Cosmologie et algèbres de Lie.
Collection : "La Théorie de la Question (E)"

©Thierry PERIAT.

3 janvier 2023

Cosmologie et algèbres de Lie ; première partie : les espaces de dimension trois équipés de produits tensoriels déformés et d'une métrique initiale de FLRW - Loi de préservation de la vitesse de propagation de la lumière - Proposition d'un lien avec la formule du Professeur Koide ; ©Thierry PERIAT, ISBN 978-2-36923-136-3, EAN 9782369231363, collection "La Théorie de la Question (E)". [1]

Table des matières

1. La première version de ce document correspond à la deuxième partie de cette seconde version. Elle porte le titre : Produits vectoriels déformés, algèbres de Lie et classification de Bianchi ; elle est déposée depuis le 1 mai 2019 sur le site zenodo.org où elle n'est plus accessible ; DOI 10.5281/zenodo.2656534.

1 Préservation de la vitesse de la lumière dans un espace déformé.

1.1 Objectifs.

Ces quelques objectifs en forme d'impératifs :
— Connaître la nature et comprendre le comportement de la lumière au cours de sa propagation dans les milieux physiques matériels ou dans les régions vides de l'univers ;
— Chercher à savoir ce que le vide interstellaire et le vide inter-atomique ont éventuellement en commun ;
— Se demander si ce qui est en bas est comme ce qui est en haut [2] ;
— Découvrir en creusant au fond de la matière que le cosmos y est encore roi ;
... voilà, de manière imagée, ce qui sert de fil conducteur à ce document.

Il part du principe que pour absolument vouloir préserver la vitesse de propagation de la lumière dans le vide, quelles que soient les modifications subies en cours de route par la métrique de Friedman, Lemaître, Robertson et Walker (FLRW), il faut :

1. accepter de doter l'espace-temps d'un outil mathématique qui n'est qu'une version modifiée des produits extérieurs : je veux parler du produit tensoriel déformé et alterné ; pour une définition, voir tout simplement le document précédent [a] ou les rappels ci-dessous.
2. rechercher l'expression algébrique liant de manière ad hoc les variations de la géométrie à celles de la définition de l'outil mathématique.

Il énonce cette expression et remarque l'existence de situations pour lesquelles la partie de la contrainte pesant sur la définition du produit tensoriel déformé

2. Le poème d'Emeraude, deuxième verset ; texte placé à la fin du Livre des secrets de la création qu'il convient d'attribuer à Apollinus de Tyane, premier siècle de l'ère chrétienne.

alterné se laisse découpler de la métrique.

L'examen approfondi de cette contrainte découplée montre que la discussion doit impliquer des triplés de matrices de M(3, C) et que, parmi celles validant la contrainte, il faut compter les matrices totalement antisymétriques, les matrices démocratiques apparaissant en physique des particules et des éléments liés aux représentations matricielles des quaternions.

L'analyse de cette découverte permet de justifier l'existence d'un ratio de Koide pour trois vecteurs ; chacun d'eux étant associé à la partie imaginaire d'un quaternion unitaire réduit à celle-ci, et les trois formant une base orthonormée.

1.2 Présentation résumée de la démarche.

Cette partie de mon travail développe une discussion contrée sur la thématique de la propagation de la lumière dans des régions réputées vides de matière mais susceptibles de subir des déformations géométriques.
L'existence de déformations géométriques dans ces régions-là correspond au point de vue défendu par A. Einstein au sein de sa théorie de la gravitation.
Il a été confirmé récemment par l'expérience Gravity Probe B et par les détections d'ondes gravitationnelles (LIGO, etc.).

PRINCIPES DE BASE.
L'approche défendue dans ces lignes :

1. décrit la géométrie de manière traditionnelle par l'intermédiaire des représentations matricielles du tenseur métrique ;
2. affirme que le produit vectoriel classique rend compte d'une autre propriété essentielle des espaces ;
3. défend l'idée que cette autre propriété accepte des variations ;
4. décrit cette propriété au moyen de cubes de nombres réels ou complexes ;
5. bâtit des produits tensoriels déformés et alternés sur ces cubes ;
6. soutient que les variations de la géométrie sont concomitantes, mais pas forcément couplées à celles de la définition du produit vectoriel classique ;
7. pense que cette concomitance doit assurer la préservation de la vitesse de propagation de la lumière dans le vide.

   Je justifie cette affirmation :

   (a) par les expériences de Morley et Michelson ainsi que

   (b) par celles, plus récentes, tendant à prouver que les particules sans masse propre ou ayant des masses très légères (les neutrinos par exemple) ont des vitesses ne différant que peu les unes des autres et peu de la constante universelle c = 300.000 km/s.

