La méthode intrinsèque en dimension trois.
Collection : “La Théorie de la Question (E)”

©Thierry PERIAT.

16 janvier 2023

Partie I : Motivation physique, introduction à la problématique centrale de la question (E) et premières indications signalant un lien avec la notion de polarisation de la lumière.

Table des matières

1 Le problème posé : la question (E). 2
1.1 Brefs rappels historiques. 2
1.2 La motivation physique initiale. 2
1.3 Eléments nécessaires à la discussion mathématique. 8
1.4 La question (E) : énoncé. 10
1.5 La question (E) : sémantique. 10

2 Le théorème initial. 10
2.1 Dans les espaces de dimension trois. 10
2.2 Dans les espaces de dimension quelconque supérieure à deux. . . . 14

3 La question (E) en dimension deux. 15
3.1 Enoncé particulier du problème. 15
3.2 Le discriminant stratégique. 16
3.3 Le cas des cubes anti-symétriques sur leurs indices bas. 18
3.4 Caractérisation de la question (E) dans le cas des cubes anti-symétriques. 19
3.5 Commentaires. 20
3.6 Tentative d’application aux ondes EM planes. 22

4 Remerciements 23

5 Bibliographie 23
5.1 Articles, cours et livres. 23

1 Le problème posé : la question (E).

1.1 Brefs rappels historiques.

En 1865, J. C. Maxwell publie dans [01] une synthèse des travaux concernant les champs électromagnétiques (EM). Elle livre en particulier pour les régions vides de matière deux ensembles de relations qu'il est aujourd'hui possible d'exprimer :

1. soit dans un contexte cartésien quasiment classique sous forme vectorielle dans l'espace noté ici conventionnellement $\mathbb{C} \otimes \mathrm{E}(3, \mathbb{R})$ et devant être compris comme espace vectoriel de dimension trois bâti sur le corps commutatif des nombres réels $\mathbb{R}$ dont les éléments ont des composantes dans le corps commutatif des nombres complexes $\mathbb{C}$ [02] :
$$div_{\mathbf{x}}\mathbf{E} = 0,\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mathbf{rot_x E}$$
$$div_{\mathbf{x}}\mathbf{H} = 0,\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{rot_x H}$$
En cohérence avec la perception de l'espace communément acceptée à la fin du dix-neuvième siècle, le temps, t, apparait ici comme un simple paramètre réel. Les contemporrains de Maxwell percoivent intuitivement le déroulement des processus physiques à la manière dont elle sera formalisée plus précisément et dans cet autre contexte qu'est celui de la théorie de la relativité générale dans les années 1960 par le trio américain Arnowitt, Deser et Misner [03], [04], [05] ; c'est-à-dire : comme une sorte d'empilement des instants présents au sein d'une chronologie linéaire allant du passé vers le futur.

   La prédominance de cette démarche s'explique autant par son côté intuitif naturel que par le fait qu'A. Einstein n'a pas encore publié les fruits de ses réflexions sur l'électrodynamique des corps en mouvement (la relativité dite restreinte) ; il ne le fera qu'une quarantaine d'années plus tard [06 ; 1905] et les lecteurs anglophones en découvriront la substance dans [07 ; §2, pp.1-34]. Le lectorat francophone peut en découvrir les contenus dans [08].

   Les équations de Maxwell pour les régions vides fondent tout un pan de la recherche physique baptisé *étude de la dualité électromagnétique* au simple motif que la transposition (**E**, **H**) → (**H**, -**E**) n'en modifie pas le formalisme.
2. soit au sein de la théorie des tenseurs.
3. soit dans le langage des formes bilinéaires ; elle est assez exhaustivement exposée dans [03].

1.2 La motivation physique initiale.

Proposition 1.1. *Les régions assimilables à ce qu'il convient d'appeler des « vides de Maxwell » peuvent être le siège de densités volumiques de forces.*

Il est aisé de parvenir à cette conclusion en introduisant les produits vectoriels classiques (non déformés) décomposés trivialement dans les équations de l'électromagnétisme (EM) établies par J. C. Maxwell en 1865 pour les espaces vides sans source [01]. Une analyse de l'expression trouvée montre qu'elle contient des forces de polarisations exprimées dans l'espace mathématique dual de l'espace vectoriel C ⊗ E(3, R).

Démonstration. Je commence cette discussion dans un contexte qui pourrait être celui de la fin du dix-neuvième siècle, avant la publication des travaux d'A. Einstein [09-a et b]. Non que j'en ignore le contenu et les conséquences, mais plus exactement que je souhaite démontrer le côté paradoxal du résultat qui va être atteint.

Comme je l'ai déjà dit, le monde occidental de la fin du dix-neuvième siècle appuie sa représentation de notre environnement en pratiquant, naturellement et presqu'inconsciemment, une partition de l'espace-temps d'une manière s'apparentant à une démarche qui apparaitra bien plus tard au sein de l'analyse de la théorie de la relativité générale ; elle est dite : ADM [04] ou 3 + 1 [05].

A cette époque, l'espace vide est donc de dimension trois rapporté à une géométrie euclidienne ; il est vide de masse et de charge électrique mais il y existe un champ EM régi par les lois de J. C. Maxwell. Le temps est un simple paramètre précisant la chronologie locale des évènements. La densité volumique d'énergie EM locale est réputée être donnée par la relation [02], [10] :

$$\rho = \frac{1}{2} . (\epsilon_0 . \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} . \mathbf{H}^2) \tag{1}$$

Dans un espace euclidien classique, un certain nombre de concepts mathématiques simples sont connus (dérivations ordinaires, etc.) et il est possible de réécrire cette densité :

$$\rho = \frac{1}{2} . (\epsilon_0 . < \mathbf{E}, \mathbf{E} >_{Id_3} + \frac{1}{\mu_0} . < \mathbf{H}, \mathbf{H} >_{Id_3})$$

... en précisant que le symbole $<\ldots, \ldots>_{Id3}$ représente le produit scalaire euclidien qui y est habituellement défini et utilisé. Une dérivation ordinaire par rapport au temps fournit :

$$\frac{d\rho}{dt} = \epsilon_0 . < \mathbf{E}, \frac{d\mathbf{E}}{dt} >_{Id_3} + \frac{1}{\mu_0} . < \mathbf{H}, \frac{d\mathbf{H}}{dt} >_{Id_3}$$

Les lois établies par J. C. Maxwell pour ce genre d'environnement autorisent à pousser la transformation un cran plus loin avec :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{\mu_0} . \{< \mathbf{E}, \mathbf{rot_x H} >_{Id_3} - < \mathbf{H}, \mathbf{rot_x E} >_{Id_3}$$

Ce qu'une identité remarquable permet de simplifier en :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{1}{\mu_0} . div_{\mathbf{x}}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} + \mathbf{rot_x X})$$

Le vecteur **X** n'a pas, à ce stade, de signification physique bien identifiée ; il apparaît là pour satisfaire une nécessité mathématique et en ne changeant apparemment rien à la discussion puisque la divergence d'un rotationnel est nulle. Pour autant, cette relation définit spontanément une équation de continuité concernant la quantité vectorielle suivante dans laquelle le rotationnel de ce vecteur inconnu n'a aucune raison de disparaitre :

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} . (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} + \mathbf{rot_x X}) \tag{2}$$

Le premier terme placé à droite de l'égalité est connu sous le nom de *vecteur de Poynting*, souvent noté : **S** ; il indique la direction dans laquelle l'energie EM se déplace. A cause de la nécessaire cohérence des unités physiques impliquées dans cette relation, le rotationnel du vecteur **X** correspond forcément à un certain type de courant énergétique dont la nature échappe pour l'instant à notre compréhension.

Quoiqu'il en soit, le contexte initial de cette démonstration a permis de définir une équation de continuité :

$$\frac{d\rho}{dt} = -div(\mathbf{J}) \tag{3}$$

Le terme de droite dans la relation précédente est la limite du flux de la grandeur vectorielle **J** sortant de la surface entourant n'importe quel point P de l'espace vide étudié ici, lorsque le volume limité par cette surface tend vers zéro. Le terme de gauche donne la variation de densité volumique d'énergie EM au point P au cours du temps lorsque celle-ci est mesurée sur un intervalle de temps tendant vers zéro. L'équation prise dans sa globalité peut se laisser interpréter comme une équation de continuité relative à la grandeur physique ρ définie en P.

