La méthode intrinsèque en dimension trois.
Collection : "La Théorie de la Question (E)"

©Thierry PERIAT.

19 janvier 2023

Partie II : les parties principales des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés.

Table des matières

1 Recherche des parties principales des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés.

1.1 Le théorème de reconstruction.

Je commence ici une série de pénibles manipulations algébriques. Globalement, il s'agit de finir le calcul des coefficients du déterminant stratégique apparaissant lorsque la question (E) est posée dans un espace de dimension trois.

Pour rappel, les composantes du cube déformant A satisfont ici obligatoirement la relation d'antisymétrie :

$$A_{ij}^{k} + A_{ji}^{k} = 0$$

En conséquence de quoi :

Proposition 1.1. *La question (E), lorsquelle est posée dans un espace de dimension trois, concerne forcément des produits vectoriels déformés et éventuellement décomposés non trivialement.*

Démonstration. Puisque, dans un espace de dimension trois, l'antisymétrie du cube déformant A réduit celui-ci à un élémennt [A] de M(3, $\mathbb{C}$) :

$$\{\forall A \,|\, \forall\ i,\, j,\, k:\ A_{ij}^{k} + A_{ji}^{k} = 0\}$$

$$\Downarrow$$

$$\{A \to [A] = \begin{bmatrix} A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \\ A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \end{bmatrix} \in M(3,\, \mathbb{C})\}$$

Le produit de Lie peut se définir par :

$$\forall\, \mathbf{a},\, \mathbf{b} \in E(3, \mathbb{C}):\ [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]} = \frac{1}{2} \cdot \wedge_{[A]} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i<j}^{3} A_{ij}^{3} \,.\, (a^i \,.\, b^j - b^i \,.\, a^j) \,.\, \mathbf{e}_k$$

Dans la base canonique à laquelle l'espace vectoriel peut être rapporté (ou, ce qui revient au même, dans le langage des composantes sur l'espace dual) :

$$\frac{1}{2} \,.\, (\wedge_{[A]}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))^k$$

$$=$$

$$A_{12}^{k} \,.\, (a^1 \,.\, b^2 - b^1 \,.\, a^2) + A_{23}^{k} \,.\, (a^2 \,.\, b^3 - b^2 \,.\, a^3) + A_{13}^{k} \,.\, (a^1 \,.\, b^3 - b^1 \,.\, a^3)$$

Mais puisque le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est commutatif et que les composantes du cube déformant A satisfont la propriété d'antisymétrie, les composantes s'écrivent aussi :

$$\frac{1}{2} \,.\, (\wedge_{[A]}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))^k$$

$$=$$

$$A_{23}^{k} \,.\, (a^2 \,.\, b^3 - a^3 \,.\, b^2) + A_{31}^{k} \,.\, (a^3 \,.\, b^1 - a^1 \,.\, b^3) + A_{12}^{k} \,.\, (a^1 \,.\, b^2 - a^2 \,.\, b^1)$$

Réintroduisant à cet endroit le produit vectoriel classique, ces relations peuvent se réordonner en :

$$(\wedge_A(\mathbf{a}, \mathbf{b}))^k = A_{23}^{k} \,.\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^1 + A_{31}^{k} \,.\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 + A_{12}^{k} \,.\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^3$$

Soit, introduite par convenance, la matrice :

$$[A^*] = \begin{bmatrix} A_{23}^1 & A_{31}^1 & A_{12}^1 \\ A_{23}^2 & A_{31}^2 & A_{12}^2 \\ A_{23}^3 & A_{31}^3 & A_{12}^3 \end{bmatrix} \in M(3,\, C)$$

Ainsi que la matrice [J] et sa transposée définies par :

$$[J] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; [J]^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il vient assez simplement :

$$[J]^t \,.\, [A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ -A^1_{13} & -A^2_{13} & -A^3_{13} \\ A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \end{bmatrix}$$

Et :

$$\{[J]^t \,.\, [A]\}^t = [A]^t \,.\, [J] = [A^*]$$

Je viens donc de prouver ce que je m'étais proposé de démontrer :

$$|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]} >= \underbrace{[A]^t \,.\, [J]}_{[A^*]} \,.\, |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} >$$

La matrice [A*] introduite plus haut par convenance sera baptisée *matrice déformante effective* du produit vectoriel classique. Je note au passage que la matrice [J] est une génératrice du groupe cyclique — puisque :

$$[J]^2 = -[J]^t, \; [J]^3 = -Id_3, \; [J]^4 = -[J], \; [J]^5 = [J]^t, \; [J]^6 = Id_3$$

$\square$

A. Coefficients de degré deux.

$$d_{mn}$$

$$=$$

$$A^1_{m1} \,.\, [(p_{23} \,.\, A^3_{n2} + p_{32} \,.\, A^2_{n3}) - (p_{22} \,.\, A^3_{n3} + p_{33} \,.\, A^2_{n2})] - p_{11} \,.\, (A^2_{m2} \,.\, A^3_{n3} - A^2_{m3} \,.\, A^3_{n2})$$

$$-$$

$$\{A^1_{m2} \,.\, [(p_{23} \,.\, A^3_{n1} + p_{31} \,.\, A^2_{n3}) - (p_{21} \,.\, A^3_{n3} + p_{33} \,.\, A^2_{n1})] - p_{12} \,.\, (A^2_{m1} \,.\, A^3_{n3} - A^2_{m3} \,.\, A^3_{n1})\}$$

$$+$$

$$A^1_{m3} \,.\, [(p_{22} \,.\, A^3_{n1} + p_{31} \,.\, A^2_{n2}) - (p_{21} \,.\, A^3_{n2} + p_{32} \,.\, A^2_{n1})] - p_{13} \,.\, (A^2_{m1} \,.\, A^3_{n2} - A^2_{m2} \,.\, A^3_{n1})$$

Lemme 1.1. *Les coefficients de degré deux se laissent regrouper au sein d'un élément [D] de l'ensemble M(3, $\mathbb{C}$).*

A.1. Les coefficients de degré deux le long de la diagonale. :

$$d_{11}$$

$$=$$

$$A^1_{11}\,.\,[(p_{23}\,.\,A^3_{12}+p_{32}\,.\,A^2_{13})-(p_{22}\,.\,A^3_{13}+p_{33}\,.\,A^2_{12})]-p_{11}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{13}-A^2_{13}\,.\,A^3_{12})$$
$$-$$
$$\{A^1_{12}\,.\,[(p_{23}\,.\,A^3_{11}+p_{31}\,.\,A^2_{13})-(p_{21}\,.\,A^3_{13}+p_{33}\,.\,A^2_{11})]-p_{12}\,.\,(A^2_{11}\,.\,A^3_{13}-A^2_{13}\,.\,A^3_{11})\}$$
$$+$$
$$A^1_{13}\,.\,[(p_{22}\,.\,A^3_{11}+p_{31}\,.\,A^2_{12})-(p_{21}\,.\,A^3_{12}+p_{32}\,.\,A^2_{11})]-p_{13}\,.\,(A^2_{11}\,.\,A^3_{12}-A^2_{12}\,.\,A^3_{11})$$
$$d_{22}$$
$$=$$
$$A^1_{21}\,.\,[(p_{23}\,.\,A^3_{22}+p_{32}\,.\,A^2_{23})-(p_{22}\,.\,A^3_{23}+p_{33}\,.\,A^2_{22})]-p_{11}\,.\,(A^2_{22}\,.\,A^3_{23}-A^2_{23}\,.\,A^3_{22})$$
$$-$$
$$\{A^1_{22}\,.\,[(p_{23}\,.\,A^3_{21}+p_{31}\,.\,A^2_{23})-(p_{21}\,.\,A^3_{23}+p_{33}\,.\,A^2_{21})]-p_{12}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{23}-A^2_{23}\,.\,A^3_{21})\}$$
$$+$$
$$A^1_{23}\,.\,[(p_{22}\,.\,A^3_{21}+p_{31}\,.\,A^2_{22})-(p_{21}\,.\,A^3_{22}+p_{32}\,.\,A^2_{21})]-p_{13}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{22}-A^2_{22}\,.\,A^3_{21})$$
$$d_{33}$$
$$=$$
$$A^1_{31}\,.\,[(p_{23}\,.\,A^3_{32}+p_{32}\,.\,A^2_{33})-(p_{22}\,.\,A^3_{33}+p_{33}\,.\,A^2_{32})]-p_{11}\,.\,(A^2_{32}\,.\,A^3_{33}-A^2_{33}\,.\,A^3_{32})$$
$$-$$
$$\{A^1_{32}\,.\,[(p_{23}\,.\,A^3_{31}+p_{31}\,.\,A^2_{33})-(p_{21}\,.\,A^3_{33}+p_{33}\,.\,A^2_{31})]-p_{12}\,.\,(A^2_{31}\,.\,A^3_{33}-A^2_{33}\,.\,A^3_{31})\}$$
$$+$$
$$A^1_{33}\,.\,[(p_{22}\,.\,A^3_{31}+p_{31}\,.\,A^2_{32})-(p_{21}\,.\,A^3_{32}+p_{32}\,.\,A^2_{31})]-p_{13}\,.\,(A^2_{31}\,.\,A^3_{32}-A^2_{32}\,.\,A^3_{31})$$

A cause de l'antisymétrie du cube déformant :

$$d_{11}$$
$$=$$
$$-\,p_{11}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{13}-A^2_{13}\,.\,A^3_{12})-A^1_{12}\,.\,(p_{31}\,.\,A^2_{13}-p_{21}\,.\,A^3_{13})+A^1_{13}\,.\,(p_{31}\,.\,A^2_{12}-p_{21}\,.\,A^3_{12})$$
$$d_{22}$$
$$=$$
$$A^1_{21}\,.\,(p_{32}\,.\,A^2_{23})-p_{22}\,.\,A^3_{23})+p_{12}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{23}-A^2_{23}\,.\,A^3_{21})+A^1_{23}\,.\,(p_{22}\,.\,A^3_{21}-p_{32}\,.\,A^2_{21})$$
$$d_{33}$$
$$=$$
$$A^1_{31}\,.\,(p_{23}\,.\,A^3_{32}-p_{33}\,.\,A^2_{32})-A^1_{32}\,.\,(p_{23}\,.\,A^3_{31}-p_{33}\,.\,A^2_{31})-p_{13}\,.\,(A^2_{31}\,.\,A^3_{32}-A^2_{32}\,.\,A^3_{31})$$

Les coefficients diagonaux se laissent réécrire :

$$d_{11}$$
$$=$$

$$p_{11} \,.\, (A^2_{13} \,.\, A^3_{12} - A^2_{12} \,.\, A^3_{13}) + p_{21} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^3_{13} - A^1_{13} \,.\, A^3_{12}) + p_{31} \,.\, (A^1_{13} \,.\, A^2_{12} - A^1_{12} \,.\, A^2_{13})$$

$$d_{22}$$

$$=$$

$$p_{12} \,.\, (A^2_{21} \,.\, A^3_{13} - A^2_{23} \,.\, A^3_{21}) + p_{22} \,.\, (A^1_{23} \,.\, A^3_{21} - A^1_{21} \,.\, A^3_{23}) + p_{32} \,.\, (A^1_{21} \,.\, A^2_{23} - A^1_{23} \,.\, A^2_{21})$$

$$d_{33}$$

$$=$$

$$p_{13} \,.\, (A^2_{31} \,.\, A^3_{32} - A^2_{32} \,.\, A^3_{31}) + p_{23} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^3_{13} - A^1_{13} \,.\, A^3_{12}) + p_{33} \,.\, (A^1_{32} \,.\, A^2_{31} - A^1_{31} \,.\, A^2_{32})$$

Proposition 1.2. *Les coefficients de la diagonale de la matrice [D] dépendent (i) des composantes de la matrice inconnue [P] et, probablement, (ii) de celles de la matrice déformante [A].*

Démonstration. - Le formalisme des trois coefficients d_{mm} (m = 1, 2, 3) suggère que les matrices suivantes jouent un rôle important :

$$[_{mn}T]$$

$$=$$

$$[_{mn}t_{ij}]$$

$$=$$

$$-\begin{bmatrix} (A^2_{m2} \,.\, A^3_{n3} - A^2_{m3} \,.\, A^3_{n2}) & (A^1_{m3} \,.\, A^3_{n2} - A^1_{m2} \,.\, A^3_{n3}) & (A^1_{m2} \,.\, A^2_{n3} - A^1_{m3} \,.\, A^2_{n2}) \\ (A^2_{m1} \,.\, A^3_{n3} - A^2_{m3} \,.\, A^3_{n1}) & (A^1_{m1} \,.\, A^3_{n3} - A^1_{m3} \,.\, A^3_{n1}) & (A^1_{m3} \,.\, A^2_{n1} - A^1_{m1} \,.\, A^2_{n3}) \\ (A^2_{m1} \,.\, A^3_{n2} - A^2_{m2} \,.\, A^3_{n1}) & (A^1_{m2} \,.\, A^3_{n1} - A^1_{m1} \,.\, A^3_{n2}) & (A^1_{m2} \,.\, A^2_{n1} - A^1_{m1} \,.\, A^2_{n2}) \end{bmatrix}$$