   L'environnement instable des régions vides (du point de vue géométrique et du point de vue ondulatoire) ne semble donc pas avoir d'influence notable sur la vitesse de propagation de ces particules dans ces régions-là.

APPLICATION A LA METRIQUE FLRW.
Partant de là, je décris les variations de la définition du produit vectoriel classique au travers de cubes de nombres (réels ou complexes) et j'écris la condition préservant la vitesse de propagation de la lumière dans un environnement géométrique et algébrique instable lorsque la métrique initiale est celle de Friedmann, Lemaître, Robertson, Walker (FLRW). J'examine ensuite, plus particulièrement et de manière mathématique, le formalisme de cette condition lorsque géométrie et algèbre sont découplées.

DECOUPLAGE.
Je justifie l'existence physique d'un tel découplage par celle de l'énergie sombre. Cette énergie d'origine pour le moment inconnue s'étend dans tout l'univers et elle semble être la cause de l'accélération de son expansion. Surtout, elle ne semble pas laisser d'autre trace de son existence que cette accélération croissante. J'exprime la contrainte sur les composantes des cubes A découplés de la métrique mais permettant la préservation de la vitesse de la propagation de la lumière dans les régions vides.

Je remarque une similitude entre la contrainte algébrique obtenue de la sorte et celle permettant de définir une structure d'algèbre de Lie sur {C $\otimes$ E(3, R), $\otimes_A$, A cube (3-3-3)} ; pour tenter d'aller plus loin concernant cette remarque, je :

1. rappelle les résultats acquis lors du chapitre précédent concernant les algèbres de Lie définissables sur les espaces vectoriels équipés d'un produit tensoriel déformé ;
2. découvre une nouvelle expression pour les composantes du tenseur de courbure de Riemann ;
3. rencontre un problème technique important lié au problème de l'immersion des espaces de dimension trois dans ceux de dimension quatre ;
4. constate que ce problème d'immersion se double d'un problème de comptage du nombre des composantes des cubes déformant ;
5. laisse finalement la problématique en suspens ;
6. introduis une première fois la notion de ratio de Koïde dans la discussion.

Indépendamment de l'existence ou non d'un lien entre la contrainte issue du découplage et la présence d'une algèbre de Lie, la première partie focalise la discussion sur la découverte du formalisme des matrices de M(3, C) constituant les cubes A respectant cette contrainte de découplage.

Après de nombreux mais très instructifs détours, la démarche introduit ce que j'appelle (par manque d'imagination et non pas par prétention) des représentations périennes (ces représentations réapparaissent au sein des matrices représentant la dualité des champs électromagnétiques) :

$$[A(\mathbf{t},\, \mathbf{q})] = \lambda\,.\,Id3 \,+\, \mu\,.\,T(\mathbf{q}) \,+\, \nu\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{q}),\ \mathbf{t}\,:\,(\lambda,\, \mu,\, \nu)$$

Elle démontre que :

1. sous certaines conditions sur $\mathbf{t}$ -qu'elle précise, la carte exponentielle de ces représentations périennes se laisse identifier avec une paramétrisation d'Euler-Rodrigues [Q($\mathbf{q}$)] ;

$$[Q(\mathbf{q})] \,=\, exp([A(\mathbf{t},\, \mathbf{q})])$$

2. dans ces conditions, soit trois paramétrisations d'Euler-Rodrigues représentant chacune un quaternion unitaire entièrement imaginaire (donc un vecteur de E(3, R)) de telle sorte que les trois vecteurs forment une base orthonormé d'un espace de dimension trois, alors le ratio de Koide de chacun de ces trois vecteurs vaut exactement deux-tiers (2/3).

Nota bene :
Comme les paramétrisations d'Euler-Rodrigues se laissent relier aux parties principales des décompositions intrinsèques des moments angulaires ... la théorie est désormais dotée des outils nécessaires à la description des particules élémentaires.

