Algèbres involutives de la théorie des produits tensoriels déformés.

Collection : "La Théorie de la Question (E)".

©Thierry PERIAT.

4 novembre 2022

©Thierry PERIAT : Algèbres involutives de la théorie des produits tensoriels déformés, ISBN 978-2-36923-018-2, EAN 9782369230182, collection "La Théorie de la Question (E)".

Table des matières

1 Introduction

1.1 Contexte.

La cosmologie vit depuis plus d'un siècle une véritable révolution en ce sens que l'évolution des instruments d'observation du cosmos et celle des théories en décrivant les lois fondamentales ont littéralement fait exploser les limites de l'univers perceptible. Des quelques planètes gravitant autour du soleil à la découverte d'environ deux mille milliards de galaxies externes à la notre, l'accumulation des données fait de facto entrer la statistique dans le giron de cette discipline. Les simulations informatiques et leur confrontation avec les répartitions observables de matière poussent également à s'interroger sur l'existence de structures intergalactiques et, pourquoi pas, mathématiques capables de rendre compte de l'organisation universelle.

1.2 Objectifs.

Dans le cadre de cette quête balbutiante, en particulier parce que *le terme gravitationnel* apparaissant dans la version covariante de la loi de Lorentz semble pouvoir être un candidat capable de rendre compte de ce qui est observé [[01]], j'entreprends ici une étude que je souhaite être la plus systématique possible des structures mathématiques dont un espace vectoriel de dimension quatre bâti sur le corps commutatif des nombres complexes, $\mathbb{C}$, peut être doté lorsque ses éléments interaggissent via un produit tensoriel déformé par le cube des symboles de Christoffel de la seconde espèce, $\otimes_{\Gamma(2)}$. Cet ensemble est noté $\mathbb{V} = \{\mathrm{E}(4,\, \mathbb{C}),\, +,\, \otimes_{\Gamma(2)}\}$; il est rapporté à une base canonique $\Omega = (\mathbf{e}_0,\, \mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3)$.

2 Structures mathématiques.

Dans la première partie de ce document, le cube déformant est quelconque et noté génériquement avec la lettre majuscule A.

2.1 Données élémentaires.

Définition 2.1. *Produit tensoriel déformé.*

Le produit tensoriel déformé est une application de E(4, $\mathbb{C}$) $\times$ E(4, $\mathbb{C}$) dans E(4, $\mathbb{C}$) définie par :

$$\forall\,(\mathbf{a},\,\mathbf{b})\,\rightarrow\,\otimes_A(\mathbf{a},\,\mathbf{b})\,=\,A^{\alpha}_{\chi\beta}\,.\,a^{\chi}\,.\,b^{\beta}\,.\,\mathbf{e}_{\alpha}$$

Proposition 2.1. $\mathbb{V}$ *est une algèbre.*

Démonstration. La démarche consiste en une courte série de constats simples :

1. Par hypothèse de travail, E(4, $\mathbb{C}$) est un espace vectoriel et donc, à ce titre, en particulier un groupe additif commutatif.
2. $\mathbb{C}$ est un corps commutatif non vide et donc, à ce titre, il est en particulier un anneau unitaire commutatif.
3. Par conséquent E(4, $\mathbb{C}$) est un $\mathbb{C}$-module.
4. L'image de l'application $\otimes_{\Gamma(2)}$ est un sous-espace de cet espace vectoriel.
5. Le produit tensoriel déformé est une application bilinéaire.

□

Ainsi, en général :

Lemme 2.1. $\mathbb{V}$ *est une algèbre non-unitaire et non-associative.*

L'existence (ou non) d'un élément neutre et l'associativité du produit tensoriel déformé n'ont rien d'obligatoire et sont étudiés ultérieurement.

Proposition 2.2. *Le produit tensoriel déformé n'est pas obligatoirement une opération symétrique.*

Démonstration. Chaque composante α (pour $\alpha = 0,\,1,\,2,\,3$) se laisse décomposer en une somme de 16 termes :

$$\begin{gathered}
A^{\alpha}_{00}\,.\,a^0\,.\,b^0\,+\,A^{\alpha}_{01}\,.\,a^0\,.\,b^1\,+\,A^{\alpha}_{02}\,.\,a^0\,.\,b^2\,+\,A^{\alpha}_{03}\,.\,a^0\,.\,b^3\,+\\
A^{\alpha}_{10}\,.\,a^1\,.\,b^0\,+\,A^{\alpha}_{11}\,.\,a^1\,.\,b^1\,+\,A^{\alpha}_{12}\,.\,a^1\,.\,b^2\,+\,A^{\alpha}_{13}\,.\,a^1\,.\,b^3\,+\\
A^{\alpha}_{20}\,.\,a^2\,.\,b^0\,+\,A^{\alpha}_{21}\,.\,a^2\,.\,b^1\,+\,A^{\alpha}_{22}\,.\,a^2\,.\,b^2\,+\,A^{\alpha}_{23}\,.\,a^2\,.\,b^3\,+\\
A^{\alpha}_{30}\,.\,a^3\,.\,b^0\,+\,A^{\alpha}_{31}\,.\,a^3\,.\,b^1\,+\,A^{\alpha}_{32}\,.\,a^3\,.\,b^2\,+\,A^{\alpha}_{33}\,.\,a^3\,.\,b^3
\end{gathered}$$

Ils ne se laissent pas regrouper ou factoriser ausssi longtemps que les entrées du cube A sont quelconques. □

Définition 2.2. *Cube symétrique.*

Un cube est dit *symétrique* lorsque ses entrées (synonyme : composantes) exhibent une propriété de symétrie sur les indices bas ; concrètement quand :

$$\forall\,\alpha,\,\beta,\,\chi\,:\,A^{\alpha}_{\chi\beta}\,=\,A^{\alpha}_{\beta\chi}$$

Proposition 2.3. *Il existe des circonstances pour lesquelles le produit tensoriel déformé devient une opération symétrique.*

Démonstration. Lorsque le cube déformant est symétrique, la somme des 16 termes de chaque composante α (pour $\alpha = 0, 1, 2, 3$) s'écrit :

$$A^{\alpha}_{00} \,.\, a^0 \,.\, b^0 \,+\, A^{\alpha}_{01} \,.\, a^0 \,.\, b^1 \,+\, A^{\alpha}_{02} \,.\, a^0 \,.\, b^2 \,+\, A^{\alpha}_{03} \,.\, a^0 \,.\, b^3 \,+$$
$$A^{\alpha}_{01} \,.\, a^1 \,.\, b^0 \,+\, A^{\alpha}_{11} \,.\, a^1 \,.\, b^1 \,+\, A^{\alpha}_{12} \,.\, a^1 \,.\, b^2 \,+\, A^{\alpha}_{13} \,.\, a^1 \,.\, b^3 \,+$$
$$A^{\alpha}_{02} \,.\, a^2 \,.\, b^0 \,+\, A^{\alpha}_{12} \,.\, a^2 \,.\, b^1 \,+\, A^{\alpha}_{22} \,.\, a^2 \,.\, b^2 \,+\, A^{\alpha}_{23} \,.\, a^2 \,.\, b^3 \,+$$
$$A^{\alpha}_{03} \,.\, a^3 \,.\, b^0 \,+\, A^{\alpha}_{13} \,.\, a^3 \,.\, b^1 \,+\, A^{\alpha}_{23} \,.\, a^3 \,.\, b^2 \,+\, A^{\alpha}_{33} \,.\, a^3 \,.\, b^3$$

Cette fois-ci, un regroupement des termes est possible et le produit déformé se laisse résumer par la relation :

$$\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,=\, \sum_{\alpha} \{ \sum_{\beta} A^{\alpha}_{\beta\beta} \,.\, a^{\beta} \,.\, b^{\beta} \,+\, \sum_{\chi \,<\, \beta} A^{\alpha}_{\chi\beta} \,.\, (a^{\chi} \,.\, b^{\beta} \,+\, a^{\beta} \,.\, b^{\chi}) \} \,.\, \mathbf{e}_{\alpha}$$

Une inversion de la position des arguments fournit :

$$\otimes_A(\mathbf{b},\, \mathbf{a}) \,=\, \sum_{\alpha} \{ \sum_{\beta} A^{\alpha}_{\beta\beta} \,.\, b^{\beta} \,.\, a^{\beta} \,+\, \sum_{\chi \,<\, \beta} A^{\alpha}_{\chi\beta} \,.\, (b^{\chi} \,.\, a^{\beta} \,+\, b^{\beta} \,.\, a^{\chi}) \} \,.\, \mathbf{e}_{\alpha}$$

Comme cette discussion manipule des nombres complexes et que l'ensemble $\mathbb{C}$ est un corps commutatif, il devient évident que :

$$\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,=\, \otimes_A(\mathbf{b},\, \mathbf{a})$$

$\square$

La recherche de symétrie amène à définir une extrapolation de la notion de produit extérieur qui se trouve finalement être une opération interne sur E(4, $\mathbb{C}$).