Puisque, à cause de la propriété d'antisymétrie sur les indice bas du cube déformant A :

$$[_{11}T] \,.\, [P]$$

$$=$$

$$-\begin{bmatrix} (A^2_{12} \,.\, A^3_{13} - A^2_{13} \,.\, A^3_{12}) & (A^1_{13} \,.\, A^3_{12} - A^1_{12} \,.\, A^3_{13}) & (A^1_{12} \,.\, A^2_{13} - A^1_{13} \,.\, A^2_{12}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & _{11}x_{12} & _{11}x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs c'est un fait que :

$$d_{11} \,=\, Trace\{[_{11}T] \,.\, [P]\}$$

Au passage, il convient de remarquer que le même résultat peut s'obtenir en écrivant :

$$d_{11} \,=\, Trace\{[P]^t \,.\, [{}_{11}T]^t\}$$

A supposer *a priori* que la matrice déformante ne soit pas dégénérée, son inverse peut être calculé :

$$|A| \,\neq\, 0,\, [A] \,.\, [A]^{-1} \,=\, Id_3 \,=\, [A]^{-1} \,.\, [A]$$

$$|A| \,.\, [A]^{-1}$$

$$=$$

$$|A| \,.\, [a_{ij}]$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} (A^2_{23}\,.\,A^3_{13} \,-\, A^2_{13}\,.\,A^3_{23}) & -(A^2_{12}\,.\,A^3_{13} \,-\, A^2_{13}\,.\,A^3_{12}) & (A^2_{12}\,.\,A^3_{23} \,-\, A^2_{23}\,.\,A^3_{12}) \\ -(A^1_{23}\,.\,A^3_{13} \,-\, A^1_{13}\,.\,A^3_{23}) & (A^1_{12}\,.\,A^3_{13} \,-\, A^1_{13}\,.\,A^3_{12}) & -(A^1_{12}\,.\,A^3_{23} \,-\, A^1_{23}\,.\,A^3_{12}) \\ (A^1_{23}\,.\,A^2_{13} \,-\, A^1_{13}\,.\,A^2_{23}) & -(A^1_{12}\,.\,A^2_{13} \,-\, A^1_{13}\,.\,A^2_{12}) & (A^1_{12}\,.\,A^2_{23} \,-\, A^1_{23}\,.\,A^2_{12}) \end{bmatrix}$$

Force est de constater que :

$$[{}_{11}T] \,=\, |A| \,.\, \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans le même état d'esprit :

$$[{}_{22}T] \,.\, [P]$$

$$=$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (A^2_{21}\,.\,A^3_{23} \,-\, A^2_{23}\,.\,A^3_{21}) & (A^1_{21}\,.\,A^3_{23} \,-\, A^1_{23}\,.\,A^3_{21}) & (A^1_{23}\,.\,A^2_{21} \,-\, A^1_{21}\,.\,A^2_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}_{22}x_{21} & d_{22} & {}_{22}x_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et :

$$[{}_{22}T] \,=\, |A| \,.\, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De plus :

$$[{}_{33}T] \,.\, [P]$$

$$=$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (A^2_{31} \,.\, A^3_{32} \,-\, A^2_{32} \,.\, A^3_{31}) & (A^1_{32} \,.\, A^3_{31} \,-\, A^1_{31} \,.\, A^3_{32}) & (A^1_{32} \,.\, A^2_{31} \,-\, A^1_{31} \,.\, A^2_{32}) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}_{33}x_{31} & {}_{33}x_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

Et :

$$[{}_{33}T] \,=\, |A| \,.\, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{21} & -a_{31} \end{bmatrix}$$

Ces résultats permettent de reconstruire la diagonale de la matrice [D] :

$$\{[{}_{11}T] \,+\, [{}_{22}T] \,+\, [{}_{33}T]\} \,.\, [P]$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & {}_{11}x_{12} & {}_{11}x_{13} \\ {}_{22}x_{21} & d_{22} & {}_{22}x_{23} \\ {}_{33}x_{31} & {}_{33}x_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$|A| \,.\, \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\ a_{11} & a_{21} & -a_{31} \end{bmatrix} \,.\, [P]$$

A ce stade, il ne peut rien être déduit pour ce qui concerne les coefficients hors de la diagonale de la matrice [D]. Néanmoins un formalisme impliquant la trace réapparaitra ultérieurement dans cette discussion ; il permettra d'unifier les diverses informations collectées sur les divers coefficients. Il devient évident que :

$$\{[{}_{11}T] \,+\, [{}_{22}T] \,+\, [{}_{33}T]\} \,.\, [P] \,=\, \begin{bmatrix} d_{11} & - & - \\ - & d_{22} & - \\ - & - & d_{33} \end{bmatrix} \,=\, |A| \,.\, \{[A]^{-1} \,.\, [J]\}^t \,.\, [P]$$

□

Lemme 1.2. *Les coefficients de la diagonale de la matrice [D] dépendent (i) des composantes de la matrice [P] et (ii) de celles de la matrice déformante [A].*

A.2. Les coefficients de degré deux hors de la diagonale.
A titre d'échauffement, soit l'exemple suivant :

$$d_{12}$$

$$=$$

$$A^1_{11} \,.\, [(p_{23} \,.\, A^3_{22} + p_{32} \,.\, A^2_{23}) - (p_{22} \,.\, A^3_{23} + p_{33} \,.\, A^2_{22})] - p_{11} \,.\, (A^2_{12} \,.\, A^3_{23} - A^2_{13} \,.\, A^3_{22})$$

$$-$$

$$\{A^1_{12} \,.\, [(p_{23} \,.\, A^3_{21} + p_{31} \,.\, A^2_{23}) - (p_{21} \,.\, A^3_{23} + p_{33} \,.\, A^2_{21})] - p_{12} \,.\, (A^2_{11} \,.\, A^3_{23} - A^2_{13} \,.\, A^3_{21})\}$$

$$+$$

$$A^1_{13} \,.\, [(p_{22} \,.\, A^3_{21} + p_{31} \,.\, A^2_{22}) - (p_{21} \,.\, A^3_{22} + p_{32} \,.\, A^2_{21})] - p_{13} \,.\, (A^2_{11} \,.\, A^3_{22} - A^2_{12} \,.\, A^3_{21})$$

$$=$$

$$-\, p_{11} \,.\, (A^2_{12} \,.\, A^3_{23})$$

$$-$$

$$\{A^1_{12} \,.\, [(p_{23} \,.\, A^3_{21} + p_{31} \,.\, A^2_{23}) - (p_{21} \,.\, A^3_{23} + p_{33} \,.\, A^2_{21})] - p_{12} \,.\, (-\, A^2_{13} \,.\, A^3_{21})\}$$

$$+$$

$$A^1_{13} \,.\, [p_{22} \,.\, A^3_{21} - p_{32} \,.\, A^2_{21}] - p_{13} \,.\, (-\, A^2_{12} \,.\, A^3_{21})$$

Ces coefficients peuvent se réorganiser comme suit :

$$d_{12}$$

$$=$$

$$\begin{aligned} &-\, p_{11} \,.\, A^2_{12} \,.\, A^3_{23} - p_{12} \,.\, A^2_{13} \,.\, A^3_{12} - p_{13} \,.\, A^2_{12} \,.\, A^3_{12} \\ &+ p_{21} \,.\, A^1_{12} \,.\, A^3_{23} - p_{22} \,.\, A^1_{13} \,.\, A^3_{12} + p_{23} \,.\, A^1_{12} \,.\, A^3_{12} \\ &-\, p_{31} \,.\, A^1_{12} \,.\, A^2_{23} + p_{32} \,.\, A^1_{13} \,.\, A^2_{12} - p_{33} \,.\, A^1_{12} \,.\, A^2_{12} \end{aligned}$$

Ils peuvant ainsi être réécrits :

$$d_{12} \,=\, Trace\{\begin{bmatrix} -A^2_{12} \,.\, A^3_{23} & A^1_{12} \,.\, A^3_{23} & -A^1_{12} \,.\, A^2_{23} \\ -A^2_{13} \,.\, A^3_{12} & -A^1_{13} \,.\, A^3_{12} & A^1_{13} \,.\, A^2_{12} \\ A^2_{12} \,.\, A^3_{12} & A^1_{12} \,.\, A^3_{12} & -A^1_{12} \,.\, A^2_{12} \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}\}$$

C'est un constat intéressant puisqu'en reconsidérant les équations précédentes pour m = 1 et n = 2 :

$$[{}_{12}T]$$

$$=$$

$$[{}_{12}t_{ij}]$$

$$=$$

$$-\begin{bmatrix} (A^2_{12} \,.\, A^3_{23} - A^2_{13} \,.\, A^3_{22}) & (A^1_{13} \,.\, A^3_{22} - A^1_{12} \,.\, A^3_{23}) & (A^1_{12} \,.\, A^2_{23} - A^1_{13} \,.\, A^2_{22}) \\ (A^2_{11} \,.\, A^3_{23} - A^2_{13} \,.\, A^3_{21}) & (A^1_{11} \,.\, A^3_{23} - A^1_{13} \,.\, A^3_{21}) & (A^1_{13} \,.\, A^2_{21} - A^1_{11} \,.\, A^2_{23}) \\ (A^2_{11} \,.\, A^3_{22} - A^2_{12} \,.\, A^3_{21}) & (A^1_{12} \,.\, A^3_{21} - A^1_{11} \,.\, A^3_{22}) & (A^1_{12} \,.\, A^2_{21} - A^1_{11} \,.\, A^2_{22}) \end{bmatrix}$$

En tenant compte de l'antisymétrie des coefficients de la matrice déformante, il devient clair que :

$$d_{12} \,=\, Trace\{[{}_{12}T] \,.\, [P]\}$$

Proposition 1.3. *Les coefficients hors de la diagonale peuvent être considérés à un niveau plus abstrait permettant de mettre en évidence une formule générique liant les coefficients de degré deux.*

Démonstration. - En organisant le terme générique :

$$d_{mn}$$

$$=$$

$$\begin{gathered}
(p_{23} \,.\, A^1_{m1} \,.\, A^3_{n2} \;+\; p_{32} \,.\, A^1_{m1} \,.\, A^2_{n3}) \\
-\,(p_{22} \,.\, A^1_{m1} \,.\, A^3_{n3} \;+\; p_{33} \,.\, A^1_{m1} \,.\, A^2_{n2}) \\
-\,p_{11} \,.\, (A^2_{m2} \,.\, A^3_{n3} \;-\; A^2_{m3} \,.\, A^3_{n2})
\end{gathered}$$

$$-$$

$$\begin{gathered}
\{(p_{23} \,.\, A^1_{m2} \,.\, A^3_{n1} \;+\; p_{31} \,.\, A^1_{m2} \,.\, A^2_{n3}) \\
-\,(p_{21} \,.\, A^1_{m2} \,.\, A^3_{n3} \;+\; p_{33} \,.\, A^1_{m2} \,.\, A^2_{n1}) \\
-\,p_{12} \,.\, (A^2_{m1} \,.\, A^3_{n3} \;-\; A^2_{m3} \,.\, A^3_{n1})\}
\end{gathered}$$

$$+$$

$$\begin{gathered}
(p_{22} \,.\, A^1_{m3} \,.\, A^3_{n1} \;+\; p_{31} \,.\, A^1_{m3} \,.\, A^2_{n2}) \\
-\,(p_{21} \,.\, A^1_{m3} \,.\, A^3_{n2} \;+\; p_{32} \,.\, A^1_{m3} \,.\, A^2_{n1}) \\
-\,p_{13} \,.\, (A^2_{m1} \,.\, A^3_{n2} \;-\; A^2_{m2} \,.\, A^3_{n1})
\end{gathered}$$

$$\Downarrow$$

$$d_{mn}$$

$$=$$

$$\begin{gathered}
-\,p_{11} \,.\, (A^2_{m2} \,.\, A^3_{n3} - A^2_{m3} \,.\, A^3_{n2}) - p_{12} \,.\, (A^2_{m1} \,.\, A^3_{n3} - A^2_{m3} \,.\, A^3_{n1}) - p_{13} \,.\, (A^2_{m1} \,.\, A^3_{n2} - A^2_{m2} \,.\, A^3_{n1}) \\
-\,p_{21} \,.\, (A^1_{m3} \,.\, A^3_{n2} - A^1_{m2} \,.\, A^3_{n3}) - p_{22} \,.\, (A^1_{m1} \,.\, A^3_{n3} - A^1_{m3} \,.\, A^3_{n1}) - p_{23} \,.\, (A^1_{m2} \,.\, A^3_{n1} - A^1_{m1} \,.\, A^3_{n2}) \\
-\,p_{31} \,.\, (A^1_{m2} \,.\, A^2_{n3} - A^1_{m3} \,.\, A^2_{n2}) - p_{32} \,.\, (A^1_{m3} \,.\, A^2_{n1} - A^1_{m1} \,.\, A^2_{n3}) - p_{33} \,.\, (A^1_{m2} \,.\, A^2_{n1} - A^1_{m1} \,.\, A^2_{n2})
\end{gathered}$$