2 Définitions (rappels).

2.1 Produit tensoriel déformé.

Ici R représente l'ensemble des nombres réels et C celui des nombres complexes. Soit E(D, R) un espace vectoriel de dimension entière D bâti sur le corps commutatif des nombres réels ; il est rapporté à sa base générique ${}^{(D)}\Omega$: ($\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_i$, ..., $\mathbf{e}_D$). Soit deux éléments $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$ dans cet espace ou dans C $\otimes$ E(D, R). Soit A un cube de $\boxplus_R$(D, 3) ou de $\boxplus_C$(D, 3) dont les D^3 composantes sont choisies dans R ou/et C. Par définition, un produit tensoriel déformé par le cube A est noté $\otimes_A$; c'est une *opération binaire interne*[3] agissant sur des paires ($\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$) de la façon conventionnelle suivante :

$$\forall\,(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, \{C \,\otimes\, E(D,\, R)\}^2$$

$$\downarrow \otimes_A$$

$$\otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, A^k_{ij} \,.\, q^i_1 \,.\, q^j_2 \,.\, \mathbf{e}_k \,\in\, \{C \,\otimes\, E(D,\, R)\}$$

2.2 Produit tensoriel déformé et alterné.

Dans un état d'esprit s'inspirant de la définition classique des produits extérieurs, dans ce qui suit, un *produit tensoriel déformé et alterné* est également une opération binaire interne notée $\wedge_A$ agissant sur des paires ($\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$) de la façon conventionnelle suivante :

$$\forall\,(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, \{C \,\otimes\, E(D,\, R)\}^2$$

3. Ce qui signifie qu'elle assure une interaction entre deux arguments pris dans un ensemble de départ et que le résultat de l'interaction se trouve aussi dans cet ensemble de départ.

$$\downarrow \wedge_A$$

$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,-\, \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) \,\in\, \{K \,\otimes\, E(D,\, R)\}$$

Dans le langage des composantes, c'est-à-dire sur la base canonique Ω, il s'agit du vecteur :

$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, A^k_{ij} \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 \,-\, q^i_2 \cdot q^j_1) \cdot \mathbf{e}_k$$

Chaque composante est une somme de trois sous-sommes :

$$\{\sum_{i<j} A^k_{ij} \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 - q^j_2 \cdot q^j_1)\} + \{\sum_{i=j} A^k_{ij} \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 - q^j_2 \cdot q^j_1)\} + \{\sum_{i>j} A^k_{ij} \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 - q^j_2 \cdot q^j_1)\}$$

La deuxième est nulle et il est facile de constater que :

$$A^k_{12} \cdot (q^1_1 \cdot q^2_2 \,-\, q^1_2 \cdot q^2_1) \,;\, A^k_{21} \cdot (q^2_1 \cdot q^1_2 \,-\, q^2_2 \cdot q^1_1)$$

$$A^k_{1j} \cdot (q^1_1 \cdot q^j_2 \,-\, q^1_2 \cdot q^j_1) \,;\, A^k_{j1} \cdot (q^j_1 \cdot q^1_2 \,-\, q^j_2 \cdot q^1_1)$$

$$A^k_{1D} \cdot (q^1_1 \cdot q^D_2 \,-\, q^1_2 \cdot q^D_1) \,;\, A^k_{D1} \cdot (q^D_1 \cdot q^1_2 \,-\, q^D_2 \cdot q^1_1)$$

etc.

Par conséquent :

$$\forall\, A,\, \forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, \{C \,\otimes\, E(D,\, R)\}^2 \,:$$

$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \sum_{i<j} (A^k_{ij} \,-\, A^k_{ji}) \cdot (q^i_1 \cdot q^j_2 \,-\, q^j_1 \cdot q^i_2) \cdot \mathbf{e}_k$$

Remarque 2.1. *Préliminaire sur le noyau de l'application* $\wedge_A$*.*

Les produits tensoriels alternés déformés par des cubes symétriques sont tous nuls :

$$\forall\, A \,\in\, \boxplus_C(D, 3)(^+) \,:\, A^k_{ij} \,=\, A^k_{ji} \,\Rightarrow\, \forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2),\, \wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,=\, \mathbf{0}$$

Les cubes symétriques génèrent une partie du noyau de l'application $\wedge_A$. Ces cubes, contrairement aux apparences, ont une grande importance physique comme je vais le démontrer plus loin.

Remarque 2.2. *Un lien formel entre le produit tensoriel déformé alterné et le produit tensoriel déformé.*

N'importe quel cube A permet la définition formelle d'un cube antisymétrique[4] noté ($^-$A) :

$$(^-A)^k_{ij} \,=\, \frac{1}{2} \cdot (A^k_{ij} \,-\, A^k_{ji})$$

4. Il est aisé de vérifier que les composantes de n'importe quel cube peuvent s'écrire :

$$(^-A)^k_{ij} \,+\, (^-A)^k_{ji} \,=\, \frac{1}{2} \cdot (A^k_{ij} \,-\, A^k_{ji}) \,+\, \frac{1}{2} \cdot (A^k_{ji} \,-\, A^k_{ij}) \,=\, 0 \quad \square$$

