Mots clés : Produits vectoriels déformés, algèbres de Lie, classification de Bianchi.

Contents

french

1 Rappel de quelques données élémentaires

Le document [[a]] avait examiné quelques éléments de base concernant la notion d'anti-commutativité et les conditions assurant l'existence d'une structure d'algèbre de Lie pour l'espace {E(3, C), $\otimes_A$}, c'est-à-dire pour l'espace vectoriel E(3, C) doté d'un produit tensoriel déformé par un cube A : $\otimes_A$. Il avait démontré que les cubes anti-symétriques sur leurs indices bas étaient compatibles avec l'existence de cette structure. Or une telle anti-symetrie définit aussi en partie les produits vectoriels déformés. Ce nouveau document entreprend donc d'aller un cran plus loin en se focalisant sur la recherche des conditions nécessaires à équiper l'espace V = {E(3, C), $[..., ...]_{[A]}$} d'une structure d'algèbre de Lie. Il explore ensuite les liens logiques avec la classification de Bianchi pour les espaces homogènes de dimension trois.

Definition 1.1. ***Produit vectoriel déformé***

Dans cette théorie, un produit vectoriel déformé est -par construction- la moitié du produit extérieur construit avec un cube antisymétrique sur ses indices bas ou bien anti-réduit sur ses indices latéraux; dans la première variante de cette définition :

$$\forall A \in A^{\diamondsuit} \,|\, \forall\ i,\, j,\, k:\ A^k_{ij} + A^k_{ji} = 0 \Rightarrow A \rightarrow [A] \in M(3,\, C)$$

$$\forall\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E(3,\, C):\ [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]} = \frac{1}{2} \,.\, \wedge_{[A]} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i\,,\,j\,=\,1\,,\,2\,,\,3;\,i\,<\,j} A^k_{ij} \,.\, (a^i .\, b^j - b^i \,.\, a^j) \,.\, \mathbf{e}_k$$

Avec cette définition, il est facile de prouver que :

$$\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in E(3,\, C),\ |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]} >= \{[J]^t \,.\, [A]\} \,.\, |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} >$$

sachant que :

$$[J] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};\ [J]^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[A] = \begin{pmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{pmatrix} \in M(3,\, C)$$

2 Structure d'algèbre de Lie

Soit V = {E(3, C), $[...,\, ...]_{[A]}$} un espace vectoriel de dimension trois, bâti sur le corps commutatif des nombres comples et équipé d'un produit vectoriel déformé par la matrice [A] de M(3, C). L'espace V est supposé être rapporté à sa base canonique Ω ; celle-ci peut aussi s'interpréter comme un élément de V^3.

2.1 Définition - rappels

Pour que V soit équipé d'une structure d'algèbre de Lie, trois conditions doivent s'appliquer simultanément (voir définition par exemple dans [[01] ; p. 9]) :

1. Un crochet de Lie doit y être défini ;
2. Le produit d'un élément quelconque de V par lui-même, via ce crochet de Lie, doit être nul :

   $$\forall\, \mathbf{a} \in V = \{E_3(C), [..., ...]_{[A]}\}:\ [\mathbf{a}\,,\, \mathbf{a}]_{[A]} = \mathbf{0}$$

3. La relation de Jacobi doit être validée pour toutes les triades d'éléments de V :

   $$\forall\, \mathbf{a}\,,\, \mathbf{b}\,,\, \mathbf{c} \in \{E_3(C), [..., ...]_{[A]}\}:$$

   $$[\mathbf{a}\,, [\mathbf{b}\,,\, \mathbf{c}]_{[A]}]_{[A]} + [\mathbf{b}\,, [\mathbf{c}\,,\, \mathbf{a}]_{[A]}]_{[A]} + [\mathbf{c}\,, [\mathbf{a}\,,\, \mathbf{b}]_{[A]}]_{[A]} = \mathbf{0}$$

Le produit vectoriel déformé est de facto un crochet agissant sur les éléments de V : voir les définitions et explications au § 1. Par définition ce crochet satisfait la deuxième condition exigée pour l'obtention d'une structure d'algèbre de Lie. Il ne reste donc qu'à explorer ce qui se passe avec la relation de Jacobi.

2.2 Relation de Jacobi

Proposition 2.1. ***Structure d'algèbre de Lie pour l'espace V***

La relation de Jacobi est satisfaite sur V chaque fois que :

$$\forall \mathbf{a}\,,\, \mathbf{b}\,,\, \mathbf{c} : < \mathbf{a}\,,\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} >_{Id_3} \,.\, \{-[A] \,.\, [J]^t \,.\, {}_{[J]}\Phi([A] \,.\, |\boldsymbol{\Omega} >)\}^{\oplus} = \mathbf{0}$$

Preuve 2.1.

$$[\mathbf{a}\,,\,[\mathbf{b}\,,\,\mathbf{c}]_{[A]}]_{[A]}$$
$$=$$
$$[\mathbf{a}\,,\,A^n_{jk}\,.\,(b^j\,.\,c^k\,-\,b^k\,.\,c^j)\,.\,\mathbf{e}_n]_{[A]}$$
$$=$$
$$A^i_{mn}\,.\,(a^m\,.\,A^n_{jk}\,.\,(b^j\,.\,c^k\,-\,b^k\,.\,c^j)\,-\,a^n\,.\,A^m_{jk}\,.\,(b^j\,.\,c^k\,-\,b^k\,.\,c^j))\,.\,\mathbf{e}_i$$

Avec l'aide de permutations cycliques :

$$[\mathbf{b}\,,\,[\mathbf{c}\,,\,\mathbf{a}]_{[A]}]_{[A]}\,=\,A^i_{mn}\,.\,(b^m\,.\,A^n_{jk}\,.\,(c^j\,.\,a^k\,-\,c^k\,.\,a^j)\,-\,b^n\,.\,A^m_{jk}\,.\,(c^j\,.\,a^k\,-\,c^k\,.\,a^j))\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$[\mathbf{c}\,,\,[\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b}]_{[A]}]_{[A]}\,=\,A^i_{mn}\,.\,(c^m\,.\,A^n_{jk}\,.\,(a^j\,.\,b^k\,-\,a^k\,.\,b^j)\,-\,c^n\,.\,A^m_{jk}\,.\,(a^j\,.\,b^k\,-\,a^k\,.\,b^j))\,.\,\mathbf{e}_i$$

Il vient :

$$[\mathbf{a}\,,\,[\mathbf{b}\,,\,\mathbf{c}]_{[A]}]_{[A]}\,+\,[\mathbf{b}\,,\,[\mathbf{c}\,,\,\mathbf{a}]_{[A]}]_{[A]}\,+\,[\mathbf{c}\,,\,[\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b}]_{[A]}]_{[A]}$$
$$=$$
$$\{A^i_{mn}\,.\,A^n_{jk}\,.\,a^m\,.\,(b^j\,.\,c^k\,-\,b^k\,.\,c^j)\,-\,A^i_{mn}\,.\,A^m_{jk}\,.\,a^n\,.\,(b^j\,.\,c^k\,-\,b^k\,.\,c^j)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+\,\{A^i_{mn}\,.\,A^n_{jk}\,.\,b^m\,.\,(c^j\,.\,a^k\,-\,c^k\,.\,a^j)\,-\,A^i_{mn}\,.\,A^m_{jk}\,.\,b^n\,.\,(c^j\,.\,a^k\,-\,c^k\,.\,a^j)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+\,\{A^i_{mn}\,.\,A^n_{jk}\,.\,c^m\,.\,(a^j\,.\,b^k\,-\,a^k\,.\,b^j)\,-\,A^i_{mn}\,.\,A^m_{jk}\,.\,c^n\,.\,(a^j\,.\,b^k\,-\,a^k\,.\,b^j)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$=$$
$$A^i_{mn}\,.\,A^n_{jk}\,.\,\{a^m\,.\,(b^j\,.\,c^k\,-\,b^k\,.\,c^j)\,+\,b^m\,.\,(c^j\,.\,a^k\,-\,c^k\,.\,a^j)\,+\,c^m\,.\,(a^j\,.\,b^k\,-\,a^k\,.\,b^j)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-\,A^i_{mn}\,.\,A^m_{jk}\,.\,\{a^n\,.\,(b^j\,.\,c^k\,-\,b^k\,.\,c^j)\,+\,b^n\,.\,(c^j\,.\,a^k\,-\,c^k\,.\,a^j)\,+\,c^n\,.\,(a^j\,.\,b^k\,-\,a^k\,.\,b^j)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$=$$
$$A^i_{mn}\,.\,A^n_{12}\,.\,\{a^m\,.\,(b^1\,.\,c^2\,-\,b^2\,.\,c^1)\,+\,b^m\,.\,(c^1\,.\,a^2\,-\,c^2\,.\,a^1)\,+\,c^m\,.\,(a^1\,.\,b^2\,-\,a^2\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+$$
$$A^i_{mn}\,.\,A^n_{23}\,.\,\{a^m\,.\,(b^2\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^2)\,+\,b^m\,.\,(c^2\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^2)\,+\,c^m\,.\,(a^2\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^2)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+$$
$$A^i_{mn}\,.\,A^n_{13}\,.\,\{a^m\,.\,(b^1\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^1)\,+\,b^m\,.\,(c^1\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^1)\,+\,c^m\,.\,(a^1\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-$$
$$A^i_{mn}\,.\,A^m_{12}\,.\,\{a^n\,.\,(b^1\,.\,c^2\,-\,b^2\,.\,c^1)\,+\,b^n\,.\,(c^1\,.\,a^2\,-\,c^2\,.\,a^1)\,+\,c^n\,.\,(a^1\,.\,b^2\,-\,a^2\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-$$
$$A^i_{mn}\,.\,A^m_{23}\,.\,\{a^n\,.\,(b^2\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^2)\,+\,b^n\,.\,(c^2\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^2)\,+\,c^n\,.\,(a^2\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^2)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-$$
$$A^i_{mn}\,.\,A^m_{13}\,.\,\{a^n\,.\,(b^1\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^1)\,+\,b^m\,.\,(c^1\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^1)\,+\,c^m\,.\,(a^1\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$=$$
$$A^i_{12}\,.\,A^2_{12}\,.\,\{a^1\,.\,(b^1\,.\,c^2\,-\,b^2\,.\,c^1)\,+\,b^1\,.\,(c^1\,.\,a^2\,-\,c^2\,.\,a^1)\,+\,c^1\,.\,(a^1\,.\,b^2\,-\,a^2\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+$$
$$A^i_{12}\,.\,A^2_{23}\,.\,\{a^1\,.\,(b^2\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^2)\,+\,b^1\,.\,(c^2\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^2)\,+\,c^1\,.\,(a^2\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^2)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+$$