Le formalisme du coefficient générique d_{mn} suggère de fait que la matrice suivante joue effectivement un rôle important :

$$[{}_{mn}T]$$

$$=$$

$$[{}_{mn}t_{ij}]$$

$$=$$

$$-\begin{bmatrix} (A^2_{m2} \,.\, A^3_{n3} \;-\; A^2_{m3} \,.\, A^3_{n2}) & (A^1_{m3} \,.\, A^3_{n2} \;-\; A^1_{m2} \,.\, A^3_{n3}) & (A^1_{m2} \,.\, A^2_{n3} \;-\; A^1_{m3} \,.\, A^2_{n2}) \\ (A^2_{m1} \,.\, A^3_{n3} \;-\; A^2_{m3} \,.\, A^3_{n1}) & (A^1_{m1} \,.\, A^3_{n3} \;-\; A^1_{m3} \,.\, A^3_{n1}) & (A^1_{m3} \,.\, A^2_{n1} \;-\; A^1_{m1} \,.\, A^2_{n3}) \\ (A^2_{m1} \,.\, A^3_{n2} \;-\; A^2_{m2} \,.\, A^3_{n1}) & (A^1_{m2} \,.\, A^3_{n1} \;-\; A^1_{m1} \,.\, A^3_{n2}) & (A^1_{m2} \,.\, A^2_{n1} \;-\; A^1_{m1} \,.\, A^2_{n2}) \end{bmatrix}$$

puisque ce coefficient générique n'est rien d'autre que :

$$d_{mn} = Trace\{[_{mn}T] . [P]\}$$

Cette formule semble effectivement être générique. Les propriétés habituelles de la trace [B01 ; page 184], le même résultat peut également se réécrire :

$$d_{mn} = Trace\{[P] . [_{mn}T]\} = Trace\{[P]^t . [_{mn}T]^t\} = Trace\{[_{mn}T]^t . [P]^t\}$$

En intervertissant les positions de m et n :

$$d_{nm} = Trace\{[_{nm}T] . [P]\} = Trace\{[P] . [_{nm}T]\} = Trace\{[P]^t . [_{nm}T]^t\} = Trace\{[_{nm}T]^t . [P]^t\}$$

nota bene : il n'y a pas de lien évident entre [$_{mn}$T] et [$_{nm}$T] ; et il n'y en a peut-être pas.

□

Définition 1.1. ***Contraction*** *: Soit un ensemble de neuf matrices dans M(3, ℂ) : S = {[$_{mn}U$] ; m, n = 1, 2, 3} ; soit la la contraction des éléments de cet ensemble en un nouvel élément [X] dans M(3, ℂ) tel que :*

$$[X] = [x_{nm} = Trace\{[_{nm}U]\}]$$

Lemme 1.3. *La matrice [D] est la contraction de neuf matrices [$_{mn}T$].[P] ; m, n = 1, 2, 3.*

Proposition 1.4. *Le carré des coefficients.*

Démonstration. : Quand les matrices de l'ensemble S sont hermitiennes, la formule suivante sur les traces peut s'appliquer [B01 ; page 222], [B02 ; page 255] :

$$\forall m, n = 1, 2, 3 : exp[Trace\{[_{mn}U]\}] = det(exp[_{mn}U]\}])$$

Lorsque les neuf matrices [$_{mn}$T].[P] (pour m, n = 1, 2, 3) sont hermitiennes *a priori*, alors **pour chacune d'elles** prise séparément :

$$\forall m, n = 1, 2, 3 : exp(d_{mn}) = det(exp\{[_{mn}T] . [P]\})$$

Si les arguments contenus dans cette formule acceptent des développements de Taylor, alors :

$$\forall m, n = 1, 2, 3 : 1 + d_{mn} + \frac{1}{2} . d_{mn}^2 + ... = det(Id_3 + [_{mn}T] . [P] + ...)$$

Il est possible de prouver que le développement au premier ordre du terme de droite a le formalisme :

$$\forall m, n = 1, 2, 3 :$$

$$det(Id_3 + [_{mn}T] . [P]) = 1 + Trace[_{mn}T] . [P] + Y([_{mn}T] . [P]) + |_{mn}T| . |P|$$

Avec :

$$\forall\, m,\, n \,=\, 1,\, 2,\, 3 : \; Y([_{mn}T] \,.\, [P]) \,=\, ...$$

De sorte que :

$$\forall\, m,\, n \,=\, 1,\, 2,\, 3 : \; \frac{1}{2} \,.\, d_{mn}^2 \,\sim\, Y([_{mn}T] \,.\, [P]) \,+\, |_{mn}T| \,.\, |P|$$

□

Proposition 1.5. *La Prop.1.3 peut se généraliser à tous les coefficients de degré deux du déterminant stratégique (qui est également la polynomiale Λ) associé à une décomposition non-triviale.*

Démonstration. : Il serait intéressant de compléter les résultats précédents (Prop.1.3) ; tout particulièrement pour ce qui concerne les coefficients hors de la diagonale de la matrice [D]. Une observation attentive montre que :

— Indépendamment de ce qu'est la matrice [P], il existe une correspondance entre la somme des matrices $[_{mm}\mathrm{T}]$ et la matrice $|\mathrm{A}|.([\mathrm{A}]^{-1}.[\mathrm{J}])^t$; pour autant je ne sais rien des composantes des termes en dehors de la diagonale de la matrice reconstruite dont la diagonale coincide avec celle de la matrice [D].

$$\forall\, [P] : \{[_{11}T] \,+\, [_{22}T] \,+\, [_{33}T]\} \,=\, |A| \,.\, \{[A]^{-1} \,.\, [J]\}^t$$

— Soit l'exemple des termes dont les indices sont dans $\{1,\, 2\}$; le coefficient d_{12} est (rappel) :

$$[_{12}T]$$
$$=$$
$$[_{12}t_{ij}]$$
$$=$$
$$-\begin{bmatrix} (A_{12}^2 \,.\, A_{23}^3 \,-\, A_{13}^2 \,.\, A_{22}^3) & (A_{13}^1 \,.\, A_{22}^3 \,-\, A_{12}^1 \,.\, A_{23}^3) & (A_{12}^1 \,.\, A_{23}^2 \,-\, A_{13}^1 \,.\, A_{22}^2) \\ (A_{11}^2 \,.\, A_{23}^3 \,-\, A_{13}^2 \,.\, A_{21}^3) & (A_{11}^1 \,.\, A_{23}^3 \,-\, A_{13}^1 \,.\, A_{21}^3) & (A_{13}^1 \,.\, A_{21}^2 \,-\, A_{11}^1 \,.\, A_{23}^2) \\ (A_{11}^2 \,.\, A_{22}^3 \,-\, A_{12}^2 \,.\, A_{21}^3) & (A_{12}^1 \,.\, A_{21}^3 \,-\, A_{11}^1 \,.\, A_{22}^3) & (A_{12}^1 \,.\, A_{21}^2 \,-\, A_{11}^1 \,.\, A_{22}^2) \end{bmatrix}$$

Le coefficient d_{21} s'écrit quant à lui :

$$[_{21}T]$$
$$=$$
$$[_{21}t_{ij}]$$
$$=$$
$$-\begin{bmatrix} (A_{22}^2 \,.\, A_{13}^3 \,-\, A_{23}^2 \,.\, A_{12}^3) & (A_{23}^1 \,.\, A_{12}^3 \,-\, A_{22}^1 \,.\, A_{13}^3) & (A_{22}^1 \,.\, A_{13}^2 \,-\, A_{23}^1 \,.\, A_{12}^2) \\ (A_{21}^2 \,.\, A_{13}^3 \,-\, A_{23}^2 \,.\, A_{11}^3) & (A_{21}^1 \,.\, A_{13}^3 \,-\, A_{23}^1 \,.\, A_{11}^3) & (A_{23}^1 \,.\, A_{11}^2 \,-\, A_{21}^1 \,.\, A_{13}^2) \\ (A_{21}^2 \,.\, A_{12}^3 \,-\, A_{22}^2 \,.\, A_{11}^3) & (A_{22}^1 \,.\, A_{11}^3 \,-\, A_{21}^1 \,.\, A_{12}^3) & (A_{22}^1 \,.\, A_{11}^2 \,-\, A_{21}^1 \,.\, A_{12}^2) \end{bmatrix}$$

La somme des deux coefficients vaut :

$$[_{12}T] \,+\, [_{21}T]$$

$$=$$

$$- \begin{bmatrix} (A^2_{12} \,.\, A^3_{23} \;-\; A^2_{23} \,.\, A^3_{12}) & (A^1_{23} \,.\, A^3_{12} \;-\; A^1_{12} \,.\, A^3_{23}) & (A^1_{12} \,.\, A^2_{23} \;-\; A^1_{23} \,.\, A^2_{12}) \\ (A^2_{21} \,.\, A^3_{13} \;-\; A^2_{13} \,.\, A^3_{21}) & (A^1_{21} \,.\, A^3_{13} \;-\; A^1_{13} \,.\, A^3_{21}) & (A^1_{13} \,.\, A^2_{21} \;-\; A^1_{21} \,.\, A^2_{13}) \\ (A^2_{21} \,.\, A^3_{12} \;-\; A^2_{12} \,.\, A^3_{21}) & (A^1_{12} \,.\, A^3_{21} \;-\; A^1_{21} \,.\, A^3_{12}) & (A^1_{12} \,.\, A^2_{21} \;-\; A^1_{21} \,.\, A^2_{12}) \end{bmatrix}$$

La troisième ligne s'annule à cause de l'antisymétrie de la matrice déformante [A] :

$$[{}_{12}T] \;+\; [{}_{21}T]$$

$$=$$

$$- \begin{bmatrix} (A^2_{12} \,.\, A^3_{23} \;-\; A^2_{23} \,.\, A^3_{12}) & (A^1_{23} \,.\, A^3_{12} \;-\; A^1_{12} \,.\, A^3_{23}) & (A^1_{12} \,.\, A^2_{23} \;-\; A^1_{23} \,.\, A^2_{12}) \\ (A^2_{21} \,.\, A^3_{13} \;-\; A^2_{13} \,.\, A^3_{21}) & (A^1_{21} \,.\, A^3_{13} \;-\; A^1_{13} \,.\, A^3_{21}) & (A^1_{13} \,.\, A^2_{21} \;-\; A^1_{21} \,.\, A^2_{13}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Là encore, en considérant l'inverse de la matrice déformante supposée a priori inversible :

$$[{}_{12}T] \;+\; [{}_{21}T] \;=\; \begin{bmatrix} -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\ -a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette somme dépend visiblement d'une partie des composantes de l'inverse de la matrice déformante. Des résultats similaires peuvent être obtenus pour les sommes $[{}_{23}\mathrm{T}] + [{}_{32}\mathrm{T}]$ et $[{}_{31}\mathrm{T}] + [{}_{13}\mathrm{T}]$.

