La méthode intrinsèque en dimension quatre.

Collection : “La Théorie de la Question (E)”

11 janvier 2023

Comment les sous-espaces de dimension trois constituant un espace de dimension quatre s’articulent-ils entre eux ? Comment utiliser les résultats déjà acquis avec la méthode intrinsèque mise au point pour résoudre la question (E) dans les espaces de dimension trois quand cette même question est posée dans un espace de dimension quatre ? Ce sont les deux interrogations autour desquelles se construit ce document et pour lesquelles il se contente d’ébaucher un panorama des éléments de réponse. Le calcul in extenso du discriminant stratégique est réalisé pour les produits tensoriels déformés par des cubes anti-réduits. Le théorème initial est généralisé.

Table des matières

1 Le lent développement de la théorie des produits tensoriels déformés et de leurs décompositions.

1.1 Le travail physique fondateur en dimension trois.

Motivé par les conséquences d'une analyse [a] des équations de J. C. Maxwell, [01], utilisant l'expression duale des produits vectoriels définis sur E(3, R) et leurs décompositions les plus triviales [1], j'ai entrepris l'étude et l'approfondissement de la notion de produit tensoriel déformé puis la recherche de méthodes permettant de les décomposer systématiquement. Le moteur sous-jacent à cette quête étant bien entendu le secret espoir de généraliser les résultats physiques prometteurs acquis dans le travail initial.

1.2 La méthode intrinsèque dans les espaces de dimension trois.

C'est ainsi qu'est née la méthode intrinsèque de décomposition des produits vectoriels déformés ; voir [b]. Cette prouesse algébrique dont les premières moutures furent élaborées autour des années 2004-2005 est longtemps restée une oeuvre orpheline, notemment à cause de sa taille mais surtout à cause de sa formulation approximative (aux yeux des mathématiciens professionnels) et de son incomplétude :

— Elle ne livre que la partie principale d'une décomposition mais absolument aucune indication sur son résidu.

— Elle mène à une bizarrerie au niveau de la limite euclidienne qui force à étendre l'exploration aux ensembles impliquant les nombres complexes ; voir la Rem.2.3 et le travail [c].

Enfin, ce que je découvrirai beaucoup plus tard, le noyau de la décomposition générique résultant des premières explorations ne représente qu'un des deux types possibles.

1. Ce sont de simples et banales matrices représentant des rotations dans un espace de dimension trois ; ex : voir la collection Aleph, programme terminales.

Bref, il n'était pas possible d'en rester là si je voulais atteindre mon objectif.

1.3 La découverte et l'étude des noyaux de type II (bâtis sur les hessiennes dégénérées).

J'ai longtemps cru que seules les polynomiales de degré deux accompagnant la décomposition non-triviale d'un produit vectoriel déformé ayant une hessienne non-dégénérée permettaient de découvrir un noyau pour cette décomposition. Cette croyance est erronée et doit être corrigée par le fait indéniable que même les polynomiales dont la hessienne est non nulle mais dégénérée peuvent générer des noyaux, dits de type II, pour les décompositions étudiées. Le noyau générique de type II est une table de Pythagore impliquant une paire de vecteurs : $\mathrm{T}_2(\otimes)(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

1.4 Invention de la méthode extrinsèque.

La méthode intrinsèque et son théorème initial avaient clairement mis en exergue la présence inévitable et le rôle, semble t-il stratégique, d'une polynomiale de degré deux écrite en fonction des composantes du projectile impliqué dans le produit vectoriel déformé dont les décompositions étaient étudiées. Justement, la prise en compte du fait que cette polynomiale peut être dégénérée (le déterminant de sa Hessienne est nul) a permis de perfectionner les premières versions de la méthode et la découverte des noyaux de type II.

Je me suis donc demandé s'il était possible de construire une autre polynomiale de degré deux écrite en fonction des mêmes composantes à partir de la même décomposition dont l'existence était présumée.

Très vite, l'idée de confronter un produit scalaire formé à partir (i) de la décomposition présumée et (ii) -facteur extrinsèque à la discussion- d'une forme bilinéaire locale (par exemple la métrique) avec le développement limité à l'ordre trois exclu a surgi. La méthode extrinsèque [d] était née.

Ayant ensuite compris :
— la possibilité de généraliser la notion de produit vectoriel à celle de produit de Lie déformé, [e] ;
— la nécessité de ne surtout pas confondre produit de Lie déformé d'un espace de dimension D et celui de produit alterné (extérieur) rencontré dans la littérature ;
— qu'un produit tensoriel déformé bâti sur un cube anti-symétrique était un produit de Lie déformé (voir plus bas la sous-section 3.3) ;

j'ai réalisé que la méthode extrinsèque pouvait aisément s'extrapoler aux produits tensoriels déformés définis sur des espaces de dimension D quelconque.

Bonus ultime, cette méthode livre la paire ([partie principale matricielle], vecteur résiduel) espérée.

Seules ombres au tableau, deux frayeurs mathématiques :

1. Dans les espaces de dimension trois, là où l'usage de la méthode intrinsèque avait déjà livré le formalisme de la partie principale matricielle de la décomposition d'un produit vectoriel déformé, la méthode extrinsèque livre une partie principale ne coincidant pas avec la première ;
2. La méthode comporte une sorte d'incertitude logique liée au fait que la réalisation d'une décomposition donnée annule le scalaire associé avec elle mais que l'inverse n'est pas toujours vrai ; voir le document [d].

Bref, il n'était toujours pas possible d'en rester là si je voulais concrétiser mon objectif.

1.5 Confrontation et ajustage.

La quête concernant la découverte des décompositions non-triviales au sein des espaces de dimension trois trouve son point d'orgue grâce à deux documents contenant respectivement :

1. Une étude faisant appel aux décompositions d'Helmholtz [f] ;
2. Une procédure assurant la construction d'un tenseur de courbure associable avec elles [g].

Le premier permet de réaliser un calibrage raisonnable et raisonné de la méthode extrinséque et de la méthode intrinsèque. Les lecteurs avertis y verront peut-être un lien avec le travail [02].

Le second rejoinds les travaux sur les aires en évolutions dûs à E. Cartan [03] et donne un sens physique assez facilement compréhensible aux décompositions ; elles sont en lien direct avec les surfaces crées par l'existence d'une courbure de l'espace.

1.6 L'énigme euclidienne.

J'ai signalé plus haut que la méthode intrinsèque, lorsqu'elle est poussée à la limite euclidienne classique, fait naître une énigme. Elle ne se résoud que sous deux conditions que je rappelle plus loin dans ce document au niveau de la remarque 2.3. L'avantage d'avoir eu à se confronter avec la configuration euclidienne aura été de découvrir le lien profond entre les noyaux de type I livrés par la méthode intrinsèque et les décompositions d'Euler-Rodrigues.

1.7 L'introduction d'opérateurs quantiques.

Une autre découverte importante pour cette théorie est qu'un noyaux de type I, lorsqu'il est affublé de son transposé, permet de définir une paire d'opérateurs quantiques [h].

2 La laborieuse montée en dimension quatre.

2.1 Configurations particulières et simples des quatre espaces de dimension trois.

Remarque 2.1. *Le cadre de la discussion.*

Dans un premier temps, je vais placer la discussion au sein des circonstances simples validant le théorème établi dans le document [b]. Ce choix signifie que dans chacun des quatre sous-espaces $E_\alpha(3, R)$ de dimension trois d'un espace de dimension quatre $E(4, R)$:

1. La métrique est symétrique, $^{(3)}[_\alpha\ G] = {}^{(3)}[_\alpha\ G]^t$, et non-dégénérée.
2. La connexion est assurée par la partie $I_\alpha = I_4 - \{\alpha\}$ de l'ensemble des composantes d'un cube $\Gamma(2)$ de symboles de Christoffel de la seconde espèce agissant dans l'espace de dimension quatre englobant ces quatre sous-espaces.

   Soit, pour exemple, la partie I_0 ; elle correspond à un sous-cube $\Gamma_0(2)$ dans lequel les indices ne peuvent prendre que les valeurs entières 1, 2, 3. Ce sous-cube a donc dans l'absolu 3 x 3 x 3 = 27 composantes au plus qui peuvent être ordonnées en trois matrices (3-3) superposées. Mais ces symboles de Christoffel sont symétriques [04 ; p. 48, (4.) et p. 49, (7.)] et par conséquent chacune de ces matrices est aussi une matrice symétrique ne contenant au plus que six composantes distinctes. Il ne reste donc au plus que 6 x 3 = 18 composantes distinctes dans chaque sous-cube. Ce raisonnement peut être répété pour chacun des quatre sous-cubes possibles. Il livre un ensemble contenant au plus 4 x 18 composantes, soit 72 composantes.

   Ce résultat montre l'insuffisance de ce début de dénombrement puisque le cube (4-4-4) englobant les sous-cubes (3-3-3) est une superposition de quatre matrices (4-4) symétriques ne contenant chacune au plus que dix composantes, soit 10 x 4 = 40 composantes. Par conséquent : un certain nombre de composantes appartiennent à plusieurs sous-cubes à la fois.

   Soit (à nouveau) l'exemple du cube (3-3-3) de label 0 contenu dans le cube de type (4-4-4-4) des symboles de Christofel de la seconde espèce : $\Gamma(2)$. L'ensemble des trois sous-matrices contenues dans ce *sous-cube* se résume à un enesemble d'au plus 10 composantes (couleurs [2]) différentes qui pourraient être rangées dans une matrice (4-4) symétrique :

$$\begin{bmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{13} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^1_{23} \\ \Gamma^1_{31} & \Gamma^1_{32} & \Gamma^1_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{13} \\ \Gamma^1_{12} & \Gamma^1_{22} & \Gamma^1_{23} \\ \Gamma^1_{13} & \Gamma^1_{23} & \Gamma^1_{33} \end{bmatrix}$$

2. noire, bleu, rouge, vert, cyan, citron, pourpre, olive, gris prononcé, gris léger.

$$\begin{bmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{13} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} & \Gamma^2_{23} \\ \Gamma^2_{31} & \Gamma^2_{32} & \Gamma^2_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{13} \\ \Gamma^2_{12} & \Gamma^2_{22} & \Gamma^2_{23} \\ \Gamma^2_{13} & \Gamma^2_{23} & \Gamma^2_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma^3_{11} & \Gamma^3_{12} & \Gamma^3_{13} \\ \Gamma^3_{21} & \Gamma^3_{22} & \Gamma^3_{23} \\ \Gamma^3_{31} & \Gamma^3_{32} & \Gamma^3_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \Gamma^3_{11} & \Gamma^3_{12} & \Gamma^3_{13} \\ \Gamma^3_{12} & \Gamma^3_{22} & \Gamma^3_{23} \\ \Gamma^3_{13} & \Gamma^3_{23} & \Gamma^3_{33} \end{bmatrix}$$

Ces situations peuvent donc se résumer par :

$$\{^{\beta}{}_{\chi}{}^{\gamma}\}_{E_\alpha(3,\,R)} \;=\; \{^{\chi}{}_{\beta}{}^{\gamma}\}_{E_\alpha(3,\,R)}$$

$$\Downarrow$$

$$^{\alpha}[\Gamma(2)] \;=\; ^{\alpha}[\Gamma(2)]^t \;\in\; M(4,\,R)$$

Chaque cube $\Gamma_\alpha(2)$ de type (3-3-3) pourrait donc, *a priori et en principe*, servir à définir une métrique de dimension quatre pour le sous-espace de dimension trois $\mathrm{E}_\alpha(3,\ \mathrm{R})$. Mais je ne pousserai pas cette remarque plus loin pour le moment.

3. Si les composantes des sous-cubes de type (3-3-3) font l'objet d'une réduction (ce qui, par définition, signifie) :

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\chi} \;=\; \Gamma^{\chi}_{\beta\alpha}$$

alors, non seulement cette seconde caractéristique est compatible avec la symétrie sur les indices bas mais elle réduit encore le nombre maximal de symboles distincts de Christoffel de la seconde espèce.