$$A^i_{12}\,.\,A^2_{13}\,.\,\{a^1\,.\,(b^1\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^1)\,+\,b^1\,.\,(c^1\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^1)\,+\,c^1\,.\,(a^1\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$-$$

$$A^i_{12}\,.\,A^1_{12}\,.\,\{a^2\,.\,(b^1\,.\,c^2\,-\,b^2\,.\,c^1)\,+\,b^2\,.\,(c^1\,.\,a^2\,-\,c^2\,.\,a^1)\,+\,c^2\,.\,(a^1\,.\,b^2\,-\,a^2\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$-$$

$$A^i_{12}\,.\,A^1_{23}\,.\,\{a^2\,.\,(b^2\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^2)\,+\,b^2\,.\,(c^2\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^2)\,+\,c^2\,.\,(a^2\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^2)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$-$$

$$A^i_{12}\,.\,A^1_{13}\,.\,\{a^2\,.\,(b^1\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^1)\,+\,b^2\,.\,(c^1\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^1)\,+\,c^2\,.\,(a^1\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$+$$

$$A^i_{23}\,.\,A^3_{12}\,.\,\{a^2\,.\,(b^1\,.\,c^2\,-\,b^2\,.\,c^1)\,+\,b^2\,.\,(c^1\,.\,a^2\,-\,c^2\,.\,a^1)\,+\,c^2\,.\,(a^1\,.\,b^2\,-\,a^2\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$+$$

$$A^i_{23}\,.\,A^3_{23}\,.\,\{a^2\,.\,(b^2\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^2)\,+\,b^2\,.\,(c^2\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^2)\,+\,c^2\,.\,(a^2\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^2)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$+$$

$$A^i_{23}\,.\,A^3_{13}\,.\,\{a^2\,.\,(b^1\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^1)\,+\,b^2\,.\,(c^1\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^1)\,+\,c^2\,.\,(a^1\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$-$$

$$A^i_{23}\,.\,A^2_{12}\,.\,\{a^3\,.\,(b^1\,.\,c^2\,-\,b^2\,.\,c^1)\,+\,b^3\,.\,(c^1\,.\,a^2\,-\,c^2\,.\,a^1)\,+\,c^3\,.\,(a^1\,.\,b^2\,-\,a^2\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$-$$

$$A^i_{23}\,.\,A^2_{23}\,.\,\{a^3\,.\,(b^2\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^2)\,+\,b^3\,.\,(c^2\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^2)\,+\,c^3\,.\,(a^2\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^2)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$-$$

$$A^i_{23}\,.\,A^2_{13}\,.\,\{a^3\,.\,(b^1\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^1)\,+\,b^3\,.\,(c^1\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^1)\,+\,c^3\,.\,(a^1\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$+$$

$$A^i_{13}\,.\,A^3_{12}\,.\,\{a^1\,.\,(b^1\,.\,c^2\,-\,b^2\,.\,c^1)\,+\,b^1\,.\,(c^1\,.\,a^2\,-\,c^2\,.\,a^1)\,+\,c^1\,.\,(a^1\,.\,b^2\,-\,a^2\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$+$$

$$A^i_{13}\,.\,A^3_{23}\,.\,\{a^1\,.\,(b^2\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^2)\,+\,b^1\,.\,(c^2\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^2)\,+\,c^1\,.\,(a^2\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^2)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$+$$

$$A^i_{13}\,.\,A^3_{13}\,.\,\{a^1\,.\,(b^1\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^1)\,+\,b^1\,.\,(c^1\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^1)\,+\,c^1\,.\,(a^1\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$-$$

$$A^i_{13}\,.\,A^1_{12}\,.\,\{a^3\,.\,(b^1\,.\,c^2\,-\,b^2\,.\,c^1)\,+\,b^3\,.\,(c^1\,.\,a^2\,-\,c^2\,.\,a^1)\,+\,c^3\,.\,(a^1\,.\,b^2\,-\,a^2\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$-$$

$$A^i_{13}\,.\,A^1_{23}\,.\,\{a^3\,.\,(b^2\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^2)\,+\,b^3\,.\,(c^2\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^2)\,+\,c^3\,.\,(a^2\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^2)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$-$$

$$A^i_{13}\,.\,A^1_{13}\,.\,\{a^3\,.\,(b^1\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^1)\,+\,b^3\,.\,(c^1\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^1)\,+\,c^3\,.\,(a^1\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$=$$

$$A^i_{12}\,.\,A^2_{12}\,.\,\{0\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$+$$

$$A^i_{12}\,.\,A^2_{23}\,.\,\{a^1\,.\,(b^2\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^2)\,+\,b^1\,.\,(c^2\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^2)\,+\,c^1\,.\,(a^2\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^2)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$

$$+$$

$$A^i_{12}\,.\,A^2_{13}\,.\,\{0\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-$$
$$A^i_{12}\,.\,A^1_{12}\,.\,\{0\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-$$
$$A^i_{12}\,.\,A^1_{23}\,.\,\{0\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-$$
$$A^i_{12}\,.\,A^1_{13}\,.\,\{a^2\,.\,(b^1\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^1)\,+\,b^2\,.\,(c^1\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^1)\,+\,c^2\,.\,(a^1\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+$$
$$A^i_{23}\,.\,A^3_{12}\,.\,\{0\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+$$
$$A^i_{23}\,.\,A^3_{23}\,.\,\{0\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+$$
$$A^i_{23}\,.\,A^3_{13}\,.\,\{a^2\,.\,(b^1\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^1)\,+\,b^2\,.\,(c^1\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^1)\,+\,c^2\,.\,(a^1\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-$$
$$A^i_{23}\,.\,A^2_{12}\,.\,\{a^3\,.\,(b^1\,.\,c^2\,-\,b^2\,.\,c^1)\,+\,b^3\,.\,(c^1\,.\,a^2\,-\,c^2\,.\,a^1)\,+\,c^3\,.\,(a^1\,.\,b^2\,-\,a^2\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-$$
$$A^i_{23}\,.\,A^2_{23}\,.\,\{0\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-$$
$$A^i_{23}\,.\,A^2_{13}\,.\,\{0\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+$$
$$A^i_{13}\,.\,A^3_{12}\,.\,\{0\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+$$
$$A^i_{13}\,.\,A^3_{23}\,.\,\{a^1\,.\,(b^2\,.\,c^3\,-\,b^3\,.\,c^2)\,+\,b^1\,.\,(c^2\,.\,a^3\,-\,c^3\,.\,a^2)\,+\,c^1\,.\,(a^2\,.\,b^3\,-\,a^3\,.\,b^2)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$+$$
$$A^i_{13}\,.\,A^3_{13}\,.\,\{0\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-$$
$$A^i_{13}\,.\,A^1_{12}\,.\,\{a^3\,.\,(b^1\,.\,c^2\,-\,b^2\,.\,c^1)\,+\,b^3\,.\,(c^1\,.\,a^2\,-\,c^2\,.\,a^1)\,+\,c^3\,.\,(a^1\,.\,b^2\,-\,a^2\,.\,b^1)\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-$$
$$A^i_{13}\,.\,A^1_{23}\,.\,\{0\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$-$$
$$A^i_{13}\,.\,A^1_{13}\,.\,\{0\}\,.\,\mathbf{e}_i$$
$$=$$
$$\{a^1\,.\,b^2\,.\,c^3\,.\,\{A^i_{12}\,.\,A^2_{23}\,+\,A^i_{12}\,.\,A^1_{13}\,-\,A^i_{23}\,.\,A^3_{13}\,-\,A^i_{23}\,.\,A^2_{12}\,+\,A^i_{13}\,.\,A^3_{23}\,-\,A^i_{13}\,.\,A^1_{12}\}$$
$$+$$
$$a^2\,.\,b^3\,.\,c^1\,.\,\{A^i_{12}\,.\,A^2_{23}\,+\,A^i_{12}\,.\,A^1_{13}\,-\,A^i_{23}\,.\,A^3_{13}\,-\,A^i_{23}\,.\,A^2_{12}\,+\,A^i_{13}\,.\,A^3_{23}\,-\,A^i_{13}\,.\,A^1_{12}\}$$
$$+$$