Je continue maintenant le travail en dérivant l'expression du courant EM obtenu précédemment par rapport au temps :

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{1}{\mu_0} . (\frac{d\mathbf{E}}{dt} \wedge \mathbf{H} + \mathbf{E} \wedge \frac{d\mathbf{H}}{dt} + \frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt})$$

J'y réinjecte une fois de plus les équations de Maxwell définies dans le vide pour obtenir :

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0 . \mu_0^2} . \mathbf{rot_x H} \wedge \mathbf{H} - \frac{1}{\mu_0} . \mathbf{E} \wedge \mathbf{rot_x E} + \frac{1}{\mu_0} . \frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt}$$

Mettant alors à profit l'isomorphisme mathématique existant entre l'espace vectoriel $\mathbb{C} \otimes \mathrm{E}(3, \mathbb{R})$ et sa représentation duale dans $\mathrm{M}(3, \mathbb{C})$:

$$\mathbf{q}_1 \in E(3, C) \rightarrow \left| \begin{matrix} {}_1q^1 \\ {}_1q^2 \\ {}_1q^3 \end{matrix} \right\rangle \in C^3 \rightarrow {}_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_1) = \begin{bmatrix} 0 & -{}_1q^3 & {}_1q^2 \\ {}_1q^3 & 0 & -{}_1q^1 \\ -{}_1q^2 & {}_1q^1 & 0 \end{bmatrix}$$

... je réécris cette relation vectorielle dans l'espace dual en utilisant les notations symboliques dûes à Dirac [1] :

$$|\frac{d\mathbf{J}}{dt}> = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0^2} \cdot |\mathbf{rot_x H} \wedge \mathbf{H}> + \frac{1}{\mu_0} \cdot |\mathbf{rot_x E} \wedge \mathbf{E}> + \frac{1}{\mu_0} \cdot |\frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt}>$$

La matrice que je nommerai par la suite de type ΦI est la plus triviale des décompositions d'un produit vectoriel classique puisqu'elle peremt d'écrire :

$$\forall\,(\mathbf{q}_1,\,\mathbf{q}_2)\;:\;|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2> = {}_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_1)\,.\,|\mathbf{q}_2>$$

L'application de ces considérations mathématiques très générale au contexte physique examiné ici fournit :

$$|\frac{d\mathbf{J}}{dt}> = \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0^2} \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{rot_x H})\,.\,|\mathbf{H}> + \frac{1}{\mu_0} \cdot {}_{[J]}\Phi(\mathbf{rot_x E})\,.\,|\mathbf{E}> + \frac{1}{\mu_0} \cdot |\frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt}> \tag{4}$$

Définition 1.1. *Jacobiennes.*

J'introduis ici un ensemble de tables de Pythagore particulières bâties sur la composition des fonctions, le gradient classique d'une fonction et les composantes d'un quelconque vecteur :

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{a}},\,\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial b^1}{\partial a^1} & \frac{\partial b^1}{\partial a^2} & \frac{\partial b^1}{\partial a^3} \\ \frac{\partial b^2}{\partial a^1} & \frac{\partial b^2}{\partial a^2} & \frac{\partial b^2}{\partial a^3} \\ \frac{\partial b^3}{\partial a^1} & \frac{\partial b^3}{\partial a^2} & \frac{\partial b^3}{\partial a^3} \end{bmatrix}$$

et j'en profite pour remarquer deux propriétés simples de ces tables :

$$Trace\{T_2(o)(\partial_{\mathbf{a}},\,\mathbf{b})\} = div_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$$

$$T_2(o)(\partial_{\mathbf{a}},\,\mathbf{b}) - T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{a}},\,\mathbf{b}) = {}_{[J]}\Phi(\mathbf{rot_a b})$$

L'injection de ces informations généralistes dans le cadre de la démonstration en cours fournit alors :

$$\begin{gathered} |\frac{d\mathbf{J}}{dt}> \\ = \\ \frac{1}{\epsilon_0 \cdot \mu_0^2} \cdot \{T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\,\mathbf{H}) - T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{x}},\,\mathbf{H})\}\,.\,|\mathbf{H}> \\ + \\ \frac{1}{\mu_0} \cdot \{T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\,\mathbf{E}) - T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{x}},\,\mathbf{E})\}\,.\,|\mathbf{E}> \\ + \\ \frac{1}{\mu_0} \cdot |\frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt}> \end{gathered} \tag{5}$$

1. Elles sont couramment employées en mécanique quantique.

En tenant compte de la relation bien connue liant permittivité électrique, perméabilité magnétique et vitesse de la lumière dans le vide :

$$\epsilon_0 \,.\, \mu_0 \,.\, c^2 \,=\, 1 \tag{6}$$

et du fait qu'il est aisé de démontrer à partir des dérivations partielles de l'Equ.(1) :

$$\partial_{\mathbf{x}}\rho \,=\, \epsilon_0 \,.\, T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{x}},\, \mathbf{E}) \,.\, |\mathbf{E}> \,+\, \frac{1}{\mu_0} \,.\, T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{x}},\, \mathbf{H}) \,.\, |\mathbf{H}> \tag{7}$$

La démonstration s'achève sur une expression dont l'analyse des unités physiques y étant impliquées montre qu'elle décrit une densité volumique de force dont les deux premiers termes s'identifient facilement à une polarisation électromagnétique du vide :

$$|\frac{d\mathbf{F}}{d\tau}> \tag{8}$$
$$=$$
$$\frac{1}{c^2} \,.\, |\frac{d\mathbf{J}}{dt}>$$
$$=$$
$$\underbrace{\epsilon_0 \,.\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\, \mathbf{E}) \,.\, |\mathbf{E}> \,+\, \frac{1}{\mu_0} \,.\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}},\, \mathbf{H}) \,.\, |\mathbf{H}>}_{Polarisation\, EM} -\, \partial_{\mathbf{x}}\rho \,+\, \epsilon_0 \,.\, |\frac{d\mathbf{rot_x X}}{dt}>$$

□

Je viens de démontrer qu'en absence de sources matérielles (masses) et électromagnétiques (charges), dans les conditions caractérisant les espaces temps vides tels que ceux-ci pouvaient être conçus à la fin du dix-neuvième siècle par J. C. Maxwell et ses contemporrains, il peut exister une densité volumique (tridimensionnelle) de force non-nécessairement nulle.

Remarque 1.1. *Commentaires.*

Sur le plan technique, cette force apparaît essentiellement grâce à l'usage de :

1. l'expression admise pour la densité volumique d'énergie EM dans le vide : Equ.(1) ;
2. l'usage de dérivations partielles ou ordinaires ;
3. l'utilisation des équations de J. C. Maxwell ;
4. l'introduction de la notion de décomposition triviale d'un produit vectoriel dans l'espace dual de l'espace $\mathbb{C} \otimes \mathrm{E}(3,\, \mathbb{R})$.

Cette force exhibe trois composantes :

1. une force de polarisation électromagnétique :

$$\epsilon_0 \, . \, T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{E}) \, + \, \frac{1}{\mu_0} \, . \, T_2(o)(\partial_{\mathbf{x}}, \, \mathbf{H})$$

   L'explication de son existence dans une région supposée vide de sources doit se chercher du côté des conséquences d'un phénomène lointain et la tentation est donc grande de vouloir y reconnaitre la signature du fond diffus cosmologique (le CMB dans la littérature anglo-saxonne).

   Une de ses nombreuses composantes est mesurée une première fois en 1941 par Andrew MacKellar [11 ; p. 131] et (re)découverte expérimentalement [2] par hasard en 1964 grâce à l'usage d'un radiomètre par les physiciens américains Arno Allan Panzias et Robert Woodrow Wilson ; ce qui a valu à ces derniers le prix Nobel de physique en 1978.

   Une connaissance complète de ce fond diffus exige le recencement et l'étude de toutes les autres composantes (du spectre électromagnétique et gravitationnel). Les projets BAO (étude des oscillations acoustiques), COBE et WMAP ont permis de mieux interpréter les signaux qui nous parviennent ; en particulier, de repérer des anisotropies : (Smoot et al. 1992), [12 ; §6.3].

2. un gradient spatial de la densité volumique d'énergie EM :

$$-\partial_{\mathbf{x}}\rho$$

   (a) Connaissant la relation d'équivalence "masse - énergie" établie à partir des considérations de la relativité restreinte [08],

   (b) sachant que l'énergie a une tendance naturelle à se dégrader au cours des processus physiques (augmentation de l'entropie et pertes par divers processus : freinage, dissipation, échanges, etc.),

   (c) prenant en considération le principe de Mach [13 ; p. 4],

   sa présence dans l'Equ.(8) a peut-être un lien avec l'ensemble des interférences entre champs et particules se déroulant dans l'univers.

3. une force dont l'interprétation physique est encore incertaine découlant des dérivations partielles par rapport au temps d'un rotationnel (tenseur tourbillon) :

$$\epsilon_0 \, . \, \frac{d\mathbf{rot}_{\mathbf{x}}\mathbf{X}}{dt}$$

2. Voir la très intéressante progression des idées et des expériences ayant mené à un consensus sur l'existence de ce fond ; par exemple dans les présentations pédagogiques proposées sur Wikipédia.

La démarche technique mise en œuvre peut se généraliser en ce sens que le produit vectoriel classique pourrait être déformé et que les décompositions de celui-ci pourraient être non-triviales.