Lorsqu'un produit tensoriel est déformé par la partie antisymétrique $(^{-})$A d'un cube A, alors :

$$\otimes_{(^{-}A)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$
$$=$$
$$(^{-}A)^k_{ij} \,.\, q_1^i \,.\, q_2^j \,.\, \mathbf{e}_k$$
$$=$$
$$\sum_{i<j} (^{-}A)^k_{ij} \,.\, q_1^i \,.\, q_2^j \,.\, \mathbf{e}_k \;+\; \sum_{i=j} (^{-}A)^k_{ij} \,.\, q_1^i \,.\, q_2^j \,.\, \mathbf{e}_k \;+\; \sum_{i>j} (^{-}A)^k_{ij} \,.\, q_1^i \,.\, q_2^j \,.\, \mathbf{e}_k$$

A cause de l'antisymétrie, la deuxième sous-somme disparait et :

$$\otimes_{(^{-}A)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \;=\; \sum_{i<j} (^{-}A)^k_{ij} \,.\, (q_1^i \,.\, q_2^j \;-\; q_1^j \,.\, q_2^i) \,.\, \mathbf{e}_k \;=\; \frac{1}{2} \,.\, \wedge_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

De sorte qu'un produit tensoriel déformé par la partie antisymétrique ($^{-}$A) d'un cube A vaut formellement la moitié du produit tensoriel alterné déformé par ce cube reconstitué mentalement à partir des composantes de ($^{-}$A).

Remarque 2.3. *Sur le cube déformant un produit tensoriel alterné.*

— Ce cube est a priori et en général quelconque ; ce qui signifie qu'il n'y a aucune obligation à ce qu'il soit systématiquement antisymétrique sur ses indices bas.

  De sorte qu'il existe une différence cruciale entre (i) travailler avec la partie antisymétrique d'un cube quelconque et (ii) manipuler un cube totalement antisymétrique.

— En tenant compte de la remarque 1.1.2 précédente, il est aisé de voir que n'importe quel produit tensoriel alterné déformé par n'importe quel cube A vaut toujours deux fois le produit tensoriel déformé par la partie antisymétrique ($^{-}$A) de ce cube A :

$$\forall\, A : \wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \;=\; 2 \,.\, \sum_{i<j} (^{-}A)^k_{ij} \,.\, (q_1^i \,.\, q_2^j - q_1^j \,.\, q_2^i) \,.\, \mathbf{e}_k \;=\; 2 \,.\, \otimes_{(^{-}A)}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

  Lorsque le cube A est entièrement symétrique, sa partie antisymétrique est nulle et on retrouve bien le résultat de la remarque préliminaire 1.1.1.

Exemple 2.1. *Le cas des espaces de dimension trois (D = 3).*

Dans les espaces tri-dimensionnels :

$$\forall\, A, \forall\, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \,\in\, C \,\otimes\, E^2(3,\, R), \forall\, k \,=\, 1,\, 2,\, 3 \;:$$
$$(\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2))^k$$
$$=$$
$$B^k_{12} \,.\, (q_1^1 \,.\, q_2^2 \;-\; q_2^1 \,.\, q_1^2) \;+\; B^k_{23} \,.\, (q_1^2 \,.\, q_2^3 \;-\; q_2^2 \,.\, q_1^3) \;+\; B^k_{13} \,.\, (q_1^1 \,.\, q_2^3 \;-\; q_2^1 \,.\, q_1^3)$$

Ici :

$$B^k_{ij} = A^k_{ij} - A^k_{ji} = 2 \, . \, ^{-}A^k_{ij}$$

La relation se laisse réécrire :

$$(\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2))^k$$

$$=$$

$$B^k_{23} \, . \, (q^2_1 \, . \, q^3_2 - q^3_1 \, . \, q^2_2) - B^k_{13} \, . \, (q^3_1 \, . \, q^1_2 - q^1_1 \, . \, q^3_2) + B^k_{12} \, . \, (q^1_1 \, . \, q^2_2 - q^2_1 \, . \, q^1_2)$$

Expression dans laquelle il est facile de reconnaitre les composantes du produit vectoriel classique $\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2$:

$$(\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2))^k = B^k_{23} \, . \, (\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^1 - B^k_{13} \, . \, (\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^2 + B^k_{12} \, . \, (\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2)^3$$

De sorte qu'il semble naturel d'introduire la matrice :

$$[B^*] = \begin{bmatrix} B^1_{23} & -B^1_{13} & B^1_{12} \\ B^2_{23} & -B^2_{13} & B^2_{12} \\ B^3_{23} & -B^3_{13} & B^3_{12} \end{bmatrix} \in M(3, C)$$