$$a^3 \,.\, b^1 \,.\, c^2 \,.\, \{A^i_{12} \,.\, A^2_{23} \,+\, A^i_{12} \,.\, A^1_{13} \,-\, A^i_{23} \,.\, A^3_{13} \,-\, A^i_{23} \,.\, A^2_{12} \,+\, A^i_{13} \,.\, A^3_{23} \,-\, A^i_{13} \,.\, A^1_{12}\}$$

$$-$$

$$a^3 \,.\, b^2 \,.\, c^1 \,.\, \{A^i_{12} \,.\, A^2_{23} \,+\, A^i_{12} \,.\, A^1_{13} \,-\, A^i_{23} \,.\, A^3_{13} \,-\, A^i_{23} \,.\, A^2_{12} \,+\, A^i_{13} \,.\, A^3_{23} \,-\, A^i_{13} \,.\, A^1_{12}\}$$

$$-$$

$$a^2 \,.\, b^1 \,.\, c^3 \,.\, \{A^i_{12} \,.\, A^2_{23} \,+\, A^i_{12} \,.\, A^1_{13} \,-\, A^i_{23} \,.\, A^3_{13} \,-\, A^i_{23} \,.\, A^2_{12} \,+\, A^i_{13} \,.\, A^3_{23} \,-\, A^i_{13} \,.\, A^1_{12}\}$$

$$-$$

$$a^1 \,.\, b^3 \,.\, c^2 \,.\, \{A^i_{12} \,.\, A^2_{23} \,+\, A^i_{12} \,.\, A^1_{13} \,-\, A^i_{23} \,.\, A^3_{13} \,-\, A^i_{23} \,.\, A^2_{12} \,+\, A^i_{13} \,.\, A^3_{23} \,-\, A^i_{13} \,.\, A^1_{12}\}\} \,.\, \mathbf{e}_i$$

$$=$$

$$\{a^1 \,.\, b^2 \,.\, c^3 \,+\, a^2 \,.\, b^3 \,.\, c^1 \,+\, a^3 \,.\, b^1 \,.\, c^2 \,-\, a^3 \,.\, b^2 \,.\, c^1 \,-\, a^2 \,.\, b^1 \,.\, c^3 \,-\, a^1 \,.\, b^3 \,.\, c^2\}$$

$$\times$$

$$\{A^i_{12} \,.\, A^2_{23} \,+\, A^i_{12} \,.\, A^1_{13} \,-\, A^i_{23} \,.\, A^3_{13} \,-\, A^i_{23} \,.\, A^2_{12} \,+\, A^i_{13} \,.\, A^3_{23} \,-\, A^i_{13} \,.\, A^1_{12}\} \,.\, \mathbf{e}_i$$

$$=$$

$$< \mathbf{a} \,,\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} >_{Id_3} \;.\, \{A^i_{12} \,.\, A^2_{23} + A^i_{12} \,.\, A^1_{13} - A^i_{23} \,.\, A^3_{13} - A^i_{23} \,.\, A^2_{12} + A^i_{13} \,.\, A^3_{23} - A^i_{13} \,.\, A^1_{12}\} \,.\, \mathbf{e}_i$$

2.3 Les cas qui ne dépendent pas de la matrice déformante

Cette partie de la démonstration fournit une première catégorie de situations qui permettraient de faire de l'espace V une algèbre de Lie. Elle contient deux sous-ensembles de situations :

- Le vecteur **b** est colinéaire au vecteur **c**
- Le produit vectoriel classique $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ est orthogonal au vecteur **a**.

Ces situations ne dépendent visiblement pas de la matrice déformante [A] mais du seul choix des trois vecteurs **a**, **b** et **c** de E(3, C) formant l'élément ordonné (**a**, **b**, **c**) de $E^3(3, C)$. Pour qu'un ensemble de vecteurs forment une algèbre de Lie, il faut que tous les éléments de cet ensemble satisfassent l'identité de Jacobi. Pour que l'èlèment {**a**, **b**, **c**} de l'ensemble P(E(3, C)) des parties de E(3, C) appartienne à une algèbre de Lie, sans qu'une matrice déformante y soit pour quelque chose, il faudrait donc en toute logique que, simultanément :

$$< \mathbf{a} \,,\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} >_{Id_3} = 0$$

$$< \mathbf{b} \,,\, \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} >_{Id_3} = 0$$

$$< \mathbf{c} \,,\, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} >_{Id_3} = 0$$

Exemple 2.1. ***Les triades "spineurs compatibles" orthogonales***

Dans le document [[b]], la notion de triade "spineur compatible" est apparue. Celles-ci peuvent en particulier être orthogonales. Soit une triade presque quelconque dont les éléments sont tout de même astreints à satisfaire les conditions suivantes :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \,=\, \mathbf{c} \,;\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \,=\, \mathbf{a} \,;\, < \mathbf{a} \,,\, \mathbf{a} >_{Id_3} = 0$$

Soit le calcul classique suivant :

$$\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} \,=\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) \,=< \mathbf{a} \,,\, \mathbf{a} >_{Id_3} \,.\, \mathbf{b} - < \mathbf{a} \,,\, \mathbf{b} >_{Id_3} \,.\, \mathbf{a}$$

Comme le vecteur **a** est supposé être isotropique et les deux premières identités imposent que :

$$< \mathbf{b}\,,\,\mathbf{c} >_{Id_3} = 0\,;\, < \mathbf{c}\,,\,\mathbf{a} >_{Id_3} = 0\,;\, < \mathbf{a}\,,\,\mathbf{b} >_{Id_3} = 0$$

Il faut donc impérativement que le vecteur **a** soit colinéaire au vecteur **c**.

$$\mathbf{c} = k\,.\,\mathbf{a}\,;\, k \neq 0$$

Ce dernier hérite de la propriété d'isotropie.

$$< \mathbf{c}\,,\,\mathbf{c} >_{Id_3} = 0$$

En réinjectant ces faits dans les relations initiales caractérisant les éléments de la triade, il suit que :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = k\,.\,\mathbf{a}\,;\, k\,.\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{a}$$

Ces relations sont irrecevables sur E(3, R) ; bien entendu, sauf à annuler tous les éléments de la triade : ce qui n'a pas beaucoup d'intérêt. Par contre, elle semblent acceptables sur E(3, C). Elles respectent l'antisymétrie naturelle du produit vectoriel aussi longtemps que :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = (k + \frac{1}{k})\,.\,\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

Le facteur de proportionalité liant les vecteurs **c** et **a** est donc, au signe moins près, le nombre imaginaire pur "i" ($i^2 + 1 = 0$) ; $k = \pm i$.

Proposition 2.2. *En l'état de développement actuel de la théorie des produits vectoriels déformés agissant sur E(3, C), les triades {**a**, $\pm i.$**a**, **b**} définies par les relations énoncées au début de ce paragraphe sont compatibles avec l'existence de décompositions non-triviales à la limite euclidienne des produits vectoriels classiques :* $\boldsymbol{a} \wedge \pm i.\boldsymbol{a} = \mp i.\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

Preuve 2.2.

En effet, puisque le vecteur **a** est isotropique, il en est de même pour le vecteur $\pm$**a**. Par ailleurs : les vecteurs **a** et **b** sont orthogonaux. Il en est donc de même pour les vecteurs **b** et $\pm$**a** ; c.q.f.d.

Proposition 2.3. *En l'état de développement actuel de la théorie des produits vectoriels déformés agissant sur E(3, C), les triades {**a**, $\pm i.$**a**, **b**} définies par les relations énoncées au début de ce paragraphe satisfont la relation de Jacobi.*

Preuve 2.3.

En effet :

- $$< \mathbf{a}\,,\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} >_{Id_3} = < \mathbf{a}\,,\,\mathbf{a} >_{Id_3} = 0$$

  par définition du produit vectoriel $\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$ et parce que le vecteur **a** est isotropique.

- $$< \mathbf{b}\,,\,\mathbf{c} \wedge \mathbf{a} >_{Id_3} = < \mathbf{b}\,,\,\pm i\,.\,\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} >_{Id_3} = 0$$

  parce que le vecteur **c** est colinéaire au vecteur **a** et que le produit vectoriel $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}$ est nul.

- $$< \mathbf{c}\,,\, \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} >_{Id_3} = < \mathbf{c}\,,\, \mathbf{c} >_{Id_3} = 0$$

  par définition du produit vectoriel $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ et parce que le vecteur $\mathbf{c}$ est isotropique.

c.q.f.d.

Proposition 2.4. *En l'état de développement actuel de la théorie des produits vectoriels déformés agissant sur E(3, C), les triades {$\boldsymbol{a}$, $\pm i.\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$} définies par les relations énoncées au début de ce paragraphe sont spineurs compatibles et orthogonales si le vecteur $\boldsymbol{b}$ est lui-aussi isotropique.*

Preuve 2.4.