— Soit à nouveau les matrices $[{}_{mm}\mathrm{T}].\mathrm{P}$ pour m = 1, 2, 3 ; les coefficients omis jusque-là peuvent être calculé :

$${}_{11}x_{12}$$

$$=$$

$$p_{12} \,.\, (A^2_{13} \,.\, A^3_{12} - A^2_{12} \,.\, A^3_{13}) + p_{22} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^3_{13} - A^1_{13} \,.\, A^3_{12}) + p_{32} \,.\, (A^1_{13} \,.\, A^2_{12} - A^1_{12} \,.\, A^2_{13})$$

$${}_{11}x_{13}$$

$$=$$

$$p_{13} \,.\, (A^2_{13} \,.\, A^3_{12} - A^2_{12} \,.\, A^3_{13}) + p_{23} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^3_{13} - A^1_{13} \,.\, A^3_{12}) + p_{33} \,.\, (A^1_{13} \,.\, A^2_{12} - A^1_{12} \,.\, A^2_{13})$$

$${}_{22}x_{21}$$

$$=$$

$$p_{11} \,.\, (A^2_{21} \,.\, A^3_{23} - A^2_{23} \,.\, A^3_{21}) + p_{21} \,.\, (A^1_{23} \,.\, A^3_{21} - A^1_{21} \,.\, A^3_{23}) + p_{31} \,.\, (A^1_{21} \,.\, A^2_{23} - A^1_{23} \,.\, A^2_{21})$$

$${}_{22}x_{23}$$

$$=$$

$$p_{13} \,.\, (A^2_{21} \,.\, A^3_{23} - A^2_{23} \,.\, A^3_{21}) + p_{23} \,.\, (A^1_{23} \,.\, A^3_{21} - A^1_{21} \,.\, A^3_{23}) + p_{33} \,.\, (A^1_{21} \,.\, A^2_{23} - A^1_{23} \,.\, A^2_{21})$$

$${}_{33}x_{31}$$

$$=$$

$$p_{11} \,.\, (A^2_{31} \,.\, A^3_{32} - A^2_{32} \,.\, A^3_{31}) + p_{21} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^3_{13} - A^1_{13} \,.\, A^3_{12}) + p_{31} \,.\, (A^1_{32} \,.\, A^2_{31} - A^1_{31} \,.\, A^2_{32})$$

$$_{33}x_{32}$$

$$=$$

$$p_{12} \,.\, (A^2_{31} \,.\, A^3_{32} - A^2_{32} \,.\, A^3_{31}) + p_{22} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^3_{13} - A^1_{13} \,.\, A^3_{12}) + p_{32} \,.\, (A^1_{32} \,.\, A^2_{31} - A^1_{31} \,.\, A^2_{32})$$

La somme des deux coefficients vaut :

$$d_{12} \,+\, d_{21}$$

$$=$$

$$\begin{array}{c}
- p_{11} \,.\, (A^2_{12} \,.\, A^3_{23} - A^2_{13} \,.\, A^3_{22}) - p_{12} \,.\, (A^2_{11} \,.\, A^3_{23} - A^2_{13} \,.\, A^3_{21}) - p_{13} \,.\, (A^2_{11} \,.\, A^3_{22} - A^2_{12} \,.\, A^3_{21}) \\
- p_{21} \,.\, (A^1_{13} \,.\, A^3_{22} - A^1_{12} \,.\, A^3_{23}) - p_{22} \,.\, (A^1_{11} \,.\, A^3_{23} - A^1_{13} \,.\, A^3_{21}) - p_{23} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^3_{21} - A^1_{11} \,.\, A^3_{22}) \\
- p_{31} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^2_{23} - A^1_{13} \,.\, A^2_{22}) - p_{32} \,.\, (A^1_{13} \,.\, A^2_{21} - A^1_{11} \,.\, A^2_{23}) - p_{33} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^2_{21} - A^1_{11} \,.\, A^2_{22})
\end{array}$$

$$+$$

$$\begin{array}{c}
- p_{11} \,.\, (A^2_{22} \,.\, A^3_{13} \,-\, A^2_{23} \,.\, A^3_{12}) \\
- p_{12} \,.\, (A^2_{21} \,.\, A^3_{13} \,-\, A^2_{23} \,.\, A^3_{11}) \\
- p_{13} \,.\, (A^2_{21} \,.\, A^3_{12} \,-\, A^2_{22} \,.\, A^3_{11}) \\
- p_{21} \,.\, (A^1_{23} \,.\, A^3_{12} \,-\, A^1_{22} \,.\, A^3_{13}) \\
- p_{22} \,.\, (A^1_{21} \,.\, A^3_{13} \,-\, A^1_{23} \,.\, A^3_{11}) \\
- p_{23} \,.\, (A^1_{22} \,.\, A^3_{11} \,-\, A^1_{21} \,.\, A^3_{12}) \\
- p_{31} \,.\, (A^1_{22} \,.\, A^2_{13} \,-\, A^1_{23} \,.\, A^2_{12}) \\
- p_{32} \,.\, (A^1_{23} \,.\, A^2_{11} \,-\, A^1_{21} \,.\, A^2_{13}) \\
- p_{33} \,.\, (A^1_{22} \,.\, A^2_{11} \,-\, A^1_{21} \,.\, A^2_{12})
\end{array}$$

$$=$$

$$\begin{array}{c}
- p_{11} \,.\, (A^2_{12} \,.\, A^3_{23} \,-\, A^2_{23} \,.\, A^3_{12}) \\
- p_{12} \,.\, (A^2_{21} \,.\, A^3_{13} \,-\, A^2_{13} \,.\, A^3_{21}) \\
- p_{13} \,.\, (A^2_{21} \,.\, A^3_{12} \,-\, A^2_{12} \,.\, A^3_{21}) \\
- p_{21} \,.\, (A^1_{23} \,.\, A^3_{12} \,-\, A^1_{12} \,.\, A^3_{23}) \\
- p_{22} \,.\, (A^1_{21} \,.\, A^3_{13} \,-\, A^1_{13} \,.\, A^3_{21}) \\
- p_{23} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^3_{21} \,-\, A^1_{21} \,.\, A^3_{12}) \\
- p_{31} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^2_{23} \,-\, A^1_{23} \,.\, A^2_{12}) \\
- p_{32} \,.\, (A^1_{13} \,.\, A^2_{21} \,-\, A^1_{21} \,.\, A^2_{13}) \\
- p_{33} \,.\, (A^1_{12} \,.\, A^2_{21} \,-\, A^1_{21} \,.\, A^2_{12})
\end{array}$$

De fait, la troisième colonne s'annule parce que (i) le cube déformant est anti-symétrique et (ii) $\mathbb{C}$ est un corps commutatif :

$$d_{12} \,+\, d_{21}$$

$$=$$

$$-p_{11} . (A^2_{12} . A^3_{23} - A^2_{23} . A^3_{12}) - p_{12} . (A^3_{12} . A^2_{13} - A^2_{12} . A^3_{13})$$

$$-p_{21} . (A^1_{23} . A^3_{12} - A^1_{12} . A^3_{23}) - p_{22} . (A^3_{12} . A^1_{13} - A^1_{12} . A^3_{13})$$

$$-p_{31} . (A^1_{12} . A^2_{23} - A^1_{23} . A^2_{12}) - p_{32} . (A^1_{12} . A^2_{13} - A^2_{12} . A^1_{13})$$

Les sommes $\mathrm{d}_{23} + \mathrm{d}_{32}$ et $\mathrm{d}_{31} + \mathrm{d}_{13}$ s'obtiennent de manière similaire par permutation cyclique. Une confrontation visuelle avec le formalisme des coefficients omis mène à :

$$(d_{12} + d_{21}) = ({}_{11}x_{12} + {}_{22}x_{21})$$

$$(d_{23} + d_{32}) = ({}_{22}x_{23} + {}_{33}x_{32})$$

$$(d_{31} + d_{13}) = ({}_{33}x_{31} + {}_{11}x_{13})$$

La coincidence achève de démontrer la proposition. □

Définition 1.2. *Matrices équivalentes.*

Dans ce document, deux éléments [M] et [N] de M(3, ℂ) sont équivalents si et seulement si :

- Ils ont la même diagonale : ∀ a = 1, 2, 3 : $\mathrm{m}_{aa} = \mathrm{n}_{aa}$;
- La somme des composantes des trois diagonales orthogonales à la diagonale centrale sont identiques ; concrètement je veux dire que : ∀ a, b = 1, 2, 3 : $\mathrm{m}_{ab} + \mathrm{m}_{ba} = \mathrm{n}_{ab} + \mathrm{n}_{ba}$.

Par convention, cette équivalence est noté [M] ≡ [N].

Définition 1.3. *Noyau de la partie principale d'une décomposition intrinsèque d'un produit vectoriel déformé.*

Par convention du langage, un *noyau* de la partie principale [P] d'une décomposition intrinsèque d'un produit vectoriel déformé est une matrice [N] de M(3, ℂ) *équivalente*, au sens donné par la définition 1.2, à la matrice [D] des coefficients de degré deux de la polynomiale Λ(**projectile**) résultant de cette décomposition. Elle est définie par le théorème suivant.

Théorème 1.1. *De reconstruction de la matrice [D] des coefficients de degré deux.*

Quand la matrice déformante [A] n'est pas dégénérée, il existe une matrice [N] équivalente à la matrice [D] contenant l'ensemble des coefficients de degré deux de la polynomiale Λ(**projectile**) = $|_{[A]}\Phi$(**projectile**) - [P]| résultant de l'existence éventuelle d'une décomposition non triviale d'un produit vectoriel déformé :

$$[N] = |A| . \{[A]^{-1} . [J]\}^t . [P] \equiv [D]$$

1.2 Noyau de la partie principale d'une décomposition non-triviale et Hessienne du déterminant stratégique.

Proposition 1.6. *La Hessienne de la polynomiale Λ est la somme de la matrice de ses coefficients de degré deux et de la transposée de celle-ci.*

Démonstration. : A partir de maintenant :

1. le déterminant stratégique est vu comme une polynomiale de degré deux exprimée en fonction des trois composantes du projectile impliqué dans le produit vectoriel déformé dont les décompositions éventuellement non-triviales sont étudiées ;
2. j'étudie cette polynomiale dans le cadre de l'algèbre géométrique.

Ce point de vue autorise à calculer les dérivées partielles par rapport aux composantes du projectile de cette polynomiale. Dans un premier temps, par pédagogie, je supposerai que les coefficients ne dépendent pas des composantes du projectile noté ici $\mathbf{a}$:

$$\Lambda(a^1, a^2, a^3)$$

$$=$$

$$d_{11} \,.\, (a^1)^2 \,+\, d_{22} \,.\, (a^2)^2 \,+\, d_{33} \,.\, (a^3)^2$$

$$+\,(d_{12} \,+\, d_{21}) \,.\, a^1 \,.\, a^2 \,+\, (d_{23} \,+\, d_{31}) \,.\, a^2 \,.\, a^3 \,+\, (d_{13} \,+\, d_{31}) \,.\, a^1 \,.\, a^3$$

$$+\,d_1 \,.\, a^1 \,+\, d_2 \,.\, a^2 \,+\, d_3 \,.\, a^3 \,-\, |P|$$

Il vient dans un premier temps :

$$\frac{\partial \Lambda(a^1, a^2, a^3)}{\partial a^1} = 2 \,.\, d_{11} \,.\, a^1 \,+\, (d_{12} \,+\, d_{21}) \,.\, a^2 \,+\, (d_{13} \,+\, d_{31}) \,.\, a^3 \,+\, d_1$$

$$\frac{\partial \Lambda(a^1, a^2, a^3)}{\partial a^2} = (d_{12} \,+\, d_{21}) \,.\, a^1 \,+\, 2 \,.\, d_{22} \,.\, a^2 \,+\, (d_{23} \,+\, d_{32}) \,.\, a^3 \,+\, d_2$$

$$\frac{\partial \Lambda(a^1, a^2, a^3)}{\partial a^3} = (d_{13} \,+\, d_{31}) \,.\, a^1 \,+\, (d_{23} \,+\, d_{32}) \,.\, a^2 \,+\, 2 \,.\, d_{33} \,.\, a^3 \,+\, d_3$$

Puis, comme attendu :

$$[Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3)] \,=\, [D] \,+\, [D]^t$$

□

Proposition 1.7. *L'équivalence formelle des matrices au sens précisé par la définition 1.2 est une relation d'équivalence mathématique.*

Démonstration. Il est simple de montrer que :

1. Tout élément de $\mathrm{M}(3,\, \mathbb{C})$ est équivalent à lui-même au sens précisé par la définition 1.2 ;
2. Si un élément $[\mathrm{M}_1]$ de $\mathrm{M}(3,\, \mathbb{C})$ est équivalent à un élément $[\mathrm{M}_2]$ de $\mathrm{M}(3,\, \mathbb{C})$, alors la proposition inverse reste vraie ;

3. Si un élément $[\mathrm{M}_1]$ de M(3, $\mathbb{C}$) est équivalent à un élément $[\mathrm{M}_2]$ de M(3, $\mathbb{C}$), et si cet élément $[\mathrm{M}_2]$ de M(3, $\mathbb{C}$) est équivalent à un élément $[\mathrm{M}_3]$ de M(3, $\mathbb{C}$), alors l'élément $[\mathrm{M}_1]$ de M(3, $\mathbb{C}$) est équivalent à un élément $[\mathrm{M}_3]$ de M(3, $\mathbb{C}$).