C'est la raison pour laquelle, je pars du principe que ces densités volumiques de force existent dans les régions en moyenne vides de l'univers et qu'il semble raisonnable de vouloir étudier de manière systématique les déformations des produits vectoriels ainsi que leurs décompositions. Ce soucis justifie de poser ce que je nomme désormais dans la suite de mes exposés : *La question (E).*

1.3 Eléments nécessaires à la discussion mathématique.

Définition 1.2. ***Produit tensoriel déformé***

Soit E(D, K) un espace vectoriel de dimension entière D supérieure ou égale à deux (D $\geq$ 2) bâti sur le corps commutatif K (nota bene : il s'agira par la suite soit de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, soit de celui des nombres complexes $\mathbb{R}$) rapporté a sa base canonique Ω : $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_\alpha, ..., \mathbf{e}_{D-1})$; soit deux vecteurs quelconques de cet espace et enfin soit un cube d'éléments de K, noté A, je dis que le produit tensoriel habituel de ces deux vecteurs a été déformé par les éléments du cube A chaque fois que je peux calculer le nouveau vecteur :

$$\forall\,(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, E(D,\,K) \times E(D,\,K) \xrightarrow{\otimes_A} \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, A^k_{ij} \cdot q^i_1 \cdot q^j_2 \cdot \mathbf{e}_k \,\in\, E(D,\,K)$$

Définition 1.3. ***Produit alterné déformé.***

Dans les mêmes conditions que celles qui viennent d'être exposées, le produit dit alterné des deux vecteurs précédents est, par dévfinition le nouveau vecteur :

$$\forall\,(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, E^2(D,\,K) \;:$$

$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,-\, \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) \,=\, A^k_{ij} \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 \,-\, q^i_2 \cdot q^j_1) \cdot \mathbf{e}_k$$

Les composantes de ce produit alterné se laissent toujours décomposer en trois sous-ensembles :

$$\{\sum_{i<j} A^k_{ij} \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 - q^i_2 \cdot q^j_1)\} + \{\sum_{i=j} A^k_{ij} \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 - q^i_2 \cdot q^j_1)\} + \{\sum_{i>j} A^k_{ij} \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 - q^i_2 \cdot q^j_1)\}$$

De sorte que, si K est supposé être un corps commutatif : (i) le second terme de la somme précédente s'annule et (ii) puisque la série des termes suivants apparait :

$$A^k_{12} \cdot (q^1_1 \cdot q^2_2 \,-\, q^1_2 \cdot q^2_1)\,;\; A^k_{21} \cdot (q^2_1 \cdot q^1_2 \,-\, q^2_2 \cdot q^1_1)$$

$$A^k_{1j} \cdot (q^1_1 \cdot q^j_2 \,-\, q^1_2 \cdot q^j_1)\,;\; A^k_{j1} \cdot (q^j_1 \cdot q^1_2 \,-\, q^j_2 \cdot q^1_1)$$

$$A^k_{1D} \cdot (q^1_1 \cdot q^D_2 \,-\, q^1_2 \cdot q^D_1)\,;\; A^k_{D1} \cdot (q^D_1 \cdot q^1_2 \,-\, q^D_2 \cdot q^1_1)$$

etc.

Finalement :

$$\forall\, A,\, \forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, E^2(D,\, K) \,:\, \wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \sum_{i<j} (A_{ij}^k - A_{ji}^k) \,.\, (q_1^i \,.\, q_2^j - q_2^i \,.\, q_1^j) \,.\, \mathbf{e}_k$$

Le résultat de ce calcul est toujours un élément de l'espace vectoriel de départ : E(D, K). Chacune de ses D composantes est une somme de 1 + 2 + ... + (D - 1) = D.(D - 1)/2 termes ; au lieu des D^2 termes contenus dans chacune des D composantes du produit tensoriel déformé l'ayant généré.

Exemple 1.1. ***Dans un espace vectoriel de dimension trois***

Dans ce cas particulier :

$$\forall\, A,\, \forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, E^2(3,\, K) \,:\, \wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \sum_{i<j} (A_{ij}^k - A_{ji}^k) \,.\, (q_1^i \,.\, q_2^j - q_2^i \,.\, q_1^j) \,.\, \mathbf{e}_k$$

Chaque composante est une somme de trois termes [3] ; au lieu des neuf termes de chaque composante du produit tensoriel déformé l'ayant généré. Ce nouveau vecteur est en quelque sorte une version déformée du produit extérieur de deux vecteurs de E(3, K).

Remarque 1.2. ***Sur les cubes symétriques***

Tous les produits alternés déformés bâtis sur des cubes symétriques sont évidemment nuls.

Remarque 1.3. ***Sur l'existence des cubes antisymétriques***

Tout cube A contient un cube B anti-symétrique sur ses indices bas.

$$\forall\, A \,:$$

$$\exists\, B \,:\, (i)\, B_{ij}^k \,=\, A_{ij}^k \,-\, A_{ji}^k \,;\, (ii)\, B_{ji}^k \,=\, A_{ji}^k \,-\, A_{ij}^k \,=\, -(A_{ij}^k \,-\, A_{ji}^k) \,=\, -B_{ij}^k$$

Définition 1.4. ***Produit de Lie déformé***

Soit E(D, K) un espace vectoriel de dimension entiere D supérieure ou égale a deux (D $\geq$ 2) rapporté a sa base canonique Ω : ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_\alpha$, ..., $\mathbf{e}_{D-1}$) ; soit deux vecteurs quelconques de cet espace et enfin soit un cube d'éléments de K, anti-symétrique sur ses indices bas noté A ; je dis que le produit de Lie habituel de ces deux vecteurs a été déformé par les éléments du cube A chaque fois que je peux calculer le nouveau vecteur :

$$\forall\, A \,:\, A_{ji}^k \,+\, A_{ij}^k \,=\, 0,\, \forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, E^2(D,\, K) \,:$$

$$[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_A \,=\, \frac{1}{2} \,.\, \wedge_A\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \sum_{i<j} A_{ij}^k \,.\, (q_1^i \,.\, q_2^j \,-\, q_2^i \,.\, q_1^j) \,.\, \mathbf{e}_k$$

3. D = 3 $\rightarrow$ D.(D - 1)/2 = 3.

1.4 La question (E) : énoncé.

Soit E(D, K) un espace vectoriel de dimension entiere D supérieure ou égale a deux (D $\geq$ 2) rapporté a sa base canonique Ω : ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_\alpha$, ..., $\mathbf{e}_{D-1}$) ; soit deux vecteurs quelconques de cet espace et enfin soit un cube d'éléments de K, anti-symétrique sur ses indices bas noté A ; la question posée est celle de savoir si et quand il existe des paires (**z**, [P]) de $\mathbb{C}$ × E(D, $\mathbb{C}$) × M(D, $\mathbb{C}$) telles que :

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in E(D, \mathbb{C}) \times E(D, \mathbb{C}) : |[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_A >= [P] . |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

1.5 La question (E) : sémantique.

Quelles que soient les réponses à la question posée, je décide d'introduire le vocabulaire intuitif suivant. Il facilitera l'exposé littéraire et la compréhension des manipulations mathématiques qui seront réalisées tout en plaçant celles-ci dans le contexte connu de la notion de division ; au détail important près qu'il s'agira ici de diviser des vecteurs et non plus des nombres isolés.

$$|[\underbrace{\mathbf{q}_1}_{projectile}, \mathbf{q}_2]_A >= [P] . |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

$$|[\mathbf{q}_1, \underbrace{\mathbf{q}_2}_{cible}]_A >= [P] . |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]\underbrace{A}_{cube\, dformant} >= [P] . |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_A >= \underbrace{[P]}_{partie\, principale} . |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_A >= [P] . |\mathbf{q}_2 > + |\underbrace{\mathbf{z}}_{reste} >$$

2 Le théorème initial.

2.1 Dans les espaces de dimension trois.

Proposition 2.1. *A tout produit de Lie déformé calculé dans un espace de dimension trois pouvant être décomposé non-trivialement peut être associé une forme polynômiale de degré deux au plus écrite en fonction de trois composantes du projectile.*

Démonstration. Par définition, un produit de Lie déformé l'est forcément par un cube anti-symétrique ; dans un espace de dimension trois, ce type de cubes se laisse concentrer sous la forme d'une matrice [A] de M(3, $\mathbb{C}$) et cette proposition affirme donc :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E(3, \mathbb{C}) \times E(3, \mathbb{C}) : |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]} >= [P] . |\mathbf{b} > + |\mathbf{z} >$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \Lambda(a^1, a^2, a^3) \in P(3, 2)$$

...

oú, par convention, P(3, 2) représente symboliquement l'ensemble des formes polynomiales de degré deux impliquant les composantes d'un élément d'un espace vectoriel de dimension trois.

Je suppose que la décomposition non-triviale existe a priori. Le système qui en résulte ressemble furieusement à un très banal système de trois combinaisons linéaires écrites en fonction des composantes de la cible **b**.