Les cinq conditions assurant qu'une quelconque triade $\{\mathbf{w}_1,\, \mathbf{w}_1,\, \mathbf{w}_1\}$ soit spineur compatible s'écrivent :

1. $$(\eta^0)^4 \;:\; ||\mathbf{w}_1||^2 \;=\; 0$$

2. $$(\eta^0)^3 \,.\, (\eta^1) \;:< \mathbf{w}_1\,,\, \mathbf{w}_2 >_{Id_3} = \;0$$

3. $$(\eta^0)^2 \,.\, (\eta^1)^2 \;:< \mathbf{w}_1\,,\, \mathbf{w}_3 >_{Id_3} \;+ ||\mathbf{w}_2||^2 \;=\; 0$$

4. $$(\eta^0) \,.\, (\eta^1)^3 \;:< \mathbf{w}_2\,,\, \mathbf{w}_3 >_{Id_3} = \;0$$

5. $$(\eta^1)^4 \;:\; ||\mathbf{w}_3||^2 \;=\; 0$$

En posant en particulier ici :

$$\mathbf{w}_1 \;=\; \mathbf{a}\,;\, \mathbf{w}_2 \;=\; \mathbf{b}\,;\, \mathbf{w}_3 \;=\; \mathbf{c} \;=\; \pm i\,.\,\mathbf{a}$$

Ces conditions deviennent :

1. $$(\eta^0)^4 \;:\; ||\mathbf{a}||^2 \;= < \mathbf{a}\,,\, \mathbf{a} >_{Id_3} = \;0$$

2. $$(\eta^0)^3 \,.\, (\eta^1) \;:< \mathbf{a}\,,\, \mathbf{b} >_{Id_3} = \;0$$

3. $$(\eta^0)^2 \,.\, (\eta^1)^2 \;:< \mathbf{a}\,,\, \mathbf{c} >_{Id_3} \;+ ||\mathbf{b}||^2 \;=\; 0$$

4. $$(\eta^0) \,.\, (\eta^1)^3 \;:< \mathbf{b}\,,\, \mathbf{c} >_{Id_3} = \;0$$

5. $$(\eta^1)^4 \;:\; ||\mathbf{c}||^2 \;= < \mathbf{c}\,,\, \mathbf{c} >_{Id_3} = \;0$$

Elles sont toutes naturellement satisfaites dés le moment où les conditions initiales sont satisfaites ; sauf la condition 3. A moins de forcer l'isotropie du vecteur $\mathbf{b}$. □

Théorème 2.1. ***Des triades spineurs compatibles orthogonales***

Les triades satisfaisant les conditions initiales :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}\,;\, \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a}\,;\, <\mathbf{a}\,,\,\mathbf{a}>_{Id_3} = <\mathbf{b}\,,\,\mathbf{b}>_{Id_3} = 0$$

sont en réalité :

- équivalentes aux triades $\{\mathbf{a},\, \pm \mathrm{i}.\mathbf{a},\, \mathbf{b}\}$;
- compatibles avec l'existence de décompositions non-triviales à la limite euclidienne des produits vectoriels classiques : $\mathbf{a} \wedge \pm \mathrm{i}.\mathbf{a} = \mp \mathrm{i}.\mathbf{a} + \mathbf{b}$;
- telles qu'elles satisfont la relation de Jacobi ;
- spineurs compatibles et orthogonales.

2.4 Les cas qui dépendent de la matrice déformante

Les mathématiques offrent une seconde catégorie de situations validant la relation de Jacobi. Ces situations dépendent directement de la matrice déformante [A]. Elles se laissent décrire par la condition suivante :

$$\begin{gathered}
\{A^1_{12}\,.\,A^2_{23} + A^1_{12}\,.\,A^1_{13} - A^1_{23}\,.\,A^3_{13} - A^1_{23}\,.\,A^2_{12} + A^1_{13}\,.\,A^3_{23} - A^1_{13}\,.\,A^1_{12}\}\,.\,\mathbf{e}_1 \\
+ \\
\{A^2_{12}\,.\,A^2_{23} + A^2_{12}\,.\,A^1_{13} - A^2_{23}\,.\,A^3_{13} - A^2_{23}\,.\,A^2_{12} + A^2_{13}\,.\,A^3_{23} - A^2_{13}\,.\,A^1_{12}\}\,.\,\mathbf{e}_2 \\
+ \\
\{A^3_{12}\,.\,A^2_{23} + A^3_{12}\,.\,A^1_{13} - A^3_{23}\,.\,A^3_{13} - A^3_{23}\,.\,A^2_{12} + A^3_{13}\,.\,A^3_{23} - A^3_{13}\,.\,A^1_{12}\}\,.\,\mathbf{e}_3 \\
= \\
\mathbf{0}
\end{gathered}$$

Elle peut se synthétiser pour donner :

$$\begin{gathered}
A^1_{12}\,.\,\{-A^i_{13}\,.\,\mathbf{e}_i\} + A^2_{12}\,.\,\{-A^i_{23}\,.\,\mathbf{e}_i\} + A^3_{12}\,.\,\{\mathbf{0}\} \\
+ \\
A^1_{23}\,.\,\{\mathbf{0}\} + A^2_{23}\,.\,\{A^i_{12}\,.\,\mathbf{e}_i\} + A^3_{23}\,.\,\{A^i_{13}\,.\,\mathbf{e}_i\} \\
+ \\
A^1_{13}\,.\,\{A^i_{12}\,.\,\mathbf{e}_i\} + A^2_{13}\,.\,\{\mathbf{0}\} + A^3_{13}\,.\,\{-A^i_{23}\,.\,\mathbf{e}_i\} \\
= \\
\mathbf{0}
\end{gathered}$$

Je définis le vecteur spécifique suivant sur $\mathrm{E}^3(3,\, \mathrm{C})$:

$$|\mathbf{X}> = [A]\,.\,|\mathbf{\Omega}>$$

ou Ω représente les trois vecteurs de la base de référence. Il devient ainsi possible d'écrire :

$$\begin{gathered}
A^1_{12}\,.\,\{-\mathbf{X}^3\} + A^2_{12}\,.\,\{-\mathbf{X}^2\} + A^3_{12}\,.\,\{\mathbf{0}\} \\
+ \\
A^1_{23}\,.\,\{\mathbf{0}\} + A^2_{23}\,.\,\{\mathbf{X}^1\} + A^3_{23}\,.\,\{\mathbf{X}^3\}
\end{gathered}$$

$$+$$
$$A_{13}^1 . \{\mathbf{X}^1\} + A_{13}^2 . \{\mathbf{0}\} + A_{13}^3 . \{-\mathbf{X}^2\}$$
$$=$$
$$\mathbf{0}$$

Tout ceci se laisse encore regrouper de la façon suivante :

$$\{\begin{pmatrix} A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \\ A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -\mathbf{X}^3 & \mathbf{0} & \mathbf{X}^1 \\ -\mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}^3 & -\mathbf{X}^2 \end{pmatrix}\}^{\oplus} = \mathbf{0}$$

Par convention l'exposant $^{\oplus}$ indique que la somme de tous les éléments présents dans la matrice de M(3, E(3, C)) doit être faite. Cette convention permet de poursuivre avec :

$${}_{[J]}\Phi(\mathbf{X}) = {}_{[J]}\Phi([A] . |\mathbf{\Omega} >) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{X}^3 & \mathbf{X}^2 \\ \mathbf{X}^3 & -\mathbf{0} & -\mathbf{X}^1 \\ -\mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Un calcul permet de constater que :

$$-[J]^t . {}_{[J]}\Phi(\mathbf{X})$$
$$=$$
$$-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{X}^3 & \mathbf{X}^2 \\ \mathbf{X}^3 & -\mathbf{0} & -\mathbf{X}^1 \\ -\mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
$$=$$
$$\begin{pmatrix} -\mathbf{X}^3 & \mathbf{0} & \mathbf{X}^1 \\ -\mathbf{X}^2 & \mathbf{X}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}^3 & -\mathbf{X}^2 \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de finir la démonstration de la proposition. □

Théorème 2.2. ***Relation de Jacobi et matrices déformantes***

Ces calculs algébriques se synthétisent et la relation de Jacobi est validée indépendamment du territoire choisi dans V^3 lorsque :

$$\{-[A] . [J]^t . {}_{[J]}\Phi([A] . |\mathbf{\Omega} >)\}^{\oplus} = \mathbf{0}$$

Exemple 2.2. ***Produit vectoriel classique***

Le produit vectoriel classique est défini par la matrice [A] = [J]. Il est aisé d'en déduire que $[A].[J]^t = Id_3$ et que la condition est bien vérifiée puisqu'elle se réduit à :

$${}_{[J]}\Phi^{\oplus}([J] . |\mathbf{\Omega} >) = \mathbf{0}$$

En effet, le formalisme des matrices triviales ${}_{[J]}\Phi$ est tel que la somme de leurs composantes est toujours nulle (à cause de l'antisymétrie naturelle de ces matrices) ; c.q.f.d. Par conséquent, tous les éléments de V = {E(3, C), $\wedge$} satisfont la relation de Jacobi. L'antisymétrie naturelle du produit vectoriel classique et sa définition achèvent de démontrer que V = {E(3, C), $\wedge$} est muni d'une structure d'algèbre de Lie ; ce que nous savions déjà. Rassurant à noter : cette affirmation est vraie dans n'importe quelle base Ω.