Ceci tient au fait que l'équivalence définie plus haut compare des sommes en les égalant ; or l'égalité de deux nombres est une relation d'équivalence mathématique. □

Proposition 1.8. *Au sens précisé par la définition 1.2, un quelconque élément de M(3, $\mathbb{C}$) est équivalent à son transposé.*

Démonstration. Evident : la diagonale du transposé est égale à celle de l'élément d'origine ; la somme des entrées sur n'importe laquelle des trois diagonales orthogonales reste évidemment inchangée par transposition de l'élément d'origine.

$$\forall\, [M] \in M(3,\, \mathbb{C}) \,:\, [M] \underbrace{\equiv}_{dfinition\, 1.2} [M]^t$$

□

Proposition 1.9. *Au sens précisé par la définition 1.2, soit un quelconque élément $[M_1]$ de M(3, $\mathbb{C}$) équivalent à un élément $[L_1]$ de M(3, $\mathbb{C}$) et un quelconque élément $[M_2]$ de M(3, $\mathbb{C}$) équivalent à un élément $[L_2]$ de M(3, $\mathbb{C}$). La somme $[M_1] + [M_2]$ est équivalente à la somme $[L_1] + [L_2]$.*

Démonstration. 1. La somme est interne sur M(3, $\mathbb{C}$).

2. Pour les diagonales :

$$\{\forall\, d \in I_3 \,:\, {}_1m_{dd} = {}_1l_{dd},\, {}_2m_{dd} = {}_2l_{dd}\} \Rightarrow {}_1m_{dd} + {}_2m_{dd} = {}_1l_{dd} + {}_2l_{dd}$$

3. Pour les trois orthogonales aux diagonales :

$$\{\forall\, c,\, d \in I_3 \,:\, {}_1m_{cd} + {}_1m_{dc} = {}_1l_{cd} + {}_1l_{dc},\, {}_2m_{cd} + {}_2m_{dc} = {}_2l_{cd} + {}_2l_{dc}\}$$
$$\Downarrow$$
$${}_1m_{cd} + {}_1m_{dc} + {}_2m_{cd} + {}_2m_{dc} = {}_1l_{cd} + {}_1l_{dc} + {}_2l_{cd} + {}_2l_{dc}$$

□

Corollaire 1.1. *Contrainte sur le noyau de la partie principale de la décomposition non-triviale.*

Lorsqu'un produit vectoriel déformé $[\mathbf{a},\, \mathbf{b}]_{[A]}$ peut être décomposé non-trivialement, et que les coefficients d_{ij} de degré deux de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$ résultant de cette décomposition ne dépendent pas des composantes du projectile $\mathbf{a}$, alors la Hessienne de cette polynomiale est équivalente à la somme du noyau de cette décomposition et du transposé de ce noyau :

$$[N] + [N]^t$$
$$=$$
$$|A| \,.\, \{\{[A]^{-1} \,.\, [J]\}^t \,.\, [P] + [P]^t \,.\, \{[A]^{-1} \,.\, [J]\}\}$$
$$\equiv$$
$$[Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3)]$$

1.3 Matrices, vecteurs et scalaires associés à une polynomiale de degré deux.

Remarque 1.1. *Lien sous-jacent avec la physique.*

Il est admis que la géométrie spatiale locale dans laquelle nous vivons à chaque instant est tridimensionnelle et euclidienne. Les mathématiques sont une des nombreuses activités humaines. Il semble par conséquent logique de dire que les mathématiques se font dans une ambiance géométrique tridimensionnelle euclidienne.

Cette apparente évidence, ajouté à la certitude qu'il existe bien d'autres géométries que la notre [B05 ; Hilbert], invite à se demander si les calculs mathématiques seraient conduits de la même manière que celle pratiquée ici sur Terre dans un environnement géométrique différent ?

Quelle que soit la réponse à cette légitime question, il est pour le moment admis que la géométrie euclidienne constitue toujours la géométrie limite réelle à laquelle n'importe quel expérimentateur peut rapporter sa gestuelle, pourvu qu'il accepte de réduire suffisamment la taille de l'échantillon spatial et temporel dans lequel il prétend découvrir et formaliser des lois physiques.

Ce constat peut être érigé en principe. Ce principe doit venir se superposer à celui, énoncé par A. Einstein, selon lequel le formalisme des lois physique fondamentales doit être le même dans tous les référentiels inertiels.

La réalisation simultanée de ces deux principes constitue un cahier des charges poussant à penser que seules les formalisations, les représentations apparentes, des objets physiques d'intérêt varient d'un contexte géométrique à l'autre. Et elles le font de telle sorte qu'un passage à la limite euclidienne doit redonner les lois établies dans cette ambiance euclidienne.

Je vais tenter de clarifier ma pensée en l'illustrant par l'exemple des polynomiales de degré deux.

Remarque 1.2. *Représentations apparentes des polynomiales de degré deux.*

Compte tenu du préalable géométrique rappelé lors de la précédente remarque, il est implicitement admis que les calculs menant à la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$ obtenue en calculant le déterminant stratégique associé à une décomposition donné ont été réalisé dans un espace doté du produit scalaire euclidien classique. Celui-ci est caractérisé par la matrice identité Id_3. Ceci autorise à écrire cette polynomiale de la façon communément admise suivante [B02 ; p. 163, (1.1)] :

$$\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3)\; +\; |P|\; = <\mathbf{a}, \{[D]\,.\,|\mathbf{a}>\}>_{Id_3}\; +\; <\mathbf{a}, \mathbf{d}^*>_{Id_3}$$

Il est également su que la géométrie euclidienne se laisse justement représenter par la matrice identité Id_3 définissant le produit scalaire localement : [G(Euclide)]

$= \mathrm{Id}_3$. Une connaissance qui a d'ailleurs été généralisée par Riemann.

Cette manière d'écrire la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$ et l'analyse contextuelle menant à cette écriture poussent à dire que le triplé (|P|, $\mathbf{d}^*$, [D]) est la représentation apparente de la polynomiale dans une ambiance géométrique caractérisée par la matrice [G(Euclide)] $= \mathrm{Id}_3$, c'est-à-dire euclidienne.

Pour donner corps à l'idée énoncée au cours de la remarque précédente, cette sous-section se consacre à la recherche des triplés (s, $\mathbf{v}$, [R]) qui pourraient naturellement être associés avec une polynomiale de degré deux lorsque l'espace E(3, $\mathbb{C}$) est rapporté à une ambiance géométrique caractérisée par une forme quadratique non-dégénérée représentée par la matrice [B] de M(3, $\mathbb{C}$). Elle examine donc ce qu'implique le fait de vouloir écrire la polynomiale obtenue de façon classique dans un environnement différent :

$$\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3) \,+\, s \,=< \mathbf{a}, \{[R] \,.\, |\mathbf{a} >\} >_{[B]} \,+\, < \mathbf{a}, \mathbf{v} >_{[B]}$$

L'examen des termes degré par degré livre en allant du plus petit au plus grand :

$$|P| \,=\, s$$

$$\sum_m d_m \,.\, a^m \,=< \mathbf{a}, \mathbf{v} >_{[B]}$$

$$\sum_{mn} d_{mn} \,.\, a^m \,.\, a^n \,=< \mathbf{a}, \{[R] \,.\, |\mathbf{a} >\} >_{[B]}$$

ou, plus précisément :

$$|P| \,=\, s$$

$$\sum_m d_m \,.\, a^m \,=\, \sum_{m,n} b_{mn} \,.\, a^m \,.\, v^n$$

$$\sum_{mn} d_{mn} \,.\, a^m \,.\, a^n \,=\, \sum_{m,p} b_{mp} \,.\, a^m \,.\, \sum_n (r_{pn} \,.\, a^n)$$

Ces relations peuvent être réalisées indépendamment du projectile $\mathbf{a}$ lorsque :

— Coefficient de degré zéro :

$$|P| \,=\, s$$

— Coefficients de degré un :

$$\forall m :\, d_m \,=\, \sum_n b_{mn} \,.\, v^n$$

— Coefficients de degré deux :

$$\forall m :\, d_{mm} \,=\, \sum_p b_{mp} \,.\, r_{pn}$$

$$\forall m \,<\, n :\, d_{mn} \,+\, d_{nm} \,=\, \sum_p (b_{mp} \,.\, r_{pn} \,+\, b_{np} \,.\, r_{pm})$$

Nota bene : concernant ces termes *hors diagonale*, un ordonnancement a pu être réalisé du fait que la discussion prend place sur un corps commutatif ; ce qui autorise à écrire :

$$a^m \,.\, a^n \,=\, a^n \,.\, a^m$$

Et ce qui implique le :

Théorème 1.2. *Des représentations apparentes des polynomiales de degré deux.*

Dans le contexte ayant permis de démontrer la proposition 1.6 [1], si l'espace mathématique des discussions, E(3, $\mathbb{C}$), est équipé d'une forme quadratique inversible et qu'un produit vectoriel déformé s'y décompose non trivialement, alors la polynomiale de degré deux associée avec cette décomposition non-triviale se laisse représenter par un ou plusieurs triplés (s, **v**, [R]) tel(s) que :

$$s \,=\, |P|$$

$$|\mathbf{v} >=\, [B]^{-1} \,.\, |\mathbf{d}^* >$$

$$[B] \,.\, [R] \,+\, [R]^t \,.\, [B]^t \,=\, [Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})]$$

Corollaire 1.2. —

Reconsidérant à cet endroit le corollaire 1.1 du théorème 1.1, il devient possible d'écrire :

$$|A| \,.\, \{\{[A]^{-1} \,.\, [J]\}^t \,.\, [P] \,+\, [P]^t \,.\, \{[A]^{-1} \,.\, [J]\}\}$$

$$=$$

$$[N] \,+\, [N]^t$$

$$\equiv$$

$$[Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3)]$$

$$=$$

$$[B] \,.\, [R] \,+\, [R]^t \,.\, [B]^t$$

En observant ces relations et en tenant compte des propos tenus précédemment, comment ne pas penser que la partie principale [P] d'une décomposition peut parfois coincider avec la représentation apparente [R] de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$, notemment lorsque le contexte géométrique est donné par la matrice [B] définie par :

$$[B] \,=\, |A| \,.\, \{[A]^{-1} \,.\, [J]\}^t \,?$$

Pour autant, dans le cadre des mathématiques, il n'y a pas d'argument sérieux justifiant de faire systématiquement coincider le contexte géométrique avec la matrice que je noterai désormais par convention :

$$[T] \,=\, |A| \,.\, \{[A]^{-1} \,.\, [J]\}^t$$

En revanche, rien ne semble s'opposer à poser de manière générale l'équivalence :

$$[N] \,=\, [T] \,.\, [P] \,\equiv\, [B] \,.\, [R] \,=\, [D]$$

1. Rappel : les coefficients de la polynomiale ne dépendent pas des composantes du vecteur sur lequel elle agit.

1.4 L'exemple des métriques induites par l'évolution des surfaces.

Les considérations précédentes ont une illustration physique potentiellement intéressante ; en effet, un travail avant-gardiste d'E. Cartan datant de 1933 [B04] suggère d'examiner la famille particulière de situations autorisant à poser [B04 ; p. 16, (V)] :

$$\frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})] \;=\; g\,.\,[G]^{-1}$$

La définition de g et la démonstration de cette formule étant respectivement précisée et donnée dans la référence citée ici.

Cette famille correspond à un ensemble de situations physiques pour lesquelles la métrique spatiale locale est proportionnelle à la forme quadratique non-dégénérée introduite ci-avant ou à son inverse ([B] $\sim$ [G], ou [B] $\sim$ $[\mathrm{G}]^{-1}$ avec $|\mathrm{B}| \neq 0$) quand (i) cette métrique est déterminée par les évolutions d'une surface et (ii) il est possible d'identifier la polynomiale issue de la théorie de la question (E) avec le carré de la fonction introduite par Cartan :

$$\Lambda(\mathbf{a}) \;=\; L^2(Cartan)$$

La polynomiale associée avec une décomposition non-triviale d'un produit vectoriel déformé du type $[\mathbf{a},\, ...]_{[A]}$ se laisse alors représenter par un ensemble de triplés (|P|, **v**, [R]) qui dépendent du contexte géométrique.