Définition 2.3. *Produit extérieur déformé.*

Le produit extérieur déformé , $\wedge_A$ est une application de E(4, $\mathbb{C}$) $\times$ E(4, $\mathbb{C}$) dans E(4, $\mathbb{C}$) définie par :

$$\forall\, (\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,\rightarrow\, \wedge_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,=\, \otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,-\, \otimes_A(\mathbf{b},\, \mathbf{a}) \,=\, A^{\alpha}_{\chi\beta} \,.\, (a^{\chi} \,.\, b^{\beta} \,-\, b^{\chi} \,.\, a^{\beta}) \,.\, \mathbf{e}_{\alpha}$$

Il est évident que la symétrie du produit tensoriel déformé sur lrquel il est bâti annule le produit extérieur :

$$\wedge_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,=\, \mathbf{0} \iff \otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,=\, \otimes_A(\mathbf{b},\, \mathbf{a})$$

Un calcul plus détaillé montre que :

$$\forall\, (\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,\rightarrow\, \wedge_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,=\, \sum_{\chi \,<\, \beta} (A^{\alpha}_{\chi\beta} \,-\, A^{\alpha}_{\beta\chi}) \,.\, (a^{\chi} \,.\, b^{\beta} \,-\, b^{\chi} \,.\, a^{\beta}) \,.\, \mathbf{e}_{\alpha}$$

Il met en exergue les deux conditions annulant et symétrisant le produit tensoriel déformé :

1. Les deux argument du produit tensoriel déformé sont proportionnels entre eux :
$$\exists\, z \,\in\, \mathbb{C} \,:\, \mathbf{b} \,=\, z \,.\, \mathbf{a}$$
2. Le cube déformant est symétrique :
$$\forall\, \alpha,\, \beta,\, \chi \,:\, A^{\alpha}_{\chi\beta} \,=\, A^{\alpha}_{\beta\chi}$$

Théorème 2.1. *Conditions de l'existence de produits tensoriels symétriques.*

Dans une discussion prenant place sur un corps commutatif de caractéristique différente de deux, pour qu'un produit tensoriel déformé soit symétrique, il faut et il suffit (i) soit que les arguments de ce produit soit proportionnels l'un à l'autre ; (ii) soit que les entrées du cube déformant ce produit tensoriel vérifient la relation de symétrie.

Définition 2.4. *Application quadratique bâtie sur un produit tensoriel déformé.*

Une application quadratique bâtie sur un produit tensoriel déformé par un cube A donné est l'application bilinéaire de E(4, $\mathbb{C}$) vers E(4, $\mathbb{C}$) qui associe son *carré tensoriel déformé* à n'importe quel élément de E(4, $\mathbb{C}$) ; concrètement :

$$\forall \mathbf{a} \in E(4, \mathbb{C}) \rightarrow \otimes_A(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \in E(4, \mathbb{C})$$

Définition 2.5. *Application bipolaire bâtie sur un produit tensoriel déformé.*

Une application bipolaire bâtie sur un produit tensoriel déformé *se définit conventionnellement* par la relation :

$$\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E^2(4, \mathbb{C}) \rightarrow B_A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{4} . \{\otimes_A(\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}+\mathbf{b}) - \otimes_A(\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b})\}$$

Un calcul détaillé s'appuyant sur la bilinéarité naturelle du produit tensoriel déformé montre que, de manière générale (sous-entendu : le produit tensoriel déformé étant quelconque) :

$$\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E^2(4, \mathbb{C}) \rightarrow B_A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2} . \{\otimes_A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \otimes_A(\mathbf{b}, \mathbf{a})\}$$

Lemme 2.2. *Produit tensoriel déformé et application bipolaire.*

Un produit tensoriel déformé par un cube symétrique est toujours une application bipolaire symétrique définie conventionnellement à partir de la notion de carré tensoriel déformé (voir les cours de mathématiques usuels) :

$$\{A : \forall \alpha, \beta, \chi : A^{\alpha}_{\chi\beta} = A^{\alpha}_{\beta\chi}\} \Rightarrow \{B_A \equiv \otimes_A\}$$

Un produit tensoriel déformé par un cube quelconque permet toujours de définir une application bipolaire symétrique à partir de la notion de carré tensoriel déformé.

2.2 Notion d'orthogonalité.

Définition 2.6. *Eléments orthogonaux.*

Deux éléments **a** et **b** de l'algèbre $\mathbb{V}$ sont orthogonaux lorsque :

$$\mathbf{a}, \perp \mathbf{b} \iff \otimes_A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

Définition 2.7. *Elément isotrope.*

Un élément de l'algèbre $\mathbb{V}$ est dit isotrope lorsqu'il est orthogonal à lui-même :

$$\mathbf{a} \in iso(\mathbb{V}) \iff \otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

Cette définition se traduit dans la base Ω par :

$$iso(\mathbb{V}) = \{\mathbf{a} \in \mathbb{V},\, \forall \alpha : \sum_{\chi,\, \beta} A^{\alpha}_{\chi\beta} \,.\, a^{\chi} \,.\, a^{\beta} = 0\}$$

Dans ce document, un élément isotrope est donc un vecteur d'un espace vectoriel de dimension quatre (D = 4) dont les quatre composantes satisfont simultanément à quatre formes bilinéaires quadratiques (par exemple : quatre sphères de rayon nul).

Définition 2.8. *Elément adjoint.*

Par convention, l'élément adjoint d'un élément **a** donné de l'ensemble E(4, C) est son image par l'application quadratique associée au produit tensoriel déformé. C'est donc son carré tensoriel déformé et il est noté $\mathbf{a}^*$.

$$\forall \mathbf{a} \in E(4,\, \mathbb{C}) \to \otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{a}) = \mathbf{a}^* \in E(4,\, \mathbb{C})$$

Parce que la discussion mathématique implique des éléments du corps commutatif $\mathbb{C}$, dans la base canonique Ω, un adjoint se définit plus précisément par :

$$\forall \mathbf{a} \in E(4,\, \mathbb{C}) : \mathbf{a}^* = \{\sum_{\chi} A^{\alpha}_{\chi\chi} \,.\, (a^{\chi})^2 + \sum_{\chi < \beta} (A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\alpha}_{\beta\chi}) \,.\, a^{\chi} \,.\, a^{\beta}\} \,.\, \mathbf{e}_{\alpha}$$

Cette définition précise va permettre d'envisager plusieurs cas de figure un peu plus loin dans l'exposé.

Exemple 2.1. *Le terme gravitationnel.*

En physique, plus exactement dans le cadre de la théorie de la gravitation introduite par A. Einstein dans [02], appparait un objet mathématique que je baptise *terme gravitationnel.* Il correspond à un cas mathématique particulier des considérations exposées dans ce document. Il se caractérise en effet par les relations :

$$\mathbf{a} = \mathbf{u},\; A = \Gamma(2)$$

La première désigne la quadri-vitesse d'une particule et la seconde un cube constitué à partir des symboles de Christoffel de la seconde espèce qui, dans l'oeuvre originale de ce mathématicien [03], est un cube symétrique (Définition 2.2). En conséquence de quoi, le terme gravitationnel peut aussi se comprendre comme une application bilinéaire symétrique définie par :

$$\otimes_{\Gamma(2)} : \forall \mathbf{u} \xrightarrow{\otimes_{\Gamma(2)}} \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{u}) = \otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) = \Gamma^{\alpha}_{\chi\beta} \,.\, u^{\chi} \,.\, u^{\beta} \,.\, \mathbf{e}_{\alpha} = \mathbf{u}^*$$

Dit d'une autre façon : cette application fait correspondre à une quadrivitesse **u** son élément adjoint dans un contexte géométrique défini par le cube de Christoffel $\Gamma(2)$; voir la définition 2.8 juste ci-avant.

Dans ce contexte, une vitesse est isotrope chaque fois qu'elle annule le terme gravitationnel ; l'ensemble des vitesses isotropes appartient au noyau de l'application $\otimes_{\Gamma(2)}$:

$$iso\{V_4(R, \otimes_{\Gamma(2)})\} \subset Ker(\otimes_{\Gamma(2)})$$

2.3 Conditions nécessaires à la construction d'une algèbre involutive.

Dans ce qui suit, je me réfère au travail [04 ; définition 2.1, p.3] et je choisis d'examiner les conditions permettant d'identifier l'adjonction avec une involution.

Remarque 2.1. *Première propriété indispensable.*

Soit la condition indispensable :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{a} \in E(4, \mathbb{C}) : (z \,.\, \mathbf{a})^* = \bar{z} \,.\, \mathbf{a}^*$$

Elle se traduit dans le cadre de ce document par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{a} \in E(4, \mathbb{C}) : \otimes_A(z \,.\, \mathbf{a},\, z \,.\, \mathbf{a}) = \bar{z} \,.\, \otimes_A (\mathbf{a},\, \mathbf{a})$$

La bilinéarité du produit tensoriel déformé permet de parvenir sans difficulté à :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{a} \in E(4, \mathbb{C}) : z^2 = \bar{z}$$

Il en suit l'obligation de restreindre le domaine de définition de la discussion aux seuls éléments de l'ensemble $\{0,\, +1,\, +\mathrm{j},\, +\mathrm{j}^2\}$. Cet ensemble regroupe les racines cubiques complexes de l'unité et l'élément complexe nul. Il est visiblement un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Privé de l'élément complexe nul, il forme le *groupe cyclique* d'ordre trois parfois noté :

$$\mathbb{U}_3 = \{e^{\frac{2\,.\,\pi\,.\,i\,.\,k}{3}},\, k \in \{0,\, 1,\, 2\}, \times\}$$

Il convient de noter que cette propriété ne dépend finalement pas de la dimension de l'espace mathématique dans laquelle elle est envisagée.

Remarque 2.2. *Deuxième propriété indispensable.*

Soit la condition indispensable :

$$\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E^2(4, \mathbb{C}) : (\mathbf{a} + \mathbf{b})^* = \mathbf{a}^* + \mathbf{b}^*$$

Elle se traduit dans le cadre de ce document par :

$$\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E^2(4, \mathbb{C}) : \otimes_A(\mathbf{a} + \mathbf{b},\, \mathbf{a} + \mathbf{b}) = \otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{a}) + \otimes_A(\mathbf{b},\, \mathbf{b})$$

La bilinéarité du produit tensoriel déformé permet de parvenir sans difficulté à :

$$\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E^2(4, \mathbb{C}) : \otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) + \otimes_A(\mathbf{b},\, \mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

Il en suit l'obligation de restreindre le domaine de définition de la discussion aux produits tensoriels déformés *anticommutatifs* ou nuls.