Les composantes de la partie antisymétrique du cube A se laissent regrouper sous la forme d'une matrice carrée (3-3) qui peut conventionnellement s'écrire :

$$2 \, . \, ^{(3)}[^{-}A] = \begin{bmatrix} B^1_{12} & B^2_{12} & B^3_{12} \\ B^1_{23} & B^2_{23} & B^3_{23} \\ B^1_{13} & B^2_{13} & B^3_{13} \end{bmatrix} = [B] \in M(3, C)$$

Soit le calcul :

$$^{(3)}[J]^t \, . \, ^{(3)}[^{-}A]$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \, . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} B^1_{12} & B^2_{12} & B^3_{12} \\ B^1_{23} & B^2_{23} & B^3_{23} \\ B^1_{13} & B^2_{13} & B^3_{13} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} \, . \begin{bmatrix} B^1_{23} & B^2_{23} & B^3_{23} \\ -B^1_{13} & -B^2_{13} & -B^3_{13} \\ B^1_{12} & B^2_{12} & B^3_{12} \end{bmatrix}$$

Il permet de conclure que :

$$[B^*] = 2 \, . \, ^{(3)}[^{-}A]^t \, . \, ^{(3)}[J]$$

$$| \wedge_A (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) >= 2 \, . \, ^{(3)}[^{-}A]^t \, . \, ^{(3)}[J] \, . \, |\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2 >$$

... et que, dans les espaces de dimension trois, n'importe quel produit tensoriel alterné déformé résulte effectivement d'une déformation du produit vectoriel classique ; la matrice [B*] s'appelle la *matrice déformante normalisée.*

2.3 Algèbres de Lie - définition.

Soit $\mathrm{W}_D(\mathrm{A}) = \{\mathrm{C} \otimes \mathrm{E}(\mathrm{D}, \mathrm{R}), \wedge_A, \mathrm{A} \in \boxplus_C(\mathrm{D}, 3)\}$ un espace vectoriel équipé d'un produit tensoriel alterné déformé par le cube quelconque A.

Par définition, cet espace est muni d'une structure d'algèbre de Lie lorsque :

1. Le produit tensoriel alterné déformé est une application isotropique ; in extenso : le carré de n'importe quel élément de $\mathrm{W}_D(\mathrm{A})$ est nul :

$$\forall\, \mathbf{q} : \wedge_A(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}$$

Ici, la définition du produit tensoriel alterné déformé garantit le respect de cette condition partout sur $\mathrm{W}_D(\mathrm{A})$. Par une forme d'abus du langage, emprûntant l'adjectif au vocabulaire qu'utilise E. Cartan dans [01], tous les éléments de $\mathrm{W}_D(\mathrm{A})$ sont en quelque sorte *isotropiques* relativement au produit extérieur déformé.

2. N'importe quel triplé d'éléments valide l'identité de Jacobi :

$$\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in W_D(A) :$$

$$\wedge_A(\mathbf{a}, \wedge_A(\mathbf{b}, \mathbf{c})) + \wedge_A(\mathbf{b}, \wedge_A(\mathbf{c}, \mathbf{a})) + \wedge_A(\mathbf{c}, \wedge_A(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \mathbf{0}$$

Par convention du langage, chaque triplé respectant cette relation s'appelle un *territoire de Jacobi*.

2.4 Caractéristique additive d'une matrice.

Soit un quelconque ensemble E muni d'une addition (E, +) et $[\mathrm{M}] = [\mathrm{m}_{\alpha\beta}]$ une quelconque matrice dont les entrées/composantes sont choisies dans E. La caractéristique additive de cette matrice est la somme des composantes de cette matrice.

$$[M]^{\oplus} = \sum_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta}$$

Des exemples plus précis seront donnés ultérieurement dans ce document et ils permettront de visualiser un peu mieux ce concept. Pour l'heure, il est évident qu'une matrice et sa transposée ont la même caractéristique additive :

$$[M]^{\oplus} = \{[M]^t\}^{\oplus}$$

Tout comme la caractéristique de l'inverse additif d'une matrice vaut l'inverse additif de la caractéristique de cette matrice ; en clair :

$$\{-[M]\}^{\oplus} = -[M]^{\oplus}$$

2.5 Ratio dit du Professeur Y. Koide.

Par définition, ce ratio désigne le rapport suivant :

$$\forall \mathbf{q} \equiv (q_1, q_2, q_3) \in C \otimes E(3, R) : K(\mathbf{q}) = \frac{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}{(q_1 + q_2 + q_3)^2}$$

J'introduis cette fraction et je lui donne ce nom en référence au Professeur japonais ayant découvert un lien entre les masses des trois générations d'électrons (classique, muon et tau) au début des années quatre-vingt [02] ; de quoi s'agit-il ?