Exemple 1.1. *Quand le contexte géométrique est celui de la métrique inverse.*

Par exemple, lorsque ce contexte se laisse décrire par les égalités :

$$\frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})] \;=\; g\,.\,[G]^{-1} \;=\; \frac{1}{2}\,.\,[B]$$

... alors la Hessienne est implicitement supposée inversible [2] et chaque représentation matricielle [R] possible doit respecter :

$$[Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})] \;=\; [Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})]\,.\,[R] \;+\; [R]^t\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})]^t$$

Dans le cas encore plus particulier des polynomiales continues, la Hessienne est symétrique ; comme elle a été supposée inversible :

$$[R]^t \;=\; [Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})]\,.\,\{Id_3 \;-\; [R]\}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})]^{-1}$$

Le transposé $[\mathrm{R}]^t$ de la représentation apparente [R] est ici défini de manière similaire à un adjoint algébrique [B02 ; §8, pp. 260-263] de la matrice identité à laquelle la représentation apparente a été soustraite.

2. Ce n'est pas obligatoire a priori ; je reviens un peu plus tard sur ce point technique important.

1.5 La matrice [T] et son inverse.

La matrice suivante est naturellement apparu dans la discussion menant au théorème 1.1 :

$$[T] \,=\, |A|\,.\,[J]^t\,.\,([A]^{-1})^t$$

Puisque :

- le déterminant du transposé d'une matrice vaut celui de la matrice en question ;
- le déterminant de l'inverse d'une matrice est l'inverse du déterminant de ladite matrice,

Il est aisé de constater que :

$$|T| \,=\, |A|\,.\,|J|\,.\,\frac{1}{|A|} \,=\, -1 \,\neq\, 0$$

Ainsi, la matrice [T] n'est pas dégénérée ; les calculs peuvent donc se poursuivre avec :

$$[T]\,.\,[T]^{-1} \,=\, [t_{ij}]\,.\,[T_{ij}] = Id_3 = [T]^{-1}\,.\,[T]$$

Précisément :

$$\begin{bmatrix} |T|\,.\,T_{11} = (t_{22}\,.\,t_{33} - t_{32}\,.\,t_{23}) & |T|\,.\,T_{12} = (t_{13}\,.\,t_{32} - t_{12}\,.\,t_{33}) & |T|\,.\,T_{13} = (t_{12}\,.\,t_{23} - t_{22}.t_{13}) \\ |T|\,.\,T_{21} = (t_{31}\,.\,t_{23} - t_{33}\,.\,t_{21}) & |T|\,.\,T_{22} = (t_{11}\,.\,t_{33} - t_{31}\,.\,t_{13}) & |T|\,.\,T_{23} = (t_{21}\,.\,t_{13} - t_{11}\,.\,t_{23}) \\ |T|\,.\,T_{31} = (t_{21}\,.\,t_{32} - t_{31}\,.\,t_{22}) & |T|\,.\,T_{32} = (t_{12}\,.\,t_{31} - t_{11}\,.\,t_{32}) & |T|\,.\,T_{33} = (t_{22}\,.\,t_{11} - t_{12}\,.\,t_{21}) \end{bmatrix}$$

Et :

$$|A|\,.\,[A]^{-1} \,=\, |A|\,.\,[a_{ij}] \,=\, \begin{bmatrix} |A|\,.\,a_{11} \,=\, t_{31} & |A|\,.\,a_{12} \,=\, t_{11} & |A|\,.\,a_{13} \,=\, -t_{21} \\ |A|\,.\,a_{21} \,=\, t_{32} & |A|\,.\,a_{22} \,=\, t_{12} & |A|\,.\,a_{23} \,=\, -t_{22} \\ |A|\,.\,a_{31} \,=\, t_{33} & |A|\,.\,a_{32} \,=\, t_{13} & |A|\,.\,a_{33} \,=\, -t_{23} \end{bmatrix}$$

Il ne s'agit en fait que de :

$$\begin{bmatrix} |T|\,.\,T_{11} = |A|^2\,.\,(a_{21}\,.\,a_{33} - a_{23}\,.\,a_{31}) & |T|\,.\,T_{12} = |A|^2\,.\,(a_{32}\,.\,a_{21} - a_{22}\,.\,a_{31}) & |T|\,.\,T_{13} = |A|^2\,.\,(a_{32}\,.\,a_{23} - a_{22}.a_{33}) \\ |T|\,.\,T_{21} = |A|^2\,.\,(a_{31}\,.\,a_{13} - a_{33}\,.\,a_{11}) & |T|\,.\,T_{22} = |A|^2\,.\,(a_{12}\,.\,a_{31} - a_{11}\,.\,a_{32}) & [T|\,.\,T_{23} = |A|^2\,.\,(a_{12}\,.\,a_{33} - a_{13}\,.\,a_{32}) \\ |T|\,.\,T_{31} = |A|^2\,.\,(a_{11}\,.\,a_{23} - a_{13}\,.\,a_{21}) & |T|\,.\,T_{32} = |A|^2\,.\,(a_{22}\,.\,a_{11} - a_{12}\,.\,a_{21}) & |T|\,.\,T_{33} = |A|^2\,.\,(a_{22}\,.\,a_{13} - a_{12}\,.\,a_{23}) \end{bmatrix}$$

Dans le même état d'esprit :

$$[A]\,.\,[A]^{-1} \,=\, [A_{ij}].[a_{ij}] = Id_3 = [A]^{-1}.\,[A]\,;\,|A| \,\neq\, 0$$

D'où je déduis :

$$\begin{bmatrix} |A|\,.\,A_{11} = (a_{22}\,.\,a_{33} - a_{32}\,.\,a_{23}) & |A|\,.\,A_{12} = (a_{13}\,.\,a_{32} - a_{12}\,.\,a_{33}) & |A|\,.\,A_{13} = (a_{12}\,.\,a_{23} - a_{22}.a_{13}) \\ |A|\,.\,A_{21} = (a_{31}\,.\,a_{23} - a_{33}\,.\,a_{21}) & |A|\,.\,A_{22} = (a_{11}\,.\,a_{33} - a_{31}\,.\,a_{13}) & |A|\,.\,A_{23} = (a_{21}\,.\,a_{13} - a_{11}\,.\,a_{23}) \\ |A|\,.\,A_{31} = (a_{21}\,.\,a_{32} - a_{31}\,.\,a_{22}) & |A|\,.\,A_{32} = (a_{12}\,.\,a_{31} - a_{11}\,.\,a_{32}) & |A|\,.\,A_{33} = (a_{22}\,.\,a_{11} - a_{12}\,.\,a_{21}) \end{bmatrix}$$

Une confrontation avec les résultats précédents livre :

$$\begin{bmatrix} |T|\,.\,T_{11} = -|A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{21} & |T|\,.\,T_{12} = |A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{31} & |T|\,.\,T_{13} = -|A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{11} \\ |T|\,.\,T_{21} = -|A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{22} & |T|\,.\,T_{22} = |A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{32} & [T|\,.\,T_{23} = -|A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{12} \\ |T|\,.\,T_{31} = -|A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{23} & |T|\,.\,T_{32} = |A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{33} & |T|\,.\,T_{33} = -|A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{13} \end{bmatrix}$$

Et, en réintroduisant les composantes de la matrice déformante :

$$\begin{bmatrix} |T|\,.\,T_{11} = -|A|\,.\,A^1_{23} & |T|\,.\,T_{12} = |A|\,.\,A^1_{13} & |T|\,.\,T_{13} = -|A|\,.\,A^1_{12} \\ |T|\,.\,T_{21} = -|A|\,.\,A^2_{23} & |T|\,.\,T_{22} = |A|\,.\,A^1_{13} & [T|\,.\,T_{23} = -|A|\,.\,A^1_{12} \\ |T|\,.\,T_{31} = -|A|\,.\,A^3_{23} & |T|\,.\,T_{32} = |A|\,.\,A^1_{13} & |T|\,.\,T_{33} = -|A|\,.\,A^1_{12} \end{bmatrix}$$

Comme (rappel) |T| = -1 :

$$[T]^{-1} = |A| \, . \, [A]^t \, . \, [J]$$

Le calcul du déterminant de cette matrice permet de réaliser que, forcément :

$$|A|^2 = 1$$

Ce résultat démontre que les matrices déformantes peuvent, entre autres possibilités, être des éléments de SU(3).

Définition 1.4. *La règle d'or.*

Par convention, un élément [M] de M(3, ℂ) satisfait la *règle d'or* chaque fois que la relation suivante est validée :

$$([M]^{-1})^t = ([M]^t)^{-1}$$

Proposition 1.10. *If the deforming matrix respects the golden rule and if the square of its determinant is equal to one, then the formalism of the inverse of the matrix [T] can be recovered with the usual rule govening the inversion of matrices.*

Démonstration. - The usual rule govening the inversion of matrices allows to write :

$$[T]^{-1} = \frac{1}{|A|} \, . \, ((([A]^{-1})^t)^{-1} \, . \, ([J]^t)^{-1}$$

But (recall) :

$$[J]^2 = -[J]^t \, ; \, [J]^3 = -Id_3 \, ; \, [J]^4 = -[J] \, ; \, [J]^5 = [J]^t \, ; \, [J]^6 = Id_3;$$

Hence :

$$[T]^{-1} = \frac{1}{|A|} \, . \, ((([A]^{-1})^t)^{-1} \, . \, [J]$$

Therefore, if the deforming matrix respects the golden rule :

$$[T]^{-1} = \frac{1}{|A|} \, . \, ((([A]^t)^{-1})^{-1} \, . \, [J]$$

Since the inversion is an involutive operation :

$$[T]^{-1} = \frac{1}{|A|} \, . \, [A]^t \, . \, [J]$$

So that if :

$$|A|^2 = 1$$

It become obvious that :

$$[T]^{-1} = |A| \, . \, [A]^t \, . \, [J]$$

It is effectively the formalism which has been obtained above in a totally different manner. □

Théorème 1.3. *De la matrice déformante effective.*

L'inverse de la matrice [T] apparue dans la définition du noyau est, à un signe moins près, égale à la matrice déformante effective (voir page 3).

$$[T]^{-1} = |A| \, . \, [A]^t \, . \, [J] = |A| \, . \, [A]^*$$

1.6 Coefficients de degré un.

Le calcul livre dans une première étape :

$$d_m$$

$$=$$

$$A^1_{m1} \cdot (p_{22} \cdot p_{33} - p_{32} \cdot p_{23}) - p_{11} \cdot [(p_{23} \cdot A^3_{m2} + p_{32} \cdot A^2_{m3}) - (p_{22} \cdot A^3_{m3} + p_{33} \cdot A^2_{m2})]$$

$$-$$

$$\{A^1_{m2} \cdot (p_{21} \cdot p_{33} - p_{31} \cdot p_{23}) - p_{12} \cdot [(p_{23} \cdot A^3_{m1} + p_{31} \cdot A^2_{m3}) - (p_{21} \cdot A^3_{m3} + p_{33} \cdot A^2_{m1})]\}$$

$$+$$

$$A^1_{m3} \cdot (p_{21} \cdot p_{32} - p_{22} \cdot p_{31}) - p_{13} \cdot [(p_{22} \cdot A^3_{m1} + p_{31} \cdot A^2_{m2}) - (p_{21} \cdot A^3_{m2} + p_{32} \cdot A^2_{m1})]$$