4. L'ensemble des dérivées partielles secondes de la métrique pour lesquelles les triplets d'indices appartiennent à I_α satisfont la relation :

$$\frac{\partial^2 g_{\mu\chi}}{\partial x^\pi \partial x^\beta} + \frac{\partial^2 g_{\pi\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\chi} - \frac{\partial^2 g_{\pi\chi}}{\partial x^\mu \partial x^\beta} - \frac{\partial^2 g_{\mu\beta}}{\partial x^\pi \partial x^\chi} = 0$$

Remarque 2.2. *Le problème.*

Le problème consiste à savoir comment coller et articuler ces sous-espaces pour qu'ils redonnent un espace de dimension quatre.

Remarque 2.3. *Rappel : la limite euclidienne.*

Que les lecteurs veuillent bien considérer l'énumération suivante :

1. J'ai déjà montré que l'application de la méthode intrinsèque [b] à l'étude de l'élément de longueur d'un espace de Riemann menait à une décomposition non-triviale des produits vectoriels classiques ne pouvant s'accepter qu'à deux conditions [c] :

   (a) La discussion est étendue de E(3, R) à E(3, C) ;

(b) Les deux arguments du produit vectoriel décomposé non-trivialement sont des spineurs d'E. Cartan et chacun d'eux est orthogonal à son résidu correspondant :

$$^{(3)}\mathbf{q}_1 \wedge {}^{(3)}\mathbf{q}_2 = -{}^{(3)}\mathbf{q}_2 + {}^{(3)}\mathbf{z} \; ; \; {}^{(3)}\mathbf{z} \perp {}^{(3)}\mathbf{q}_2 \; ; \; ({}^{(3)}\mathbf{q}_2)^2 = 0$$

$$^{(3)}\mathbf{q}_2 \wedge {}^{(3)}\mathbf{q}_1 = -{}^{(3)}\mathbf{q}_1 + {}^{(3)}\mathbf{Z} \; ; \; {}^{(3)}\mathbf{Z} \perp {}^{(3)}\mathbf{q}_1 \; ; \; ({}^{(3)}\mathbf{q}_1)^2 = 0$$

Quand tel est le cas, il existe toujours quatre vecteurs vérifiant une identité vectorielle analogue à celle des normales d'un tétraèdre : les deux arguments et les deux résidus (un par sens dans lequel un produit de deux vecteurs peut être écrit).

$$^{(3)}\mathbf{q}_1 + {}^{(3)}\mathbf{Z} + {}^{(3)}\mathbf{q}_2 + {}^{(3)}\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

Mais comme je vais le montrer au point 3 ci-dessous, l'analogie est complètement trompeuse.

2. L'étude menée sur l'élément de longueur de Riemann est en réalité une étude menée dans le sous-espace de label $\alpha = 0$. Elle peut être renouvelée dans chacun des trois autres sous-espaces $\mathrm{E}_j(3,\, \mathrm{C})$, pour $\mathrm{j} = 1,\, 2,\, 3$.

3. Deux arguments d'un sous-espace donné définissent toujours un plan de ce sous-espace. Par conséquent, si un résidu est orthogonal à l'une des directions du plan formé de la sorte, il l'est aussi vis-à-vis de la seconde direction définissant le plan. Il en résulte que les deux résidus devraient en principe être orthogonaux à un même plan, donc être localement parallèles entre eux.

   La relation précédente exhibe donc une analogie trompeuse car :

$$\exists k \in R : {}^{(3)}\mathbf{Z} = k \,.\, {}^{(3)}\mathbf{z}$$

   et la relation caractérisant la limite euclidienne de cette théorie se réduit à :

$$^{(3)}\mathbf{q}_1 + {}^{(3)}\mathbf{q}_2 + (k + 1) \,.\, {}^{(3)}\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

$$^{(3)}\mathbf{z} \perp {}^{(3)}\mathbf{q}_1 \; ; \; {}^{(3)}\mathbf{z} \perp {}^{(3)}\mathbf{q}_2$$

$$({}^{(3)}\mathbf{q}_1)^2 = 0 = ({}^{(3)}\mathbf{q}_2)^2$$

   Elle ne se définit que par un scalaire réel k et trois vecteurs tels que deux sont isotropiques [3] et forment un plan par rapport auquel le troisième est orthogonal.

   Compte tenu du contexte de cette discussion, ce plan et la normale à ce plan semblent définir le sous-espace de dimension trois dans lequel le raisonnement menant à la limite euclidienne a été conduit.

3. Au sens donné par E. cartan à cet adjectif : un vecteur non forcément nul de norme euclidienne nulle est isotropique.

4. Comme indiqué au point deux, ce raisonnement peut être conduit dans chacun des quatre sous-espaces de dimension trois implicitement contenu dans un espace de dimension quatre.

   A chaque sous-espace de dimension trois atteignant la limite euclidienne peut correspondre un plan défini par un point sans dimension euclidienne dont sont issus deux bords isotropiques et dont la perpendiculaire est le résidu de la décomposition de leur produit vectoriel ; soit $\mathbf{z}_\alpha$ le résidu pour la face α.

   La limite euclidienne étant atteinte pour les quatre sous-espaces, la discussion concerne quatre points sans dimension euclidienne dont sont issus quatre paires de vecteurs isotropiques et quatre perpendiculaires.

   Ces données ne disent encore pas comment les quatre sous-espaces, resp. les quatre faces, sont articulés.

   Pour autant, quatre points forment toujours un tétraèdre et tout tétraèdre se caractérise par la relation de fermeture concernant ses perpendiculaires :
$$\sum_{\alpha \in I_4} {}^{(3)}\mathbf{z}_\alpha = \mathbf{0}$$

Ces premières réflexions donnent une idée sur la manière d'associer les sous-espaces lorsque la géométrie est euclidienne dans chacun d'eux. Malheureusement dans les régions vides de l'univers, l'espace englobant n'est pas euclidien mais de Minkowski.

2.2 A la recherche d'un principe universel de collage des sous-espaces de dimension trois.

Remarque 2.4. *Quelques rappels concernant le tenseur de courbure.*

Les éléments suivants sont à prendre en considération :

1. Dans les conditions du théorème établi dans [g] :
$${}^{(4)}R_{\mu\pi\chi\beta}(TQE) = g_{\lambda\theta} \,.\, (\Gamma^{\lambda}_{\beta\pi} \,.\, \Gamma^{\theta}_{\chi\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\chi\pi} \,.\, \Gamma^{\theta}_{\beta\mu})$$
   Les symboles de Christoffel sont définis selon l'oeuvre originale [04 ; p. 48, (4.) et p. 49, (7.)] par :
$$\{{}^{\beta}{}_{\gamma}{}^{\chi}\} = \frac{g_{\gamma\lambda}}{g} \,.\, [{}^{\beta}{}_{\lambda}{}^{\chi}] = \frac{g_{\gamma\lambda}}{g} \,.\, \Gamma^{\lambda}_{\beta\chi} \;;\; g \neq 0$$
   Il suit donc :
$$g \,.\, {}^{(4)}R_{\mu\pi\chi\beta}(TQE) = \Gamma^{\lambda}_{\beta\pi} \,.\, \{{}^{\chi}{}_{\lambda}{}^{\mu}\} - \Gamma^{\lambda}_{\chi\pi} \,.\, \{{}^{\beta}{}_{\lambda}{}^{\mu}\}$$
   puis :
$$g^2 \,.\, g_{\phi\lambda} \,.\, {}^{(4)}R_{\mu\pi\chi\beta}(TQE) = \{{}^{\beta}{}_{\phi}{}^{\pi}\} \,.\, \{{}^{\chi}{}_{\lambda}{}^{\mu}\} - \{{}^{\chi}{}_{\phi}{}^{\pi}\} \,.\, \{{}^{\beta}{}_{\lambda}{}^{\mu}\}$$

Cette relation appelle deux sous-remarques qui seront importantes pour la suite :

(a) Elle décrit clairement les liens entre les composantes (i) de la métrique, (ii) du cube de Christoffel de la première espèce, et (iii) du tenseur de courbure ;

(b) Elle ne comporte aucune sommation mais par sommation sur les indices ϕ et λ, il suit :

$$g^2 \,.\, [G]^{\oplus} \,.\, {}^{(4)}R_{\,\mu\pi\chi\beta}(TQE) \;=\; \sum_{\phi\lambda} \{^{\beta}{}_{\phi}{}^{\pi}\} \,.\, \{^{\chi}{}_{\lambda}{}^{\mu}\} \;-\; \{^{\chi}{}_{\phi}{}^{\pi}\} \,.\, \{^{\beta}{}_{\lambda}{}^{\mu}\}$$

$$[G]^{\oplus} \;=\; \sum_{\phi\lambda} g_{\phi\lambda}$$

Chaque composante du tenseur de courbure de la théorie des produits tensoriels déformés est une somme d'expressions, chacune étant assimilable au déterminant d'une matrice carrée (2-2) dont les entrées sont des symboles de Christoffel de la première espèce.

2. Ce type de relations existe pour chaque sous-espace $E_\alpha(3, C)$:

$$_{(\alpha)}g^2 \cdot {}_{(\alpha)}g_{\phi\lambda} \cdot {}^{(3)}_{(\alpha)}R_{\,\mu\pi\chi\beta}(TQE)$$
$$=$$
$$\{^{\beta}{}_{\phi}{}^{\pi}\}_{E_\alpha(3,C)} \cdot \{^{\chi}{}_{\lambda}{}^{\mu}\}_{E_\alpha(3,C)} \;-\; \{^{\chi}{}_{\phi}{}^{\pi}\}_{E_\alpha(3,C)} \cdot \{^{\beta}{}_{\lambda}{}^{\mu}\}_{E_\alpha(3,C)}$$

3. Enfin, la correspondance habituelle entre l'espace global de dimension quatre et le sous-espace de dimension trois ayant le label 0 s'écrit [05, p.514, (21.75)] :

$${}^{(4)}R^{\lambda}{}_{\pi\chi\beta} \;=\; {}^{(3)}R^{\lambda}{}_{\pi\chi\beta} \;+\; \frac{1}{\mathbf{n}^2} \,.\, (K_{\pi\chi} \,.\, K^{\lambda}_{\beta} \;-\; K_{\pi\beta} \,.\, K^{\lambda}_{\chi})$$

Et aussi :

$$g^{\lambda\mu} \,.\, {}^{(4)}R_{\mu\pi\chi\beta} \;=\; {}^{(3)}R^{\lambda}{}_{\pi\chi\beta} \;+\; \frac{1}{\mathbf{n}^2} \,.\, (K_{\pi\chi} \,.\, K^{\lambda}_{\beta} \;-\; K_{\pi\beta} \,.\, K^{\lambda}_{\chi})$$

Il reste à découvrir comment toutes ces relations peuvent s'articuler harmonieusement entre elles.

Remarque 2.5. *Vérification des symétries et des anti-symétries du tenseur de courbure.*

En principe, dans le cadre de validité du théorème établi dans [g], les propriétés du tenseur de courbure de la TQE sont les mêmes que celles de celui de Riemann. Est-il possible de le vérifier ici ?

Soit l'information obtenue à la remarque 4, alinéa 1 (a). Soit la métrique symétrique utilisée jusqu'à présent. Je suppose qu'il existe au moins un référentiel dans laquelle elle se laisse diagonaliser sans être dégénérée (g $\neq 0$) ; elle a quatre composantes diagonales qui doivent obéir à :

$$g^2 \,.\, g_{\phi\phi} \,.\, {}^{(4)}R_{\mu\pi\chi\beta}(TQE) \;=\; \{^{\beta}{}_{\phi}{}^{\pi}\}\,.\,\{^{\chi}{}_{\phi}{}^{\mu}\} \;-\; \{^{\chi}{}_{\phi}{}^{\pi}\}\,.\,\{^{\beta}{}_{\phi}{}^{\mu}\}$$

Les propriétés suivantes peuvent être vérifiées :

1. En inversant les indices μ et π, il vient :

   $$g^2 \,.\, g_{\phi\phi} \,.\, {}^{(4)}R_{\pi\mu\chi\beta}(TQE) \;=\; \{^{\beta}{}_{\phi}{}^{\mu}\}\,.\,\{^{\chi}{}_{\phi}{}^{\pi}\} \;-\; \{^{\chi}{}_{\phi}{}^{\mu}\}\,.\,\{^{\beta}{}_{\phi}{}^{\pi}\}$$

   La discussion ayant lieu sur un corps commutatif de caractéristique non égale à deux, il vient sans difficulté :

   $$g^2 \,.\, g_{\phi\phi} \,.\, {}^{(4)}R_{\pi\mu\chi\beta}(TQE) \;=\; -g^2 \,.\, g_{\phi\phi} \,.\, {}^{(4)}R_{\mu\pi\chi\beta}(TQE)$$

   Lorsque la diagonale de la métrique n'est pas nulle et puisque la métrique a été supposée non-dégénérée :

   $${}^{(4)}R_{\pi\mu\chi\beta}(TQE) \;=\; -{}^{(4)}R_{\mu\pi\chi\beta}(TQE)$$

   Je retrouve là une anti-symétrie naturelle des composantes du tenseur de courbure de Riemann.