Définition 2.9. *Cube antisymétrique.*

Un cube est dit *antisymétrique* lorsque ses entrées (synonyme : composantes) exhibent une propriété d'antisymétrie sur les indices bas ; concrètement quand :

$$\forall\, \alpha,\, \beta,\, \chi \,:\, A^{\alpha}_{\chi\beta} \,+\, A^{\alpha}_{\beta\chi} \,=\, 0$$

En particulier donc :

$$\forall\, \alpha,\, \chi \,:\, A^{\alpha}_{\chi\chi} \,=\, 0$$

Lemme 2.3. *Adjoint et produit tensoriel déformé par un cube antisymétrique.*

Lorsque le produit tensoriel est déformé par un cube antisymétrique, tout élément adjoint est nul ; démonstration évidente : voir définitions 2.8 et 2.9.

Proposition 2.4. *Il existe des circonstances pour lesquelles le produit tensoriel déformé devient une opération anticommutative.*

Démonstration. Lorsque le cube déformant est antisymétrique, la somme des 16 termes de chaque composante α (pour $\alpha = 0,\, 1,\, 2,\, 3$) s'écrit :

$$\begin{gathered}
A^{\alpha}_{00} \,.\, a^0 \,.\, b^0 \,+\, A^{\alpha}_{01} \,.\, a^0 \,.\, b^1 \,+\, A^{\alpha}_{02} \,.\, a^0 \,.\, b^2 \,+\, A^{\alpha}_{03} \,.\, a^0 \,.\, b^3 \,+ \\
-A^{\alpha}_{01} \,.\, a^1 \,.\, b^0 \,+\, A^{\alpha}_{11} \,.\, a^1 \,.\, b^1 \,+\, A^{\alpha}_{12} \,.\, a^1 \,.\, b^2 \,+\, A^{\alpha}_{13} \,.\, a^1 \,.\, b^3 \,+ \\
-A^{\alpha}_{02} \,.\, a^2 \,.\, b^0 \,-\, A^{\alpha}_{12} \,.\, a^2 \,.\, b^1 \,+\, A^{\alpha}_{22} \,.\, a^2 \,.\, b^2 \,+\, A^{\alpha}_{23} \,.\, a^2 \,.\, b^3 \,+ \\
-A^{\alpha}_{03} \,.\, a^3 \,.\, b^0 \,-\, A^{\alpha}_{13} \,.\, a^3 \,.\, b^1 \,-\, A^{\alpha}_{23} \,.\, a^3 \,.\, b^2 \,+\, A^{\alpha}_{33} \,.\, a^3 \,.\, b^3
\end{gathered}$$

Un regroupement des termes est possible et le produit déformé se laisse résumer par la relation :

$$\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,=\, \sum_{\alpha} \{ \sum_{\beta} A^{\alpha}_{\beta\beta} \,.\, a^{\beta} \,.\, b^{\beta} \,+\, \sum_{\chi\,<\,\beta} A^{\alpha}_{\chi\beta} \,.\, (a^{\chi} \,.\, b^{\beta} \,-\, a^{\beta} \,.\, b^{\chi}) \} \,.\, \mathbf{e}_{\alpha}$$

Une inversion de la position des arguments fournit :

$$\otimes_A(\mathbf{b},\, \mathbf{a}) \,=\, \sum_{\alpha} \{ \sum_{\beta} A^{\alpha}_{\beta\beta} \,.\, b^{\beta} \,.\, a^{\beta} \,+\, \sum_{\chi\,<\,\beta} A^{\alpha}_{\chi\beta} \,.\, (b^{\chi} \,.\, a^{\beta} \,-\, b^{\beta} \,.\, a^{\chi}) \} \,.\, \mathbf{e}_{\alpha}$$

Comme cette discussion manipule des nombres complexes et que l'ensemble $\mathbb{C}$ est un corps commutatif, il devient évident que (voir définition 2.9) :

$$\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,+\, \otimes_A(\mathbf{b},\, \mathbf{a}) \,=\, 2 \,.\, \sum_{\alpha,\,\beta} A^{\alpha}_{\beta\beta} \,.\, a^{\beta} \,.\, b^{\beta} \,.\, \mathbf{e}_{\alpha} \,=\, \mathbf{0}$$

Lemme 2.4. *Une condition suffisante à rendre le produit tensoriel déformé anticommutatif est que le cube déformant soit antisymétrique.*

□

Remarque 2.3. *Troisième propriété indispensable.*

Soit la condition indispensable décrivant l'involution à proprement parlé :

$$\forall \mathbf{a} \,:\, (\mathbf{a}^*)^* \,=\, \mathbf{a}$$

Elle se traduit dans le cadre de ce document par :

$$\forall \mathbf{a} \,:\, \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{a}),\, \otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{a})) \,=\, \mathbf{a}$$

Plus précisément :

$$\forall \mathbf{a} \,:\, A^{\alpha}_{\mu\lambda} \,.\, (A^{\mu}_{\epsilon\delta} \,.\, a^{\epsilon} \,.\, a^{\delta}) \,.\, (A^{\lambda}_{\chi\beta} \,.\, a^{\chi} \,.\, a^{\beta}) \,=\, a^{\alpha}$$

Remarque 2.4. *Quatrième propriété indispensable.*

La quatrième propriété indispensable se traduit ici par :

$$\forall\, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \,\in\, E^2(4,\, \mathbb{C}) \,:\, (\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}))^* \,=\, \otimes_A(\mathbf{b}^*,\, \mathbf{a}^*)$$

C'est-à-dire plus précisément par :

$$\forall\, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \,\in\, E^2(4,\, \mathbb{C}) \,:\, \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}),\, \otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b})) \,=\, \otimes_A(\otimes_A(\mathbf{b},\, \mathbf{b}),\, \otimes_A(\mathbf{a},\, \mathbf{a}))$$

Ce qui se traduit sur la base Ω par la relation compliquée à analyser :

$$\forall\, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \,\in\, E^2(4,\, \mathbb{C}) \,:\, A^{\alpha}_{\mu\lambda} \,.\, (A^{\mu}_{\epsilon\delta} \,.\, a^{\epsilon} \,.\, b^{\delta}) \,.\, (A^{\lambda}_{\chi\beta} \,.\, a^{\chi} \,.\, b^{\beta}) \,=\, A^{\alpha}_{\mu\lambda} \,.\, a^{\mu} \,.\, b^{\lambda}$$

Une observation attentive de cette condition permet cependant de se rapprocher du lien conceptuel connu entre involution et élément neutre.

Démonstration. En effet, lorsque la quatrième condition est vraie, elle est vraie pour toutes les paires $(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$ de $\mathrm{E}^2(4,\, \mathbb{C})$. Par conséquent elle l'est en particulier pour chacune des paires $(\mathbf{a},\, \mathbf{a})$; or pour ces paires, la quatrième condition s'écrit :

$$\forall\, (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \,\in\, E^2(4,\, \mathbb{C}) \,:\, A^{\alpha}_{\mu\lambda} \,.\, (A^{\mu}_{\epsilon\delta} \,.\, a^{\epsilon} \,.\, a^{\delta}) \,.\, (A^{\lambda}_{\chi\beta} \,.\, a^{\chi} \,.\, a^{\beta}) \,=\, A^{\alpha}_{\mu\lambda} \,.\, a^{\mu} \,.\, a^{\lambda}$$

La troisième condition devant également être vraie dans le cadre de l'étude menée ici, la quatrième condition s'écrit pour chacune des paires $(\mathbf{a},\, \mathbf{a})$:

$$\forall\, (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \,\in\, E^2(4,\, \mathbb{C}) \,:\, A^{\alpha}_{\mu\lambda} \,.\, a^{\mu} \,.\, a^{\lambda} \,=\, a^{\alpha}$$

Le cube déformant A étant donné, cette condition est vérifiée pour l'ensemble des éléments de $\mathrm{E}(4,\, \mathbb{C})$ tels que :

$$\sum_{\mu} A^{\alpha}_{\mu\lambda} \,.\, a^{\mu} \,=\, \delta^{\alpha}_{\lambda}$$

Les éléments de $\mathrm{E}(4,\, \mathbb{C})$ vérifiant ces relations agissent comme le ferait des *stabilisateurs*, c'est-à-dire comme un élément neutre à gauche ; pour une introduction au concept de stabilisateur voir par exemple [05 ; Définitions et formules des classes]. □

Définition 2.10. *Stabilisateur dans $\mathbb{V}$.*

Un stabilisateur dans l'algèbre $\mathbb{V}$ est un élément $\mathbf{a}$ tel que :

$$\sum_{\mu} A^{\alpha}_{\mu\lambda} \, . \, a^{\mu} \, = \, \delta^{\alpha}_{\lambda}$$

Remarque 2.5. *Propriétés des stabilisateurs de $\mathbb{V}$.*

Il convient de noter que :

1. Un stabilisateur $\mathbf{a}$ de l'algèbre $\mathbb{V}$ stabilise tous les éléments de $\mathrm{E}(4, \mathbb{C})$.

   Démonstration. En effet, au cas où $\mathbf{a}$ est un stabilisateur :

   $$\forall \, \mathbf{b} \, \in \, E(4, \mathbb{C}) \, :$$

   $$\otimes_A(\mathbf{a}, \, \mathbf{b}) \, = \, A^{\alpha}_{\mu\lambda} \, . \, a^{\mu} \, . \, b^{\lambda} \, . \, \mathbf{e}_{\alpha} \, = \, \delta^{\alpha}_{\lambda} \, . \, b^{\lambda} \, . \, \mathbf{e}_{\alpha} \, = \, b^{\alpha} \, . \, \mathbf{e}_{\alpha} \, = \, \mathbf{b}$$

   □

2. Un stabilisateur $\mathbf{a}$ de l'algèbre $\mathbb{V}$ valide obligatoirement la troisième condition indispensable à satisfaire pour construire une algèbre involutive dans $\mathbb{V}$.

