}$$

Et cette propriété doit pouvoir induire :

$$\forall\, \mathbf{q}_1 \,\in\, V_D(\mathbb{A}^*,\, A) \,:\, \Phi^2_A(\mathbf{q}_1) \,=\, [A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, q_1^{\alpha}]^2 \;=\; [0]_{M(D,\, \mathbb{A}^*)}$$

1.7 La finalité physique.

Il existe une différence importante dans la finalité de l'approche exposée au travers des premières pages de [01] et celle que je souhaite faire des principes de la cohomologie cyclique.

L'application physique servant de guide dans [01] concerne la description de volumes spatiaux et implique des nombres réels :

$$\tau\,:\,(f_0,\,f_1,\,f_2)\,sur\,\Sigma \xrightarrow{\tau} \tau(f_0,\,f_1,\,f_2) \,=\, \int_\Sigma f_0\,.\,df_1\,\wedge\,df_2$$

Le *terme gravitationnel* apparaissant dans la version covariante de la loi de Lorentz est le fil rouge de mon exploration. Il représente une force par unité de volume. La physique actuelle traite ce terme dans un environnement mathématique impliquant un espace vectoriel quadri-dimensionnel réel $\mathrm{E}(4,\,\mathbb{R})$. De sorte qu'un double produit tensoriel impliquant trois fois la vitesse d'une particule, soit $\mathbf{u}$ cette vitesse, permet de décrire des puissances (Watts) par unité de temps (la seconde) et de volume spatial (mètres au cube : m^3). La trilinéarité peut s'étudier au travers des vecteurs tout comme au travers des composantes de ceux-ci ; l'étude concerne donc les double-produits :

$$\tau\,:\,(\mathbf{u}_0,\,\mathbf{u}_1,\,\mathbf{u}_2) \xrightarrow{\tau} \tau(\mathbf{u}_0,\,\mathbf{u}_1,\,\mathbf{u}_2) \,=\, \otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u}_0,\,\otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u}_1,\,\mathbf{u}_2))$$

Cependant, il existe une différence cruciale entre l'étude habituelle du terme gravitationnel et celle que je propose. Elle provient du fait que je m'attache à discuter de vitesses dont les composantes sont des éléments d'un anneau non commutatif $\mathbb{A}^*$. Ce choix a une conséquence dramatique pour les espoirs que faisaient naître la similitude apparente entre le travail décrit dans [01] et mon intuition ; en effet, dans ce nouveau cadre mathématique :

$$\forall\,\mathbf{u}\,:\,\otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u},\,\mathbf{u}) \,=\, \mathbf{0}$$

Et il en est de même des doubles, triples, ... etc... produits tensoriels d'une vitesse donnée. Les produits multiples, en particulier les produits doubles non-trivialement nuls concernent donc toujours et uniquement des triplés de vitesses dont les arguments sont distincts.

Le terme gravitationnel :

1. étant toujours nul dans un espace dont la géométrie reste invariante, quelle que soit cette géométrie ;
2. étant toujours nul au sein d'une discussion impliquant les éléments de $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\,\otimes_A)$;
3. pouvant à la rigueur se comprendre comme la description d'une interaction d'une particule avec elle-même via les variations de la géométrie ;

... peut-être est-il judicieux d'approfondir la réflexion dans cette direction et de suggérer que les produits tensoriels déformés de $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*,\,\otimes_A)$ décrivent des interactions entre particules (ou ondes) ayant des vitesses différentes dans un

...

environnement géométrique instable. Dans le cadre de cette interprétation, les termes non-nuls sont toujours du genre :

$$\forall \mathbf{u} \in V_D(\mathbb{A}^*, \Gamma(2)) : \otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0, \mathbf{u} - \mathbf{u}_0) = \otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}) - \otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_0)$$

Par ailleurs, dans l'absolu théorique, rien ne s'oppose à doter $\mathrm{V}_D(\mathbb{A}^*, \otimes_A)$ d'un produit scalaire représenté par une forme bilinéaire dont l'expression serait une matrice [B] de M(D, $\mathbb{A}^*$) puis de calculer les produits scalaires :

$$< \mathbf{u}_0, \otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) >_{[B]}$$

Ces produits scalaires exhibent eux-aussi une trilinéarité et ils définissent ce qui pourrait à la limite porter le label de *volumes cinétiques*.

Enfin, le terme gravitationnel - comme son nom l'indique- a un pied dans la théorie de la gravitation d'A. Einstein, [05], [06], [07], puisqu'il décrit l'effet des variations de la métrique spatio-temporelle sur la force de Lorentz classique. Ainsi, à partir du moment où il deviendrait possible d'en manipuler les représentations mathématiques dans un univers utilisant les variables de Grassmann, qui sont bien connues pour avoir un pied dans la physique quantique, cette approche aurait réussi à bâtir les fondations d'un pont unifiant un peu plus deux branches de la physique.

Pour autant, j'utilise ici le conditionnel en conscience et, même en cas de réussite, ce nouvel essai ne serait que la n-ième tentative de construction d'une théorie de la gravitation quantique [08] dont rien ne dit qu'elle s'affirme comme étant la mieux adaptée à décrire la réalité ; à suivre donc ...

2 Autre contribution personnelle.

[a] PERIAT, T. : Données élémentaires sur l'anti-commutativité ; ISBN-978-2-36923-086-1, EAN 9782369230861, 1 août 2022.

3 Bibliographie.

— [01] Connes, A. : noncommutative geometry, 654 pages.
— [02] Sérié E. : Théories de jauge en géométrie non-commutative et généralisation du modèle de Born-Infeld ; Thèse de Doctorat de l'Université Paris 6, spécialité physique théorique, soutenue le 20 septembre 2005, 157 pages.
— [03] Géométrie non-commutative et interactions fondamentales ; arXiv :math-ph/0903047v1 30 March 1999, Thèse de Doctorat de Provence, spécialité physique des particules, physique mathématique et modélisations, soutenue le 10 décembre 1998, 219 pages.
— [04] Christoffel, E. B. : Über die Transformation der homogenen Differentiale Ausdrücke zweiten Graden ; Journal für die reine und angewandte Mathematik, pp. 46-70, 3 Januar 1869. Ce document peut être consulté à l'Université de Göttingen (Allemagne).

— [05] Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie ; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7.
— [06] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme ; collection d'ouvrage à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. Darmois et A. Lichnerowicz. ©1955, Masson et Cie, éditeurs, 298 pages.
— [07] C.W. Misner, K. S. Thorne and J.A. Wheeler : Gravitation ; ©W. H. Freeman and Company, New-York, 1973, 1279 pages.
— [08] Carlip, S. : Quantum Gravity in 2 + 1 Dimensions ; Cambridge monographs on mathematical physics (Cambridge University Press), 276 pages.

4 Remerciements.

Etant ancien élève des classes préparatoires aux grandes écoles (mathématiques supérieures et spéciales section P' de l'école Sainte-Geneviève, Versailles, en 1974-1975), retraité de l'art dentaire (doctorat d'état en chirurgie dentaire, Paris, 1982 ; certificat en radioprotection dentaire sur la période 2007-2022) et autodidacte dans le domaine de la physique mathématique que j'étudie désormais par passion, je prie le lectorat de faire preuve d'un sens critique aigu lorsqu'il parcourt mes documents.

Je remercie chaleureusement tous les auteurs acceptant, comme moi, de mettre leurs travaux à libre disposition du public. Vos commentaires éclairés seront toujours bien venus.

Thierry PERIAT, version du 16 août 2022.

Table des matières