   En pratiquant de façon similaire, dans les mêmes conditions, avec l'inversion des indices χ et β, je parviens à :

   $${}^{(4)}R_{\mu\pi\beta\chi}(TQE) \;=\; -{}^{(4)}R_{\mu\pi\chi\beta}(TQE)$$

   qui est une autre anti-symétrie naturelle des composantes du tenseur de courbure de Riemann. Ces deux premières redécouvertes coincident avec [07 ; p. 95, (18.13)]

2. Soit maintenant :

   $$g^2 \,.\, g_{\phi\phi} \,.\, {}^{(4)}R_{\chi\beta\mu\pi}(TQE) \;=\; \{^{\pi}{}_{\phi}{}^{\beta}\}\,.\,\{^{\mu}{}_{\phi}{}^{\chi}\} \;-\; \{^{\mu}{}_{\phi}{}^{\beta}\}\,.\,\{^{\pi}{}_{\phi}{}^{\chi}\}$$

   Puisque les symboles de Christoffel de la première espèce sont symétriques sur leurs indices hauts, dans les mêmes conditions que précédemment, il vient :

   $${}^{(4)}R_{\chi\beta\mu\pi}(TQE) \;=\; {}^{(4)}R_{\mu\pi\chi\beta}(TQE)$$

   et je retrouve [07 ; p. 95, (18.12)].

3. Il reste à vérifier la relation de fermeture [07 ; p. 95, (18.14)] :

   $${}^{(4)}R_{\mu\pi\chi\beta}(TQE) \;+\; {}^{(4)}R_{\mu\beta\pi\chi}(TQE) \;+\; {}^{(4)}R_{\mu\chi\beta\pi}(TQE) \;=\; 0$$

   Soit à calculer la somme de gauche sans a priori sur le résultat à partir de la relation établie dans [g] ; il vient :

   $$g^2 \,.\, g_{\phi\phi} \,.\, \{{}^{(4)}R_{\mu\pi\chi\beta}(TQE) \;+\; {}^{(4)}R_{\mu\beta\pi\chi}(TQE) \;+\; {}^{(4)}R_{\mu\chi\beta\pi}(TQE)\}$$

$$=$$
$$\{^{\beta}{}_{\phi}{}^{\pi}\}.\{^{\chi}{}_{\phi}{}^{\mu}\} - \{^{\chi}{}_{\phi}{}^{\pi}\}.\{^{\beta}{}_{\phi}{}^{\mu}\}$$
$$+$$
$$\{^{\chi}{}_{\phi}{}^{\beta}\}.\{^{\pi}{}_{\phi}{}^{\mu}\} - \{^{\pi}{}_{\phi}{}^{\beta}\}.\{^{\chi}{}_{\phi}{}^{\mu}\}$$
$$+$$
$$\{^{\pi}{}_{\phi}{}^{\chi}\}.\{^{\beta}{}_{\phi}{}^{\mu}\} - \{^{\beta}{}_{\phi}{}^{\chi}\}.\{^{\pi}{}_{\phi}{}^{\mu}\}$$

La symétrie des symboles de Christoffel de la première espèce par rapport aux indices hauts finit la démonstration de la validité de la relation de fermeture.

4. Enfin il est clair que :

$$^{(4)}R_{\mu\mu\chi\beta}(TQE) = {}^{(4)}R_{\mu\pi\chi\chi}(TQE) = 0$$

Ces calculs sont réalisés dans une base où la métrique est diagonalisable et a été diagonalisée lorsqu'aucune des composantes diagonales est nulle. Ils confirment bien le théorème établi dans [g] en achevant de démontrer l'analogie entre cette forme particulière des composantes du tenseur de courbure de la TQE et une autre forme particulière du tenseur de courbure de Riemann.

Remarque 2.6. *Le cube (3-3-3) anti-symétrique et antiréduit.*

La théorie se préoccupe de déformer et de décomposer des produits tensoriels. Les déformations sont opérées par des cubes de nombres. Les chapitres précédents ont permis de comprendre que des cubes dont les composantes sont anti-symétriques définissent en fait des produits de Lie déformés.

Si, pour chaque sous-espace de dimension trois, la théorie disposait d'un cube (3-3-3) de 27 composantes antisymétriques et anti-réduites sur leurs triplés d'indices, chacun de ces quatre cubes se réduirait en fait à une matrice proportionnelle à la matrice [J] de M(3, R) ; soit k_{α} le coefficient de proportionalité attaché au sous-espace I_{α}. Ce fait peut faire naître l'idée selon laquelle un cube de type (4-4-4-4) dont les composantes se caractérisent par les mêmes propriétés se résumerait à un élément de E(4, R).

Remarque 2.7. *La matrice de la décomposition triviale pour un cube (4-4-4) anti-symétrique et anti-réduit.*

Un outil omniprésent dans cette théorie est la matrice représentant la décomposition la plus triviale ; il s'agit ici de la matrice générique :

$$_{A}\Phi(^{(4)}\mathbf{u}) = [A^{\alpha}_{\chi\beta}.u^{\chi}] = \begin{bmatrix} A^{0}_{\chi 0}.u^{\chi} & A^{0}_{\chi 1}.u^{\chi} & A^{0}_{\chi 2}.u^{\chi} & A^{0}_{\chi 3}.u^{\chi} \\ A^{1}_{\chi 0}.u^{\chi} & A^{1}_{\chi 1}.u^{\chi} & A^{1}_{\chi 2}.u^{\chi} & A^{1}_{\chi 3}.u^{\chi} \\ A^{2}_{\chi 0}.u^{\chi} & A^{2}_{\chi 1}.u^{\chi} & A^{2}_{\chi 2}.u^{\chi} & A^{2}_{\chi 3}.u^{\chi} \\ A^{3}_{\chi 0}.u^{\chi} & A^{3}_{\chi 1}.u^{\chi} & A^{3}_{\chi 2}.u^{\chi} & A^{3}_{\chi 3}.u^{\chi} \end{bmatrix}$$

Quand le cube est anti-symétrique sur ses indices bas :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\alpha}_{\beta\chi} = 0$$

et anti-réduit sur ses indices latéraux[4] :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\beta}_{\chi\alpha} = 0$$

les composantes dont deux ou trois des indices sont répétés s'annulent et le cube A de type (4-4-4) se résume à un élément ${}^{(4)}\mathbf{A}$ de E(4, R) :

$$A \to {}^{(4)}\mathbf{A} : (A^{0}_{12}, A^{0}_{13}, A^{0}_{23}, A^{1}_{23}) = (a, b, c, d)$$

Dans ce cas, la matrice représentant la décomposition la plus triviale se simplifie pour devenir la représentation dans M(4, R) d'une matrice anti-symétrique associable au produit extérieur ${}^{(4)}\mathbf{A} \wedge {}^{(4)}\mathbf{u}$:

$$_{A}\Phi({}^{(4)}\mathbf{u}) = [A^{\alpha}_{\chi\beta} . u^{\chi}] = \begin{bmatrix} 0 & A^{0}_{\chi 1} . u^{\chi} & A^{0}_{\chi 2} . u^{\chi} & A^{0}_{\chi 3} . u^{\chi} \\ -A^{0}_{\chi 1} . u^{\chi} & 0 & A^{1}_{\chi 2} . u^{\chi} & A^{1}_{\chi 3} . u^{\chi} \\ -A^{0}_{\chi 2} . u^{\chi} & -A^{1}_{\chi 2} . u^{\chi} & 0 & A^{2}_{\chi 3} . u^{\chi} \\ -A^{0}_{\chi 3} . u^{\chi} & -A^{1}_{\chi 3} . u^{\chi} & -A^{2}_{\chi 3} . u^{\chi} & 0 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \Phi_{01} &= -A^{0}_{12} . u^{2} - A^{0}_{13} . u^{3} = -a . u^{2} - b . u^{3} \\ \Phi_{02} &= A^{0}_{12} . u^{1} - A^{0}_{23} . u^{3} = a . u^{1} - c . u^{3} \\ \Phi_{03} &= A^{0}_{13} . u^{1} + A^{0}_{23} . u^{2} = b . u^{1} + c . u^{2} \\ \Phi_{12} &= A^{1}_{02} . u^{0} - A^{1}_{23} . u^{3} = -a . u^{0} - d . u^{3} \\ \Phi_{13} &= A^{1}_{03} . u^{0} + A^{1}_{23} . u^{2} = -b . u^{0} + d . u^{2} \\ \Phi_{23} &= A^{2}_{03} . u^{0} + A^{2}_{13} . u^{1} = -c . u^{0} - d . u^{1} \end{aligned}$$

Quand l'argument ${}^{(4)}\mathbf{u}$ de la représentation triviale coincide avec le vecteur ${}^{(4)}\mathbf{A}$, cette représentation devient :

$$\Phi_{01} = -a . c - b . d$$

$$\Phi_{02} = a . b - c . d$$

$$\Phi_{03} = b^{2} + c^{2}$$

$$\Phi_{12} = -a^{2} - d^{2}$$

$$\Phi_{13} = b . a + d . c$$

$$\Phi_{23} = -c . a - d . b = \Phi_{01}$$

Il ne reste effectivement que cinq composantes distinctes qui peuvent toujours être disposées au sein d'une matrice anti-symétrique (4-4) de M(4, R) :

$$_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & -(a . c + b . d) & (a . b - c . d) & (b^{2} + c^{2}) \\ (a . c + b . d) & 0 & -(a^{2} + d^{2}) & (b . a + d . c) \\ -a . b + c . d & (a^{2} + d^{2}) & 0 & -(a . c + b . d) \\ -(b^{2} + c^{2}) & -(b . a + d . c) & (a . c + b . d) & 0 \end{bmatrix}$$

Il résulte de ces calculs que si la théorie disposait de quatre cubes de type (4-4-4) anti-symétriques et anti-réduits distincts, donc de quatre vecteurs ${}^{(4)}\mathbf{A}(\alpha)$, elle disposerait d'un ensemble d'au plus 20 composantes différentes, c'est-à-dire autant qu'un tenseur de courbure en dimension quatre en compte.

4. Les deux conditions sont compatibles entre elles.

Remarque 2.8. *La piste des quaternions et quelques comptages utiles.*

Les quaternions ont progressivement gagné leurs lettres de noblesse en mathématique et en physique, notamment récemment dans le cadre de la théorie de la relativité générale [06]. Ici, plus modestement, la relation suivante doit s'appliquer dans chacun des quatre sous-espaces de dimension trois E(3, R) :

$$\forall\, \alpha \in I_4 \,:\, g^2 \,.\, g_{\phi\lambda} \,.\, {}^{(3)}_{\alpha} R_{\mu\pi\chi\beta}(TQE) \,=\, \{^{\beta}{}_{\phi}{}^{\pi}\}_{\alpha} \,.\, \{^{\chi}{}_{\lambda}{}^{\mu}\}_{\alpha} \,-\, \{^{\chi}{}_{\phi}{}^{\pi}\}_{\alpha} \,.\, \{^{\beta}{}_{\lambda}{}^{\mu}\}_{\alpha}$$

Le formalisme des expressions placées à la droite du signe de l'égalité fait penser aux *composantes* d'un produit vectoriel ou à celui d'un produit du type Π = q_1. q_2 - q_2. q_1 qui aurait été réalisé sur l'ensemble H des quaternions ; ou sur l'ensemble O des octonions.