Bien que la question (E) ne consiste pas ici à découvrir les valeurs des composantes de la cible mais la ou les paire(s) possibles ([P], **z**), il semble raisonnable de vouloir calculer le discriminant (que je qualifierai de stratégique) de ce système. Jusqu'à preuve du contraire (et ce sera effectivement le cas), je m'attends à trouver une polynomiale de degré trois écrite en fonction des composantes du projectile **a** puisque :

$$\Lambda(\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} A^1_{m1} \,.\, a^m - p_{11} & A^1_{m2} \,.\, a^m - p_{12} & A^1_{m3} \,.\, a^m - p_{13} \\ A^2_{n1} \,.\, a^n - p_{21} & A^2_{n2} \,.\, a^n - p_{22} & A^2_{n3} \,.\, a^n - p_{23} \\ A^3_{p1} \,.\, a^p - p_{31} & A^3_{p2} \,.\, a^p - p_{32} & A^3_{p3} \,.\, a^p - p_{33} \end{vmatrix}$$

Cependant, un premier développement fournit :

$$\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3)$$

$$=$$

$$(A^1_{m1} \,.\, a^m - p_{11}) \,.\, \{(A^2_{n2} \,.\, a^n - p_{22}) \,.\, (A^3_{p3} \,.\, a^p - p_{33}) - (A^3_{p2} \,.\, a^p - p_{32}) \,.\, (A^2_{n3} \,.\, a^n - p_{23})\}$$

$$-$$

$$(A^1_{m2} \,.\, a^m - p_{12}) \,.\, \{(A^2_{n1} \,.\, a^n - p_{21}) \,.\, (A^3_{p3} \,.\, a^p - p_{33}) - (A^3_{p1} \,.\, a^p - p_{31}) \,.\, (A^2_{n3} \,.\, a^n - p_{23})\}$$

$$+$$

$$(A^1_{m3} \,.\, a^m - p_{13}) \,.\, \{(A^2_{n1} \,.\, a^n - p_{21}) \,.\, (A^3_{p2} \,.\, a^p - p_{32}) - (A^3_{p1} \,.\, a^p - p_{31}) \,.\, (A^2_{n2} \,.\, a^n - p_{22})\}$$

Dans un deuxième temps :

$$\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3)$$

$$=$$

$$(A^1_{m1} \,.\, a^m - p_{11}) \,.$$

$$\{(A^2_{n2} \,.\, A^3_{p3} - A^2_{n3} \,.\, A^3_{p2}) \,.\, a^n \,.\, a^p + [(p_{23} \,.\, A^3_{n2} + p_{32} \,.\, A^2_{n3}) - (p_{22} \,.\, A^3_{n3} + p_{33} \,.\, A^2_{n2})] \,.\, a^n + (p_{22} \,.\, p_{33} - p_{32} \,.\, p_{23})\}$$

$$-$$

$$(A^1_{m2} \,.\, a^m - p_{12}) \,.$$

$$\{(A^2_{n1} \,.\, A^3_{p3} - A^2_{n3} \,.\, A^3_{p1}) \,.\, a^n \,.\, a^p + [(p_{23} \,.\, A^3_{n1} + p_{31} \,.\, A^2_{n3}) - (p_{21} \,.\, A^3_{n3} + p_{33} \,.\, A^2_{n1})] \,.\, a^n + (p_{21} \,.\, p_{33} - p_{31} \,.\, p_{23})\}$$

$$+$$

$$(A^1_{m3} \,.\, a^m - p_{13}) \,.$$

$$\{(A^2_{n1} \,.\, A^3_{p2} - A^2_{n2} \,.\, A^3_{p1}) \,.\, a^n \,.\, a^p + [(p_{22} \,.\, A^3_{n1} + p_{31} \,.\, A^2_{n2}) - (p_{21} \,.\, A^3_{n2} + p_{32} \,.\, A^2_{n1})] \,.\, a^n + (p_{21} \,.\, p_{32} - p_{22} \,.\, p_{31})\}$$

...

Les coefficients de degré trois peuvent ainsi être isolés :

$$d_{mnp} = A^1_{m1} . (A^2_{n2} . A^3_{p3} - A^2_{n3} . A^3_{p2}) - A^1_{m2} . (A^2_{n1} . A^3_{p3} - A^2_{n3} . A^3_{p1}) + A^1_{m3} . (A^2_{n1} . A^3_{p2} - A^2_{n2} . A^3_{p1})$$

Trois sortes de combinaisons des indices peuvent apparaitre : (i) ils sont tous égaux, (ii) deux sont égaux mais diffèrent du troisième (iii) les trois diffèrent les uns des autres.

1. **Configuration (i)** Il s'agit de :

$$d_{111} = A^1_{11} . (A^2_{12} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{12}) - A^1_{12} . (A^2_{11} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{11}) + A^1_{13} . (A^2_{11} . A^3_{12} - A^2_{12} . A^3_{11})$$

$$d_{222} = A^1_{21} . (A^2_{22} . A^3_{23} - A^2_{23} . A^3_{22}) - A^1_{22} . (A^2_{21} . A^3_{23} - A^2_{23} . A^3_{21}) + A^1_{23} . (A^2_{21} . A^3_{22} - A^2_{22} . A^3_{21})$$

$$d_{333} = A^1_{31} . (A^2_{32} . A^3_{33} - A^2_{33} . A^3_{32}) - A^1_{32} . (A^2_{31} . A^3_{33} - A^2_{33} . A^3_{31}) + A^1_{33} . (A^2_{31} . A^3_{32} - A^2_{32} . A^3_{31})$$

A cause de l'anti-symétrie du cube A :

$$d_{111} = d_{222} = d_{333} = 0$$

2. **Configuration (ii)** Soit, à titre d'exemple la combinaison (112), les coefficients sont :

$$d_{112} = A^1_{11} . (A^2_{12} . A^3_{23} - A^2_{13} . A^3_{22}) - A^1_{12} . (A^2_{11} . A^3_{23} - A^2_{13} . A^3_{21}) + A^1_{13} . (A^2_{11} . A^3_{22} - A^2_{12} . A^3_{21})$$

$$d_{121} = A^1_{11} . (A^2_{22} . A^3_{13} - A^2_{23} . A^3_{12}) - A^1_{12} . (A^2_{21} . A^3_{13} - A^2_{23} . A^3_{11}) + A^1_{13} . (A^2_{21} . A^3_{12} - A^2_{22} . A^3_{11})$$

$$d_{211} = A^1_{21} . (A^2_{12} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{12}) - A^1_{22} . (A^2_{11} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{11}) + A^1_{23} . (A^2_{11} . A^3_{12} - A^2_{12} . A^3_{11})$$

A cause de l'anti-symétrie des composantes du cube A :

$$d_{112} = -A^1_{12} . (-A^2_{13} . A^3_{21}) + A^1_{13} . (-A^2_{12} . A^3_{21})$$

$$d_{121} = -A^1_{12} . (A^2_{21} . A^3_{13}) + A^1_{13} . (A^2_{21} . A^3_{12})$$

$$d_{211} = A^1_{21} . (A^2_{12} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{12})$$

Puisque la multiplication est une opération commutative et associative sur $\mathbb{C}$, l'addition des autres coefficients devient :

$$d_{112} + d_{121} + d_{211}$$

$$=$$

$$-A^1_{12} . (-A^2_{13} . A^3_{21}) + A^1_{13} . (-A^2_{12} . A^3_{21})$$
$$-A^1_{12} . (A^2_{21} . A^3_{13}) + A^1_{13} . (A^2_{21} . A^3_{12})$$
$$+A^1_{21} . (A^2_{12} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{12})$$

$$=$$

$$-A^1_{12} . (A^2_{13} . A^3_{12}) + A^1_{13} . (A^2_{12} . A^3_{12}) + A^1_{12} . (A^2_{12} . A^3_{13})$$
$$-A^1_{13} . (A^2_{12} . A^3_{12}) - A^1_{12} . (A^2_{12} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{12})$$

$$=$$

$$0$$

Les permutations cycliques fournissent le même résultat pour les combinaisons (113), (221), (223), (331), (332).

3. **Configuration (iii)** Soit, pour l'exemple, le cas particulier de la combinaison (123) ; les coefficients sont :

$$\begin{aligned}
d_{123} &= A^1_{11} . (A^2_{22} . A^3_{33} - A^2_{23} . A^3_{32}) - A^1_{12} . (A^2_{21} . A^3_{33} - A^2_{23} . A^3_{31}) + A^1_{13} . (A^2_{21} . A^3_{32} - A^2_{22} . A^3_{31}) \\
d_{312} &= A^1_{31} . (A^2_{12} . A^3_{23} - A^2_{13} . A^3_{22}) - A^1_{32} . (A^2_{11} . A^3_{23} - A^2_{13} . A^3_{21}) + A^1_{33} . (A^2_{11} . A^3_{22} - A^2_{12} . A^3_{21}) \\
d_{231} &= A^1_{21} . (A^2_{32} . A^3_{13} - A^2_{33} . A^3_{12}) - A^1_{22} . (A^2_{31} . A^3_{13} - A^2_{33} . A^3_{11}) + A^1_{23} . (A^2_{31} . A^3_{12} - A^2_{32} . A^3_{11}) \\
d_{321} &= A^1_{31} . (A^2_{22} . A^3_{13} - A^2_{23} . A^3_{12}) - A^1_{32} . (A^2_{21} . A^3_{13} - A^2_{23} . A^3_{11}) + A^1_{33} . (A^2_{21} . A^3_{12} - A^2_{22} . A^3_{11}) \\
d_{132} &= A^1_{11} . (A^2_{32} . A^3_{23} - A^2_{33} . A^3_{22}) - A^1_{12} . (A^2_{31} . A^3_{23} - A^2_{33} . A^3_{21}) + A^1_{13} . (A^2_{31} . A^3_{22} - A^2_{32} . A^3_{21}) \\
d_{213} &= A^1_{21} . (A^2_{12} . A^3_{33} - A^2_{13} . A^3_{32}) - A^1_{22} . (A^2_{11} . A^3_{33} - A^2_{13} . A^3_{31}) + A^1_{23} . (A^2_{11} . A^3_{32} - A^2_{12} . A^3_{31})
\end{aligned}$$