Remarque 2.1. ***Expression générale***

Attention, sur l'espace V = {E(3, C), [..., ...][A]}, il vient en général :

$$[\mathbf{a}\,,\,[\mathbf{b}\,,\,\mathbf{c}]_{[A]}]_{[A]} \,+\, [\mathbf{b}\,,\,[\mathbf{c}\,,\,\mathbf{a}]_{[A]}]_{[A]} \,+\, [\mathbf{c}\,,\,[\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b}]_{[A]}]_{[A]}$$

$$=$$

$$<\mathbf{a}\,,\,\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}>_{Id_3}\;.\{-[A]\,.\,[J]^t\,.\,_{[J]}\Phi([A]\,.\,|\boldsymbol{\Omega}>)\}^{\oplus}$$

Remarque 2.2. ***Commentaires***

Tout ceci ayant été écrit,

1. La découverte de l'existence d'une structure d'algèbre de Lie représente toujours un fait marquant pour qui se pique de construire un modèle théorique. Ici, j'ai montré que tout ou partie de V pouvait acquérir cette structure de deux manières différentes :
   - L'une d'elles ne dépend pas vraiment de la façon dont le crochet est défini et ne concerne que les parties de V constituées de cette curiosité algébrique que sont les triades spineurs compatibles et orthogonales.
   - L'autre dépend clairement de la matrice déformante [A] ainsi que de la base locale Ω ; elle concerne tous les éléments de V.
2. La seconde catégorie de situations livrant une structure d'algèbre de Lie exhibe une dépendance indirecte à la géométrie locale via l'apparition des vecteurs de la base Ω. Cette dépendance complète celle existant parfois dans les géométries pseudo-euclideinnes déja étudiées dans [[b]].

$$\{[A]\,.\,[J]^t\}\,.\,[G] \,=\, Id_3$$

3. Les résultats acquis encouragent à poursuivre l'exploration structurelle de l'espace V. Puisque le produit vectoriel déformé n'est pas forcément associatif et qu'il semble difficile de trouver un élément neutre dans V, il sera impossible d'envisager une structure de groupe. En revanche, une étude de l'algèbre enveloppante et de l'involution peuvent s'envisager.

3 Application : confrontation avec la classification de Bianchi pour les espaces homogènes de dimension trois

Le lien entre espaces homogènes de dimension trois et algèbre de Lie est connue depuis plus d'un siècle. Les espaces homogènes préservent les distances : c'est ce qui les rend intéressant pour d'éventuelles applications physiques. Pour les lecteurs comprenant la langue de Goethe, il existe un excellent chapitre initialement dû à Landau et Lifschitz décrivant ces liens mathématiques [[02] ; § 116, pp. 454-461].

En observant bien les équations [02 ; § 116, p. 457, (116,12) et (116,13)], il apparait clairement quelle utilisation concrète peut être faite de l'ensemble des explorations précédentes. Les composantes importantes sont ici les trois (a = 1, 2, 3) :

$$X_a \,=\, e^{\alpha}_{(a)}.\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}$$

qui satisfont à :

$$[X_a,\,X_b] \,\equiv\, X_a X_b \,-\, X_b X_a \,=\, C^c_{ab}\,.\,X_c$$

Avant de poursuivre, je veux faire ici plusieurs constats :

- (i) L'absence d'un signe d'égalité entre le crochet et sa représentation ; il n'y a là qu'une équivalence.
- (ii) L'absence d'une opération bien définie liant les composantes du vecteur **X** dans la représentation de ce crochet ; la nature des composantes de ce vecteur invite à penser qu'il s'agit d'une opération de composition des fonctions mais la chose n'est pas vraiment claire :

$$X_a X_b \,=\, \{e^{\alpha}_{(a)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\} o \{e^{\beta}_{(b)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\} \,=\, e^{\alpha}_{(a)} \cdot e^{\beta}_{(b)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} \,?$$

ou :

$$X_a X_b \,=\, \{e^{\alpha}_{(a)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\} . \{e^{\beta}_{(b)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\} \,=\, e^{\alpha}_{(a)} . e^{\beta}_{(b)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \cdot \frac{\partial}{\partial x^{\beta}} \,?$$

La définition du crochet introduit dans [01 ; § 116] doit donc être précisée.

3.1 Produits tensoriels déformés au sein de la relativité générale

Proposition 3.1.

La théorie de la relativité générale introduit une relation [[02] ; § 98, p. 350, non numérotée] dont le formalisme mime ce que j'ai nommé un produit tensoriel déformé :

$$e_{(c)\,i\,;\,k} \,=\, \gamma_{cab} \cdot e^{(a)}_{i} \cdot e^{(b)}_{k}$$

Preuve 3.1.

La démonstration de cette proposition exige de revenir d'abord sur les définitions des 3 et 4-bein [1] . Dans le contexte de la relativité générale, le concept de "4-bein" a été introduit pour tenter de rendre compte des déformations de la géométrie locale. Il est défini par un ensemble de relations caractéristiques ; voir par exemple : [[02] ; § 98, pp. 348-349, (98, 1 à 6)]. La démarche peut être conduite de façon similaire en dimension trois ; voir par exemple : [[02] ; § 116, pp. 455-456, (116, 2 à 8)].

En appliquant la définition du produit tensoriel déformé bâti sur un cube D au départ quelconque, il convient d'écrire :

$$\otimes_D(e_i,\, e_k) \,=\, D^{c}_{ab} \cdot e^{(a)}_{i} \cdot e^{(b)}_{k} \cdot e_c$$

A supposer que, par convention :

$$\gamma_{cab} \,=\, D^{c}_{ab}$$

Il devient alors évident que :

$$\otimes_{\gamma}(e_i,\, e_k) \,=\, e_{(c)\,i\,;\,k} \cdot e_c$$

ou encore que :

$$\{\otimes_{\gamma}(e_i,\, e_k)\}^c \,=\, e_{(c)\,i\,;\,k}$$

La dérivée partielle de la c-ième composante covariante du i-ème vecteur de base par rapport à la k-ième composante covariante est la c-ième composante contravariante du produit tensoriel déformé du i-ème vecteur de base par le k-ième vecteur de base. □

[1] traduction : pattes, jambes

En principe, avec l'aide des définitions adoptées dans cette théorie, il en découle que le produit extérieur déformé de deux vecteurs de base vaut :

$$\otimes_\gamma(e_i,\, e_k) \,-\, \otimes_\gamma(e_k,\, e_i) \,=\, \wedge_\gamma(e_i,\, e_k) \,=\, (e_{(c)\, i\,;\, k} \,-\, e_{(c)\, k\,;\, i}) \,.\, e_c$$

Chacune de ses trois composantes s'écrit :

$$\{\wedge_\gamma(e_i,\, e_k)\}^c \,=\, (e_{(c)\, i\,;\, k} \,-\, e_{(c)\, k\,;\, i})$$

En relativité générale, le cube γ a des propriétés bien particulières décrites par les relations [[02] ; § 98, p. 350, (98,10), (98,11), (98,12)]. Elles permettent de se persuader de la cohérence interne des écritures puisqu'elles conduisent à :

$$\{\wedge_\gamma(e_i,\, e_k)\}^c \,=\, (e_{(c)\, i\,;\, k} \,-\, e_{(c)\, k\,;\, i}) \,=\, \gamma_{cab} \,.\, (e_i^{(a)} \,.\, e_k^{(b)} \,-\, e_k^{(a)} \,.\, e_i^{(b)})$$

Pour autant, le cube γ n'est pas nécessairement anti-symétrique (voir [[02] ; § 98, p. 350, (98,10)]) et la liaison avec la notion de produit vectoriel déformé peut difficilement s'envisager par ce biais. Même la relation [[02] ; § 98, p. 350, (98,12)]) :

$$D^c{}_{ab} \,=\, \gamma_{cab} \,=\, -\gamma_{acb} \,=\, -D^a{}_{cb}$$

ne permet pas d'envisager que γ puisse former un cube anti-réduit parce que le cube D n'est pas symétrique sur ses indices bas.

3.2 Produits vectoriels déformés au sein de la relativité générale

Une piste permettant de joindre formellement la notion de produit vectoriel déformé consiste à considérer la relation [[02] ; § 116, p. 457, (116,10)]. Elle implique le formalisme connu du crochet de Poisson et peut se réécrire :

$$e^\alpha_{(a)} \cdot \frac{\partial e^\gamma_{(b)}}{\partial x^\alpha} \,-\, \frac{\partial e^\gamma_{(a)}}{\partial x^\beta} \,.\, e^\beta_{(b)} \,=\, \{e^\gamma_{(a)},\, e^\gamma_{(b)}\} \,=\, C^c_{ab} \,.\, e^\gamma_{(c)}$$

A ce stade, les remarques suivantes peuvent être faites :

- Cette relation concerne les vecteurs de la base duale ; i.e. : les e^γ, pour $\gamma = 1$, 2 et 3. Comme il est coutûme de faire, les dérivées partielles premières de ces vecteurs peuvent être projetées dans la base d'origine :

  $$\frac{\partial e^\gamma_{(b)}}{\partial x^\alpha} \,=\, \sum_{(c)} T^{\gamma(c)}_{(b)\alpha} \cdot e^\gamma_{(c)} \,;\, \frac{\partial e^\gamma_{(a)}}{\partial x^\beta} \,=\, \sum_{(c)} T^{\gamma(c)}_{(a)\beta} \cdot e^\gamma_{(c)}$$

  De sorte que le crochet de Poisson peut aussi s'écrire :

  $$e^\alpha_{(a)} \cdot \frac{\partial e^\gamma_{(b)}}{\partial x^\alpha} \,-\, \frac{\partial e^\gamma_{(a)}}{\partial x^\beta} \,.\, e^\beta_{(b)} \,=\, \sum_\alpha e^\alpha_{(a)} \cdot \sum_{(c)} T^{\gamma(c)}_{(b)\alpha} \cdot e^\gamma_{(c)} \,-\, \sum_\beta \sum_{(c)} T^{\gamma(c)}_{(a)\beta} \cdot e^\gamma_{(c)} \cdot e^\beta_{(b)}$$

  La discussion ayant lieu sur le corps commutatif des nombres complexes, il revient au même d'écrire :

  $$e^\alpha_{(a)} \cdot \frac{\partial e^\gamma_{(b)}}{\partial x^\alpha} \,-\, \frac{\partial e^\gamma_{(a)}}{\partial x^\beta} \,.\, e^\beta_{(b)} \,=\, \sum_{(c)} \{\sum_\alpha T^{\gamma(c)}_{(b)\alpha} \cdot e^\alpha_{(a)} \,-\, \sum_{(c)} \sum_\beta T^{\gamma(c)}_{(a)\beta} \cdot e^\beta_{(b)}\} \cdot e^\gamma_{(c)}$$

  En comparant cette relation avec celle issue de l'approche relativiste sur les espaces homogènes, il faudrait alors pouvoir écrire :

  $$\forall\, \gamma \,=\, 1,\, 2,\, 3\,;\, \sum_\alpha T^{\gamma(c)}_{(b)\alpha} \cdot e^\alpha_{(a)} \,-\, \sum_\beta T^{\gamma(c)}_{(a)\beta} \cdot e^\beta_{(b)} \,=\, C^c_{ab}$$

Je note encore que les indices α et β sont muets.

$$\forall\,\gamma\,=\,1,\,2,\,3\,;\,\sum_{\alpha}(T^{\gamma(c)}_{(b)\alpha}\cdot e^{\alpha}_{(a)}\,-\,T^{\gamma(c)}_{(a)\alpha}\cdot e^{\alpha}_{(b)})\,=\,C^{c}_{ab}$$

Dans une approche impliquant les projections des dérivées partielles premières des vecteurs de la base duale dans elle-même, les constantes de structure peuvent s'exprimer comme des combinaisons linéaires des projecteurs de ces dérivées partielles sur la base duale.