Soit les symboles de Christoffel de la première espèce disponibles dans un espace de dimension D au moins égale à deux ; combien sont-ils en cas de symétrisation et de réduction (voir remarque 1, alinéa 3) :

$$\{^{\beta}{}_{\chi}{}^{\gamma}\} \,=\, \{^{\chi}{}_{\beta}{}^{\gamma}\} \,=\, \{^{\gamma}{}_{\chi}{}^{\beta}\}$$

Dans ces conditions, combien de composantes le tenseur de courbure défini dans [g] a-t-il ?

Pour pouvoir répondre à ces deux questions, deux comptages s'imposent :

— celui du nombre des composantes différentes du cube de Christoffel de la première espèce. Je montre dans la remarque 9 qu'il est de 4 en dimension deux. Il est de 10 pour la dimension trois ; voir également au niveau de la remarque 1, alinéa 3. Ce nombre reste à découvrir pour la dimension quatre.

— celui des composantes du tenseur de courbure généré par celles du cube de Christoffel est connu. En dimension deux, il en a 1 ; en dimension trois, il en a 6 ; et en dimension quatre, il en a 20 [07 ; p. 96, (18.19)].

Petit bilan intermédiaire :

1. La conjonction de la symétrisation et de la réduction a pour effet de diminuer le nombre maximal de composantes distinctes au sein des cubes de Christoffel de la première espèce qu'elle concerne :

   $$(sym.) \,\Rightarrow\, D \,=\, 2 \,:\, 8 \,\rightarrow\, 4 \,;\, D \,=\, 3 \,:\, 27 \,\rightarrow ? \,;\, D \,=\, 4 \,:\, 64 \,\rightarrow ? \,;\, etc.$$

   $$(sym.,\, red.) \,\Rightarrow\, D \,=\, 2 \,:\, 8 \,\rightarrow\, 2 \,;\, D \,=\, 3 \,:\, 27 \,\rightarrow ? \,;\, D \,=\, 4 \,:\, 64 \,\rightarrow ? \,;\, etc.$$

2. La conjonction d'une symétrisation et d'une anti-réduction ainsi que celle d'une anti-symétrisation et d'une réduction livre un cube nul ; ces deux types de conjonctions sont en quelque sorte incompatibles.

   $$\forall\, D \,:\, (sym.,\, anti-red.),\, (anti-sym.,\, red.) \,\Rightarrow\, \{^{\chi}{}_{\beta}{}^{\gamma}\} \,=\, 0$$

3. La conjonction d'une anti-symétrisation et d'une anti-réduction est possible comme je l'ai montré au niveau de la remarque 7. Elle aboutit à une diminution du nombre maximal de composantes au sein des cubes de Christoffel de la première espèce qu'elle impacte :

$$(anti - sym., anti - red.)$$

$$\Downarrow$$

$$D = 2 : 8 \to 2 \,;\, D = 3 : 27 \to ? \,;\, D = 4 : 64 \to ? \,;\, etc.$$

Pour revenir au sujet de ce paragraphe, comme la relation étudiée a été établie dans le cadre d'une conjonction (sym., red.), il convient de découvrir comment mettre en rapport les deux séries de nombres entiers suivantes :

$$D = 2 : 2 \to 1 \,;\, D = 3 : ? \to 6 \,;\, D = 4 : ? \to 20 \,;\, etc.$$

A noter aussi au passage qu'un produit de type Π réalisé sur l'ensemble H fournit trois composantes, c'est-à-dire seulement la moitié du nombre nécessaire pour disposer d'un tenseur de courbure exprimé en dimension trois. Par conséquent, il faut deux produits de ce type pour pouvoir espérer fabriquer un nombre suffisant de composantes définissant un tenseur de courbure dans un espace de dimension trois.

Plus généralement, l'extrapolation de la notion de produit de deux vecteurs défini en dimension trois à un espace de dimension D quelconque mais plus grande que deux fournit un objet mathématique ayant au plus D.(D-1)/2 composantes distinctes ; ce qui veut dire : 0 en dimension un (D = 1), 1 en dimension deux (D = 2), 3 en dimension trois (D = 3), 6 en dimension quatre (D = 4), 10 en dimension cinq (D = 5), etc. Il y a là les premiers éléments de la discussion connue sur les produits extérieurs. Sauf en dimension deux, le nombre des composantes d'un produit extérieur ne coincide pas avec celui d'un tenseur de courbure. En dimension trois et quatre, il faut deux produits extérieurs pour pouvoir espérer générer assez de composantes distinctes constituant celles d'un tenseur de courbure.

Remarque 2.9. *Quelques réflexions sur l'intrication des dimensions.*

Il n'est pas évident de comprendre la raison géométrique du constat précédent. Les espaces de dimension un (D = 1) sont des droites et elles n'ont - par construction et par définition- pas de courbure, car sinon elles seraient des courbes et devraient forcément se déployer dans des espaces de dimension au moins égale à deux. Chaque droite est un monde à elle toute seule dont il n'est pas possible de s'échapper sans ajouter une nouvelle dimension.

L'ajout d'une seule dimension à une droite la fait passer dans un monde de dimension deux et il est forcément plat car sinon il y aurait une courbure en dehors du plan ainsi formé et la courbe se retrouverait de facto dans un monde de dimension trois.

La question importante consiste maintenant à se demander ce que comptent et mesurent les composantes d'un produit extérieur ? Leur formalisme générique suggére rapidement une réponse. Chaque composante mesure un élément de surface. La coutûme a fait que cette valeur est devenue la norme d'un vecteur orthogonal à l'élément de surface mesuré.

Par conséquent, si la réponse suggérée coincide bien avec la série de nombre entiers donnant le nombre de composantes d'un produit extérieur en fonction de la dimension D de l'espace dans lequel la discussion a lieu, ceci veut dire qu'un espace de dimension un (D = 1) n'a pas d'orthogonale. Un espace plat de dimension deux (D = 2) en a une qui, dit en passant se trouve forcément dans un monde extérieur de dimension au moins égale à trois. Un espace plat (euclidien donc ?) de dimension trois (D = 3) en a trois, ce qui peut facilement se concevoir ou se visualiser en pensant aux murs limitant une salle. Mais, et ensuite ... ?

Ensuite, tout se complique fortement. Nous ne voyons l'effet de la quatrième dimension nous concernant (le temps) qu'au travers de ses effets sur et dans le sous-espace de dimension trois portant le label 0 : $E_0(3, R)$. Toute cette discussion montre qu'il n'est probablement pas plus que la partie émergée de l'iceberg E(4, K = ?) dont nous ne comprenons finalement que très peu !

Il n'est pas inutile de revenir sur la manière dont la progression logique s'opère. Le passage de la dimension un (une droite) à deux (un plan) se fait par l'ajout d'une seconde droite orthogonale à la première. Le passage de la dimension deux (un plan) à trois (un volume) se fait par l'ajout de deux plans orthogonaux au premier. La suite logique esquissée suggèrerait donc a priori d'écrire que le passage de la dimension trois (un volume) à quatre (un hyper-volume d'ordre un) se ferait par l'ajout de trois volumes orthogonaux au premier ; etc. Mais comment définir l'orthogonalité à un volume et l'orthogonalité entre deux volumes ?

Remarque 2.10. *Les travaux et la classification de Petrov.*

Ce travail ne serait pas complet s'il oubliait de mentionner les travaux de Petrov concernant les espaces pour lesquels le tenseur de Ricci est nul ; voir [13 ; pp. 316-318].

3 Quelques certitudes.

3.1 Rappel de l'énoncé.

Soit, dans l'espace dual de l'espace vectoriel E(D, C), une relation du type suivant :

$$| \otimes_A ({}^{(D)}\mathbf{u},\, {}^{(D)}\mathbf{b}) >= {}^{(D)}[P]\,.\,|{}^{(D)}\mathbf{b} > + |{}^{(D)}\mathbf{z} >$$

dans laquelle un cube A et une paire d'arguments (**u**, **b**) quelconques sont connus ; pour rappel, la question dite (E) s'énonce :

"Est-il possible d'en déduire le formalisme générique des paires ([P], **z**) de M(D, C) × E(D, C) ?"

Lorsque la réponse à la question posée est affirmative, il existe une décomposition ([P], **z**) telle que :

$$\{{}_A\Phi(\mathbf{u})\,-\,[P]\}.|\mathbf{b}>=\,|\mathbf{z}>$$

La différence matricielle ${}_A\Phi(\mathbf{u})$ - [P] est donc toujours présente de façon sous-jacente dans cette discussion et, s'il s'agissait de résoudre ce système dans un contexte plus habituel où les composantes du vecteur **b** seraient les D inconnues, il faudrait toujours en calculer le discriminant.

Par convention du langage, ce discriminant est dit être *stratégique* pour la question posée. En résumé, l'énoncé de la question (E) sous-entend implicitement l'existence d'une polynomiale définie par :

$$\Lambda({}^{(D)}\mathbf{u})\,=\,|{}_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{u})\,-\,{}^{(D)}[P]|$$

dans laquelle la matrice ${}_A\Phi(\mathbf{u})$ est la décomposition intuitive la plus triviale du produit tensoriel déformé qu'on a sous la main.

Exemple 3.1. *La question dans un espace de dimension quatre.*

La découverte des décompositions des produits tensoriels déformés [5] dans un espace mathématique de dimension quatre à l'aide de la méthode intrinsèque exige de calculer le discriminant du système accompagnant une décomposition-type ; il est stratégique pour la résolution du problème posé. Il revient au même de calculer le déterminant :

$$\Lambda({}^{(D)}\mathbf{u})\,=\,|{}_A\Phi(\mathbf{u})\,-\,[P]|\,=\,|A^{\alpha}_{\chi\beta}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{\alpha\beta}|$$

Dans un espace de dimension quatre, il s'agit plus précisément encore de :

$$\Lambda({}^{(4)}\mathbf{u})\,=\,\begin{vmatrix} A^0_{\chi 0}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{00} & A^0_{\chi 1}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{01} & A^0_{\chi 2}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{02} & A^0_{\chi 3}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{03} \\ A^1_{\chi 0}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{10} & A^1_{\chi 1}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{11} & A^1_{\chi 2}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{12} & A^1_{\chi 3}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{13} \\ A^2_{\chi 0}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{20} & A^2_{\chi 1}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{21} & A^2_{\chi 2}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{22} & A^2_{\chi 3}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{23} \\ A^3_{\chi 0}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{30} & A^3_{\chi 1}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{31} & A^2_{\chi 3}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{32} & A^3_{\chi 3}\,.\,u^{\chi}\,-\,p_{33} \end{vmatrix}$$

Dans le cas le plus général, il n'y a aucune contrainte particulière sur le cube A et ce calcul in extenso impose en principe de calculer une somme de quatre sous-déterminants :

$$\Lambda({}^{(4)}\mathbf{u})\,=\,\sum_{\beta=0}^{\beta=3}(-1)^{\beta}\,.\,(\Phi_{0\beta}\,-\,p_{0\beta})\,.\,\Delta_{0\beta}\;;\;\Phi_{0\beta}\,=\,A^0_{\chi\beta}\,.\,u^{\chi}$$

5. La question (E).

Remarque 3.1. *Un lien avec la question (E) en dimension trois.*

Il est visible que le premier sous-déterminant de la question (E) posée en dimension quatre est le déterminant de la question (E) posée en dimension trois.

$$\Delta_{00} = \begin{vmatrix} A^1_{\chi 1} \, . \, u^\chi - p_{11} & A^1_{\chi 2} \, . \, u^\chi - p_{12} & A^1_{\chi 3} \, . \, u^\chi - p_{13} \\ A^2_{\chi 1} \, . \, u^\chi - p_{21} & A^2_{\chi 2} \, . \, u^\chi - p_{22} & A^2_{\chi 3} \, . \, u^\chi - p_{23} \\ A^3_{\chi 1} \, . \, u^\chi - p_{31} & A^2_{\chi 3} \, . \, u^\chi - p_{32} & A^3_{\chi 3} \, . \, u^\chi - p_{33} \end{vmatrix}$$

Son calcul in extenso a été réalisé dans [b] pour le cas d'un cube (3-3-3) anti-symétrique.