A cause de l'anti-symétrie du cube A :

$$\begin{aligned}
d_{123} &= -\, A^1_{12} . (-\, A^2_{23} . A^3_{31}) \;+\; A^1_{13} . (A^2_{21} . A^3_{32}) \\
d_{312} &= A^1_{31} . (A^2_{12} . A^3_{23}) \;-\; A^1_{32} . (-\, A^2_{13} . A^3_{21}) \\
d_{231} &= A^1_{21} . (A^2_{32} . A^3_{13}) \;+\; A^1_{23} . (A^2_{31} . A^3_{12}) \\
d_{321} &= A^1_{31} . (-\, A^2_{23} . A^3_{12}) \;-\; A^1_{32} . (A^2_{21} . A^3_{13}) \\
d_{132} &= -\, A^1_{12} . (A^2_{31} . A^3_{23}) \;+\; A^1_{13} . (-\, A^2_{32} . A^3_{21}) \\
d_{213} &= A^1_{21} . (-\, A^2_{13} . A^3_{32}) \;+\; A^1_{23} . (-\, A^2_{12} . A^3_{31})
\end{aligned}$$

Puisque la multiplication est une opération associative et commutative sur $\mathbb{C}$, l'addition des combinaisons obtenues par permutation cyclique et anti-cyclique fournit (voir les couleurs) :

$$d_{123} \,+\, d_{312} \,+\, d_{231} \,+\, d_{321} \,+\, d_{132} \,+\, d_{213} \,=\, 0$$

Puisque les coefficients comportant trois indices soit s'annulent, soit constituent des combinaisons s'annulant, il en découle le

Théorème 2.1. ***dit "initial"***

A tout produit de Lie déformé défini sur un espace vectoriel de dimension trois (D = 3) pouvant être décomposé non-trivialement correspond une forme polynômiale de degré deux écrite en fonction de trois composantes du projectile apparaissant dans ce produit. □

Corollaire 2.1. *Formalisme générique de la polynomiale associée à une décomposition non-triviale.*

Il est clair que ce théorème important permet de conclure à l'existence d'une forme polynomiale de P(3, 2) telle que :

$$\begin{gathered}
\exists\,(\mathbf{z},\,[P])\;:\;|[\mathbf{a},\mathbf{b}]_{[A]} >= [P]\,.\,|\mathbf{b} > +|\mathbf{z} > \\
\Downarrow \\
\exists \\
\Lambda(a^1,\,a^2,\,a^3) \\
= \\
|_{[A]}\Phi(\mathbf{a}) \,-\, [P]| \\
= \\
\sum_m d_{mm} \,.\, (a^m)^2 \,+\, \sum_{m\,<\,n} (d_{mn} \,+\, d_{nm}) \,.\, a^m \,.\, a^n \,+\, \sum_m d_m \,.\, a^m \,-\, |P|
\end{gathered}$$

et que la suite de l'exploration va consister à découvrir quelles paires ([P], **z**) peuvent raisonnablement être associées avec ces décompositions non-triviales.

2.2 Dans les espaces de dimension quelconque supérieure à deux.

Proposition 2.2. *Le degré du discriminant stratégique pour les produits de Lie déformés définis sur un espace vectoriel de dimension égale à D (D $\geq$ 2) est de dimension au plus égale à D - 1.*

Démonstration. : Pour rappel, dans la théorie de la question (E), les produits de Lie déformés sont des produits tensoriels alternés bâtis sur des cubes déformants anti-symétriques. Soit à reconsidérer alors le sujet des décompositions triviales des produits de Lie déformés ; il vient logiquement :

$$\forall A \in K^{-}_{(D-D-D)}, \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C} \otimes E(D, \mathbb{R}) : |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_A >= {}_A\Phi(\mathbf{a}) \,.\, |\mathbf{b}>$$

Mais ici, le cas de deux arguments égaux a une conséquence inattendue dûe à l'anti-symétrie du produit de Lie déformé :

$$\forall A \in K^{-}_{(D-D-D)}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{C} \otimes E(D, \mathbb{R}) : |[\mathbf{a}, \mathbf{a}]_A >= {}_A\Phi(\mathbf{a}) \,.\, |\mathbf{a}>= |\mathbf{0}>$$

Les décompositions triviales des *carrés de Lie déformés* n'ont de réalité cohérente que dans trois cas :

1. l'argument est nul : $\mathbf{a} = \mathbf{0}$;
2. le cube A est nul : A = 0 ;
3. le déterminant de la décomposition triviale est nul :

$$|{}_A\Phi(\mathbf{a})| = 0$$

Autrement dit, puisque les deux premiers cas sont parfaitement sans intérêt, les décompositions triviales des *carrés de Lie déformés* n'ont de réalité que si leur déterminant est nul :

$$\forall A \in K^{-}_{(D-D-D)} - \{A = 0\}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{C} \otimes E(D, \mathbb{R}) - \{\mathbf{0}\} : |{}_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{a})| = 0$$

Si le cube déformant était quelconque, alors la polynomiale $\Lambda({}^{(D)}\mathbf{a})$ serait forcément de degré au plus égal à D et elle prendrait la forme générique suivante (sommes sur les indices répétés) :

$$\Lambda({}^{(D)}\mathbf{u}) = c_{\alpha_1 \ldots \alpha_D} \,.\, u^{\alpha_1} \ldots . \,u^{\alpha_D} + \ldots + c_{\alpha_1\alpha_2} \,.\, u^{\alpha_1} \,.\, u^{\alpha_2} + c_{\alpha_1} \,.\, u^{\alpha_1} + c$$

Mais, pour rappel :

- La matrice de décomposition la plus triviale est le seul objet mathématique de la discussion sur le discriminant stratégique impliqué dans la résolution de la question (E) dont le déterminant est une forme multilinéaire de degré D pure.
- La présence de la matrice inconnue [P] ne fait que transformer cette forme multi-linéaire en une forme polynomiale par l'ajout de termes dont le degré est systématiquement inférieur à D ; ce constat laisse présumer du fait que :

$$ {}_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{u}) = [A^{\alpha}_{\chi\beta} \,.\, a^{\chi}] \Rightarrow |{}_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{a})| = c_{\alpha_1 \ldots \alpha_D} \,.\, u^{\alpha_1} \ldots . \,a^{\alpha_D}$$

...

— Il est aisé de démontrer que :

$$c = (-1)^D \, . \, |P|$$

Or je viens de démontrer que le déterminant d'une matrice associée à la décomposition triviale d'un produit de Lie déformé (par définition : forcément par un cube anti-symétrique sur ses indices bas est nul) doit être nul.

Il en résulte donc que le discriminant stratégique des décompositions non-triviales des produits de Lie déformés a le formalisme générique :

$$\Lambda({}^{(D)}\mathbf{a})$$

$$=$$

$$c_{\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}} \, . \, a^{\alpha_1} \, . \dots . \, a^{\alpha_{D-1}} \, + \, \dots \, + \, c_{\alpha_1 \alpha_2} \, . \, a^{\alpha_1} \, . \, a^{\alpha_2} \, + \, c_{\alpha_1} \, . \, a^{\alpha_1} \, + \, (-1)^D \, . \, |P|$$

C'est une forme polynomiale de degré D - 1, élément de P(D, D - 1). □

Théorème 2.2. *Généralisation du théorème initial.*

Pour les produits de Lie déformés calculés dans un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à deux, le discriminant stratégique accompagnant la question (E) est toujours une polynomiale de degré au plus égal à D - 1.

3 La question (E) en dimension deux.

3.1 Enoncé particulier du problème.

Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de deux et E(2, K) un espace vectoriel bâti sur ce corps.

Une extension de la question dite (E) à l'étude des décompositions des produits tensoriels déformés consisterait ici à savoir si l'image duale d'un produit tensoriel déformé par un cube A de $2^3 = 8$ éléments et agissant sur E(2, K) se laisserait décomposer, éventuellement non trivialement, de la façon suivante sur l'ensemble des matrices ayant deux lignes et une colonne d'éléments choisis arbitrairement dans K, $\mathrm{M}_K(2, 1) \equiv \mathbb{R}^2$:

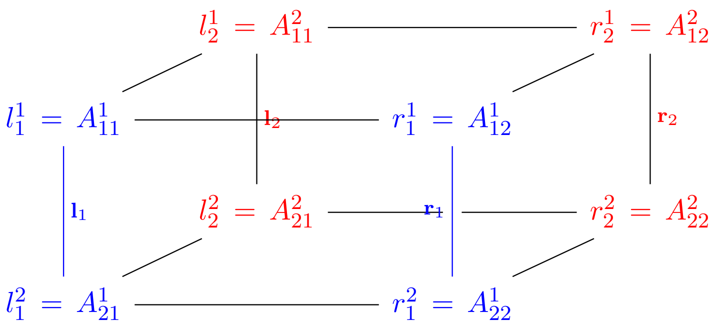
$$| \otimes_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) >= [P] \, . \, |\mathbf{q}_2 > \, + |\mathbf{z} > \in \, M_K(2, \, 1) \, \equiv \, \mathbb{R}^2$$

Dans le langage des composantes d'une base canonique ${}^{(2)}\Omega$: ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$), cette version extrapolée de la question (E) reviendrait à se demander ce que valent les paires ([P], $\mathbf{z}$) de M(2, K) × E(2, K) lorsque, dans le système suivant, seuls le cube A et les arguments $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$ sont connus.

$$A^k_{ij} \, . \, q^i_1 \, . \, q^j_2 \, = \, p_{kj} \, . \, q^j_2 \, + \, z^k \, ; \, i, \, j, \, k \, \in \, I_2 \, = \, \{1, \, 2\}$$

La manière dont la question est posée la distingue fondamentalement du problème de la résolution d'un système de deux équations linéaires écrites en fonction de deux inconnues qui seraient les composantes du vecteur $\mathbf{q}_1$ (respectivement du vecteur $\mathbf{q}_2$).