   Démonstration. En effet, soit pour rappel cette troisième condition (voir ci-dessus) :

   $$\forall \, \mathbf{a} \, : \, A^{\alpha}_{\mu\lambda} \, . \, (A^{\mu}_{\epsilon\delta} \, . \, a^{\epsilon} \, . \, a^{\delta}) \, . \, (A^{\lambda}_{\chi\beta} \, . \, a^{\chi} \, . \, a^{\beta}) \, = \, a^{\alpha}$$

   Si un élément $\mathbf{a}$ est un stabilisateur de l'algèbre $\mathbb{V}$, alors la partie située à gauche de l'égalité s'écrit :

   $$\mathbf{a} \, \in \, Stab(\mathbb{V}) \, : \, A^{\alpha}_{\mu\lambda} \, . \, (\delta^{\mu}_{\delta} \, . \, a^{\delta}) \, . \, (\delta^{\lambda}_{\beta} \, . \, a^{\beta})$$

   Puis :

   $$\mathbf{a} \, \in \, Stab(\mathbb{V}) \, : \, A^{\alpha}_{\mu\lambda} \, . \, a^{\mu} \, . \, a^{\lambda}$$

   Soit enfin :

   $$\mathbf{a} \, \in \, Stab(\mathbb{V}) \, : \, \delta^{\alpha}_{\lambda} \, . \, a^{\lambda} \, = \, a^{\alpha}$$

   La troisième condition est vérifiée. □

3. Soit la quatrième condition indispensable à satisfaire pour construire une algèbre involutive dans $\mathbb{V}$; dans le cas où $\mathbf{a}$ est un élément de $\mathrm{Stab}(\mathbb{V})$ elle prend le formalisme :

   $$\forall \, \mathbf{b} \, \in \, E(4, \mathbb{C}) \, :$$

   $$A^{\alpha}_{\mu\lambda} \, . \, (\delta^{\mu}_{\delta} \, . \, b^{\delta}) \, . \, (\delta^{\lambda}_{\beta} \, . \, b^{\beta}) \, = \, A^{\alpha}_{\mu\lambda} \, . \, b^{\mu} \, . \, b^{\lambda} \, = \, A^{\alpha}_{\mu\lambda} \, . \, a^{\mu} \, . \, b^{\lambda} \, = \, \delta^{\alpha}_{\lambda} \, . \, b^{\lambda} \, = \, b^{\alpha}$$

   ... et elle est en particulier validée lorsque le vecteur $\mathbf{b}$ est lui-même un élément de $\mathrm{Stab}(\mathbb{V})$.

Définition 2.11. *Elément auto-adjoint.*

Par convention, un élément **a** donné de l'ensemble E(4, C) est auto-adjoint quand il est égal à son adjoint ; ce qui se traduit par :

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^* \in E(4, \mathbb{C})$$

Ou encore par :

$$\mathbf{a} = \otimes_A(\mathbf{a}, \mathbf{a})$$

Et, dans la base Ω, par :

$$A^{\alpha}_{\mu\lambda} \,.\, a^{\mu} \,.\, a^{\lambda} = a^{\alpha}$$

Il devient clair qu'un stabilisateur de l'algèbre $\mathbb{V}$ en est aussi un élément auto-adjoint : Stab($\mathbb{V}$) $\subset$ Autadj($\mathbb{V}$).

Lemme 2.5. *Des stabilisateurs de l'algèbre* $\mathbb{V}$.

Un stabilisateur vérifie toujours la troisième condition indispensable à satisfaire pour construire une algèbre involutive dans $\mathbb{V}$. Une paire de stabilisateurs vérifie toujours la quatrième condition indispensable à satisfaire pour construire une algèbre involutive dans $\mathbb{V}$.

3 La limite quantique.

3.1 Motivation.

Dans cette sous-section, je retranscris le raisonnement développé dans [c] pour prouver que la première condition nécessaire à pouvoir construire une algèbre involutive sur $\mathbb{V}$ est fortement liée à la limite quantique des états énergétiques des régions vides.

3.2 Etat des lieux.

Depuis l'expérience de Morley et Michelson [07] -surtout depuis l'analyse qui en a été faite et la conclusion qui en a été tirée ; in extenso : l'inconsistance de la notion d'éther-, nous désignons implicitement à travers l'usage du mot « vide » un certain volume de l'univers dans lequel il n'est pas possible de reconnaitre la présence d'une particule élémentaire.

Bien que l'analyse de cette expérience ait constitué le réel point de départ de la relativité restreinte, notamment parce qu'elle justifie la construction des transformations spéciales de Lorentz [08] et bien qu'il soit hors de question de remettre en cause cette analyse, force est de reconnaître qu'elle sous-tend deux conclusions (i) une représentation uniforme et homogène de ce type de volumes et (ii) une claire délimitation géographique des particules matérielles.

Or ces deux conclusions sont en totale contradiction avec les images livrées par la physique quantique pour ces mêmes concepts. En effet, dans le cadre de la physique quantique, on ne parle pas du vide (comme s'il s'agissait d'un seul et unique objet ; par exemple comme s'il s'agissait d'un morceau d'or pur) mais des « états » (sous-entendu énergétiques) du vide.

Par ailleurs, l'interprétation probabiliste de la présence effective des particules élémentaires introduite par les pères fondateurs de l'approche quantique (Dirac, ...) interdit d'affirmer que l'une d'entre elles soit située quelque part autrement qu'en ajoutant l'information complémentaire ... avec un taux de probabilité de tant de pourcent ! Cette approche de la réalité rend donc désuète la notion de surface bien délimitée attachée à, ou entourant, une particule.

De sorte, qu'à l'extrême, en « descendant » mentalement le long de l'échelle des longueurs vers la longueur dite de Planck (environ 10^{-33} m), il devient très présomptueux – avec une représentation classique de la nature en tête– de faire le distinguo entre ce qui est vide et ce qui ne l'est pas. Les frontières entre le contenu et son contenant s'estompent... au point de se demander si une sorte sophistiquée de bouteille de Klein ne serait pas la représentation symbolique la plus adaptée à la description de ces régions de l'univers.

Dans un tel contexte, nous comprenons vite que le défi intellectuel se fixant pour objectif de faire loger sous un même toit théorique physique relativiste et physique quantique, le vieux rêve de théorie unitaire, met le cerveau humain face à une montagne de problèmes. Celui de la constante cosmologique consolide cette sensation inconfortable et ne constitue au fond qu'une des multiples couches de difficultés auxquelles il faut se confronter pour relever le défi.

3.3 Exégèse et nouvelle perspective.

Devant de tels obstacles, rien ne vaut plus que la réalisation d'une exégèse. Pourquoi en sommes-nous arrivés là ? Quels sont les fondements de nos manières actuelles de penser la réalité ? Sur quels travaux scientifiques, sur quelles expériences basons-nous le paradigme actuel ? L'analyse de ces prémisses a-t-elle été correcte ? Y-avait-il d'autres façons de les interpréter ? Avons-nous omis ou sous-estimé un embranchement logique ?

La théorie de la relativité restreinte se base sur [07] et [08 ; Annexe 9.B, pp. 340-351]. En dehors de l'éviction du concept d'éther luminescent en vogue à la fin du dix-neuvième siècle, elle entérine surtout l'*invariance de la vitesse spatiale de propagation* des ondes électromagnétiques (EM) dans ce qui venait de devenir le vide.

Ce sont les mathématiques qui ont ensuite contribué à donner une autre vision de ces régions vides. Tout d'abord parce qu'elles ont invité à faire glisser les conversations théoriques vers un contexte quadridimensionnel (Minkowski) ; puis parce qu'elles ont suggéré de toujours doter ce contexte d'une structure géométrique. Sur la base de :

— L'observation quotidienne nous montrant que les objets tridimensionnels pouvaient avoir diverses formes, donc diverses topologies et diverses géo-

métries ;
— Des extrapolations mentales que l'esprit humain est toujours prompt à faire, même s'il n'a que rarement les moyens d'en prouver la réalité ou d'en démontrer la justesse ;
— De la floraison des explorations concernant les géométries survenues à la suite des travaux initiateurs de Gauss, vers la fin du dix-neuvième siècle (Riemann [09], Christoffel [03-a ; 1869], Cotton [03-b ; 1899], Lobatchevski, etc.)

L'intuition a ensuite poussé à admettre que ces structures quadridimensionnelles pouvaient a priori, elles aussi, se déformer. Il a été admis que la géométrie de Minkowski était la géométrie attachée aux régions vides ; qu'elle constituait en quelque sorte le « point zéro » de toutes les autres et que toute déformation subie par elle signerait un écart par rapport à l'équilibre. Cette intuition consistant à associer « vide » et « géométrie de Minkowski » est largement renforcée par un constat aujourd'hui indéniable : l'omniprésence des régions vides dans l'univers.

La théorie de la relativité générale [02] a, très tôt et courageusement, intégré cette potentialité de déformation des espace-temps dans ses équations. Ce courage a été récompensé un siècle plus tard par l'observation de certaines des prédictions qui découlaient des équations maitresses ; exemples : l'effet Lense-Thirring et par celle des ondes gravitationnelles [10 ; chapitres 30 et 31]. Les calculs, quant à eux, reposent sur le principe de Maupertuis (de moindre action) et livrent in fine pour solutions des équations du champ (gravitationnel) les éléments infinitésimaux de longueur déformés, les $(\mathrm{ds})^2$ [11 ; § 92, pp. 287-289] ; offrant ainsi une théorie monumentale dont les succès n'ont cessé de croître au cours du siècle passé. Il est utile de rappeler qu'une grande partie des équations utilisées dans [02] emprunte aux travaux de Christoffel [03-a] ; en particulier à son exploration des conditions préservant les formes différentielles bilinéaires, par exemple et justement : le $(\mathrm{ds})^2$.