Remarque 3.2. *Les autres sous-déterminants.*

Il faut aussi calculer :

$$\Delta_{01} = \begin{vmatrix} A^1_{\chi 0} \, . \, u^\chi - p_{10} & A^1_{\chi 2} \, . \, u^\chi - p_{12} & A^1_{\chi 3} \, . \, u^\chi - p_{13} \\ A^2_{\chi 0} \, . \, u^\chi - p_{20} & A^2_{\chi 2} \, . \, u^\chi - p_{22} & A^2_{\chi 3} \, . \, u^\chi - p_{23} \\ A^3_{\chi 0} \, . \, u^\chi - p_{30} & A^2_{\chi 3} \, . \, u^\chi - p_{32} & A^3_{\chi 3} \, . \, u^\chi - p_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{02} = \begin{vmatrix} A^1_{\chi 0} \, . \, u^\chi - p_{10} & A^1_{\chi 1} \, . \, u^\chi - p_{11} & A^1_{\chi 3} \, . \, u^\chi - p_{13} \\ A^2_{\chi 0} \, . \, u^\chi - p_{20} & A^2_{\chi 1} \, . \, u^\chi - p_{21} & A^2_{\chi 3} \, . \, u^\chi - p_{23} \\ A^3_{\chi 0} \, . \, u^\chi - p_{30} & A^3_{\chi 1} \, . \, u^\chi - p_{31} & A^3_{\chi 3} \, . \, u^\chi - p_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{03} = \begin{vmatrix} A^1_{\chi 0} \, . \, u^\chi - p_{10} & A^1_{\chi 1} \, . \, u^\chi - p_{11} & A^1_{\chi 2} \, . \, u^\chi - p_{12} \\ A^2_{\chi 0} \, . \, u^\chi - p_{20} & A^2_{\chi 1} \, . \, u^\chi - p_{21} & A^2_{\chi 2} \, . \, u^\chi - p_{22} \\ A^3_{\chi 0} \, . \, u^\chi - p_{30} & A^3_{\chi 1} \, . \, u^\chi - p_{31} & A^2_{\chi 3} \, . \, u^\chi - p_{32} \end{vmatrix}$$

3.2 Les cubes (4-4-4) déformants anti-réduits.

Comme les calculs promettent d'être longs et fastidieux, je commence par considérer le cas d'un cube anti-réduit :

$$A^\alpha_{\beta\chi} + A^\chi_{\beta\alpha} = 0$$

Ces situations se caractérisent par l'anti-symétrie de la matrice triviale :

$$\Phi_{\alpha\beta} + \Phi_{\beta\alpha} = 0$$

Je choisis de traduire cette relation par la nullité des composantes diagonales :

$$\Phi_{\alpha\alpha} = 0$$

Remarque 3.3. *Calcul du premier sous-déterminant.*

Il vient :

$$\Delta_{00}$$

$$=$$

$$-p_{11} \, . \, [p_{22} \, . \, p_{33} + (\Phi_{23} + p_{32}) \, . \, (\Phi_{23} - p_{23})]$$

$$-(\Phi_{12} - p_{12}) \, . \, [p_{33} \, . \, (\Phi_{12} + p_{21}) + (\Phi_{23} - p_{23}) \, . \, (\Phi_{13} + p_{20})]$$

$$+(\Phi_{13}-p_{13})\,.\,[(\Phi_{12}+p_{21})\,.\,(\Phi_{23}+p_{32})-p_{22}\,.\,(\Phi_{13}+p_{20})]$$

$$=$$

$$-p_{11}\,.\,[(p_{22}\,.\,p_{33}-p_{32}\,.\,p_{23})+(\Phi_{23})^2-p_{23}\,.\,\Phi_{23}+p_{32}\,.\,\Phi_{23}]$$

$$-(\Phi_{12}-p_{12})\,.\,[(p_{33}\,.\,p_{21}-p_{23}\,.\,p_{20})+p_{33}\,.\,\Phi_{12}-p_{23}\,.\,\Phi_{13}+p_{20}\,.\,\Phi_{23}+\Phi_{13}\,.\,\Phi_{23}]$$

$$+(\Phi_{13}-p_{13})\,.\,[\Phi_{12}\,.\,\Phi_{23}+p_{21}\,.\,\Phi_{23}+p_{32}\,.\,\Phi_{12}-p_{22}\,.\,\Phi_{13}+(p_{21}\,.\,p_{32}-p_{22}\,.\,p_{20})]$$

$$=$$

$$-p_{11}\,.\,[(p_{22}\,.\,p_{33}-p_{32}\,.\,p_{23})+(\Phi_{23})^2-p_{23}\,.\,\Phi_{23}+p_{32}\,.\,\Phi_{23}]$$

$$-\Phi_{12}\,.\,[(p_{33}\,.\,p_{21}-p_{23}\,.\,p_{20})+p_{33}\,.\,\Phi_{12}-p_{23}\,.\,\Phi_{13}+p_{20}\,.\,\Phi_{23}+\Phi_{13}\,.\,\Phi_{23}]$$

$$+p_{12}\,.\,[(p_{33}\,.\,p_{21}-p_{23}\,.\,p_{20})+p_{33}\,.\,\Phi_{12}-p_{23}\,.\,\Phi_{13}+p_{20}\,.\,\Phi_{23}+\Phi_{12}\,.\,\Phi_{23}]$$

$$+\Phi_{13}\,.\,[\Phi_{12}\,.\,\Phi_{23}+p_{21}\,.\,\Phi_{23}+p_{32}\,.\,\Phi_{12}-p_{22}\,.\,\Phi_{13}+(p_{21}\,.\,p_{32}-p_{22}\,.\,p_{20})]$$

$$-p_{13}\,.\,[\Phi_{12}\,.\,\Phi_{23}+p_{21}\,.\,\Phi_{23}+p_{32}\,.\,\Phi_{12}-p_{22}\,.\,\Phi_{13}+(p_{21}\,.\,p_{32}-p_{22}\,.\,p_{20})]$$

$$=$$

$$-p_{11}\,.\,(p_{22}\,.\,p_{33}-p_{32}\,.\,p_{23})-p_{11}\,.\,(\Phi_{23})^2+p_{11}\,.\,p_{23}\,.\,\Phi_{23}-p_{11}\,.\,p_{32}\,.\,\Phi_{23}$$

$$-\Phi_{12}\,.\,(p_{33}\,.\,p_{21}-p_{23}\,.\,p_{20})-(\Phi_{12})^2\,.\,p_{33}+p_{23}\,.\,\Phi_{12}\,.\,\Phi_{13}-p_{20}\,.\,\Phi_{12}\,.\,\Phi_{23}$$

$$+p_{12}\,.\,(p_{33}\,.\,p_{21}-p_{23}\,.\,p_{20})+p_{12}\,.\,p_{33}\,.\,\Phi_{12}-p_{12}\,.\,p_{23}\,.\,\Phi_{13}+p_{12}\,.\,p_{20}\,.\,\Phi_{23}+\Phi_{12}\,.\,\Phi_{23}$$

$$+p_{21}\,.\,\Phi_{13}\,.\,\Phi_{23}+p_{32}\,.\,\Phi_{13}\,.\,\Phi_{12}-p_{22}\,.\,(\Phi_{13})^2+\Phi_{13}\,.\,(p_{21}\,.\,p_{32}-p_{22}\,.\,p_{20})$$

$$-p_{13}\,.\,\Phi_{12}\,.\,\Phi_{23}-p_{13}\,.\,p_{21}\,.\,\Phi_{23}-p_{13}\,.\,p_{32}\,.\,\Phi_{12}+p_{13}\,.\,p_{22}\,.\,\Phi_{13}-p_{13}\,.\,(p_{21}\,.\,p_{32}-p_{22}\,.\,p_{20})$$

De manière à pouvoir facilement isoler les termes de degré quatre, j'ai mis en exergue ceux de degré trois au sein de ce sous-déterminant. Or les termes de degré trois qu'il contient s'annulent respectivement l'un l'autre et il est précédé du facteur -p_{00}. Par conséquent, il ne contribue en rien au niveau du quatrième degré. Je retrouve là un résultat similaire à celui du théorème initial démontré dans [b].

Lemme 3.1. *Quand la question (E) est posée dans un espace de dimension quatre et que le produit tensoriel est déformé par un cube anti-réduit, le premier sous-déterminant du discriminant stratégique n'apporte aucun terme de degré quatre à ce discriminant.*

Remarque 3.4. *Calcul du deuxième sous-déterminant.*

Il vient :

$$\Delta_{01}$$

$$=$$

$$-(\Phi_{01}+p_{10}).\,[p_{22}.\,p_{33}+(\Phi_{23}+p_{32}).\,(\Phi_{23}-p_{23})]$$

$$-(\Phi_{12}-p_{12}).\,[p_{33}.\,(\Phi_{02}+p_{20})+(\Phi_{23}-p_{23}).\,(\Phi_{03}+p_{30})]$$

$$+(\Phi_{13}-p_{13}).\,[(\Phi_{02}+p_{20}).\,(\Phi_{23}+p_{32})-p_{22}.\,(\Phi_{03}+p_{30})]$$

$$=$$

$$- \Phi_{01}.\, [p_{22}.\, p_{33} \;+\; (\Phi_{23} \;+\; p_{32}).\, (\Phi_{23} \;-\; p_{23})]$$
$$- p_{10}.\, [p_{22}.\, p_{33} \;+\; (\Phi_{23} \;+\; p_{32}).\, (\Phi_{23} \;-\; p_{23})]$$
$$- \Phi_{12}.\, [p_{33}.\, (\Phi_{02} \;+\; p_{20}) \;+\; (\Phi_{23} \;-\; p_{23}).\, (\Phi_{03} \;+\; p_{30})]$$
$$+ p_{12}.\, [p_{33}.\, (\Phi_{02} \;+\; p_{20}) \;+\; (\Phi_{23} \;-\; p_{23}).\, (\Phi_{03} \;+\; p_{30})]$$
$$+ \Phi_{13}.\, [(\Phi_{02} \;+\; p_{20}).\, (\Phi_{23} \;+\; p_{32}) \;-\; p_{22}.\, (\Phi_{03} \;+\; p_{30})]$$
$$- p_{13}.\, [(\Phi_{02} \;+\; p_{20}).\, (\Phi_{23} \;+\; p_{32}) \;-\; p_{22}.\, (\Phi_{03} \;+\; p_{30})]$$
$$=$$
$$- \Phi_{01} \,.\, p_{22} \,.\, p_{33} \;-\; \Phi_{01} \,.\, (\Phi_{23} \;+\; p_{32}).\, (\Phi_{23} - p_{23})$$
$$- p_{10} \,.\, p_{22} \,.\, p_{33} \,.\, p_{10} \,.\, (\Phi_{23} \;+\; p_{32}) \,.\, (\Phi_{23} \;-\; p_{23})$$
$$- \Phi_{12} \,.\, p_{33} \,.\, (\Phi_{02} + p_{20}) \;-\; \Phi_{12} \,.\, (\Phi_{23} - p_{23}) \,.\, (\Phi_{03} + p_{30})$$
$$+ p_{12} \,.\, p_{33} \,.\, (\Phi_{02} \;+\; p_{20}) \;+\; p_{12} \,.\, (\Phi_{23} \;-\; p_{23}) \,.\, (\Phi_{03} \;+\; p_{30})]$$
$$+ \Phi_{13} \,.\, (\Phi_{02} \;+\; p_{20}).\, (\Phi_{23} \;+\; p_{32}) \;-\; p_{22}.\, \Phi_{13} \,.\, (\Phi_{03} \;+\; p_{30})$$
$$- p_{13} \,.\, (\Phi_{02} \;+\; p_{20}) \,.\, (\Phi_{23} \;+\; p_{32}) \;-\; p_{13} \,.\, p_{22} \,.\, (\Phi_{03} \;+\; p_{30})$$