La physique des particules se préoccupe depuis plusieurs dizaines d'années de recenser les particules élémentaires et d'en faire une classification. Ce travail a mis en exergue le fait que certaines d'entre elles apparaissent trois fois mais avec un niveau d'énergie différent. Parmi les particules concernées par ce phénomène il y a l'électron dont parle tous les cours de physique introduisant la force de Coulomb.

Deux articles écrits par le Professeur Y. Koide sont à l'origine des discussions sur ce ratio [02], [03] ; on trouve des traces de ces débats sur certains forums ou dans une série d'articles, par exemple [04], pour les raisons suivantes :

1. les masses de l'électron de Coulomb (première génération) et le l'électron muon (deuxième génération) étant connues, la formule de Koide permet de déduire la masse de l'électron tau (troisième génération : la plus massive et ayant la durée de vie la plus courte) ;
2. la formule n'a pas de véritables justifications qui permettraient de l'intégrer rationnellement au sein du modèle standard des particules ; un mystère sur lequel revient lui-même à plusieurs reprises le Professeur Y. Koïde, par exemple dans [05] en 2000 et dans [06] en 2005 ;
3. le delta apparent entre la valeur expérimentalement connue de la masse du tau à l'époque de l'énoncé de la formule (1982) et celle prédite par cette formule théorique n'a cessé de se réduire au fur et à mesure de la répétition des mesures [07] ;
4. le muon se laisse combiner avec son antiparticule pour former un atome exotique [08].

Bien que certains chercheurs classent l'étude de cette formule dans le secteur sulfureux de la numérologie, je vais m'attacher à en donner une justification rationnelle assez générale. Plus précisément, je vais montrer qu'elle rend simplement compte de certaines conditions dans lesquelles la vitesse de propagation de la lumière reste invariante en dépit des modifications géométriques pouvant affecter l'environnement des particules.

3 De la vitesse de la lumière.

Il aura fallu attendre la formidable synthèse réalisée par J. C. Maxwell dans [09 ; 1884] pour voir apparaitre la prédiction physique que la lumière se propage à une vitesse finie valant environ trois cent mille kilomètres par seconde ($c \sim 3.10^8$ m/s).

3.1 Avant 1884.

Avant cette date, la croyance en une transmission instantanée de la lumière domine. Elle est en quelque sorte à l'image de Dieu : immanente et omniprésente, sauf peut-être dans les ténèbres. L'analyse cartésienne et la compréhension newtonnienne [10 ; 1687] de la réalité suffisent à savoir comment repérer les objets physiques et décrire leurs mouvements.

3.2 Après Morley et Michelson mais avant Gravity Probe B et LIGO.

L'expérience menée d'abord par Morley et Michelson [11 ; 1887] et répétée depuis des milliers de fois par bien d'autres physiciens va contribuer activement à un changement de paradigme. Elle prouve que la vitesse de propagation de la lumière dans l'espace séparant la Terre de la Lune ne dépend ni de l'observateur inertiel la pratiquant, ni de l'époque de l'année à laquelle elle est faite. Elle offre ainsi la base expérimentale indispensable aux mathématiciens souhaitant énoncer les transformations liant les observations faites sur un objet mobile par des observateurs situés dans deux référentiels inertiels distincts. Les transformations de Lorentz et de Poincaré découlent quasi-directement de cette expérience. Et ces transformations représentent le socle sur lequel A. Einstein et sa première épouse bâtiront la théorie de la relativité restreinte ; à découvrir par exemple dans [12].

Mais les réflexions d'Einstein ne se satisferont pas de l'unification de l'électricité et du magnétisme [13], [14]. Sa quête d'unification le mène à l'énoncé d'une théorie de la gravitation [15 ; 1917] que peu de ses contemporrains comprendront, à l'exception notable d'E. Cartan [16 ; 1922].

Et cette théorie a de nombreuses et surprenantes conséquences ; parmi elles la prédiction d'effets tellement peu acceptables pour les esprits de son époque qu'il faudra attendre un siècle pour en avoir des confirmations expérimentales. Je veux parler par exemple de l'effet Thirring-Lense et des ondes gravitationnelles mais aussi et surtout de l'aptitude de la structure géométrique riemannienne de l'espace-temps [17] à accepter des variations désormais mesurables et mesurées [18], [19].