Remarque 3.1. *Aide à la visualisation de la notion de cube.*



3.2 Le discriminant stratégique.

Remarque 3.2. ***Existence.***

En dimension D = 2 (le cas étudié ici), comme dans le cas des espaces vectoriels de dimension D supérieure à deux, ce système peut tout de même s'écrire classiquement comme un ensemble de combinaisons linéaires des composantes de la cible (le vecteur $\mathbf{q}_2$).

$$(A_{ij}^k \, . \, q_1^i \, - \, p_{kj}) \, . \, q_2^j \, = \, z^k \, ; \, i, \, j, \, k \, \in \, I_2$$

Bien qu'il ne s'agisse pas ici de découvrir les composantes de la cible en fonction des autres données du problème, il reste utile de calculer le discriminant stratégique de ce système :

$$\Lambda(q_1^1, q_1^2) \, = \, |A_{ij}^k \, . \, q_1^i \, - \, p_{kj}| \, ; \, i, \, j, \, k \, \in \, I_2$$

Ici aussi, le discriminant stratégique peut se comprendre comme une mesure de la différence entre une décomposition triviale du produit tensoriel déformé par le cube A et une qui ne l'est pas.

Remarque 3.3. ***Calcul détaillé.***

Ce discriminant est un élément de $\mathrm{P}_K(2, \, 2)$, l'ensemble des formes polynomiales de degré deux agissant sur l'ensemble des projectiles de E(2, K) ; en effet, il vient in extenso :

$$\Lambda(q_1^1, q_1^2) \, = \, \begin{vmatrix} A_{a1}^1 \, . \, q_1^a \, - \, p_{11} & A_{b2}^1 \, . \, q_1^b \, - \, p_{12} \\ A_{a1}^2 \, . \, q_1^a \, - \, p_{21} & A_{b2}^2 \, . \, q_1^b \, - \, p_{22} \end{vmatrix}$$

Soit encore :

$$\Lambda(q_1^1, q_1^2) \, = \, (A_{a1}^1 \, . \, q_1^a \, - \, p_{11}) \, . \, (A_{b2}^2 \, . \, q_1^b \, - \, p_{22}) \, - \, (A_{a1}^2 \, . \, q_1^a \, - \, p_{21}) \, . \, (A_{b2}^1 \, . \, q_1^b \, - \, p_{12})$$

Plus précisément :

$$\Lambda(q_1^1, q_1^2)$$

$$=$$

$$(A^1_{a1} \,.\, A^2_{b2} \,-\, A^2_{a1} \,.\, A^1_{b2}) \,.\, q^a_1 \,.\, q^b_1$$
$$+\,\{(p_{12} \,.\, A^2_{a1} \,-\, p_{22} \,.\, A^1_{a1}) \,+\, (p_{21} \,.\, A^1_{a2} \,-\, p_{11} \,.\, A^2_{a2})\} \,.\, q^a_1$$
$$+\,|P|$$

Lemme 3.1. *Première contrainte liée à l'existence d'une décomposition d'un produit tensoriel déformé.*

L'existence d'une décomposition d'un produit tensoriel déformé $\otimes_A(\mathbf{q}_1,\, \mathbf{q}_2)$ équivaut à l'action d'une forme polynomiale de degré deux, notée symboliquement Λ, agissant sur le premier argument de ce produit tensoriel déformé :

$$\Lambda(q^1_1, q^2_1) \,=\, f_{ab} \,.\, q^a_1 \,.\, q^b_1 \,+\, f_a \,.\, q^a_1 \,+\, f$$

A condition de poser :

$$f_{ab} \,=\, (A^1_{a1} \,.\, A^2_{b2} \,-\, A^2_{a1} \,.\, A^1_{b2})$$

$$f_a \,=\, (p_{12} \,.\, A^2_{a1} \,-\, p_{22} \,.\, A^1_{a1}) \,+\, (p_{21} \,.\, A^1_{a2} \,-\, p_{11} \,.\, A^2_{a2})$$
$$f \,=\, |P|$$

Remarque 3.4. ***Identification des coefficients du discriminant stratégique.***

L'observation de ce formalisme fait clairement naître l'intuition que ces coefficients sont les déterminants d'éléments de M(2, K) obtenus en combinant des paires de colonnes choisies, soit parmi celles du cube A, soit de façon croisée entre celles du cube A et celles de la matrice inconnue [P] (la partie principale de la décomposition du produit tensoriel déformé par le cube A). Le cube A peut se transcrire figurativement par une superposition de deux matrices :

$$A \,\equiv\, [\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1][\mathbf{l}_2, \mathbf{r}_2]$$

Avec :

$$[\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1] \,=\, \begin{bmatrix} l^1_1 \,=\, A^1_{11} & r^1_1 \,=\, A^1_{12} \\ l^2_1 \,=\, A^2_{11} & r^2_1 \,=\, A^2_{12} \end{bmatrix}$$

et :

$$[\mathbf{l}_2, \mathbf{r}_2] \,=\, \begin{bmatrix} l^1_2 \,=\, A^1_{21} & r^1_2 \,=\, A^1_{22} \\ l^2_2 \,=\, A^2_{21} & r^2_2 \,=\, A^2_{22} \end{bmatrix}$$

Il en résulte la possibilité d'interpréter les coefficients de degré deux du discriminant comme de simples déterminants :

$$f_{11} \,=\, (A^1_{11} \,.\, A^2_{12} \,-\, A^2_{11} \,.\, A^1_{12}) \,=\, |\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1|$$

$$f_{12} \,=\, (A^1_{11} \,.\, A^2_{22} \,-\, A^2_{11} \,.\, A^1_{22}) \,=\, |\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_2|$$

$$f_{21} \,=\, (A^1_{21} \,.\, A^2_{12} \,-\, A^2_{21} \,.\, A^1_{12}) \,=\, |\mathbf{l}_2, \mathbf{r}_1|$$

$$f_{22} \,=\, (A^1_{21} \,.\, A^2_{22} \,-\, A^2_{21} \,.\, A^1_{22}) \,=\, |\mathbf{l}_2, \mathbf{r}_2|$$

Ces quatre relations se laissent résumer par :

$$\forall\, a,\, b \,=\, 1\, ou\, 2 \,:\, f_{ab} \,=\, |\mathbf{l}_a, \mathbf{r}_b|$$

Quant à la matrice inconnue [P], rien n'empêche de la noter symboliquement :

$$[P] \,=\, [M(\mathbf{p}_1(\downarrow), \mathbf{p}_2(\downarrow))] \,=\, \begin{bmatrix} p_1^1 \,=\, p_{11} & p_2^1 \,=\, p_{12} \\ p_1^2 \,=\, p_{21} & p_2^2 \,=\, p_{22} \end{bmatrix}$$

Avec le même état d'esprit que ci-dessus, il devient possible et logique de construire les matrices croisées à partir des colonnes des matrices labelisées du cube A et des colonnes de la matrice inconnue [P] ; et d'interpréter les coefficients de degré un du discriminant de la façon suivante (quand K est supposé être équippé d'une multiplication commutative) :

$$f_1 \,=\, (p_{12} \,.\, A_{11}^2 \,-\, p_{22} \,.\, A_{11}^1) \,+\, (p_{21} \,.\, A_{12}^1 \,-\, p_{11} \,.\, A_{12}^2) \,=\, |\mathbf{p}_2, \mathbf{l}_1| \,+\, |\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1|$$

$$f_2 \,=\, (p_{12} \,.\, A_{21}^2 \,-\, p_{22} \,.\, A_{21}^1) \,+\, (p_{21} \,.\, A_{22}^1 \,-\, p_{11} \,.\, A_{22}^2) \,=\, |\mathbf{p}_2, \mathbf{l}_2| \,+\, |\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1|$$

Ces deux relations se laissent synthétiser par :

$$\forall\, a \,=\, 1,\, 2 \,:\, f_a \,=\, |\mathbf{p}_2, \mathbf{l}_a| \,+\, |\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_1|$$

Enfin, il apparaît clairement que le coefficient de degré zéro vaut :

$$f \,=\, |P| \,=\, |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2|$$

Théorème 3.1. *Le discriminant stratégique de la question (E) en dimension deux est un élément de $P_K(2,\, 2)$; ses sept coefficients sont entièrement déterminés par la donnée des quatre colonnes du cube A et des deux colonnes de la matrice inconnue [P].*

Il s'écrit in extenso pour n'importe quel projectile $\mathbf{q}$ de l'e.v. E(2, K) :

$$\Lambda(q^1,\, q^2) \tag{9}$$

$$=$$

$$|\mathbf{l}_a, \mathbf{r}_b| \,.\, q^a \,.\, q^b \,+\, (|\mathbf{p}_2, \mathbf{l}_a| \,+\, |\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_1|) \,.\, q^a \,+\, |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2|$$