En 1922, E. Cartan parvient par une autre série de calculs [12] aux mêmes équations du champ (gravitationnel) qu'A. Einstein dans [02] ; ses équations intègrent d'emblée la possibilité de l'existence d'une constante cosmologique. Le même E. Cartan développe dans les années qui suivent le concept de spineur (vecteur non-nécessairement nul dont le carré calculé à l'aide du produit scalaire local est nul : $<\ldots, \ldots>[\mathrm{B}] = 0$). Ce qui permet ainsi d'interpréter les solutions nulles de la théorie de la relativité générale comme la preuve de l'existence de spineurs et d'associer ces êtres mathématiques étranges à la géométrie instable des régions vides dans lesquelles, malgré les déformations, les ondes EM ne semblent pas pouvoir se mouvoir à une autre vitesse que $c \sim 3.\ 10^8$ m.s-1 [13]. A la fin du jour, comme disent les anglophones, il est permis de penser que la relation suivante joue un rôle essentiel dans la description des régions vides et plus personne ne peut vraiment remettre ce fait en cause.

$$g_{\lambda\mu} \,.\, \delta x^{\lambda} \,.\, \delta x^{\mu} \;=\; inv.$$

Ce que certains nomment aujourd'hui le « scénario catastrophe » de la physique moderne, locution par laquelle ils désignent avec un trémolo dans la gorge le fait que la multiplication des investigations menées au sein de l'accélérateur de particules situé à la frontière franco-suisse (le large hadrons colliers, alias LHC) ne livrent aucune information nouvelle sur les fondations de la physique, peut se regarder avec d'autres yeux. Telle une bouteille à moitié vide qui est aussi forcément à moitié pleine, cette absence de nouveauté assure de la validité d'un certain nombre de nos connaissances.

La version covariante de la loi de Lorentz (dite encore parfois loi de Lorentz-Einstein -LLE) fait partie de ces connaissances [11 ; § 33, p. 68, (33-1)] que nous n'avons aucun motif à rejeter ; jusqu'à preuve du contraire. Or dans la quête des arguments permettant de connecter cette approche historique et la physique quantique il m'apparait que les travaux de Christoffel [02-a] peuvent s'appliquer à toutes sortes de formes différentielles bilinéaires.

C'est ce qui me permet d'envisager de les appliquer en particulier à un scalaire constructible à partir de la LLE. Le résultat peut être lu dans [d]. Les lecteurs avertis remarqueront justement que cette approche alternative n'est pas incompatible avec l'invariance des $(\mathrm{ds})^2$ et qu'elle autorise, une fois de plus grâce aux apports théoriques essentiels d'E. Cartan [14], la préservation simultanée de la limite de Planck.

Ainsi, bien que la question délicate de la jonction conceptuelle entre physique relativiste et physique quantique ne s'en trouve pas pour autant être complètement élucidée, le travail proposé dans [d] offre le début d'une piste permettant de parvenir à y répondre. Et, ne serait-ce qu'à cause de cela, c'est déjà une avancée remarquable de la pensée.

3.4 Le pari de Descartes.

Nous voici donc munis de régions vides :

1. potentiellement susceptibles de se déformer géométriquement mais dans lesquelles la limite de Planck peut/doit être préservée [d] ;
2. potentiellement susceptibles d'être le lieu de réalisation de courants EM neutres [e] ;
3. dans lesquelles les termes mathématiques capables de rendre compte de ces déformations géométriques se trouvent être représentés soit par le terme gravitationnel présent dans la version covariante de la loi de Lorentz, soit par une série de produits tensoriels déformés bâtis sur les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel (voir équation des déviations des géodésiques) ;

Descartes avait autrefois fait ce pari un peu insensé qu'il valait mieux croire en Dieu que de ne point y croire ; au motif qu'il n'y avait rien à y perdre s'il n'existait en réalité pas et tout à y gagner s'il existait réellement.

C'est le type de raisonnement « limite » que nous allons reproduire ici en l'appliquant, non pas à Dieu, mais aux « régions vides ».

Car, à bien y réfléchir et du point de vue de la logique, il peut être rétorqué aux arguments exposés jusqu'ici qu'il y a une contradiction certaine entre deux familles de faits incontournables.
D'un côté, il n'y a rien de plus communément répandu que le vide ; ce qui donne à ces régions vides l'apparence de ces états énergétiques stables vers lesquels toutes agitations semblent irrémédiablement finir par venir s'éteindre.
De l'autre côté, il y a toutes les explorations théoriques du siècle précédent et leurs confirmations expérimentales récentes qui nous confirment l'aptitude de ces régions à pouvoir s'écarter de temps en temps au moins de leur état d'équilibre. Les régions vides possèderaient donc un certain degré d'instabilité leur permettant d'osciller entre un état énergétique stable et un autre qui ne le serait pas – donc instable.

3.5 Les régions vides obéissent-elles à un phénomène du type décrit par Lamb et Rutherford ?

Tenant compte du raisonnement mené dans [e], supposons qu'il existe quelque part dans une région vide, à un point M et à un moment donné t, une densité volumétrique de force symbolisée par :

$$\frac{\partial \mathbf{F}(M,\, t)}{\partial \tau}$$

Sans même connaitre la nature précise de « ce » qui bouge lorsque nous nous plaçons dans les circonstances exposées précédemment, on sait que si « ce » qui bouge, bouge de dr pendant le laps de temps dt, alors « ce » qui bouge développe un travail –ou ce qui revient au même - représente l'équivalent d'une perturbation énergétique :

$$\Delta W \;=\; \int_0^{\Delta t} < \frac{\partial \mathbf{F}(M,\, t)}{\partial \tau},\, d\mathbf{r} >_{[G]}$$

L'idée retenue par l'approche quantique est que toute perturbation énergétique réalise un lien entre deux états/configurations énergétiques. Ce peut être :

- entre deux particules ; la perturbation est alors identifiée avec la particule vectrice de l'interaction entre les deux particules.
- entre deux configurations énergétiques du vide.

La seconde éventualité permet de s'abstraire de considérations métaphysiques sur la nature du « ce ». Reste alors à savoir à quoi peut s'associer cette évolution spontanée entre deux de ses divers états possibles. Si les régions vides doivent se comprendre comme un océan de configurations énergétiques aux fluctuations erratiques (ce que permet d'envisager l'emploi de la relation d'incertitude d'Heisenberg), les transitions doivent être associés avec des équivalents de particules. Si ces fluctuations sont fréquentes, il faut en principe s'attendre à les trouver en grand nombre.

3.6 Le raisonnement appliqué aux régions vides.

Sans pouvoir encore être en mesure de préciser de quelles équivalents de particules il s'agit, c'est une idée que je reprends à mon compte. Je ferai donc l'hypothèse propre à cette théorie qu'il est possible de considérer les régions vides comme un « néant » oscillant entre deux types d'états énergétiques : les uns (notés $|2>$) sont classiques c'est-à-dire stables et caractérisés par une énergie nulle ; les autres (notés $|1>$) sont quantiques, c'est-à-dire instables et, a priori jusqu'à preuve expérimentale du contraire, également caractérisés par une énergie nulle.

Sur la base de cette hypothèse je vais m'attacher à reproduire un raisonnement dû à Lamb et Rutherford [15 ; complément HIV ; pages 468-473]. Il va permettre d'établir des résultats sur ce qui lie deux états énergétiques du vide. Je note par convention :

$$\gamma = \frac{1}{\Delta t}$$

Dans ce raisonnement, à chaque état instable est associé une énergie imaginaire :

$$E = -\frac{i\,.\,\hbar}{2}\,.\,\gamma$$

L'énergie de couplage associée au passage entre deux états dépend étroitement du signe de la quantité :

$$\Delta W - \frac{\hbar}{4}\,.\,\gamma$$

La relation d'incertitude d'Heisenberg est réputée valide pour les états quantiques et elle s'écrit :

$$\Delta W\,.\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Elle a une conséquence immédiate dans le contexte que je suis en train d'explorer ; en effet, à cause du fait que le temps s'écoule toujours dans le même sens (vers le futur) :

$$\Delta t \geq 0$$

La relation d'incertitude d'Heisenberg fournit :

$$\Delta W \geq \frac{\hbar}{2}\,.\,\gamma = 2\,.\,\frac{\hbar}{4}\,.\,\gamma \geq \frac{\hbar}{4}\,.\,\gamma$$

Il suit :

$$\Delta W - \frac{\hbar}{4}\,.\,\gamma \geq 0$$

Il en résulte finalement que l'état énergétique initial est transformé en un nouvel état énergétique dont la valeur est en théorie donnée par :

$$E = -\frac{i\,.\,\hbar}{2}\,.\,\gamma \pm \sqrt{|\Delta W|^2 - \frac{\hbar^2}{16}\,.\,\gamma^2}$$

Ce nouvel état est associé avec une probabilité d'occurence (voir la référence [15 ; complément HIV ; pages 468-473]) :

$$P(t) = ...$$

...

Hormis le fait que cette probabilité n'est pas définie pour le cas limite où :

$$\Delta W - \frac{\hbar}{4} . \gamma = 0$$

... l'information la plus importante contenue dans cette formule est que la probabilité de trouver l'état énergétique E' en partant de l'état énergétique E est une exponentielle sinusoïdale décroissante.