Soit encore :

$$d_1$$

$$=$$

$$A^1_{12} \cdot (p_{31} \cdot p_{23} - p_{21} \cdot p_{33}) + A^2_{12} \cdot (p_{33} \cdot p_{11} - p_{31} \cdot p_{13}) + A^3_{12} \cdot (p_{21} \cdot p_{13} - p_{11} \cdot p_{23})$$

$$+$$

$$A^1_{13} \cdot (p_{21} \cdot p_{32} - p_{22} \cdot p_{31}) + A^2_{13} \cdot (p_{31} \cdot p_{12} - p_{11} \cdot p_{32}) + A^3_{13} \cdot (p_{11} \cdot p_{22} - p_{21} \cdot p_{12})$$

$$d_2$$

$$=$$

$$A^1_{12} \cdot (p_{32} \cdot p_{23} - p_{22} \cdot p_{33}) + A^2_{12} \cdot (p_{33} \cdot p_{12} - p_{32} \cdot p_{13}) + A^3_{12} \cdot (p_{22} \cdot p_{13} - p_{12} \cdot p_{23})$$

$$+$$

$$A^1_{23} \cdot (p_{21} \cdot p_{32} - p_{22} \cdot p_{31}) + A^2_{23} \cdot (p_{31} \cdot p_{12} - p_{11} \cdot p_{32}) + A^3_{23} \cdot (p_{11} \cdot p_{22} - p_{21} \cdot p_{12})$$

$$d_3$$

$$=$$

$$A^1_{13} \cdot (p_{32} \cdot p_{23} - p_{22} \cdot p_{33}) + A^2_{13} \cdot (p_{33} \cdot p_{12} - p_{32} \cdot p_{13}) + A^3_{13} \cdot (p_{22} \cdot p_{13} - p_{12} \cdot p_{23})$$

$$+$$

$$A^1_{23} \cdot (p_{21} \cdot p_{33} - p_{23} \cdot p_{31}) + A^2_{23} \cdot (p_{31} \cdot p_{13} - p_{11} \cdot p_{33}) + A^3_{23} \cdot (p_{11} \cdot p_{23} - p_{21} \cdot p_{13})$$

Proposition 1.11. *Les coefficients de degré un du déterminant stratégique (alias la polynomiale Λ) associé à la décomposition non-trivial d'un produit vectoriel déformé dépendent (i) des composantes de l'inverse de la partie principale [P] de cette décomposition et (ii) des composantes de la matrice déformante [A].*

Démonstration. A ce stade de la discussion, le formalisme exact de la partie principale [P] reste inconnu ; ceci n'empêche pas d'en calculer formellement l'inverse aussi longtemps que son déterminant est supposé a priori différent de zéro. Dans ce cas :

$$|P| \neq 0 \Rightarrow \exists\, [P]^{-1} \;:\; [P]\,.\,[P]^{-1} \,=\, [p_{ij}]\,.\,[P_{jk}] \,=\, Id_3 \,=\, [\delta_i^k] \,=\, [P]^{-1}\,.\,[P]$$

Concrètement :

$$|P|\,.\,[P]^{-1}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} |P|\,.\,P_{11} = (p_{22}\cdot p_{33} - p_{32}\cdot p_{23}) & |P|\,.\,P_{12} = (p_{13}\cdot p_{32} - p_{12}\cdot p_{33}) & |P|\,.\,P_{13} = (p_{12}\cdot p_{23} - p_{22}.p_{13}) \\ |P|\,.\,P_{21} = (p_{31}\cdot p_{23} - p_{33}\cdot p_{21}) & |P|\,.\,P_{22} = (p_{11}\cdot p_{33} - p_{31}\cdot p_{13}) & |P|\,.\,P_{23} = (p_{21}\cdot p_{13} - p_{11}\cdot p_{23}) \\ |P|\,.\,P_{31} = (p_{21}\cdot p_{32} - p_{31}\cdot p_{22}) & |P|\,.\,P_{32} = (p_{12}\cdot p_{31} - p_{11}\cdot p_{32}) & |P|\,.\,P_{33} = (p_{22}\cdot p_{11} - p_{12}\cdot p_{21}) \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$|P|\,.\begin{bmatrix} (p_{22}\cdot p_{33} - p_{32}\cdot p_{23}) & (p_{13}\cdot p_{32} - p_{12}\cdot p_{33}) & (p_{12}\cdot p_{23} - p_{22}.p_{13}) \\ (p_{31}\cdot p_{23} - p_{33}\cdot p_{21}) & (p_{11}\cdot p_{33} - p_{31}\cdot p_{13}) & (p_{21}\cdot p_{13} - p_{11}\cdot p_{23}) \\ (p_{21}\cdot p_{32} - p_{31}\cdot p_{22}) & (p_{12}\cdot p_{31} - p_{11}\cdot p_{32}) & (p_{22}\cdot p_{11} - p_{12}\cdot p_{21}) \end{bmatrix}$$

L'observation attentive de ce formalisme mène à :

$$\begin{bmatrix} d_1 = |P|.(A^1_{12}\,.\,P_{21} \,+\, A^2_{12}\,.\,P_{22} \,+\, A^3_{12}\,.\,P_{23} \,+\, A^1_{13}\,.\,P_{31} \,+\, A^2_{13}\,.\,P_{32} \,+\, A^3_{13}\,.\,P_{33}) \\ d_2 = |P|.(-A^1_{12}\,.\,P_{11} - A^2_{12}\,.\,P_{12} - A^3_{12}\,.\,P_{13} \,+\, A^1_{23}\,.\,P_{31} \,+\, A^2_{23}\,.\,P_{32} \,+\, A^3_{23}.P_{33}) \\ d_3 = |P|.(-A^1_{13}\,.\,P_{11} - A^2_{13}\,.\,P_{12} \,+\, A^3_{13}\,.\,P_{13} - A^1_{23}\,.\,P_{21} - A^2_{23}\,.\,P_{22} \,+\, A^3_{23}\,.\,P_{23}) \end{bmatrix}$$

Soit à calculer :

$$[L] \,=\, |P|\,.\,[A]\,.\,([P]^{-1})^t$$

Il s'agit in extenso de :

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix} = |P|\,.\begin{bmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix}$$

Il se trouve que :

$$d_1 \,=\, L_{12} \,+\, L_{33}$$

$$d_2 \,=\, L_{23} \,-\, L_{11}$$

$$d_3 \,=\, -L_{31} \,-\, L_{22}$$

Compte tenu de la définition de la matrice [L], il est raisonnable de penser que la proposition est démontrée. □

1.7 Le formalisme des noyaux des décompositions.

Le théorème 1.1 a permis de démontrer l'existence d'un noyau [N] tel que :

$$[N] \,=\, [T]\,.\,[P]$$

Avec (rappel de la sous-section 1.5) :

$$[T] \,=\, |A|\,.\,[J]^t\,.\,([A]^{-1})^t$$

Par transposition :

$$[N]^t = [P]^t \,.\, [T]^t$$

En supposant *a priori* que toutes ces matrices sont inversibles, il est possible d'en déduire :

$$([N]^t)^{-1} = ([T]^t)^{-1} \,.\, ([P]^t)^{-1}$$

La matrice transposée de la matrice [T] vaut :

$$[T]^t = |A| \,.\, [A]^{-1} \,.\, [J]$$

D'où :

$$([T]^t)^{-1} = |A| \,.\, [J]^{-1} \,.\, [A]$$

Par conséquent :

$$([N]^t)^{-1} = |A| \,.\, [J]^{-1} \,.\, [A] \,.\, ([P]^t)^{-1}$$

Par ailleurs, jai également introduit pour l'analyse des coefficients de degré un de la polynomiale Λ la matrice [L] :

$$[L] = |P| \,.\, [A] \,.\, ([P]^{-1})^t$$

Elle s'écrit donc aussi :

$$[L] = |P| \,.\, |A| \,.\, [J] \,.\, ([N]^{-1})^t$$

En définissant alors pour convenance la matrice [Q] telle que :

$$[Q]^t = [N]^{-1}$$

Il suit :

$$[L] = |P| \,.\, |A| \,.\, [J] \,.\, [Q]$$

Il en découle une nouvelle écriture des coefficients de degré un qui peut suggérer l'existence d'un lien entre le vecteur $\mathbf{d}^*$ et un vecteur rotationnel :

$$d_1 = |P| \,.\, |A| \,.\, (q_{23} - q_{32})$$

$$d_2 = |P| \,.\, |A| \,.\, (q_{13} - q_{31})$$

$$d_3 = |P| \,.\, |A| \,.\, (q_{21} - q_{12})$$

C'est un résultat intermédiaire essentiel ; en effet, puisque chaque noyau [N] est équivalent à la matrice [D] des coefficients de degré deux de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$, voir le théorème 1.1, c'est qu'il existe un triplé de nombres complexes (n_{23}, n_{13}, n_{12}) tels que :

$$[N]$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & n_{12} & n_{13} \\ d_{12} + d_{21} - n_{12} & d_{22} & n_{23} \\ d_{13} + d_{31} - n_{13} & d_{23} + d_{32} - n_{23} & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{12} + d_{21} & 0 & 0 \\ d_{13} + d_{31} & d_{23} + d_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n_{12} & n_{13} \\ -n_{12} & 0 & n_{23} \\ -n_{13} & -n_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Il est donc techniquement possible de calculer formellement l'inverse du noyau :

$$[N]^{-1}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} D_{22} \,.\, D_{33} - n_{23} \,.\, (D_{23} - n_{23}) & -D_{33} \,.\, (D_{12} - n_{12}) + n_{23} \,.\, (D_{13} - n_{13}) & (D_{12} - n_{12}) \,.\, (D_{23} - n_{23}) - D_{22} \,.\, (D_{13} - n_{13}) \\ -D_{33} \,.\, n_{12} + n_{13} \,.\, (D_{23} - n_{23}) & D_{11} \,.\, D_{22} - n_{13} \,.\, (D_{13} - n_{13}) & n_{12} \,.\, (D_{13} - n_{13}) - D_{11} \,.\, (D_{23} - n_{23}) \\ n_{12} \,.\, n_{23} - D_{22} \,.\, n_{13} & (D_{12} - n_{12}) \,.\, n_{13} - D_{11} \,.\, n_{23} & D_{11} \,.\, D_{22} - n_{12} \,.\, (D_{12} - n_{12}) \end{bmatrix}$$

Avec :

$$D_{12} = d_{12} + d_{21};\ D_{23} = d_{23} + d_{32};\ D_{13} = d_{13} + d_{31}$$

Or, avec les conventions adoptées ci-dessus, l'inverse du noyau se laisse relier au transposé de la matrice [Q] puisque (rappel) :

$$[Q]^t = [N]^{-1}$$

Et la connaissance du transposé de la matrice [Q] induit automatiquement celle de la matrice [Q].

Par ailleurs, comme celle-ci est reliée à la matrice [L] par la nouvelle relation matricielle (rappel) :

$$[L] = |P| \,.\, |A| \,.\, [J] \,.\, [Q]$$

Et que la connaissance de la matrice [L] induit celle des coefficients de degré un de la polynomiale Λ, il en découle finalement après quelques calculs algébriques :

$$d_1 = -- \,.\, \{n_{12} \,.\, (D_{13} - n_{13}) - D_{11} \,.\, (D_{23} - n_{23}) - ((D_{12} - n_{12}) \,.\, n_{13} - D_{11} \,.\, n_{23})\}$$

$$d_2 = -- \,.\, \{(D_{12} - n_{12}) \,.\, (D_{23} - n_{23}) - D_{22} \,.\, (D_{13} - n_{13}) - (n_{12} \,.\, n_{23} - D_{22} \,.\, n_{13})\}$$

$$d_3 = -- \,.\, \{-D_{33} \,.\, n_{12} + n_{13} \,.\, (D_{23} - n_{23}) - (-D_{33} \,.\, (D_{12} - n_{12}) + n_{23} \,.\, (D_{13} - n_{13}))\}$$

Cette expression peut être simplifiée puis réorganisée :

$$2 \,.\, D_{11} \,.\, n_{23} - D_{12} \,.\, n_{13} + D_{13} \,.\, n_{12} = \frac{d_1}{|A|} + D_{11} \,.\, D_{23}$$

$$-D_{12} \,.\, n_{23} + 2 \,.\, D_{22} \,.\, n_{13} - D_{23} \,.\, n_{12} = -\frac{d_2}{|A|} + (D_{22} \,.\, D_{13} - D_{23} \,.\, D_{12})$$

$$D_{13} \,.\, n_{23} - D_{23} \,.\, n_{13} + 2 \,.\, D_{33} \,.\, n_{12} = \frac{d_3}{|A|} + D_{33} \,.\, D_{12}$$

Il s'agit ostensiblement d'un (double, un par valeur possible de |A| ; $\pm$ 1) système de trois combinaisons linéaires écrites en fonction des trois inconnues (n_{23}, n_{13}, n_{12}).