Ce sous-déterminant est précédé d'un facteur contenant la composante Φ_{01} et d'un signe moins. Par conséquent, il contribue au niveau du quatrième degré au travers des termes suivants :

$$-\Phi_{01} \,.\, \{-\Phi_{01} \,.\, \Phi_{23}^2 \;-\; \Phi_{12} \,.\, \Phi_{23} \,.\, \Phi_{03} \;+\; \Phi_{13} \,.\, \Phi_{02} \,.\, \Phi_{23}\}$$

Remarque 3.5. *Calcul du troisième sous-déterminant.*

$$\Delta_{02}$$
$$=$$
$$-(\Phi_{01} + p_{10}) \,.\, [(\Phi_{12} + p_{21}) \,.\, p_{33} + (\Phi_{13} + p_{20}) \,.\, (\Phi_{23} - p_{23})]$$
$$+p_{11} \,.\, [p_{33} \,.\, (\Phi_{02} + p_{20}) + (\Phi_{23} - p_{23}) \,.\, (\Phi_{03} + p_{30})]$$
$$+(\Phi_{13} - p_{13}) \,.\, [(\Phi_{02} + p_{20}) \,.\, (\Phi_{13} + p_{20}) - (\Phi_{12} + p_{21}) \,.\, (\Phi_{03} + p_{30})]$$
$$=$$
$$-\Phi_{01} \,.\, [(\Phi_{12} + p_{21}) \,.\, p_{33} \;+\; (\Phi_{13} \;+\; p_{20}) \,.\, (\Phi_{23} \;-\; p_{23})]$$
$$-p_{10} \,.\, [(\Phi_{12} \;+\; p_{21}) \,.\, p_{33} \;+\; (\Phi_{13} \;+\; p_{20}) \,.\, (\Phi_{23} \;-\; p_{23})]$$
$$+\, p_{11} \,.\, [p_{33} \,.\, (\Phi_{02} \;+\; p_{20}) \;+\; (\Phi_{23} \;-\; p_{23}) \,.\, (\Phi_{03} \;+\; p_{30})]$$
$$+\, \Phi_{13} \,.\, (\Phi_{02} + p_{20}) \,.\, (\Phi_{13} \;+\; p_{20}) \;-\; \Phi_{13} \,.\, (\Phi_{12} \;+\; p_{21}) \,.\, (\Phi_{03} \;+\; p_{30})$$
$$-p_{13} \,.\, [(\Phi_{02} \;+\; p_{20}) \,.\, (\Phi_{13} \;+\; p_{20}) \;-\; (\Phi_{12} \;+\; p_{21}) \,.\, (\Phi_{03} \;+\; p_{30})]$$

Ce sous-déterminant est précédé d'un facteur contenant la composante Φ_{02} et d'un signe plus. Par conséquent, il contribue au niveau du quatrième degré au travers des termes suivants :

$$\Phi_{02} \;.\; \{-\Phi_{01}.\; \Phi_{13} \,.\, \Phi_{23} \;+\; \Phi_{13}.\; \Phi_{02}.\; \Phi_{13} \;-\; \Phi_{13}.\; \Phi_{12}.\; \Phi_{03}\}$$

©Thierry PERIAT, La méthode intrinsèque en dimension quatre ; ISBN 978-2-36923-099-1, EAN 9782369230991, version du 11 janvier 2023.

Remarque 3.6. *Calcul du quatrième sous-déterminant.*

$$\Delta_{03}$$
$$=$$
$$-(\Phi_{01}+p_{10}).[(\Phi_{12}+p_{21}).(\Phi_{23}+p_{32})-p_{22}.(\Phi_{13}+p_{20})]$$
$$+p_{11}.[(\Phi_{02}+p_{20}).(\Phi_{23}+p_{32})-p_{22}.(\Phi_{03}+p_{30})]$$
$$+(\Phi_{12}-p_{12}).[(\Phi_{02}+p_{20}).(\Phi_{13}+p_{20})-(\Phi_{12}+p_{21}).(\Phi_{03}+p_{30})]$$
$$=$$
$$-\Phi_{01}.(\Phi_{12}+p_{21}).(\Phi_{23}+p_{32})+p_{22}.\Phi_{01}.(\Phi_{13}+p_{20})$$
$$-p_{10}.[(\Phi_{12}+p_{21}).(\Phi_{23}+p_{32})-p_{22}.(\Phi_{13}+p_{20})]$$
$$+p_{11}.[(\Phi_{02}+p_{20}).(\Phi_{23}+p_{32})-p_{22}.(\Phi_{03}+p_{30})]$$
$$+\Phi_{12}.(\Phi_{02}+p_{20}).(\Phi_{13}+p_{20})-\Phi_{12}.(\Phi_{12}+p_{21}).(\Phi_{03}+p_{30})$$
$$-p_{12}.[(\Phi_{02}+p_{20}).(\Phi_{13}+p_{20})-(\Phi_{12}+p_{21}).(\Phi_{03}+p_{30})]$$

Ce sous-déterminant est précédé d'un facteur contenant la composante Φ_{03} et d'un signe moins. Par conséquent, il contribue au niveau du quatrième degré au travers des termes suivants :

$$-\Phi_{03}.\{-\Phi_{01}.\Phi_{12}.\Phi_{23}+\Phi_{12}.\Phi_{02}.\Phi_{13}-\Phi_{12}^2.\Phi_{03}\}$$

Remarque 3.7. *Expression des termes du quatrième degré.*

Je suis désormais en mesure de calculer les termes du quatrième degré figurant dans le discriminant stratégique lorsque le cube est anti-réduit :

$$-\Phi_{01}.\{-\Phi_{01}.\Phi_{23}^2-\Phi_{12}.\Phi_{23}.\Phi_{03}+\Phi_{13}.\Phi_{02}.\Phi_{23}\}$$
$$+\Phi_{02}.\{-\Phi_{01}.\Phi_{13}.\Phi_{23}+\Phi_{13}.\Phi_{02}.\Phi_{13}-\Phi_{13}.\Phi_{12}.\Phi_{03}\}$$
$$-\Phi_{03}.\{-\Phi_{01}.\Phi_{12}.\Phi_{23}+\Phi_{12}.\Phi_{02}.\Phi_{13}-\Phi_{12}^2.\Phi_{03}\}$$
$$=$$
$$\Phi_{01}^2.\Phi_{23}^2+\Phi_{01}.\Phi_{12}.\Phi_{23}.\Phi_{03}-\Phi_{01}.\Phi_{13}.\Phi_{02}.\Phi_{23}$$
$$-\Phi_{02}.\Phi_{01}.\Phi_{13}.\Phi_{23}+\Phi_{02}^2.\Phi_{13}^2-\Phi_{02}.\Phi_{13}.\Phi_{12}.\Phi_{03}$$
$$+\Phi_{03}.\Phi_{01}.\Phi_{12}.\Phi_{23}-\Phi_{03}.\Phi_{12}.\Phi_{02}.\Phi_{13}+\Phi_{12}^2.\Phi_{03}^2$$
$$=$$
$$\Phi_{01}^2.\Phi_{23}^2+\Phi_{02}^2.\Phi_{13}^2+\Phi_{12}^2.\Phi_{03}^2$$
$$-2.\{\Phi_{01}.\Phi_{13}.\Phi_{02}.\Phi_{23}+\Phi_{02}.\Phi_{13}.\Phi_{12}.\Phi_{03}-\Phi_{01}.\Phi_{12}.\Phi_{23}.\Phi_{03}\}$$
$$=$$
$$(\Phi_{01}.\Phi_{23}-\Phi_{02}.\Phi_{13})^2+(\Phi_{02}.\Phi_{13}-\Phi_{12}.\Phi_{03})^2+(\Phi_{01}.\Phi_{23}+\Phi_{12}.\Phi_{03})^2$$

Bilan, lorsque le cube (4-4-4) déformant est anti-réduit, le discriminant du système étudié s'écrit :

$$\Lambda({}^{(4)}\mathbf{u})$$
$$=$$
$$|_A\Phi({}^{(4)}\mathbf{u}) \,-\, [P]|$$
$$=$$
$$(\Phi_{01}\,.\,\Phi_{23} \,-\, \Phi_{02}\,.\,\Phi_{13})^2 \,+\, (\Phi_{02}\,.\,\Phi_{13} \,-\, \Phi_{12}\,.\,\Phi_{03})^2 \,+\, (\Phi_{01}\,.\,\Phi_{23} \,+\, \Phi_{12}\,.\,\Phi_{03})^2$$
$$+\sum_{\alpha\beta\chi} c_{\alpha\beta\chi}\,.\,u^{\alpha}\,.\,u^{\beta}\,.\,u^{\chi} \,+\, \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta}\,.\,u^{\alpha}\,.\,u^{\beta} \,+\, \sum_{\alpha} c_{\alpha}\,.\,u^{\alpha} \,+\, c$$

L'ensemble des termes de degré quatre sont donc une somme de trois carrés ne faisant intervenir que les trois produits :

$$a_1 \,=\, \Phi_{01}\,.\,\Phi_{23}\ ;\ a_2 \,=\, -\Phi_{02}\,.\,\Phi_{13}\ ;\ a_3 \,=\, \Phi_{03}\,.\,\Phi_{12}$$

3.3 Les cubes (4-4-4) déformants anti-symétriques.

Proposition 3.1. *Le degré du discriminant stratégique pour les produits déformés par des cubes anti-symétriques sur les indices bas est de dimension au plus égale à D - 1.*

Démonstration. : Pour rappel, dans la théorie de la question (E), les produits de Lie déformés sont des produits tensoriels alternés bâtis sur des cubes déformants anti-symétriques. Soit à reconsidérer alors le sujet des décompositions triviales des produits de Lie déformés ; il vient logiquement :

$$\forall\, A \,\in\, C^{-}_{(D-D-D)},\, \forall\, \mathbf{u},\mathbf{b} \,\in\, C \,\otimes\, E(D,\, R)\ :\ |[\mathbf{u},\mathbf{b}]_A > = \ _A\Phi(\mathbf{u})\,.\,|\mathbf{b} >$$

Mais ici, le cas de deux arguments égaux a une conséquence inattendue dûe à l'anti-symétrie du produit de Lie déformé :

$$\forall\, A \,\in\, C^{-}_{(D-D-D)},\, \forall\, \mathbf{u} \,\in\, E(D,\, C)\ :\ |[\mathbf{u},\mathbf{u}]_A > = \ _A\Phi(\mathbf{u})\,.\,|\mathbf{u} > = \ |\mathbf{0} >$$

Les décompositions triviales des *carrés de Lie déformés* n'ont de réalité cohérente que dans trois cas :

1. l'argument est nul : $\mathbf{u} = \mathbf{0}$;
2. le cube A est nul : A = 0 ;
3. le déterminant de la décomposition triviale est nul :

$$|_A\Phi(\mathbf{u})| \,=\, 0$$

Autrement dit, puisque les deux premiers cas sont parfaitement sans intérêt, les décompositions triviales des *carrés de Lie déformés* n'ont de réalité que si leur déterminant est nul :

$$\forall\, A \,\in\, C^{-}_{(D-D-D)} \,-\, \{A = 0\},\, \forall\, \mathbf{u} \,\in\, E(D,\, C) \,-\, \{\mathbf{0}\}\ :\ |_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{u})| \,=\, 0$$

Si le cube déformant était quelconque, alors la polynomiale $\Lambda({}^{(D)}\mathbf{u})$ serait forcément de degré au plus égal à D et il prendrait la forme générique suivante (sommes sur les indices répétés) :

$$\Lambda({}^{(D)}\mathbf{u}) = c_{\alpha_1 \dots \alpha_D} \,.\, u^{\alpha_1} \,.\dots.\, u^{\alpha_D} + \dots + c_{\alpha_1 \alpha_2} \,.\, u^{\alpha_1} \,.\, u^{\alpha_2} + c_{\alpha_1} \,.\, u^{\alpha_1} + c$$

Pour rappel :

— La matrice de décomposition la plus triviale est le seul objet mathématique de la discussion sur le discriminant stratégique impliqué dans la résolution de la question (E) dont le déterminant est une forme multilinéaire de degré D pure.