3.3 Après Gravity Probe B et LIGO.

En dépit des difficultés techniques rencontrées, deux effets relativistes semblent désormais confirmés expérimentalement : la précession de Thomas et la propagation des ondes de gravitation dans un espace temps en moyenne vide. Je ne reviendrai pas ici sur les détails sous-jacents et importants de la théorie. Je me contenterai de prendre pour acquis les résultats expérimentaux et j'admettrai donc sans discussion que la structure géométrique peut vibrer et se déformer comme le ferai n'importe quel corps matériel.

L'apparence anodine de cette phrase sous-tend une révolution dans la façon de concevoir le cosmos parce qu'elle attribue un *comportement matérialiste* aux régions réputées quasiment vides séparant les objets matériels macroscopiques alors que l'outil mathématique révèlant cette plasticité n'avait pour rôle initial que celui de permettre une description des positionnements relatifs de ces objets.

Je ne sais si ma phrase énonce assez clairement l'étonnement que devraient faire naître les résultats expérimentaux récents. Je vais donc la préciser encore.

4 Préservation de la vitesse de la lumière dans une métrique FLRW.

4.1 Relations caractéristiques.

Le vecteur de Poynting est défini dans un espace vectoriel de dimension trois, classiquement E(3, R), et il est proportionnel à la vitesse d'un rai de lumière [20; p.111, (47.5)] :

$$^{(3)}\mathbf{S} = \frac{\rho \,.\, c}{4\pi} \,.\, \mathbf{n}, \; ||^{(3)}\mathbf{n}||^2 = 1$$

De sorte que le produit scalaire classique livre :

$$<^{(3)} \mathbf{S}, \, ^{(3)}\mathbf{S} >= (\frac{\rho \,.\, c}{4\pi})^2$$

Je suppose qu'une variation de la géométrie spatiale euclidienne ($\mathrm{Id}_3 \rightarrow [\mathrm{G}]$) modifie la manière dont il faut réaliser les produits vectoriels et donc la définition de cette opération vectorielle ([J] $\rightarrow$ cube A ou $\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \rightarrow \otimes_A(\mathbf{E}, \mathbf{H})$) ... mais sans pour autant changer la vitesse de propagation du rayonnement électromagnétique; cette hypothèse peut se traduire par :

$$(\frac{c}{4\pi})^2 = \frac{1}{\rho^2} \,.\, <^{(3)} \mathbf{S}, \, ^{(3)}\mathbf{S} >= \frac{1}{\rho'^2} \,.\, <^{(3)} \mathbf{S}', \, ^{(3)}\mathbf{S}' >_{[G]}$$

Plus précisément mais en négligeant dans un premier temps l'influence du champ tourbillonnaire (pour la pédagogie) :

$$(\frac{c}{4\pi})^2$$
$$=$$
$$\frac{1}{\rho^2} \,.\, <^{(3)} \mathbf{E} \wedge \, ^{(3)}\mathbf{H}, \, ^{(3)}\mathbf{E} \wedge \, ^{(3)}\mathbf{H} >$$
$$=$$
$$\frac{1}{\rho'^2} \,.\, < \otimes_A(^{(3)}\mathbf{E}', \, ^{(3)}\mathbf{H}'), \otimes_A(^{(3)}\mathbf{E}', \, ^{(3)}\mathbf{H}') >_{[G]}$$

Dans le langage des composantes, il s'agit de :

$$\frac{1}{\rho^2} \,.\, \delta_{\alpha\beta} \,.\, (\epsilon_{\alpha\lambda\mu} \,.\, E_\lambda \,.\, H_\mu) \,.\, (\epsilon_{\beta\nu\omega} \,.\, E_\nu \,.\, H_\omega)$$

©Thierry PERIAT, Cosmologie et algèbres de Lie, **première partie** : les espaces de dimension trois équipés de produits tensoriels déformés et d'une métrique initiale de FLRW - Loi de préservation de la vitesse de propagation de la lumière - Proposition d'un lien avec la formule du Professeur Koide ; ISBN 978-2-36923-136-3, EAN 9782369231363, version du 3 janvier 2023.

$$=$$

$$\frac{1}{\rho'^2} \,.\, g_{\alpha\beta} \,.\, (A_{\alpha\lambda\mu} \,.\, E'_\lambda \,.\, H'_\mu) \,.\, (A_{\beta\nu\omega} \,.\, E'_\nu \,.\, H'_\omega)$$