Proposition 1.12. *Le discriminant de ce système coincide avec le déterminant de la Hessienne de la polynomiale Λ.*

Démonstration. Le système ci-dessus a pour discriminant :

$$\begin{vmatrix} 2\,.\,D_{11} & -\,D_{12} & D_{13} \\ -D_{12} & 2\,.\,D_{22} & -\,D_{23} \\ D_{13} & -\,D_{23} & 2\,.\,D_{33} \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$2\,.\,D_{11}\,.\,(4\,.\,D_{22}\,.\,D_{33} - D_{23}\,.\,D_{32}) + D_{12}\,.\,(-D_{12}\,.\,D_{33} + D_{13}\,.\,D_{23}) + D_{13}\,.\,(D_{12}\,.\,D_{23} - D_{22}\,.\,D_{13})$$

Il s'identifie visiblement avec le déterminant de la matrice $\mathrm{Hess}_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})$. □

A partir de là, le système peut se traiter de manière habituelle. En particulier, il convient d'opérer une classification en lien direct avec la dégénérescence ou la non-dégénérescence de la Hessienne de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$:

1. **Classe I** : La Hessienne n'est pas dégénérée :

   $$|Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})| \,\neq\, 0$$

   La polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$ est dite *propre*. Elle admet un vecteur singulier :

   $$|_{\Lambda}\mathbf{s} >= \,-[Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})]\,.\,|\mathbf{d}^* >$$

   Et pour chacune des deux valeurs possibles de $|\mathrm{A}|$, le système admet une solution unique qui s'écrit :

   $$[N]_{|A|} \,=\, \frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})] \,+\, \frac{1}{|A|}\,.\,{}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})\,;\; |A| \,=\, \pm 1$$

2. **Classe II** : La Hessienne est dégénérée :

   $$|Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})| \,=\, 0$$

Définition 1.5. *Table de Pythagore.*

Par convention, j'appelle *table de Pythagore* bâtie sur le produit tensoriel classique l'élément de $\mathrm{M}(3,\,\mathbb{C})$ construit à partir de n'importe quelle paire $(\mathbf{h},\,\mathbf{g})$ de $\{\mathbb{C}\times\mathrm{E}(3,\,\mathbb{C})\}^2$ de telle sorte que :

$$\forall\,\mathbf{h},\,\mathbf{g}\,\in\,\mathbb{C}\otimes E(3,\,\mathbb{R})\;:$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,=\, \begin{bmatrix} h^1\,.\,g^1 & h^2\,.\,g^1 & h^3\,.\,g^1 \\ h^1\,.\,g^2 & h^2\,.\,g^2 & h^3\,.\,g^2 \\ h^1\,.\,g^3 & h^2\,.\,g^3 & h^3\,.\,g^3 \end{bmatrix}$$

Cette définition peut bien entendu et très facilement se généraliser à d'autres espaces vectoriels, et à d'autres opérations que le produit tensoriel classique.

Proposition 1.13. *N'importe quelle table de Pythagore bâtie sur le produit tensoriel classique peut formellement se comprendre comme un noyau.*

Démonstration.

$$\forall\, \mathbf{h},\, \mathbf{g} \in \mathbb{C} \otimes E(3,\, \mathbb{R}) \,:\, T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \,+\, T_2(\otimes)(\mathbf{g}, \mathbf{h})\} \,+\, \frac{1}{2} \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{g}, \mathbf{h})\}$$

Comme il se trouve que :

$$\forall\, \mathbf{h},\, \mathbf{g} \in \mathbb{C} \otimes E(3,\, \mathbb{R}) \,:$$

$${}_{[J]}\Phi(\frac{1}{2} \,.\, \mathbf{h} \wedge \mathbf{g}) \,=\, \frac{1}{2} \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{g}, \mathbf{h})\}$$

Par suite, toute table de Pythagore bâtie sur le produit tensoriel classique peut s'écrire alternativement :

$$\forall\, \mathbf{h},\, \mathbf{g} \in \mathbb{C} \otimes E(3,\, \mathbb{R}) \,:$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \,+\, T_2(\otimes)(\mathbf{g}, \mathbf{h})\} \,+\, {}_{[J]}\Phi(\frac{1}{2} \,.\, \mathbf{h} \wedge \mathbf{g})$$

Ce formalisme suggère de penser que :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \,+\, T_2(\otimes)(\mathbf{g}, \mathbf{h}) \,\sim\, [Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})]$$

$${}_{[J]}\Phi(\frac{1}{2} \,.\, \mathbf{h} \wedge \mathbf{g}) \,\sim\, \frac{1}{|A|} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})\,;\, |A| \,=\, \pm 1$$

Comme par ailleurs il est possible de vérifier que :

$$|T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \,+\, T_2(\otimes)(\mathbf{g}, \mathbf{h})|$$

$$=$$

$$\begin{vmatrix} 2.h^1.g^1 & h^2.g^1 \,+\, h^1.g^2 & h^3.g^1 \,+\, h^1.g^3 \\ h^2.g^1 \,+\, h^1.g^2 & 2.h^2.g^2 & h^3.g^2 \,+\, h^2.g^3 \\ h^3.g^1 \,+\, h^1.g^3 & h^2.g^3 \,+\, h^3.g^2 & 2.h^3.g^3 \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{vmatrix} A \,=\, 2.h^1.g^1 & B \,=\, h^2.g^1 \,+\, h^1.g^2 & C \,=\, h^3.g^1 \,+\, h^1.g^3 \\ B \,=\, h^2.g^1 \,+\, h^1.g^2 & D \,=\, 2.h^2.g^2 & E \,=\, h^3.g^2 \,+\, h^2.g^3 \\ C \,=\, h^3.g^1 \,+\, h^1.g^3 & E \,=\, h^2.g^3 \,+\, h^3.g^2 & F \,=\, 2.h^3.g^3 \end{vmatrix}$$

Un calcul in extenso livre ainsi :

$$A \,.\, (D \,.\, F \,-\, E^2) \,-\, B \,.\, (B \,.\, F \,-\, C \,.\, E) + C \,.\, (B \,.\, E \,-\, C \,.\, D)$$

$$= A \,.\, D \,.\, F \,-\, A \,.\, E^2 \,-\, B^2 \,.\, F + B \,.\, C \,.\, E + C \,.\, B \,.\, E \,-\, C^2 \,.\, D$$

$$= \,-\, 2.h^1.g^1 \,.\, (h^3.g^2 \,+\, h^2.g^3)^2 \,-\, 2.h^2.g^2 \,.\, (h^3.g^1 \,+\, h^1.g^3)^2$$

$$
\begin{aligned}
& -2.h^3.g^3.(h^2.g^1 + h^1.g^2)^2 \\
& +8.h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 + 2.(h^2.g^1 + h^1.g^2).(h^3.g^1 \\
& +h^1.g^3).(h^2.g^3 + h^3.g^2) \\
= & -2.h^1.g^1.(h^3.g^2)^2 - 2.h^1.g^1.(h^2.g^3)^2 - 4.h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 \\
& -2.h^2.g^2.(h^3.g^1)^2 - 2.h^2.g^2.(h^1.g^3)^2 - 4.h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 \\
& -2.h^3.g^3.(h^1.g^2)^2 - 2.h^3.g^3.(h^2.g^1)^2 - 4.h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 \\
& +8.h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 \\
& +2.[h^2.h^3.(g^1)^2 + h^2.h^1.g^1.g^3 + h^1.h^3.g^1.g^2 \\
& +(h^1)^2.g^2.g^3].(h^2.g^3 + h^3.g^2) \\
= & -2.h^1.g^1.(h^3.g^2)^2 - 2.h^1.g^1.(h^2.g^3)^2 \\
& -2.h^2.g^2.(h^3.g^1)^2 - 2.h^2.g^2.(h^1.g^3)^2 \\
& -2.h^3.g^3.(h^1.g^2)^2 - 2.h^3.g^3.(h^2.g^1)^2 \\
& -4.h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 \\
& +2.[h^3.g^3.(h^2.g^1)^2 + h^1.g^1.(h^2.g^3)^2 \\
& +h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 + h^2.g^2.(h^1.g^3)^2] \\
& +2.[h^2.g^2.(h^3.g^1)^2 + h^1.g^1.h^2.g^2.h^3.g^3 \\
& +h^1.g^1.(h^3.g^2)^2 + h^3.g^3.(h^1.g^2)^2] \\
= & \ 0
\end{aligned}
$$

Il est encore plus tentant d'interpréter la somme d'une table de Pythagore et de sa transposée comme une Hessienne dégénérée. En revanche, il ne sera pas possible de qualifier le produit vectoriel classique de vecteur singulier puisque - dans ce cas- la polynomiale est *impreopre.* □

1.8 Le formalisme des parties principales des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés.

Théorème 1.4. *Le formalisme des parties principales des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés.*

Puisque les noyaux sont désormais connus, et classifiés, il devient possible de finir cet exposé en énonçant le formalisme des parties principales des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés. Il suffit pour ce faire de se souvenir du résultat livré par le théorème 1.1 :

$$[N] = [T].[P]$$

A partir du moment où la matrice déformante [T] est inversible, les parties principales des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés sont clairement définies ; en effet, l'inversibilité présupposée permet facilement de parvenir à :

$$[P] = [T]^{-1} . [N]$$

L'inverse de la matrice [T] ayant été calculé au cours de la sous-section 1.5, il vient plus précisément :

$$[P] = |A| . [A]^t . [J] . [N_{|A|}] = , |A| = \pm 1$$

Ainsi, il existe deux grandes classes de parties principales :

1. **Classe I** : La Hessienne n'est pas dégénérée :

$$|Hess_{(\mathbf{a},0)} \Lambda(\mathbf{a})| \neq 0$$

Et dans ces cas :

$$[P]_{|A|} = |A| . [A]^* . \{\frac{1}{2} . [Hess_{(\mathbf{a},0)} \Lambda(\mathbf{a})] + \frac{1}{|A|} . {}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})\}$$

2. **Classe II** : La Hessienne est dégénérée :

$$|Hess_{(\mathbf{a},0)} \Lambda(\mathbf{a})| = 0$$

$$\exists\, \mathbf{h}, \mathbf{g} \in \mathbb{C} \otimes E(3, \mathbb{R}) : [Hess_{(\mathbf{a},0)} \Lambda(\mathbf{a})] = T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})$$
$$[P] = |A| . [A]^* . T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})$$

1.9 Conclusions.

Je prie le lectorat de remarquer que cette démonstration se caractérise par les faits suivants :

1. La discussion a été menée de manière à rester la plus générale possible ; par exemple, il n'a pas été nécessaire de forcer l'égalité entre le noyau [N] et la matrice [D] des coefficients de degré deux de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$ apparaissant du fait de l'existence présumée d'une décomposition non-triviale d'un produit vectoriel déformé donné.
2. La démarche est qualifiée d'*intrinsèque* parce qu'elle ne fait appel qu'aux acteurs déjà explicitement présents dans l'énoncé de la question (E).
3. La démonstration aboutit.
4. Dans le cadre de la recherche des solutions complètes de la question (E), le résultat obtenu doit cependant être qualifié de partiel en ce sens qu'il ne donne pour l'heure aucune indication sur le reste de la décomposition. J'ai corrigé ce manquement par la mise au point d'une méthode extrinsèque ; merci de découvrir le document : PERIAT Thierry : Méthode extrinsèque de décomposition des produits vectoriels déformés, ISBN 978-2-36923-006-9, EAN 9782369230069, v1, 19 juillet-13 septembre 2022, 14 pages - sur le site cosmoquant.fr.

2 Remerciements

N'étant pas dans une position sociale me permettant de publier selon les canaux orthodoxes (faute d'un diplôme officiel en physique mathématique), je présente cette exploration sous ma seule responsabilité. J'appuie mes propos sur l'étude d'ouvrages acquis personnellement et sur des oeuvres librement accessibles en ligne. Je remercie les auteurs ayant accepté de les mettre gracieusement à disposition, en particulier les sites arXiv.org, NUMDAM, HAL, etc. (mais pas seulement).

3 Bibliographie

Références

3.1 Livres.

[B01] Weber and Arfken : Essential mathematical methods for physicists, international edition, ISBN 0-12-059878-7, Copyright ©2004 by Elsevier Science, 932 pages.

[B02] Broecker, T. : Lineare Algebra und Analytische Geometrie ; Grundstudium Mathematik, ein Lehrbuch fuer Physiker unf Mathematiker, zweite, korrigierte Auflage ; ISBN 3-7643-7144-7, Copyright ©2004 Birkhaüser Verlag, Postfach 133, CH-4010 Basel, Schweiz, 366 pages.

[B04] Cartan, E. : Les espaces métriques fondés sur la notion de d'aire ; "Actualités scientifiques et industrielles", numéro 72, exposés de géométrie publiés sous la direction de monsieur Elie Cartan, membre de l'institut et professeur à la Sorbonne ; Hermann et Cie, éditeurs, Paris, 1933, 46 pages (partie centrale de l'exposé).

[B05] Hilbert, D. : Grundlage der Geometrie (Klassische Texte der Wissenschaft, Festschrift 1899).