Concrètement ceci veut dire que : plus l'époque t à laquelle il serait tenté de mesurer cette probabilité serait éloignée de l'instant choisi comme initial dans la chronologie locale de l'expérimentateur, et moins cet expérimentateur aurait la chance de détecter l'existence d'une perturbation ΔW qui aurait transformé l'état énergétique initial (E, t = 0) en l'état final (E', Δt = t – 0). Brièvement résumé :

$$t \to +\infty \Rightarrow P(t) \to 0$$

Je peux en déduire que le phénomène transitionnel ΔW est bien entendu éphémère, comme l'ensemble de ce qui existe dans l'univers. C'est donc un résultat cohérent et rassurant.

Mais cette approche cache un autre résultat, plus intéressant encore. En effet, si je suppose que la limite quantique est atteinte, la relation d'incertitude d'Heisenberg revêt son formalisme limite :

$$\Delta W . \Delta t = \frac{\hbar}{2}$$

... et is devient aisé de vérifier que l'état instable est associé avec :

$$E = -i . \Delta W$$

... alors que les nouveaux états énergétiques atteignables sont définis par les relations :

$$E' = j . E \; ; \; E' = j^2 . E$$

Concrètement, je retrouve la présence de l'ensemble :

$$\mathbb{U}_3 = \{e^{\frac{2 . \pi . i . k}{3}}, k \in \{0, 1, 2\}, \times\}$$

Ce qui était bien l'objectif fixé par cette section de ce document.

4 Les conversions de la loi de Lorentz-Einstein.

4.1 Motivation.

Puisque le terme gravitationnel est construit sur un cube symétrique (voir l'exemple 2.1), et puisqu'une algèbre involutive nécessite l'usage de cubes antisymétriques (deuxième condition nécessaire : remarque 2.2), la poursuite de cette exploration nécessite l'établissement règles de conversion entre les divers types de cube.

Ceci ayant été dit, ce souhait ne semble atteignable que si un contexte physique faisant usage du terme gravitationnel est précisé. D'un point de vue entièrement pédagogique, il me semble particulièrement intéressant de considérer ici la version covariante de la loi de Lorentz, dite parfois loi de Lorentz-Einstein ; j'en parlerai désormais en utilisant l'abréviation LLE. Le sujet a déjà été effleuré dans [a ; en anglais] mais je le traite à fond ici pour la complétude et la clarté de mon exposé.

4.2 Les règles de la conversion.

Proposition 4.1. *Il existe des circonstances mathématiques convertissant le terme gravitationnel en un produit tensoriel déformé par un cube antisymétrique A.*

Autrement dit, le problème consiste à énoncer les conditions mathématiques rendant l'équivalence ci-dessous réalisable :

$$\underbrace{|m\,.\,\frac{d\mathbf{u}}{ds}\,+\,\otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u},\mathbf{p})>=\,q\,.\,[F(\uparrow,\downarrow)]\,.\,|\mathbf{u}>}_{LLE}\,\equiv\,\otimes_A(\mathbf{u},\mathbf{f})\,=\,[O]\,.\,|\mathbf{f}>\,+|\mathbf{z}>$$

Dans ces relations, m est la masse d'une particule, q en est la charge électrique, **u** en est la quadrivitesse, **p** = m.**u** en est la quantité de mouvement, F(↑,↓) est la représentation matricielle dans M(4, $\mathbb{C}$) de la version mixte contra- et covariante du tenseur champ électromagnétique (EM). A ce stade, la matrice [O] et les vecteurs **f**, **z** ne sont pas connus.

Démonstration. Soit la relation de travail suivante dans laquelle le vecteur **f** n'a, pour le moment, aucune interprétation clairement identifiable :

$$|\mathbf{f}>=\,[T]\,.\,|\mathbf{u}>\,+|\mathbf{f}_0>\equiv\,f^\beta\,=\,T_{\beta\epsilon}\,.\,u^\epsilon\,+\,f_0^\beta$$

En injectant cette hypothèse de travail dans l'expression convertie souhaitée, il vient :

$$A^\chi_{\alpha\beta}\,.\,u^\alpha\,.\,f^\beta\,=\,o_{\chi\beta}\,.\,f^\beta\,+\,z^\chi$$

$$\downarrow$$

$$A^\chi_{\alpha\beta}\,.\,u^\alpha\,.\,(T_{\beta\epsilon}\,.\,u^\epsilon\,+\,f_0^\beta)\,=\,o_{\chi\beta}\,.\,(T_{\beta\epsilon}\,.\,u^\epsilon\,+\,f_0^\beta)\,+\,z^\chi$$

$$\downarrow$$

$$A^\chi_{\alpha\beta}\,.\,T_{\beta\epsilon}\,.\,u^\alpha\,.\,u^\epsilon\,+\,A^\chi_{\alpha\beta}\,.\,u^\alpha\,.\,f_0^\beta\,=\,o_{\chi\beta}\,.\,T_{\beta\epsilon}\,.\,u^\epsilon\,+\,(o_{\chi\beta}\,.\,f_0^\beta\,+\,z^\chi)$$

$$\downarrow$$

$$(A^\chi_{\alpha\beta}\,.\,T_{\beta\epsilon})\,.\,u^\alpha\,.\,u^\epsilon\,=\,o_{\chi\beta}\,.\,T_{\beta\epsilon}\,.\,u^\epsilon\,-\,A^\chi_{\alpha\beta}\,.\,f_0^\beta\,.\,u^\alpha\,+\,(o_{\chi\beta}\,.\,f_0^\beta\,+\,z^\chi)$$

$$\downarrow$$

$$\forall\,\chi\,:\,(A^\chi_{\alpha\beta}\,.\,T_{\beta\epsilon})\,.\,u^\alpha\,.\,u^\epsilon\,=\,(o_{\chi\beta}\,.\,T_{\beta\epsilon}\,-\,A^\chi_{\epsilon\beta}\,.\,f_0^\beta)\,.\,u^\epsilon\,+\,(o_{\chi\beta}\,.\,f_0^\beta\,+\,z^\chi)$$

...

La LLE est retrouvée chaque fois que les conditions suivantes sont simultanément validées :

$$|\mathbf{f}> = [T]\,.\,|\mathbf{u}> + |\mathbf{f}_0>$$

$$\Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon} = \Gamma^{\chi}_{\epsilon\alpha}$$

$$A^{\chi}_{\alpha\beta}\,.\,T_{\beta\epsilon} = m\,.\,\Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

$$o_{\chi\beta}\,.\,T_{\beta\epsilon} - A^{\chi}_{\epsilon\beta}\,.\,f^{\beta}_{0} = q\,.\,F^{\chi}{}_{\epsilon}$$

$$-m\,.\,\frac{du^{\chi}}{ds} = o_{\chi\beta}\,.\,f^{\beta}_{0} + z^{\chi}$$

La règle de conversion entre le cube de Christoffel et un cube antisymétrique A est définie dès le moment où se rajoute aux précédentes la condition supplémentaire :

$$A^{\chi}_{\alpha\epsilon} + A^{\chi}_{\epsilon\alpha} = 0$$

□

L'intérêt essentiel de cette conversion est de positionner la discussion physique dans un contexte autorisant à doter $V_4(\mathbb{R},\, A) = \{E(4,\, \mathbb{R}),\, \otimes_A\}$ d'une structure d'algèbre involutive ; mais l'hypothèse de travail menant à ces régles sont-elles compatibles avec la physique des phénomènes électromagnétiques ?

4.3 Sur l'interprétation de l'hypothèse de travail.

L'hypothèse de travail n'a au départ aucune interprétation physique précise. Son formalisme invite cependant à en considérer un cas particulier pour lequel le vecteur $\mathbf{f}_0$ est nul ; les règles de conversion s'écrivent alors :

$$|\mathbf{f}> = [T]\,.\,|\mathbf{u}>$$

$$\Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon} = \Gamma^{\chi}_{\epsilon\alpha}$$

$$A^{\chi}_{\alpha\beta}\,.\,T_{\beta\epsilon} = m\,.\,\Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

$$[O]\,.\,[T] = q\,.\,[F^{\chi}{}_{\epsilon}]$$

$$-m\,.\,\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \mathbf{z}$$

$$A^{\chi}_{\alpha\epsilon} + A^{\chi}_{\epsilon\alpha} = 0$$

Se pose alors la question cruciale de l'interprétation physique correcte des acteurs mathématiques intervenant dans ces relations : [O], [T], A, **z**, **f** ; deux pistes s'offrent spontanément à la réflexion en observant la quatrième règle :

1. Le calcul tensoriel peut donner envie de poser deux identifications :

   $$[O] = [G]^{-1}\,;\, [T] = q\,.\,[F(2,0)]$$

   La première dit que la matrice [O] est la représentation de l'inverse de la métrique (supposée inversible sans démonstration) tandis que la seconde identifie la matrice inconnue [T] avec la représentation matricielle du tenseur champ EM sous sa forme deux fois covariante. Avec ces identifications, l'hypothèse de travail s'écrit :

$$|\mathbf{f}>= q\,.\,[F(2,0)]\,.\,|\mathbf{u}>$$

Elle semble désigner la force de Laplace mais elle ne peut en réalité pas se confondre avec elle car la force de Laplace s'écrit correctement :

$$|\mathbf{F}_{Laplace}>= q\,.\,[F(\uparrow,\downarrow)]\,.\,|\mathbf{u}>$$

2. En revanche, il existe une jauge électromagnétique assurée par les transformations de Lorentz $[\Lambda]$ s'écrivant de manière générale [06 ; p. 21, (1.75)] (rappel) :

$$q\,.\,\underbrace{\{^{(4)}[G]^{-1}\,.\,^{(4)}[F(2,0)]\}'}_{[F(\uparrow,\downarrow)]'} = q\,.\,[\Lambda]\,.\,\underbrace{\{^{(4)}[G]^{-1}\,.\,^{(4)}[F(2,0)]\}}_{[F(\uparrow,\downarrow)]}\,.\,[\Lambda]^{-1}$$

Le symbole "prime" désigne le fait que l'objet physique auquel il est accolé a été Lorentz-transformé. Ce fait connu et accepté pousse à proposer pour la troisième relation de conversion l'interprétation :

$$[O] = [\Lambda]^{-1}\,;\,[T] = q\,.\,[F(\uparrow,\downarrow)]'\,.\,[\Lambda]$$

Dans le cadre de cette interprétation, l'hypothèse de travail s'écrit :

$$|\mathbf{f}>= [T]\,.\,|\mathbf{u}>= q\,.\,[F(\uparrow,\downarrow)]'\,.\,\underbrace{[\Lambda]\,.\,|\mathbf{u}>}_{|\mathbf{u}'>}$$

Le vecteur $\mathbf{f}$ peut maintenant être identifié avec la version Lorentz-transformée de la force de Laplace s'exerçant sur la particule chargée :

$$|\mathbf{f}>= |\mathbf{F}'_{Laplace}>= [\Lambda]\,.\,\underbrace{|\mathbf{F}_{Laplace}>}_{q\,.\,[F(\uparrow,\downarrow)]\,.\,|\mathbf{u}>}$$

Cet exemple et cette remarque démontrent l'existence de contextes dans lesquels une conversion de la LLE sous forme de produit tensoriel déformé par un cube antisymétrique semble a priori possible (mathématiquement) et plausible (physiquement).