- A partir de cette formulation des constantes de structure, il est aisé de prouver que :

$$C^{c}_{ab}\,=\,-C^{c}_{ba}$$

Puisque les constantes de structure sont anti-symétriques sur leurs indices bas, je peux accepter de penser qu'elles résultent de l'antisymétrisation d'un cube C et qu'elles se laissent regrouper sous la forme d'une matrice [C] de M(3, C) jouant un rôle similaire à celui qu'aurait une matrice déformante [A] pour un produit vectoriel.

- Toutefois, sans information supplémentaire sur le contexte de cette discussion, le fait qu'il s'agisse de constantes (de structure) est sans doute ce qui surprend le plus dans cette confrontation. Qui plus est, en faisant momentanément abstraction de γ et (c), chaque terme de la somme sur α donne la sensation d'être une composante covariante d'un produit vectoriel classique qui aurait été effectué entre un certain vecteur $\mathbf{T}$ et le vecteur e^{α} de la base duale.

$$\mathbf{T}\,\wedge\,e^{\alpha}\,=\,\epsilon_{(a)(b)(c)}\cdot(T_{(a)}\cdot e^{\alpha}_{(b)}\,-\,T_{(b)}\cdot e^{\alpha}_{(a)})\cdot e^{c}$$

3.3 Réflexions sur les constantes de structure

Reprenant la réflexion débutée au § 3.1, et considérant la relation [[02] ; § 116, p. 457, (116,9)] :

$$C^{c}_{ab}\,=\,(e_{(c)\,i\,;\,k}\,-\,e_{(c)\,k\,;\,i})\cdot e^{i}_{(a)}\cdot e^{k}_{(b)}$$

il devient possible de poursuivre avec l'état d'esprit de la théorie des produits vectoriels déformés (p.v.d) en tentant d'interpréter les composantes du cube C comme celles d'un p.v.d. Il faut pour cela fabriquer trois vecteurs ; explications :

- l'ensemble des composantes des vecteurs de la base duale peuvent s'ordonner sous la forme d'une matrice (3-3) qu'il est possible de lire de façon transposée .

$$\begin{bmatrix} e^{1} & e^{1}_{(1)} & e^{1}_{(2)} & e^{1}_{(3)} \\ e^{2} & e^{2}_{(1)} & e^{2}_{(2)} & e^{2}_{(3)} \\ e^{3} & e^{3}_{(1)} & e^{3}_{(2)} & e^{3}_{(3)} \\ => & \mathbf{e}_{(1)} & \mathbf{e}_{(2)} & \mathbf{e}_{(3)} \end{bmatrix}$$

- les composantes du produit extérieur déformé $\wedge_{\gamma}$ peuvent s'interpréter comme celles d'un cube A, antisymétrique sur ses indices bas.

$$(e_{(c)\,i\,;\,k}\,-\,e_{(c)\,k\,;\,i})\,=\,\{\wedge_{\gamma}(e_{i},\,e_{k})\}^{c}\,=\,A^{(c)}_{ik}$$

Il en suit que ce cube A peut se représenter conventionnellement à l'aide d'une matrice (3-3) : [A].

Ceci étant dit, je forme les produits tensoriels déformés suivants :

$$\otimes_{[A]}(\mathbf{e}_{(a)},\, \mathbf{e}_{(b)}) \,=\, \{A^{(c)}_{ik} \,.\, e^i_{(a)} \,.\, e^k_{(b)}\} \,.\, \mathbf{e}_{(c)}$$

Reprenant la route historique, je forme ensuite les produits extérieurs déformés :

$$\wedge_{[A]}(\mathbf{e}_{(a)},\, \mathbf{e}_{(b)}) \,=\, \{A^{(c)}_{ik} \,.\, e^i_{(a)} \,.\, e^k_{(b)} \,-\, A^{(c)}_{ik} \,.\, e^i_{(b)} \,.\, e^k_{(a)}\} \,.\, \mathbf{e}_{(c)}$$

Il est facile de montrer que l'anti-symétrie sur les indices des composantes du cube A, alliée au fait que la discussion prend place sur le corps commutatif des nombres complexes, mène à :

$$\wedge_{[A]}(\mathbf{e}_{(a)},\, \mathbf{e}_{(b)}) \,=\, 2 \,.\, \sum_{i\,<\,k} A^{(c)}_{ik} \,.\, (e^i_{(a)} \,.\, e^k_{(b)} \,-\, e^i_{(b)} \,.\, e^k_{(a)}) \,.\, \mathbf{e}_{(c)}$$

La réinjection des composantes du cube C conduit alors à :

$$\wedge_{[A]}(\mathbf{e}_{(a)},\, \mathbf{e}_{(b)}) \,=\, (C^c_{ab} \,-\, C^c_{ba}) \,.\, \mathbf{e}_{(c)}$$

Il en résulte ainsi :

$$\{[\mathbf{e}_{(a)},\, \mathbf{e}_{(b)}]_{[A]}\}^{(c)} \,=\, \frac{1}{2} \,.\, (C^c_{ab} \,-\, C^c_{ba})$$

et grâce à la relation [[02] ; § 116, p. 457, (116,11)] :

$$\{[\mathbf{e}_{(a)},\, \mathbf{e}_{(b)}]_{[A]}\}^{(c)} \,=\, C^c_{ab}\,;\, A^{(j)}_{ik} \,=\, (e_{(j)\,i\,;\,k} \,-\, e_{(j)\,k\,;\,i})$$

Je viens de prouver que les constantes de structure sont les composantes de produits vectoriels des vecteurs qui ont été déformés par un cube anti-symétrique, A (et donc devenu une matrice [A]), bâti à partir des dérivées partielles premières de ces vecteurs de base. A cet endroit stratégique de la discussion, il devient tentant :

- d'identifer les vecteurs $\mathbf{e}_{(a)}$ et les composantes X_a pour pouvoir valider la relation [[02] ; § 116, p. 457, (116,12)] :

$$X_a \,=\, e^{\alpha}_{(a)} \,.\, \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \,\equiv\, \mathbf{e}_{(a)}$$

  Ceci montre, au passage, que les vecteurs $\mathbf{e}_{(a)}$ ont pour composantes les ${\mathrm{e}_{(a)}}^{\alpha}$ pour $\alpha = 1$, 2 et 3 (ce que nous savions déjà) dans une base coincidant avec les $\partial/\partial \mathrm{x}^{\alpha}$ (ce qui confirme leur appartenance à l'espace tangeant et ramène cette discussion sur des terres connues).

- de rappeler la définition du produit vectoriel déformé pour constater que l'application de la formule générique :

$$\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \,\in\, E(3,\, C),\, |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]} > = \{[J]^t \,.\, [A]\} \,.\, |\mathbf{a} \,\wedge\, \mathbf{b} >$$

  aux vecteurs de base va forcément fournir :

$$|[\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}]_{[A]} > = \{[J]^t \,.\, [A]\} \,.\, |\mathbf{e}_{(a)} \,\wedge\, \mathbf{e}_{(b)} >$$

  Dont la partie droite s'écrit en détail dans la base des $\partial/\partial \mathrm{x}^{\alpha}$:

$$\{[J]^t \,.\, [A]\} \,.\, \left| \begin{array}{l} e^2_{(a)} \,.\, e^3_{(b)} \,-\, e^3_{(a)} \,.\, e^2_{(b)} \\ e^3_{(a)} \,.\, e^1_{(b)} \,-\, e^1_{(a)} \,.\, e^3_{(b)} \\ e^1_{(a)} \,.\, e^2_{(b)} \,-\, e^2_{(a)} \,.\, e^1_{(b)} \end{array} \right\rangle$$

Pour la cohérence, cette expression générique doit maintenant être méticuleusement confrontée avec la relation qui vient d'être établie. Dans la restriction de cette discussion aux espaces de dimension trois [2] :

$$[\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}]_{[A]} = C^c_{ab} \cdot \mathbf{e}_{(c)}$$

Dans la base des $\partial/\partial \mathrm{x}^\alpha$, ceci s'écrit aussi :

$$[\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}]_{[A]} = \sum_c C^c_{ab} \cdot \sum_\alpha e^\alpha_{(c)} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