— La présence de la matrice inconnue [P] ne fait que transformer cette forme multi-linéaire en une forme polynomiale par l'ajout de termes dont le degré est systématiquement inférieur à D ; ce constat laisse présumer du fait que :

$$_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{u}) = [A^{\alpha}_{\chi\beta} \,.\, u^{\chi}] \Rightarrow |_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{u})| = c_{\alpha_1 \dots \alpha_D} \,.\, u^{\alpha_1} \,.\dots.\, u^{\alpha_D}$$

— Il est aisé de démontrer que :

$$c = (-1)^D \,.\, |P|$$

Or je viens de démontrer que le déterminant d'une matrice associée à la décomposition triviale d'un produit de Lie déformé (par définition : forcément par un cube anti-symétrique sur ses indices bas est nul) doit être nul.

Il en résulte donc que le discriminant stratégique des décompositions non-triviales des produits de Lie déformés a le formalisme générique :

$$\Lambda({}^{(D)}\mathbf{u})$$

$$=$$

$$c_{\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}} \,.\, u^{\alpha_1} \,.\dots.\, u^{\alpha_{D-1}} + \dots + c_{\alpha_1 \alpha_2} \,.\, u^{\alpha_1} \,.\, u^{\alpha_2} + c_{\alpha_1} \,.\, u^{\alpha_1} + (-1)^D \,.\, |P|$$

C'est une forme polynomiale de degré D - 1. □

Théorème 3.1. *Généralisation du théorème initial démontré dans [b].*

Pour les produits de Lie déformés, le discriminant stratégique accompagnant la question (E) posée dans un espace de dimension D est toujours une polynomiale de degré au plus égal à D - 1.

3.4 Les cubes (4-4-4) déformants anti-réduits et anti-symétriques.

Remarque 3.8. *Compatibilité des contraintes.*

Pour rappel, les deux contraintes (anti-réduction et anti-symétrie) sont compatibles l'une avec l'autre puisque :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} = -A^{\alpha}_{\beta\chi} = A^{\chi}_{\beta\alpha} = -A^{\chi}_{\alpha\beta} = A^{\beta}_{\alpha\chi} = -A^{\beta}_{\chi\alpha} = A^{\alpha}_{\chi\beta}$$

Remarque 3.9. *Calcul du premier sous-déterminant pour les cubes doublement contraints.*

Je renvoie les lecteurs au *théorème initial* établi dans [b]. Une conséquence de ce morceau d'algèbre est que ce sous-déterminant est de degré deux au plus. Il n'a donc pas de termes de degré trois et il ne participe a fortiori en rien aux termes de degré quatre que contiendrait éventuellement le déterminant global (discriminant stratégique).

Remarque 3.10. *Calcul du discriminant stratégique pour les cubes ayant subi la double contrainte.*

Par convention du langage, les cubes (4-4-4) ayant subi la double contrainte sont ceux qui ont été anti-réduits et anti-symétrisés. Comme déjà signalé au cours de la remarque 2.7, ils s'identifient à un élément $\mathbf{A}$ de l'espace vectoriel E(4, K = R ou C). J'ai également indiqué au niveau de la remarque 2.7 que la décomposition la plus triviale d'un produit tensoriel déformé par un cube (4-4-4) déformant anti-réduit et antisymétrique est une matrice anti-symétrique de M(4, K = R ou C). Le formalisme générique de cette matrice permet toujours d'introduire un vecteur ${}^{(3)}\mathbf{X}$ et un pseudo-vecteur ${}^{(3)}\mathbf{Y}$ définis par :

$$^{(3)}\mathbf{X} \,:\, (\Phi_{01},\, \Phi_{02},\, \Phi_{03}) \,=\, (X^1,\, X^2,\, X^3)$$

$$^{(3)}\mathbf{Y} \,:\, (-\Phi_{23},\, \Phi_{13},\, -\Phi_{12}) \,=\, (Y^1,\, Y^2,\, Y^3)$$

Bilan, lorsque le cube (4-4-4) déformant est anti-réduit et anti-symétrique, le discriminant du système étudié s'écrit :

$$\Lambda({}^{(4)}\mathbf{u})$$

$$=$$

$$|{}_A\Phi({}^{(4)}\mathbf{u}) \,-\, [P]|$$

$$=$$

$$(X^1 . Y^1 \,+\, X^2 . Y^2)^2 \,+\, (X^2 . Y^2 \,+\, Y^3 . X^3)^2 \,+\, (X^1 . Y^1 \,+\, Y^3 . X^3)^2$$

$$+ \sum_{\alpha\beta\chi} c_{\alpha\beta\chi} . u^\alpha . u^\beta . u^\chi \,+\, \sum_{\alpha\beta} c_{\alpha\beta} . u^\alpha . u^\beta \,+\, \sum_{\alpha} c_\alpha . u^\alpha \,+\, |P|$$

Mais la généralisation du théorème initial induit deux relations importantes caractérisant ces situations :

$$\Lambda({}^{(4)}\mathbf{u}) \,=\, c_{\alpha\beta\chi} . u^\alpha . u^\beta . u^\chi \,+\, c_{\alpha\beta} . u^\alpha . u^\beta \,+\, c_\alpha . u^\alpha \,+\, |P|$$

Et :

$$(X^1 . Y^1 \,+\, X^2 . Y^2)^2 \,+\, (X^2 . Y^2 \,+\, Y^3 . X^3)^2 \,+\, (X^1 . Y^1 \,+\, Y^3 . X^3)^2 \,=\, 0$$

...

4 Conséquences physiques.

4.1 Les représentations matricielles du champ EM.

Proposition 4.1. *En partant de la version covariante usuelle de la loi de Lorentz, et après l'avoir transformé en un produit de Lie déformé par un cube anti-symétrique et anti-réduit, il est tout à fait simple de faire apparaître une illustration de la question (E) posée dans les espaces de dimension quatre.*

Démonstration. : Pour pouvoir appliquer les résultats acquis précédemment dans ce document et concernant les cubes doublement contraints, il convient de commencer par la recherche de transformations autorisant le passage :

$$|m \,.\, \frac{d\mathbf{u}}{ds} \,+\, \otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u},\mathbf{p}) >= q \,.\, [F] \,.\, |\mathbf{u}> \iff \otimes_A(...,\mathbf{k}) \,=\, [O] \,.\, |\mathbf{k}> +\hbar \,.\, |\mathbf{y}>$$

lorsque le cube A est doublement contraint et donc ramené au rang d'un vecteur $\mathbf{A}$; par conséquent, dans ce qui suit, les relations suivantes sont toujours vérifiéés :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} \,=\, -A^{\alpha}_{\beta\chi} \,=\, A^{\chi}_{\beta\alpha} \,=\, -A^{\chi}_{\alpha\beta} \,=\, A^{\beta}_{\alpha\chi} \,=\, -A^{\beta}_{\chi\alpha} \,=\, A^{\alpha}_{\chi\beta}$$

$$A \,\rightarrow\, \mathbf{A} \,:\, (A^0_{12},\, A^0_{13},\, A^0_{23},\, A^1_{23}) \,=\, (a,\, b,\, c,\, d)$$

J'ai déjà mené cette démarche dans le cadre de la quête d'une jonction entre la version covariante usuelle de la loi de Lorentz et la loi dite de Klein-Gordon ; voir [i ; section 4]. Je la réitère ici en posant :

$$\mathbf{p} \,=\, \hbar\, \mathbf{k}$$

Je remarque au passage que, sauf si l'intensité du vecteur d'onde est gigantesque, la petitesse naturelle de la constante de Planck implique que la quantité de mouvement ci-dessus a également une très faible intensité. L'objectif consiste à découvrir les transformations mathématiques permettant la conversion suivante dans les conditions qui viennent d'être précisées (cube doublement contraint) :

$$|m \,.\, \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \otimes_{\Gamma(2)}(\mathbf{u},\mathbf{p}) >= q \,.\, [F] \,.\, |\mathbf{u}> \iff \otimes_A(...,\mathbf{p}) \,=\, [O] \,.\, |\mathbf{p}> +i \,.\, \hbar \,.\, |\mathbf{y}>$$

Avec pour hypothèse de travail :

$$|\mathbf{p}>= [T] \,.\, |\mathbf{u}> +|\mathbf{a}> \iff p^{\beta} \,=\, T^{\beta}_{\epsilon} \,.\, u^{\epsilon} \,+\, a^{\beta}$$

La progression logique permet de retrouver la version covariante de la loi de Lorentz chaque fois que les relations suivantes sont simultanément vérifiées :

$$\Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon} \,=\, \Gamma^{\chi}_{\epsilon\alpha}$$

$$A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, T^{\beta}_{\epsilon} \,=\, m \,.\, \Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon}$$

$$o_{\chi\beta} \,.\, T^{\beta}_{\epsilon} \,-\, A^{\chi}_{\epsilon\beta} \,.\, a^{\beta} \,=\, q \,.\, F^{\chi}{}_{\epsilon}$$

$$-m \,.\, \frac{du^{\chi}}{ds} \,=\, o_{\chi\beta} \,.\, a^{\beta} \,+\, \hbar \,.\, y^{\chi}$$

La troisième d'entre elles fait apparaître le formalisme évocateur des travaux menés dans les premières sections de ce document ; en tenant compte du fait que le cube A est ici un vecteur ${}^{(4)}\mathbf{A}$, elle s'écrit aussi :

$$[O]\,.\,[T] \,=\, {}_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{a}) \,-\, [(-q)\,.\,F^{\chi}{}_{\epsilon}]$$

Les termes placés à droite de l'égalité désignent une différence matricielle entre une décomposition triviale d'un produit de Lie déformé par un vecteur ${}^{(4)}\mathbf{A}$ et une représentation de la version $(\uparrow, \downarrow)$ du tenseur champ électromagnétique. Ce type de différences apparaît dans l'étude des décompositions non-triviales éventuelles du type :

$$|[\mathbf{a},\, ...]_{\mathbf{A}} >= \, [(-q)\,.\,F^{\chi}{}_{\epsilon}]\,.\,|... > \,+ ...$$

Dans ce contexte, le produit matriciel [O].[T] placé à gauche du signe de l'égalité est la représentation de la différence entre une décomposition triviale et une qui ne l'est pas.

Comme conséquence des calculs algébriques menés précédemment dans ce document, le discriminant stratégique associé à ces circonstances s'écrit :

$$\Lambda({}^{(4)}\mathbf{a}) \,=\, c_{\alpha\beta\chi}\,.\,a^{\alpha}\,.\,a^{\beta}\,.\,a^{\chi} \,+\, c_{\alpha\beta}\,.\,a^{\alpha}\,.\,a^{\beta} \,+\, c_{\alpha}\,.\,a^{\alpha} \,+\, |(-q)\,.\,F^{\chi}{}_{\epsilon}|$$

Il est accompagné de la relation complémentaire :

$$(X^1\,.\,Y^1 \,+\, X^2\,.\,Y^2)^2 \,+\, (X^2\,.\,Y^2 \,+\, Y^3\,.\,X^3)^2 \,+\, (X^1\,.\,Y^1 \,+\, Y^3\,.\,X^3)^2 \,=\, 0$$

dans laquelle il faut donner aux vecteurs $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ la signification issue de la lecture de la matrice obtenue au niveau de la remarque 2.7 :

$$\Phi_{01} \,=\, -a\,.\,a^2 \,-\, b\,.\,a^3 \,=\, X^1$$

$$\Phi_{02} \,=\, a\,.\,a^1 \,-\, c\,.\,a^3 \,=\, X^2$$

$$\Phi_{03} \,=\, b\,.\,a^1 \,+\, c\,.\,a^2 \,=\, X^3$$

$$\Phi_{12} \,=\, -a\,.\,a^0 \,-\, d\,.\,a^3 \,=\, -Y^1$$

$$\Phi_{13} \,=\, -b\,.\,a^0 \,+\, d\,.\,a^2 \,=\, Y^2$$

$$\Phi_{23} \,=\, -c\,.\,a^0 \,-\, d\,.\,a^1 \,=\, -Y^3$$

La question subsidiaire importante est : "Quelle est la signification physique du vecteur **a** ?