3.3 Le cas des cubes anti-symétriques sur leurs indices bas.

Cette sous-section ramène la discussion menée dans les espaces de dimension deux au sein d'un contexte similaire à celui qui avait permis d'initer l'énoncé de la question (E) en dimension trois. Les cubes déformants sont à partir de maintenant antisymétriques ; pour rappel et par convention du langage, un cube est dit anti-symétrique si :

$$\forall\, a,\, b,\, k \,:\, A_{ab}^k \,=\, -A_{ba}^k,\; A_{aa}^k \,=\, 0$$

Il en résulte ici qu'un cube anti-symétrique se résume à la superposition des deux matrices :

$$[\mathbf{l}_1, \mathbf{r}_1] \,=\, \begin{bmatrix} l_1^1 \,=\, 0 & r_1^1 \,=\, A_{12}^1 \\ l_1^2 \,=\, 0 & r_1^2 \,=\, A_{12}^2 \end{bmatrix} \,=\, [\mathbf{0}, \mathbf{r}_1]$$

$$[\mathbf{l}_2, \mathbf{r}_2] \,=\, \left[\begin{array}{cc} l_2^1 \,=\, -A_{12}^1 \,=\, -r_1^1 & r_2^1 \,=\, 0 \\ l_2^2 \,=\, -A_{12}^2 \,=\, -r_1^2 & r_2^2 \,=\, 0 \end{array}\right] \,=\, [-\mathbf{r}_1, \mathbf{0}] \,=\, -[\mathbf{0}, \mathbf{r}_1]^*$$

Le symbole * désigne la rotation de 180 degrés de la matrice à laquelle il s'applique autour de l'axe vertical séparant fictivement les deux vecteurs-colonnes la constituant. Dans les espaces de dimension deux, les cubes anti-symétriques peuvent se résumer à une paire de vecteurs $(\mathbf{0}, \mathbf{r}_1)$. Ce constat permet de calculer le discriminant stratégique pour ces situations :

$$\Lambda(q^1, \, q^2) \,=\, \sum_{a\,=\,1}^{a\,=\,2} (-1)^{a\,+\,1} \,.\, |\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_a| \,.\, q^a \,+\, |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2| \tag{10}$$

Il décrit l'équation d'une droite dont les coefficients sont obtenus grâce aux interactions entre le vecteur $\mathbf{r}_1$ (seul rescapé non nécessairement nul du cube A) et la matrice inconnue $^{(2)}$[P].

3.4 Caractérisation de la question (E) dans le cas des cubes anti-symétriques.

La relation mathématique étudiée dans ce document s'écrit :

$$| \otimes_{\mathbf{r}_1} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) > = [P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

Le terme situé à gauche de l'égalité se laisse développer en :

$$\forall \, c \,\in\, I_2 \,:\, A_{ij}^c \,.\, q_1^i \,.\, q_2^j \,=\, A_{11}^c \,.\, q_1^1 \,.\, q_2^1 \,+\, A_{12}^c \,.\, q_1^1 \,.\, q_2^2 \,+\, A_{21}^c \,.\, q_1^2 \,.\, q_2^1 \,+\, A_{22}^c \,.\, q_1^2 \,.\, q_2^2$$

Mais ici, à cause de l'antisymétrie sur les indices bas du cube déformant A, il vaut plus précisément :

$$c \,=\, 1 \,:\, A_{ij}^1 \,.\, q_1^i \,.\, q_2^j \,=\, A_{12}^1 \,.\, (q_1^1 \,.\, q_2^2 \,-\, q_1^2 \,.\, q_2^1)$$

$$c \,=\, 2 \,:\, A_{ij}^2 \,.\, q_1^i \,.\, q_2^j \,=\, A_{12}^2 \,.\, (q_1^1 \,.\, q_2^2 \,-\, q_1^2 \,.\, q_2^1)$$

Poser la question (E) dans un espace de dimension deux lorsque le cube déformant est constitué à partir de composantes antisymétriques sur leurs indices bas revient ainsi à se demander ce que valent les paires ([P], $\mathbf{z}$) de M(2, K) $\times$ E(2, K) lorsque seul le système suivant est connu :

$$\forall \, j, \, c \,\in\, I_2$$

$$\left[\begin{array}{c} A_{12}^1 \,.\, (q_1^1 \,.\, q_2^2 \,-\, q_1^2 \,.\, q_2^1) \\ A_{12}^2 \,.\, (q_1^1 \,.\, q_2^2 \,-\, q_1^2 \,.\, q_2^1) \end{array}\right] \,=\, (q_1^1 \,.\, q_2^2 \,-\, q_1^2 \,.\, q_2^1) \,.\, |\mathbf{r}_1 > = [p_{cj}] \,.\, |q_2^j > + |z^c >$$

Il peut aussi s'écrire :

$$| \otimes_{\mathbf{r}_1} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) > = \, |\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2| \,.\, |\mathbf{r}_1 > = [P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} > \tag{11}$$

3.5 Commentaires.

Cette situation appelle diverses remarques :

1. **Interprétation du problème** : bien que les arguments (la paire de vecteurs $(\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2)$) apparaissent dans l'expression de ce qui équivaut à un produit de Lie en dimension deux, ces arguments ne semblent vraiment intervenir que pour moduler l'intensité du vecteur $\mathbf{r}_1$ caractérisant le cube antisymétrique agissant sur eux ; en bref : *les arguments modulent la déformation et non pas l'inverse.*

   Ainsi, de façon presque contre-intuitive par rapport au formalisme de son énoncé, le problème posé étudie en réalité la décomposition de la déformation et non pas tant celle du produit tensoriel déformé.

2. **Etat des lieux** ; la solution au problème posé -dans sa restriction à un espace de dimension deux- semble liée à la découverte d'une sorte de jauge puisque trois vecteurs sont connus, $\{\mathbf{r}_1,\ \mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2\}$, tandis que trois autres sont inconnus : $\{\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2, \mathbf{z}\}$. Les choses étant abordées de la sorte, il est tentant de dire que le problème implique autant de données connues que de données inconnues. Pour autant, il ne s'agit malheureusement pas d'un simple système de relations linéaires !

3. **Nouveau positionnement du problème** ; tout se présente ainsi comme si, disposant de trois points d'un espace de dimension deux (les trois colonnes $\{\mathbf{r}_1,\ \mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2\}$) le problème consistait à savoir comment leur faire correspondre trois autres points d'un espace de dimension deux (les trois colonnes $\{\mathbf{p}_1,\ \mathbf{p}_2,\ \mathbf{z}\}$). Il semble donc qu'il ne soit plus possible de séparer cette discussion algébrique de considérations géométriques (exemples : plan tangent, rayons de courbure, ... en chaque point) ni de systématiquement la restreindre aux espaces de dimension deux.

   En effet, et même en géométrie euclidienne, si trois points suffisent effectivement à définir un plan (donc un espace de dimension deux), rien n'indique dans la manière dont j'ai posé le problème étudié ici que le "triangle solution" (et qui définira à son tour un espace de dimension deux) se trouve dans le même plan que le "triangle initial".

   Il semble donc judicieux de suggérer que la résolution systématique de ce problème passe par une confrontation entre l'ensemble des transformations d'un triangle dans un espace de dimension trois et la relation de décomposition que j'ai impôsé au départ.

4. **Décomposition triviale** : il existe aussi une décomposition triviale dans les espaces de dimension deux. Elle correspond à une configuration simple

du système d'équations telle que $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ et :

$$| \otimes_{\mathbf{r}_1} (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) >$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} A^1_{12} \cdot (q^1_1 \cdot q^2_2 \; - \; q^2_1 \cdot q^1_2) \\ A^2_{12} \cdot (q^1_1 \cdot q^2_2 \; - \; q^2_1 \cdot q^1_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} \cdot q^1_2 \; + \; p_{12} \cdot q^2_2 \\ p_{21} \cdot q^1_2 \; + \; p_{22} \cdot q^2_2 \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$[P(trivial)] \,.\, |\mathbf{q}_2 >$$

D'où il est facile de déduire que forcément, si K est commutatif :

$$[P(trivial)] \; = \; \begin{bmatrix} -A^1_{12} \cdot q^2_1 & A^1_{12} \cdot q^1_1 \\ -A^2_{12} \cdot q^2_1 & A^2_{12} \cdot q^1_1 \end{bmatrix} \; ; \; |P(trivial)| \; = \; 0$$

Par conséquent :

$$\mathbf{p}_1 \; = \; -q^2_1 \,.\, \mathbf{r}_1 \; ; \; \mathbf{p}_2 \; = \; q^1_1 \,.\, \mathbf{r}_1$$

Dans ce cas précis, les colonnes de la matrice recherchée, [P], sont simplement proportionnelles à la déformation $\mathbf{r}_1$.

Pour mémoire, dans les espaces de dimension trois, la décomposition triviale la plus simple est représentée par une matrice rotation ${}_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_1)$ et son déterminant est nul.