Soit, de façon équivalente :

$$|[\mathbf{e}_{(a)}, \mathbf{e}_{(b)}]_{[A]} >= |\sum_c C^c_{ab} \cdot e^\alpha_{(c)} >= \left| \begin{array}{l} \sum_c C^c_{ab} \cdot e^1_{(c)} \\ \sum_c C^c_{ab} \cdot e^2_{(c)} \\ \sum_c C^c_{ab} \cdot e^3_{(c)} \end{array} \right\rangle$$

Toute cette analyse sur les constantes de structure aboutit à pouvoir proposer :

$$\left| \begin{array}{l} \sum_c C^c_{ab} \cdot e^1_{(c)} \\ \sum_c C^c_{ab} \cdot e^2_{(c)} \\ \sum_c C^c_{ab} \cdot e^3_{(c)} \end{array} \right\rangle = \{[J]^t \cdot [A]\} \cdot \left| \begin{array}{l} e^2_{(a)} \cdot e^3_{(b)} - e^3_{(a)} \cdot e^2_{(b)} \\ e^3_{(a)} \cdot e^1_{(b)} - e^1_{(a)} \cdot e^3_{(b)} \\ e^1_{(a)} \cdot e^2_{(b)} - e^2_{(a)} \cdot e^1_{(b)} \end{array} \right\rangle$$

Il reste à savoir combien de systèmes de ce type sont contenus dans ces égalités. Le cube C est anti-symétrique et la discussion a lieu sur le corps commutatif des nombres complexes, les systèmes précédents s'identifient donc à des tautologies du genre $0 = 0$ lorsque $\mathrm{a} = \mathrm{b}$ et il ne reste finalement que trois systèmes de trois équations correspondant aux paires (a, b) valant (1, 2), (2, 3) et (1, 3). In extenso :

$$\left| \begin{array}{l} \sum_c C^c_{12} \cdot e^1_{(c)} \\ \sum_c C^c_{12} \cdot e^2_{(c)} \\ \sum_c C^c_{12} \cdot e^3_{(c)} \end{array} \right\rangle = \{[J]^t \cdot [A]\} \cdot \left| \begin{array}{l} e^2_{(1)} \cdot e^3_{(2)} - e^3_{(1)} \cdot e^2_{(2)} \\ e^3_{(1)} \cdot e^1_{(2)} - e^1_{(1)} \cdot e^3_{(2)} \\ e^1_{(1)} \cdot e^2_{(2)} - e^2_{(1)} \cdot e^1_{(2)} \end{array} \right\rangle$$

$$\left| \begin{array}{l} \sum_c C^c_{23} \cdot e^1_{(c)} \\ \sum_c C^c_{23} \cdot e^2_{(c)} \\ \sum_c C^c_{23} \cdot e^3_{(c)} \end{array} \right\rangle = \{[J]^t \cdot [A]\} \cdot \left| \begin{array}{l} e^2_{(2)} \cdot e^3_{(3)} - e^3_{(2)} \cdot e^2_{(3)} \\ e^3_{(2)} \cdot e^1_{(3)} - e^1_{(2)} \cdot e^3_{(3)} \\ e^1_{(2)} \cdot e^2_{(3)} - e^2_{(2)} \cdot e^1_{(3)} \end{array} \right\rangle$$

$$\left| \begin{array}{l} \sum_c C^c_{13} \cdot e^1_{(c)} \\ \sum_c C^c_{13} \cdot e^2_{(c)} \\ \sum_c C^c_{13} \cdot e^3_{(c)} \end{array} \right\rangle = \{[J]^t \cdot [A]\} \cdot \left| \begin{array}{l} e^2_{(1)} \cdot e^3_{(3)} - e^3_{(1)} \cdot e^2_{(3)} \\ e^3_{(1)} \cdot e^1_{(3)} - e^1_{(1)} \cdot e^3_{(3)} \\ e^1_{(1)} \cdot e^2_{(3)} - e^2_{(1)} \cdot e^1_{(3)} \end{array} \right\rangle$$

A partir du moment où les composantes de la base ne forment pas un système dégénéré (i.e. : forment une matrice [E] dont le déterminant n'est pas nul),

$$[E] = \begin{bmatrix} e^1_{(1)} & e^1_{(2)} & e^1_{(3)} \\ e^2_{(1)} & e^2_{(2)} & e^2_{(3)} \\ e^3_{(1)} & e^3_{(2)} & e^3_{(3)} \end{bmatrix} ; |E| \neq 0$$

chacun de ces trois systèmes se laisse résoudre sans difficulté technique particulière. Ce constat permet d'affirmer que cette discussion est désormais en mesure d'écrire les

[2] Il existe un cube λ qui est la version quadridimensionnelle du cube C (Pour s'en convaincre, il suffir de voir la relation [[02] ; § 116, p. 457, (116,9)] et l'explication au niveau du paragraphe situé juste en dessous) agissant dans les espaces de dimension trois. Cette relation s'applique donc aussi dans les espaces de dimension quatre. Mais ce sera l'objet d'autres explorations.

constantes de structure (les composantes de la matrice [C]) en fonction des composantes de la matrice déformante locale, [A] et des composantes de la matrice [E]. Le prochain objectif de cette exploration est bien entendu d'opérer une jonction logique avec la classification de Bianchi (1918) ; c'est-à-dire de trouver les composantes de la matrice [A] lorsque celles de la matrice [C] le sont via la classification de Bianchi.

3.4 Le lien logique avec la classification de Bianchi

Sachant que :

$$[J]^t \cdot [A] = \begin{pmatrix} A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ -A^1_{13} & -A^2_{13} & -A^3_{13} \\ A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \end{pmatrix}$$

Il vient pour la paire (1, 2) :

$$\begin{pmatrix} A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ -A^1_{13} & -A^2_{13} & -A^3_{13} \\ A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \end{pmatrix} \cdot \left| \begin{matrix} e^2_{(1)} \cdot e^3_{(2)} - e^3_{(1)} \cdot e^2_{(2)} \\ e^3_{(1)} \cdot e^1_{(2)} - e^1_{(1)} \cdot e^3_{(2)} \\ e^1_{(1)} \cdot e^2_{(2)} - e^2_{(1)} \cdot e^1_{(2)} \end{matrix} \right\rangle$$

$$=$$

$$\left| \begin{matrix} A^1_{23} \cdot (e^2_{(1)} \cdot e^3_{(2)} - e^3_{(1)} \cdot e^2_{(2)}) + A^2_{23} \cdot (e^3_{(1)} \cdot e^1_{(2)} - e^1_{(1)} \cdot e^3_{(2)}) + A^3_{23} \cdot (e^1_{(1)} \cdot e^2_{(2)} - e^2_{(1)} \cdot e^1_{(2)}) \\ -A^1_{13} \cdot (e^2_{(1)} \cdot e^3_{(2)} - e^3_{(1)} \cdot e^2_{(2)}) - A^2_{13} \cdot (e^3_{(1)} \cdot e^1_{(2)} - e^1_{(1)} \cdot e^3_{(2)}) - A^3_{13} \cdot (e^1_{(1)} \cdot e^2_{(2)} - e^2_{(1)} \cdot e^1_{(2)}) \\ A^1_{12} \cdot (e^2_{(1)} \cdot e^3_{(2)} - e^3_{(1)} \cdot e^2_{(2)}) + A^2_{12} \cdot (e^3_{(1)} \cdot e^1_{(2)} - e^1_{(1)} \cdot e^3_{(2)}) + A^3_{12} \cdot (e^1_{(1)} \cdot e^2_{(2)} - e^2_{(1)} \cdot e^1_{(2)}) \end{matrix} \right\rangle$$

Il vient pour la paire (2, 3) :

$$\begin{pmatrix} A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ -A^1_{13} & -A^2_{13} & -A^3_{13} \\ A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \end{pmatrix} \cdot \left| \begin{matrix} e^2_{(2)} \cdot e^3_{(3)} - e^3_{(2)} \cdot e^2_{(3)} \\ e^3_{(2)} \cdot e^1_{(3)} - e^1_{(2)} \cdot e^3_{(3)} \\ e^1_{(2)} \cdot e^2_{(3)} - e^2_{(2)} \cdot e^1_{(3)} \end{matrix} \right\rangle$$

$$=$$

$$\left| \begin{matrix} A^1_{23} \cdot (e^2_{(2)} \cdot e^3_{(3)} - e^3_{(2)} \cdot e^2_{(3)}) + A^2_{23} \cdot (e^3_{(2)} \cdot e^1_{(3)} - e^1_{(2)} \cdot e^3_{(3)}) + A^3_{23} \cdot (e^1_{(2)} \cdot e^2_{(3)} - e^2_{(2)} \cdot e^1_{(3)}) \\ -A^1_{13} \cdot (e^2_{(2)} \cdot e^3_{(3)} - e^3_{(2)} \cdot e^2_{(3)}) - A^2_{13} \cdot (e^3_{(2)} \cdot e^1_{(3)} - e^1_{(2)} \cdot e^3_{(3)}) - A^3_{13} \cdot (e^1_{(2)} \cdot e^2_{(3)} - e^2_{(2)} \cdot e^1_{(3)}) \\ A^1_{12} \cdot (e^2_{(2)} \cdot e^3_{(3)} - e^3_{(2)} \cdot e^2_{(3)}) + A^2_{12} \cdot (e^3_{(2)} \cdot e^1_{(3)} - e^1_{(2)} \cdot e^3_{(3)}) + A^3_{12} \cdot (e^1_{(2)} \cdot e^2_{(3)} - e^2_{(2)} \cdot e^1_{(3)}) \end{matrix} \right\rangle$$