4.4 Les composantes des cubes antisymétriques admissibles.

A cause de l'apparition des transformations de Lorentz dans les équations, la conversion positionne la discussion physique dans un contexte où la vitesse de la particule étudiée joue un rôle ne pouvant plus être négligé.

Proposition 4.2. *Certaines transformations de Lorentz se laissent représenter par des décompositions triviales de produits de Lie déformés (équiv. des dilatations triviales de la vitesse des particules dont elles décrivent les évolutions).*

Démonstration. Dans sa représentation dite *vectorielle*, un élément du groupe des transformations de Lorentz O(1, 3) est une matrice (4-4) obtenue par l'exponentiation des générateurs $[J^{\mu\nu}]$:

$$[\Lambda] = exp^{-\frac{1}{2}\,.\,\omega_{\mu\nu}\,.\,[J^{\mu\nu}]}$$

Les composantes d'un tenseur antisymétrique ω apparaissent dans cette expression. Elles pourraient se laisser ordonner sous la forme d'une matrice antisymétrique :

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 \\ -\beta^1 & 0 & -\theta^3 & \theta^2 \\ -\beta^2 & \theta^3 & 0 & -\theta^1 \\ -\beta^3 & -\theta^2 & \theta^1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour autant et pour l'heure, elles agissent essentiellement comme des paramètres vis à vis des générateurs du groupe et, en première approximation, ceci signifie que :

$$[\Lambda] = Id_4 - \frac{1}{2}\,.\,\omega_{\mu\nu}\,.\,[J^{\mu\nu}] = Id_4 - \frac{i}{2}\,.\,[\omega_{\mu\nu}\,.\,(g^{\mu\rho}\,.\,\delta^{\nu}_{\sigma} - g^{\nu\rho}\,.\,\delta^{\mu}_{\sigma})]$$

Ce développement peut être poussé quelques crans plus loin en utilisant les expressions détaillées des générateurs :

$$[\Lambda] = Id_4 - \frac{i}{2}\,.\,[\omega_{\mu\nu}\,.\,g^{\mu\rho}\,.\,\delta^{\nu}_{\sigma} - \omega_{\mu\nu}\,.\,g^{\nu\rho}\,.\,\delta^{\mu}_{\sigma}] = Id_4 - \frac{i}{2}\,.\,[\omega_{\mu\sigma}\,.\,g^{\mu\rho} - \omega_{\sigma\nu}\,.\,g^{\nu\rho}]$$

De sorte que la matrice $[\omega]$ réapparait effectivement et que son antisymétrie autorise à poursuivre avec [1] :

$$[\Lambda]$$
$$=$$
$$Id_4 + \frac{i}{2}\,.\,[\omega_{\sigma\nu}\,.\,g^{\nu\rho} - \omega_{\mu\sigma}\,.\,g^{\mu\rho}]$$
$$=$$
$$Id_4 + i\,.\,\{[\omega]\,.\,[G]^{-1}\}^t$$
$$=$$
$$Id_4 - i\,.\,([G]^{-1})^t\,.\,[\omega]$$

A cet endroit, il est opportun de se souvenir que toute matrice antisymétrique ayant le formalisme de cette matrice $[\omega]$ peut s'interpréter comme la représentation d'une décomposition triviale d'un produit de Lie déformé au sein de la théorie des produits déformés (alias TQE), précisément du produit $[_{\psi}\mathbf{u},\ \mathbf{...}]_{\mathbf{A}}$ dans lequel figure le vecteur $\mathbf{A}$: (a, b, c, d) résultant de l'antisymétrisation puis de l'anti-réduction d'un cube au départ quelconque A. Le vecteur $_{\psi}\mathbf{u}$ représente la quadrivitesse d'une particule "ψ". Finalement, dans ces circonstances et en

1.

$$-\,\omega_{\mu\sigma} = \omega_{\sigma\mu};\ [\omega]^t = -[\omega]$$

première approximation l'élément générique du groupe des transformations de Lorentz peut s'écrire :

$$[\Lambda] = Id_4 - i \,.\, ([G]^{-1})^t \,.\, _{\mathbf{A}}\Phi({}_{\psi}\mathbf{u})$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\Phi_{01} &= a \,.\, u^2 - b \,.\, u^3 = \beta^1 \\
\Phi_{02} &= -a \,.\, u^1 + c \,.\, u^3 = \beta^2 \\
\Phi_{03} &= -b \,.\, u^1 - c \,.\, u^2 = \beta^3 \\
\Phi_{12} &= a \,.\, u^0 + d \,.\, u^3 = -\theta^3 \\
\Phi_{13} &= -d \,.\, u^2 + b \,.\, u^0 = -\theta^2 \\
\Phi_{23} &= c \,.\, u^0 - d \,.\, u^1 = -\theta^1
\end{aligned}$$

□

Ainsi, avec l'interprétation physique qui a été retenue pour valider les conversions de la LLE, la matrice [T] vaut plus précisément :

$$[T] = q \,.\, [F(\uparrow,\downarrow)]' \,.\, [\Lambda] = q \,.\, [\Lambda] \,.\, [F(\uparrow,\downarrow)] = q \,.\, \{Id_4 - i \,.\, ([G]^{-1})^t \,.\, [\omega]\} \,.\, [F(\uparrow,\downarrow)]$$

Ses entrées s'écrivent :

$$T_{\beta\epsilon} = q \,.\, (F^{\beta}{}_{\epsilon} - i \,.\, g^{\mu\beta} \,.\, \omega_{\mu\rho} \,.\, F^{\rho}{}_{\epsilon})$$

La troisième règle de conversion de la LLE (rappel) :

$$A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, T_{\beta\epsilon} = m \,.\, \Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

... peut maintenant être précisée :

$$q \,.\, A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, \{F^{\beta}{}_{\epsilon} - i \,.\, g^{\mu\beta} \,.\, \omega_{\mu\rho} \,.\, F^{\rho}{}_{\epsilon}\} = m \,.\, \Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

Il n'est pas simple d'extraire les composantes du cube A de cette relation.

Remarque 4.1. *Sur les métriques diagonalisables et non-dégénérées.*

Pour autant, l'expression approchée au premier ordre des transformations de Lorentz perd son intérêt chaque fois que la métrique est non-dégénérée et diagonalisable ; en effet dans ces cas-là :

$$([G]^{-1})^t \,.\, _{\mathbf{A}}\Phi({}_{\psi}\mathbf{u}) = {}^{(4)}[0]$$

et il suffit de poser :

$$[\Lambda] \sim Id_4$$

De sorte que la règle de conversion se simplifie drastiquement en :

$$q \,.\, A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, F^{\beta}{}_{\epsilon} = m \,.\, \Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

Pour pouvoir identifier clairement les entrées du cube antisymétrique A, il devient nécessaire de pouvoir inverser la représentation deux fois covariante du champ électromagnétique. J'ai montré dans [b] que ceci est techniquement possible et comment.

4.5 Les divers visages de la LLE.

Dans un contexte résultant de l'interprétation physique retenue, la LLE se laisse représenter par :

$$| \otimes_A (\mathbf{u},\, \mathbf{F}'_{Laplace}) >= [\Lambda]^{-1} \,.\, |\mathbf{F}'_{Laplace} > - |m \,.\, \frac{d\mathbf{u}}{ds} >$$

Ou, équivalemment mais très avantageusement en utilisant la jauge électromagnétique habituelle, par une relation s'exprimant dans le même référentiel que celui dans lequel la LLE est écrite :

$$\otimes_A(\mathbf{u},\, [\Lambda] \,.\, |\mathbf{F}_{Laplace} >) \;=\; \mathbf{F}_{Laplace} \;-\; m \,.\, \frac{d\mathbf{u}}{ds} \;=\; m \,.\, \otimes_{\Gamma(2)} (\mathbf{u},\, \mathbf{u})$$

Le produit tensoriel déformé par le cube antisymétrique A est une différence entre deux forces ; la conversion opérée présente donc la propriété de préserver la nature physique du terme gravitationnel puisque ce dernier est une (densité de) force (par unité de masse). La conversion du terme gravitationnel peut ainsi se résumer par l'application :

$$m \,.\, \otimes_{\Gamma(2)} (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) \;\rightarrow\; \otimes_A(\mathbf{u},\, \{Id_4 \;-\; i \,.\, ([G]^{-1})^t \,.\, {}_{\mathbf{A}}\Phi({}_{\psi}\mathbf{u})\} \,.\, [F(\uparrow, \downarrow)] \,.\, |\mathbf{u} >)$$