Dans les espaces de dimension deux, la matrice ci-dessus a également un déterminant nul puisque K a été supposé être un corps commutatif ; mais la parenté de cette matrice avec la représentation d'une rotation, si elle existe vraiment, ne saute pas aux yeux ! En revanche, elle est ostensiblement une table de Pythagore construite à l'aide du produit tensoriel classique puisqu'elle s'écrit aussi :

$$[P(trivial)] \; = \; \begin{bmatrix} \otimes & -q^2_1 & q^1_1 \\ A^1_{12} & -A^1_{12} \cdot q^2_1 & A^1_{12} \cdot q^1_1 \\ A^2_{12} & -A^2_{12} \cdot q^2_1 & A^2_{12} \cdot q^1_1 \end{bmatrix}$$

et ce fait permet de rebrancher progressivement la discussion avec un concept complémentaire de celui de rotation ; à savoir, celui des réflection [4]. En effet, il est facile de constater que :

$$\begin{bmatrix} -\,q^2_1 \\ q^1_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} q^1_1 \\ q^2_1 \end{bmatrix} = [C] \,.\, |\mathbf{q}_1 >$$

$$\downarrow$$

$$[-\,q^2_1, q^1_1] \; = \; [q^1_1, q^2_1] \,.\, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = < \mathbf{q}_1 | \,.\, [C]^t$$

4. Les passionnés comprenant la langue de Sheakspeare pourront profiter de ce passage pour commencer à découvrir le sujet en parcourant les premiers chapitres de [[13]].

Or la matrice [C] apparaissant ici fait partie de l'ensemble des représentations des réflections (reversals en anglais) ; voir [14 ; §7, §61, §126]). Par conséquent, la décomposition triviale d'un produit de Lie déformé défini dans un espace de dimension deux peut s'écrire sous la forme de la table de Pythagore [5] :

$$^{(2)}[P(trivial)] = T_2(\otimes)(<\mathbf{q}_1|\,.\,[C]^t,\, |\mathbf{r}_1>) \tag{12}$$

3.6 Tentative d'application aux ondes EM planes.

Du point de vue physique, la question (E) posée dans un espace de dimension deux consiste finalement à se doter d'une paire de vecteurs ($\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$) - donc équivalemment d'un parallèlépipède- sur lequel agit un vecteur $\mathbf{r}_1$ et à étudier comment cette interaction modifie la direction du projectile $\mathbf{q}_1$, la matrice [P], et fait naître un phénomène nouveau : le vecteur $\mathbf{z}$.

Il est connu et accepté que la lumière se propage dans les régions vides sous forme d'ondes EM monochromatiques planes suivant les géodésiques spécifiques à la géométrie de la région dans lesquelles elles se situent ; à titre d'exemple illustrant cette affirmation, la lecture de [15 ; 1924] se spécialisant sur l'environnement newtonien peut être instructive.

Soit une telle onde étudiée à un instant t donné dans un repère tridimensionnel orthonormé direct centré au point O dont sont viruellement issus les axes $\mathbf{Ox} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{Oy} = \mathbf{e}_2$, $\mathbf{Oz} = \mathbf{e}_3$. Je suppose que cette onde se propage dans la direction $\mathbf{e}_3$. Puisque localement $\mathbf{v} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$, en vertu de la célèbre règle du tire-bouchon, cette hypothèse implique que le champ électrique est colinéaire à la direction $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{E} = \mathrm{E}^2.\mathbf{e}_2$, et que le champ magnétique est colinéaire à la direction $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{H} = \mathrm{H}^1.\mathbf{e}_1$.

Dans l'état d'esprit de cette théorie, le cube déformant A est l'élément perturbateur rendant compte d'une modification du contexte dans lequel le produit vectoriel est exécuté. Dans un contexte physique, les notions de connexion affine ou de connexion de spin viennent spontanément à l'esprit comme cause possible de cette perturbation. Pour donner corps à cette explication spontanée au sein de la théorie de la question (E), il convient de toute façon de choisir un cube dont les composantes peuvent être dotées de la propriété d'antisymétrie sur au moins une paire d'indices.

Quel que soit le cube qui pourra utilement faire l'affaire, à cet endroit, la difficulté évoquée au point 3 de la sous-section 3.5 surgit. Concrètement, rien ne garantit que le vecteur issu de l'anti-symétrisation du cube se situera systématiquement dans le plan généré par le champ électromagnétique ; ce qui serait pourtant la condition nécessaire à garantir une discussion se déroulant exclusivement en dimension deux et précisément dans ce plan.

5. un autre mot pour désigner une extrapolation du concept de table de multiplication.

Physiquement, le seul vecteur susceptible de se situer dans le plan de l'onde doit avoir un lien avec le degré de polarisation de celle-ci ; voir par exemple le formalisme de Jones dans le document [16 ; p.13] ou [6] la discussion développée dans [17 ; §50, pp. 141-147] qui se sert principalement du formalisme de Stokes. Cette information encourage à envisager l'hypothèse :

$$\mathbf{r}_1 \equiv \mathbf{J}$$

Et à chercher à savoir si la décomposition symbolisée par l'Equ.(11) a une signification physique intéressante dans le contexte de la polarisation des ondes électromagnétique planes :

$$|\otimes_{\mathbf{J}}(\mathbf{E},\mathbf{H})>= |\mathbf{E},\mathbf{H}|\,.\,|\mathbf{J}>= [P]\,.\,|\mathbf{H}> + |\mathbf{z}> \qquad (13)$$

Ceci exige de connaitre les paires ($\mathbf{z}$, [P]).

4 Remerciements

N'étant pas dans une position sociale me permettant de publier selon les canaux orthodoxes (faute d'un diplôme officiel en physique mathématique), je présente cette exploration sous ma seule responsabilité. J'appuie mes propos sur l'étude d'ouvrages acquis personnellement et sur des oeuvres librement accessibles en ligne. Je remercie les auteurs ayant accepté de les mettre gracieusement à disposition, en particulier les sites arXiv.org, NUMDAM, HAL, etc. (mais pas seulement).

5 Bibliographie

Références

5.1 Articles, cours et livres.

[01] Maxwell, J. C. : A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field ; Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, 155 : 459...512.

[02] Purcell, E. M., Guthmann, C., Lallemand, P. : Berleley, Cours de physique, volume 2, électricité et magnétisme, Collection U, ©Librairie Armand Colin, Paris, 1973, 460 pages.

[03] Misner, Thorne and Wheeler (MTW) : Gravitation ; Copyright ©1973 by W. H. Freeman and Company ; ISBN 0-7167-0344-0 Paperback, 1279 pages.

[04] A.D.M., the Dynamics of General Relativity ; arXiv : 0405109v1, 19 May 2004.

[05] Lectures Notes. 3 + 1 formalism and bases of numerical relativity. arXiv :gr-qc/0703035v1, 7 March 2007.

[06] Einstein, A. : Zur Elektrodynamik bewegter Körper, Annalen der Physik, vol. 17, 30 June 1905, pp. 891-921.

6. Uniquement pour les lecteurs comprenant l'allemand.

[07] Einstein, A. and Minkowski, H. : On the electrodynamics of moving bodies ; in "The principle of relativity", traduction en anglais de l'oeuvre originale par M.H. Saha et S.N. Bose, imprimé par l'Université de Calcutta, 1920, 266 pages.

[08] (a) Einstein, A. : De l'électrodynamique des corps en mouvement, traduit en français par Simon Villeneuve en 2012, visible sur l'archive Wikiwix, la bibliothèque des Classiques des sciences sociales ; (b) Lennuier, R., Gal, P.-Y.,Perrin, D. : Mécanique des particules, champs, Collection U, premier cycle de l'enseignement supérieur, Librairie Armand Colin, Paris, 1970, 363 pages.

[09] (a) Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie ; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7. (b) Petropoulos, P. M. : Relativité générale, la gravitation en une leçon et demie, conférence X-ENS-UPS de physique, année 2017.

[10] Crawford, F. S. Jr., Lena, P. : Berleley, Cours de physique, volume 3, ondes, Collection U, ©Librairie Armand Colin, Paris, 1972, 603 pages.

[11] Reeves, H. : Dernières nouvelles du cosmos (Vers la première seconde), ISBN 2-02-020571-8, ©éditions du seuil, septembre 1994.

[12] Durrer, R. : Cosmologie (d'après les notes de Desjacques, V.) Cours pour la troisième et quatrième année (deuxième cycle), Université de Genève, version révisée du 9 juillet 2005.

[13] Bardoux, Y. : Trous noirs dans des théories modifiées de la gravitation. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2012. Français. NNT : 2012PA112184. tel-00737357.

[14] Cartan, E. The theory of spinors, translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)", Hermann, 1937 - 154 p. Dover Publications, Inc. New York ©by Hermann, Paris (1966), ISBN 0-486-64070-1, 157 pages.

[15] Cartan, E. : Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie) (suite), chapitre V ; Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^{e} série, tome 41 (1924), p.1-25 ©Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1924, tous droits réservés.

[16] Bouquet, G. : Compréhension de la biréfringence et du couplage de mode de polarisation dans les fibres de télécommunication ; Télécom ParisTech, 2005, Français, pastel 00001228.

[17] Landau, L. D. und Lifschitz, E.M. : Klassische Feldtheorie, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II ; Akademische Verlag, Berlin (1992), ISBN 3-05-501550-9, 480 pages.