Quelle que soit la bonne réponse, il peut être noté au passage que dans un référentiel permettant de ramener ce vecteur aux composantes (a^0, 0, 0, 0) : (i) le vecteur **X** s'annule et par conséquent la relation complémentaire devient une tautologie (0 = 0), (ii) la polynomiale s'écrit :

$$\Lambda({}^{(4)}\mathbf{a}) \,=\, c_{000}\,.\,(a^0)^3 \,+\, c_{00}\,.\,(a^0)^2 \,+\, c_0\,.\,a^0 \,-\, 2q\,.\,g^{-1}\,.\, <\mathbf{E},\, \mathbf{H}>_{Id_3}$$

...

Pour toutes les particules neutres (q = 0) et pour toutes les ondes planes non polarisées ($\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$), cette polynômiale se résume à :

$$\Lambda({}^{(4)}\mathbf{a}) \,=\, (c_{000} \,.\, (a^0)^2 \,+\, c_{00} \,.\, a^0 \,+\, c_0) \,.\, a^0$$

Les solutions s'obtiennent en annulant la polynomiale ; cette annulation signifiant que la mesure de l'écart entre une décomposition non-triviale et une décomposition triviale devient nulle. L'unique composante a^0 du vecteur **a** ne peut prendre au plus que trois valeurs, dont l'une vaut zéro :

$$a^0 \,\in\, \{0,\, \frac{-c_{00} \,\pm\, \sqrt{c_{00}^2 \,-\, 4 \,.\, c_{000} \,.\, c_0}}{2 \,.\, c_{000}}\}$$

□

4.2 Le cas des géométries invariantes.

En examinant les relations assurant la transcription de la version covariante de la loi de Lorentz sous forme d'un produit de Lie déformé, il apparaît que les espaces dont la géométrie est invariante ont un cube de Christoffel nul et se laissent caractériser par une matrice [T] nulle sans que ce choix ait la moindre conséquence sur les autres acteurs de cette discussion. Dit autrement, l'annulation de la matrice [T] n'induit pas celle du cube A, pas plus que celle de la masse m, de la matrice [O], du vecteur **a**, de la charge électrique q ou du tenseur champ EM. Je veux dire par là que la transcription proposée peut agir dans les espaces dont la géométrie est invariante et qu'elle se caractérise alors par :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} \,=\, -A^{\alpha}_{\beta\chi} \,=\, A^{\chi}_{\beta\alpha} \,=\, -A^{\chi}_{\alpha\beta} \,=\, A^{\beta}_{\alpha\chi} \,=\, -A^{\beta}_{\chi\alpha} \,=\, A^{\alpha}_{\chi\beta}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, \mathbf{A} \,\in\, E(4,\, C)$$

$$\forall\, \Gamma^{\chi}_{\alpha\epsilon} \,=\, \Gamma^{\chi}_{\epsilon\alpha} \,=\, 0$$

$$\Downarrow$$

$$[T] \,=\, [0],\; |\mathbf{p}> = |\mathbf{a}>$$

$$\Downarrow$$

$$q \,.\, [F^{\chi}{}_{\epsilon}] \,=\, {}_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{p})$$

$$-m \,.\, \frac{du^{\chi}}{ds} \,=\, o_{\chi\beta} \,.\, p^{\beta} \,+\, \hbar \,.\, y^{\chi}$$

Le vecteur **a** est clairement une quantité de mouvement **p** et la version $(\uparrow, \downarrow)$ du tenseur champ EM coincide avec une décomposition triviale, elle-même assimilable à un produit extérieur du type ${}^{(4)}\mathbf{A} \wedge {}^{(4)}\mathbf{p}$. Enfin, partant du principe que le résidu **y** serait insignifiant la plus part du temps, la matrice [O] serait la matrice permettant de relier l'accélération à la quantité de mouvement :

$$-m \,.\, |\frac{d\mathbf{u}}{ds} > \equiv\, [O] \,.\, |\mathbf{p}>$$

Or dans le contexte d'une géométrie invariante, la version covariante de la loi de Lorentz se résume à sa version classique :

$$m \, . \, |\frac{d\mathbf{u}}{ds} >= q \, . \, [F^{\chi}{}_{\epsilon}] \, . \, |\mathbf{u} >$$

Dans les circonstances décrites ici, et en acceptant a priori l'existence d'une matrice des masses [M] telle que :

$$|\mathbf{p} >= [M] \, . \, |\mathbf{u} >$$

les deux expressions précédentes ne peuvent coincider indépendamment de la vitesse que si :

$$\forall \, \mathbf{u} \, : \, q \, . \, [G]^{-1} \, . \, [F(\downarrow, \downarrow)] \, + \, [O] \, . \, [M] \, \sim \, ^{(4)}[0]$$

5 Résumé.

Dans ce document, j'ai tenu à dresser un panorama de ma recherche (2003 - 2022) et à exposer mes premières réflexions sur le traitement de la question (E) dans les espaces de dimension quatre. J'espère avoir ainsi clarifié la représentation que peuvent se faire les lecteurs (lectrices) de cette quête et les avoir motivés à la poursuivre.

Il est probable que bien des sujets mathématiques implicitement contenus dans la question (E) et dans son traitement ont déjà été abordés de manière exhaustive et magistrale par les professionnels ; voir par ex : [14]. Le temps et les capacités me manquent pour atteindre leur niveau. C'est la raison pour laquelle je développe mon travail en suivant la piste laborieuse de l'algèbre et en indiquant ses éventuelles implications physiques, par exemple au travers de la version covariante de la loi de Lorentz.

Cette illustration laisse entrevoir l'existence de régions de l'espace-temps dont la géométrie est invariante (le vide absolu) dans lesquelles des particules électriques d'un type donné devraient se mouvoir avec une quantité de mouvement dont l'intensité doit être solution d'un polynôme de degré trois. Je ne peux m'empêcher d'établir un lien mental entre ce résultat des mathématiques et l'existence physique de trois générations de leptons : électron, tau et muon. Il est encore trop tôt pour savoir si le traitement que je propose décrit bien cette réalité ; a minima, il en suggère la possibilité. A ce sujet, j'ai proposé depuis l'énoncé de la version précédente de ce document un autre chemin expliquant le ratio établi par le professeur Koide dans [j].

Le point de situation concernant la problématique de l'immersion, en particulier des espaces de dimension trois dans un espace de dimension quatre fait bien entendu partie des problèmes profonds auxquels les mathématiciens se confrontent depuis des décennies ... et qu'ils résolvent avec plus ou moins de succès [15], [16], [17], [18].

Concernant ce point, je ne prétends pas encore avoir trouvé un moyen satisfaisant permettant d'articuler les quatre sous-espaces de dimension trois entre eux mais il me semble avoir réalisé une présentation assez complète des ingrédients devant être mélangés. J'ai également proposé depuis l'énoncé de la version précédente de ce document un exposé assez détaillé de la méthode de décomposition dite des poupées russes [k].

6 Remerciements

N'étant pas dans une position sociale me permettant de publier selon les canaux orthodoxes (faute d'un diplôme officiel en physique mathématique), je présente cette exploration sous ma seule responsabilité. J'appuie mes propos sur l'étude d'ouvrages acquis personnellement et sur des oeuvres librement accessibles en ligne. Je remercie les auteurs ayant accepté de les mettre gracieusement à disposition, en particulier les sites arXiv.org, NUMDAM, HAL, etc. (mais pas seulement).

7 Bibliographie

Références

7.1 Travaux personnels préalables

[a] PERIAT, T. : Particules idéales, vide de Maxwell et cordes élastiques, ISBN 978-2-36923-140-0,22 juillet 2022, 18 pages.

[b] PERIAT, T. : Décomposition intrinsèque des produits vectoriels déformés, ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, v2, 14 Août 2018, 27 pages.

[c] PERIAT, T. : Produits vectoriels déformés, spineurs de Cartan et paramétrisation d'Euler, ISBN 978-2-36923-073-1, 31 mars 2019, 26 pages.

[d] PERIAT, T. : La méthode extrinsèque, ISBN 978-2-36923-006-9, EAN 9782369230069, v1, 13 septembre 2022, 14 pages.

[e] PERIAT, T. : Aspects mathématiques de la théorie des produits tensoriels déformés, ISBN 978-2-36923-028-1, EAN 9782369230281, v2, 6 juin 2021, 21 pages.

[f] PERIAT, T. : Variations des fonctions vectorielles et décompositions de helmholtz, ISBN 978-2-36923-098-4, EAN 9782369230984, v1, 25 octobre 2021, 29 pages.

[g] PERIAT, T. : Le tenseur de courbure associé avec les décompositions des produits tensoriels déformés, ISBN 978-2-36923-126-4, EAN 9782369231264, v2, 6 septembre 2021, 16 pages.

[h] PERIAT, T. : Théorie quantique des champs appliquée aux produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-151-6, EAN 9782369231516, v4, 28 octobre 2022, 35 pages.

[i] PERIAT, T. : The Klein-Gordon equation, analysis in a four-dimensional context ; ISBN 978-2-36923-125-7, EAN 9782369231257, v4, 16 octobre 2022, 25 pages.

[j] PERIAT, T. : Cosmologie et algèbres de Lie, première partie ; ISBN 978-2-36923-136-3, EAN 9782369231363, v2, 3 janvier 2023, 53 pages.

[k] PERIAT, T. : La méthode des poupées russes ; ISBN 978-2-36923-025-5, EAN 9782369230255, v3, 19 mai 2022, 62 pages.

7.2 Articles, cours et livres.

[01] Maxwell, J. C. : A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field ; Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, 155 : 459...512.

[02] Les douze surfaces de Darboux, arXiv :1709.01383v1 [math-DG] 5 septembre 2007, 22 pages.

[03] Cartan, E. : Les espaces métriques fondés sur la notion de d'aire ; "Actualités scientifiques et industrielles", numéro 72, exposés de géométrie publiés sous la direction de monsieur Elie Cartan, membre de l'institut et professeur à la Sorbonne ; Hermann et Cie, éditeurs, Paris, 1933, 46 pages (partie centrale de l'exposé).

[04] Christoffel, E. B. : Ueber die Transformation der homogenen Differentiale Ausdruecke zweites Graden ; Journal fuer die reine und angewandte Mathematik, pp. 46-70, Berlin, 1826. Une copie électronique peut être obtenue auprès de l'Université de Goettingen (Allemagne) pour un usage non commercial.

[05] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler J. A. : Gravitation, ©by W. H, Freeman and Cie, USA, 1973. 1278 pages.

[06] Girard, P. R. : Quaternions, algèbre de Clifford et physique relativiste ; ©2004, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne, tous droits réservés. Version anglo-saxonne : © 2007, ISBN 978-3-7643-7790-8 Birkhäuser Verlag AG, Basel - Boston - Berlin, 176 pages.

[07] Fliessbach, T. : Allgemeine Relativitaetstheorie, 4. Auflage, Spektrum Lehrbuch, ©2003, 1998, 1995, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, ISBN 3-8274-1356-7, 343 pages.

[13] Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II, Klassische Feldtheorie : L.D. Landau, E.M. Lifschitz ; 12. ueberarbeitete Auflage, in dt. Sprache hrsg. von Hans-Georg Schoepf [Uebers. aus dem russ. von Georg Dautcourt], - 1992, ISBN 3-05-501550-9, 480 pages.

[14] Geometric algebra techniques for general relativity ; arXiv :gr-qc/0311007v1, 3 November 2003.

[15] Cartan, E, : Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien ; Ann. Soc. Pol. Math., t. 6, 1927, p. 1-7.

[16] Nash, J. F., Jr : C1-isometric imbeddings I, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A., Vol. 58, 1955, p. 545-556.

[17] Nash, J. : The imbedding problem for Riemannian manifolds ; Annals of Mathematics, vol. 63, 1956, p. 20-63.

[18] Gromov, M. : Isometric immersions of Riemannian manifolds ; Astérisque, n° S 131 (1985), 5p.