... qui, dans le cadre simplifié de la remarque 4.1 (métrique inversible et diagonalisée), se réduit à :

$$m \,.\, \otimes_{\Gamma(2)} (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) \;\rightarrow\; \otimes_A(\mathbf{u},\, [F(\uparrow, \downarrow)] \,.\, |\mathbf{u} >)$$

... accompagnée de :

$$q \,.\, A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, F^{\beta}{}_{\epsilon} \;=\; m \,.\, \Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

5 Structure d'algèbre involutive.

5.1 Les stabilisateurs de la loi de Lorentz covariante.

A ce stade de mon exposé, deux des quatre propriétés nécessaires à la construction d'une algèbre involutive sur $\{\mathrm{E}(4,\, \mathbf{C}),\, \otimes_A\}$ - écriture dans laquelle A désigne désormais les cubes issus de l'étude de la section précédente- sont atteignables. Il reste à préciser les conditions correspondant aux deux dernières propriétés nécessaires. L'exploration menée à ce sujet montre qu'il convient d'impliquer les stabilisateurs (définition 2.10) ; ici ce seront les :

$$\sum_{\mu} A^{\alpha}_{\mu\lambda} \,.\, u^{\mu} \;=\; \delta^{\alpha}_{\lambda}$$

... et les (voir remarque 2.5 et fin de la sous-section 4.5) :

$$\sum_{\mu} A^{\alpha}_{\mu\lambda} \,.\, F^{\mu}_{Laplace} \;=\; q \,.\, \sum_{\mu} A^{\alpha}_{\mu\lambda} \,.\, F^{\mu}{}_{\rho} \,.\, u^{\rho} \;=\; -m \,.\, \Gamma^{\alpha}_{\mu\rho} \,.\, u^{\rho} \;=\; \delta^{\alpha}_{\lambda}$$

L'attention est attirée sur le fait que les stabilisateurs acceptent des représentations matricielles identifiables avec les décompositions triviales des produits

...

tensoriels déformés dont ils sont issus et avec la matrice identité Id_4 ; en effet, les premiers se condensent en :

$$_{A}\Phi(\mathbf{u}) = Id_4$$

Tandis que les seconds se caractérisent par :

$$_{A}\Phi(\mathbf{F}_{Laplace}) = {}_{\Gamma(2)}\Phi(-\mathbf{p}) = Id_4$$

5.2 Bilan intermédiaire.

Pour tenter un premier résumé de l'exploration menée jusqu'ici, je dirai que seules certaines configurations mixant quantités de mouvement, champs électromagnétiques et variations de la géométrie d'une manière qui vient à peine d'être dégrossie peuvent contribuer à délimiter une structure d'algèbre involutive sur $\{\mathrm{E}(4, \mathbb{C}), \otimes_A\}$.

1. L'étude de la première des quatre conditions a mis en exergue :
   (a) le rôle essentiel du groupe cyclique $\mathbb{U}_3$;
   (b) le fait que ce groupe joue son rôle quelle que soit la dimension mathématique de l'espace sur lequel il est souhaité définir une structure d'algèbre involutive ;
   (c) un lien inattendu entre ce groupe et les divers niveaux énergétiques caractérisant une région vide instable.
2. L'étude de la deuxième des quatre conditions a permis :
   (a) de découvrir qu'une condition suffisante à permettre la construction d'une algèbre involutive sur $\{\mathrm{E}(4, \mathbb{C}), \otimes_A\}$ est que le cube A soit antisymétrique ;
   (b) de se persuader de la possibilité technique de convertir le terme gravitationnel accompagnant la version covariante de la loi de Lorentz (dite encore LLE) en un produit tensoriel déformé par un cube antisymétrique ;
   (c) de préciser les contextes autorisant la conversion les plus simples (Ils correspondent aux géométries inversibles diagonalisables) ;
   (d) de comprendre la nécessité d'approfondir cette exploration, notemment de la compléter de connaissances concernant les métriques dégénérées et non-diagonalisables ou de connaissances sur les expressions des transformations de Lorentz dépassant les développements au premier ordre.
3. L'étude de la troisième et de la quatrième condition a permis :
   (a) de mettre en avant le rôle essentiel des stabilisateurs ;
   (b) de préciser leur formalisme dans les contextes des conversions les plus simples de la LLE ;
   (c) de montrer leurs liens avec les éléments auto-adjoints et avec les décompositions triviales s'identifiant à une matrice identité.

5.3 Perspectives.

Il semble indiqué d'approfondir les points suivants :

1. (c) : Comment incorporer ce fait en utilisant la LLE ? J'ai apporté un début de réponse dans le document [d] explorant la préservation simultanée de la vitesse de propagation de la lumière et de la constante de Planck dans les régions vides.
2. (d)
3. (a), (b) et (c)
4. La construction d'une C*-algèbre.

Références

6 Bibliographie

6.1 Travaux personnels.

[a] PERIAT, T. : The Klein-Gordon Equation in a four-dimensional context ; ISBN 978-2-36923-125-7, EAN 9782369231257, v4, 16 October 2022, 25 pages.

[b] PERIAT, T. : Représentation matricielle de l'opérateur de Hodge agissant sur les 2-formes d'un espace de dimension quatre ; ISBN 978-2-36923-068-7, EAN 9782369230687, v3, partie I : Analyse périenne des matrices, 17 janvier 2022, 13 pages.

[c] PERIAT, T. : Les régions vides : la vision emprûntée à Lamb et Rutherford ; ISBN 978-2-36923-138-7, EAN 9782369231387, 11 janvier 2019, 7 pages.

[d] PERIAT, T. : Einstein versus Heisenberg, première partie ; ISBN 978-2-36923-026-7, EAN 9782369230267, 18 octobre 2022, 14 pages.

[e] PERIAT, T. : Algebraic cosmology, Maxwell's vacuum revisited ; ISBN 978-2-36923-128-8, EAN 9782369231288, 25 September 2022, 40 pages.

6.2 Ouvrages et cours consultés.

[01] Consistency analysis of a dark matter velocity dependent force as an alternative to cosmological constant, arXiv :2102.07792v1 [astro-ph.CO] 15 February 2021.

[02] Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie ; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7.

[03] (a) Christoffel, E. B. : Über die Transformation der homogenen Differentiale Ausdrücke zweiten Graden ; Journal für die reine und angewandte Mathematik, pp. 46-70, 3 Januar 1869. Ce document peut être consulté à l'Université de Göttingen (Allemagne). (b) Cotton, E. : Sur les variétés à trois dimensions ; annales de la faculté des sciences de Toulouse, 2ème série, tome 1, numéro 4 (1899), pp. 385 – 438, [www.numdam.org/item ?id=AFST-1899-2-1-4-385-0].

[04] An informal introduction to the ideas and concepts of non-commutative geometry ; arXiv :math-ph/0612012v3 15 Dec 2006.

[05] Mourougane, C. : Théorie des groupes et géométrie, cours de l'Université de Rennes 1, année 2009-2010, version du 6 avril 2010.

[06] Labarthe, J. J. : Electromagnétisme ; Université Paris Orsay, maîtrise et magistère de physique, version du 26 octobre 2002, 97 pages.

[07] Michelson A. and Morley E. : 'On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. Originally published in "The American Journal of Science", N° 203 November 1887 (Editors James D. and Edward S. Dana ; associated editors : Prof. A. Gray, J. P. Cooke and J. Trowbridge, of Cambridge, Prof. H.A. Newton and A. E. Verrill of New Haven ; Prof. G. F. Barker of Philadelphia. Third series, Vol. XXXIV.- (Whole number, CXXXIV.)

[08] Mécanique des particules, champs : R. Lennuier, P.-Y. Gal, D. Perrin ; Collection U., © Librairie Armand Colin, Paris 1970.

[09] Manuscrit de 1864.

[10] Fliessbach, T. : Allgemeine Relativitätstheorie, ISBN 3-8274-1356-7, 4. Auflage, 343 p. © Copyright Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin (2003).

[11] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson et Cie éditeurs, Paris (1955), 298 p.

[12] Cartan, E. : Sur les équations de la gravitation d'Einstein ; extrait du journal de mathématiques, 1922, Fasc. numéro 2, 74 p. édité par Gauthier-Villars et Cie, libraires du bureau des longitudes de l'école Polytechnique, Paris (1922).

[13] Limits on neutrinos Lorentz violations from multi-messengers ; observation from TXS 0506+056 ; arXiv :1807.05155v1 [astro-ph. HE], 13 July 2018.

[14] Cartan, Elie. Les espaces métriques fondés sur la notion de d'aire dans "Actualités scientifiques et industrielles", numéro 72, exposés de géométrie publiés sous la direction de monsieur Elie Cartan, membre de l'institut et professeur à la Sorbonne ; Paris, Hermann et Cie, éditeurs, 1933.

[15] Mécanique quantique I ; Cohen-Tanoudji, B. Diu et Fr. Lalöe ; 1977, 2 tomes.

7 Remerciements.

Etant ancien élève des classes préparatoires aux grandes écoles (mathématiques supérieures et spéciales section P' de l'école Sainte-Geneviève, Versailles, en 1974-1975), retraité de l'art dentaire (doctorat d'état en chirurgie dentaire, Paris, 1982 ; certificat en radioprotection dentaire sur la période 2007-2022) et autodidacte dans le domaine de la physique mathématique que j'étudie désormais par passion, je prie le lectorat de faire preuve d'un sens critique aigu lorsqu'il parcourt mes documents. Je remercie chaleureusement tous les auteurs acceptant, comme moi, de mettre leurs travaux à libre disposition du public. Vos commentaires éclairés seront toujours bien venus.