Il vient pour la paire (1, 3) :

$$\begin{pmatrix} A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ -A^1_{13} & -A^2_{13} & -A^3_{13} \\ A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \end{pmatrix} \cdot \left| \begin{matrix} e^2_{(1)} \cdot e^3_{(3)} - e^3_{(1)} \cdot e^2_{(3)} \\ e^3_{(1)} \cdot e^1_{(3)} - e^1_{(1)} \cdot e^3_{(3)} \\ e^1_{(1)} \cdot e^2_{(3)} - e^2_{(1)} \cdot e^1_{(3)} \end{matrix} \right\rangle$$

$$=$$

$$\left| \begin{matrix} A^1_{23} \cdot (e^2_{(1)} \cdot e^3_{(3)} - e^3_{(1)} \cdot e^2_{(3)}) + A^2_{23} \cdot (e^3_{(1)} \cdot e^1_{(3)} - e^1_{(1)} \cdot e^3_{(3)}) + A^3_{23} \cdot (e^1_{(1)} \cdot e^2_{(3)} - e^2_{(1)} \cdot e^1_{(3)}) \\ -A^1_{13} \cdot (e^2_{(1)} \cdot e^3_{(3)} - e^3_{(1)} \cdot e^2_{(3)}) - A^2_{13} \cdot (e^3_{(1)} \cdot e^1_{(3)} - e^1_{(1)} \cdot e^3_{(3)}) - A^3_{13} \cdot (e^1_{(1)} \cdot e^2_{(3)} - e^2_{(1)} \cdot e^1_{(3)}) \\ A^1_{12} \cdot (e^2_{(1)} \cdot e^3_{(3)} - e^3_{(1)} \cdot e^2_{(3)}) + A^2_{12} \cdot (e^3_{(1)} \cdot e^1_{(3)} - e^1_{(1)} \cdot e^3_{(3)}) + A^3_{12} \cdot (e^1_{(1)} \cdot e^2_{(3)} - e^2_{(1)} \cdot e^1_{(3)}) \end{matrix} \right\rangle$$

En considérant les trois premières lignes, un système linéaire de trois inconnues (les $A_{23}{}^1$, $A_{23}{}^2$ et $A_{23}{}^3$) est construit :

$$A^1_{23} \cdot (e^2_{(1)} \cdot e^3_{(2)} - e^3_{(1)} \cdot e^2_{(2)}) + A^2_{23} \cdot (e^3_{(1)} \cdot e^1_{(2)} - e^1_{(1)} \cdot e^3_{(2)}) + A^3_{23} \cdot (e^1_{(1)} \cdot e^2_{(2)} - e^2_{(1)} \cdot e^1_{(2)})$$

$$=$$

$$\sum_c C^c_{12} \cdot e^1_{(c)}$$

$$A_{23}^{1}\cdot(e_{(2)}^{2}\cdot e_{(3)}^{3}-e_{(2)}^{3}\cdot e_{(3)}^{2})+A_{23}^{2}\cdot(e_{(2)}^{3}\cdot e_{(3)}^{1}-e_{(2)}^{1}\cdot e_{(3)}^{3})+A_{23}^{3}\cdot(e_{(2)}^{1}\cdot e_{(3)}^{2}-e_{(2)}^{2}\cdot e_{(3)}^{1})$$
$$=$$
$$\sum_{c} C_{23}^{c}\cdot e_{(c)}^{1}$$
$$A_{23}^{1}\cdot(e_{(1)}^{2}\cdot e_{(3)}^{3}-e_{(1)}^{3}\cdot e_{(3)}^{2})+A_{23}^{2}\cdot(e_{(1)}^{3}\cdot e_{(3)}^{1}-e_{(1)}^{1}\cdot e_{(3)}^{3})+A_{23}^{3}\cdot(e_{(1)}^{1}\cdot e_{(3)}^{2}-e_{(1)}^{2}\cdot e_{(3)}^{1})$$
$$=$$
$$\sum_{c} C_{13}^{c}\cdot e_{(c)}^{1}$$

Là encore, aussi longtemps que la matrice discriminante de ce système n'est pas dégénérée, il est techniquement simple de trouver les solutions, surtout lorsque les valeurs des composantes de la matrice [C] sont connues via la classification de Bianchi concernant les espaces homogènes de dimension trois [[02] ; § 116, p. 458, (116,22)] :

$$C_{12}^{2} = -a = C_{13}^{3}\,;\, C_{23}^{1} = n_1\,;\, C_{13}^{2} = -n_2\,;\, C_{12}^{3} = n_3\,;$$

Tous les autres coefficients sont nuls et [[02] ; § 116, p. 459] :

Type - Constantes	a	n1	n2	n3
I	0	0	0	0
II	0	1	0	0
III	1	0	1	-1
IV	1	0	0	1
V	1	0	0	0
VI(-1)	-1	0	1	-1
VI(0)	0	1	-1	0
VI(+1)	1	0	1	-1
VII	0	1	1	0
VIII	0	1	1	-1
IX	0	1	1	1

Le système s'écrit donc en fait :

$$A_{23}^{1}\cdot(e_{(1)}^{2}\cdot e_{(2)}^{3}-e_{(1)}^{3}\cdot e_{(2)}^{2})+A_{23}^{2}\cdot(e_{(1)}^{3}\cdot e_{(2)}^{1}-e_{(1)}^{1}\cdot e_{(2)}^{3})+A_{23}^{3}\cdot(e_{(1)}^{1}\cdot e_{(2)}^{2}-e_{(1)}^{2}\cdot e_{(2)}^{1})$$
$$=$$
$$-a\cdot e_{(2)}^{1} + n_3\cdot e_{(3)}^{1}$$
$$A_{23}^{1}\cdot(e_{(2)}^{2}\cdot e_{(3)}^{3}-e_{(2)}^{3}\cdot e_{(3)}^{2})+A_{23}^{2}\cdot(e_{(2)}^{3}\cdot e_{(3)}^{1}-e_{(2)}^{1}\cdot e_{(3)}^{3})+A_{23}^{3}\cdot(e_{(2)}^{1}\cdot e_{(3)}^{2}-e_{(2)}^{2}\cdot e_{(3)}^{1})$$
$$=$$
$$n_1\cdot e_{(1)}^{1}$$
$$A_{23}^{1}\cdot(e_{(1)}^{2}\cdot e_{(3)}^{3}-e_{(1)}^{3}\cdot e_{(3)}^{2})+A_{23}^{2}\cdot(e_{(1)}^{3}\cdot e_{(3)}^{1}-e_{(1)}^{1}\cdot e_{(3)}^{3})+A_{23}^{3}\cdot(e_{(1)}^{1}\cdot e_{(3)}^{2}-e_{(1)}^{2}\cdot e_{(3)}^{1})$$
$$=$$
$$-n_2\cdot e_{(2)}^{1} - a\cdot e_{(3)}^{1}$$

Tout ce qui vient d'être exposé pour les $A_{23}{}^{1}$, $A_{23}{}^{2}$ et $A_{23}{}^{3}$ peut être réitéré de façon similaire pour les $A_{12}{}^{1}$, $A_{12}{}^{2}$ et $A_{12}{}^{3}$ et pour les $A_{13}{}^{1}$, $A_{13}{}^{2}$ et $A_{13}{}^{3}$. Dans le cadre de cette analyse, la classification de Bianchi et les composantes des vecteurs de la base duale déterminent la déformation [A] agissant sur le produit vectoriel classique. Grâce aux conditions définies dans la première partie de ce document (voir le théorème 2.2), il est maintenant possible de rechercher lesquelles des classes de Bianchi permettent de définir des algèbres de Lie sur V.

4 Conclusion

Ce document a examiné les conditions permettant de doter l'espace vectoriel V = {E(3, C), [..., ...]$_{[A]}$} d'une structure d'algèbre de Lie. Ces conditions mettent en exergue deux catégories de situations. La première met en avant le rôle particulier des triades spineurs compatibles orthogonales découvertes lors d'une exploration précédente [[b]]. La seconde catégorie implique la réalisation de liens précis sur les composantes de la matrice déformante [A]. Il a ensuite ébauché l'usage qui pouvait être fait de ces conditions dans le cadre de la classification de Bianchi (1918) concernant les espaces homogènes de dimension trois.

5 Remerciements

Puisque j'effectue mes recherches de façon indépendante, je m'efforce à restreindre le choix de mes références bibliographiques aux ouvrages académiques, parfois étrangers. Je tiens à remercier chaleureusement les auteurs.

References

6 Bibliographie

6.1 Articles, cours et livres internationaux

[01] Chamber-Loir, A. : Introduction aux groupes et algèbres de Lie ; cours de Master 2, Université de Rennes I, (2004-2005).

[02] Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II, Klassische Feldtheorie: L.D. Landau, E.M. Lifschitz; 12. ueberarbeitete Auflage, in dt. Sprache hrsg. von Hans-Georg Schoepf [Uebers. aus dem russ. von Georg Dautcourt], - 1992, ISBN 3-05-501550-9.

6.2 Mes contributions

[a] PERIAT, T.: Les mathématiques autour de la théorie de la question (E) ; ISBN 978-2-36923-086-1, v1, 11 février 2016.

[b] PERIAT, T.: Produits vectoriels deformes, spineurs de Cartan (Elie) et parametrisation d'Euler ; ISBN-978-2-36923-073-1, v1, 31 mars 2019.