La partie de cette relation qui est située à gauche du signe de l'égalité se laisse réexprimer en tenant compte de [20 ; p.22, note de pied de page] :

$$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\rho^2} \,.\, (\epsilon_{\alpha\lambda\mu} \,.\, \epsilon_{\beta\nu\omega})$$

$$=$$

$$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\rho^2} \,.\, \begin{vmatrix} \delta_{\alpha\beta} & \delta_{\alpha\nu} & \delta_{\alpha\omega} \\ \delta_{\lambda\beta} & \delta_{\lambda\nu} & \delta_{\lambda\omega} \\ \delta_{\mu\beta} & \delta_{\mu\nu} & \delta_{\mu\omega} \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\rho^2} \,.\, \{\delta_{\alpha\beta} \,.\, (\delta_{\lambda\nu} \,.\, \delta_{\mu\omega} \;-\; \delta_{\mu\nu} \,.\, \delta_{\lambda\omega})$$

$$-\,\delta_{\alpha\nu} \,.\, (\delta_{\lambda\beta} \,.\, \delta_{\mu\omega} \;-\; \delta_{\mu\beta} \,.\, \delta_{\lambda\omega})$$

$$+\,\delta_{\alpha\omega} \,.\, (\delta_{\lambda\beta} \,.\, \delta_{\mu\nu} \;-\; \delta_{\mu\beta} \,.\, \delta_{\lambda\nu})\}$$

Ici, le symbole $\delta_{\alpha\beta}$ se rapporte au produit scalaire euclidien classique défini dans E(3, R) et la répétition des indices α et β signe la présence d'une somme (convention d'Einstein) ; de sorte que seuls les termes pour lesquels $\alpha = \beta$ restent :

$$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\rho^2} \,.\, (\epsilon_{\alpha\lambda\mu} \,.\, \epsilon_{\beta\nu\omega})$$

$$=$$

$$\frac{1}{\rho^2} \,.\, \{(\delta_{\lambda\nu} \,.\, \delta_{\mu\omega} \;-\; \delta_{\mu\nu} \,.\, \delta_{\lambda\omega})$$

$$-\,\delta_{\beta\nu} \,.\, (\delta_{\lambda\beta} \,.\, \delta_{\mu\omega} \;-\; \delta_{\mu\beta} \,.\, \delta_{\lambda\omega})$$

$$+\,\delta_{\beta\omega} \,.\, (\delta_{\lambda\beta} \,.\, \delta_{\mu\nu} \;-\; \delta_{\mu\beta} \,.\, \delta_{\lambda\nu})\}$$

$$=$$

$$\frac{1}{\rho^2} \,.\, (\delta_{\lambda\nu} \,.\, \delta_{\mu\omega} \;-\; \delta_{\mu\nu} \,.\, \delta_{\lambda\omega})$$

Par ailleurs, la métrique de FLRW initiale se laisse définir par un ensemble de relations bien précises [21 ; p. 2, (7) et (8), H représente le coefficient de Hubble] et que l'une d'entre elles permet d'écrire :

$$(\frac{c}{4\pi})^2$$

$$=$$

$$\frac{1}{\rho^2 \,.\, a^2 \,.\, H^4} \,.\, {}^{(4)}R_{\lambda\omega\nu\mu} \,.\, {}^{(3)}E_\lambda \,.\, {}^{(3)}H_\mu \,.\, {}^{(3)}E_\nu \,.\, {}^{(3)}H_\omega$$

$$=$$

$$\frac{1}{\rho'^2} \,.\, {}^{(3)}g_{\alpha\beta} \,.\, {}^{(3)}A_{\alpha\lambda\mu} \,.\, {}^{(3)}A_{\beta\nu\omega} \,.\, {}^{(3)}E'_\lambda \,.\, {}^{(3)}H'_\mu \,.\, {}^{(3)}E'_\nu \,.\, {}^{(3)}H'_\omega$$

Il convient de noter que cette discussion se déroule dans un espace de dimension trois mais que la formule utilisée ici vaut dans un espace de dimension quatre ; d'où le petit $^{(4)}$ précédant la composante du tenseur de courbure de Riemann. Du point de vue technique, ceci veut dire que tous les indices apparaissant dans les formules précédentes ne peuvent prendre qu'une des trois valeurs 1, 2 ou 3 ; y compris lorsqu'il s'agit d'une composante du tenseur de courbure de Riemann. Par conséquent, puisque chacune des composantes du tenseur de courbure de Riemann compte quatre indices, au moins une paire d'entre eux est une paire constituée par la répétition d'un indice. Compte tenu des symétries et antisymétries naturelles du tenseur de courbure de Riemann, certaines des composantes (au total vingt en dimension quatre et six en dimension trois [22 ; chapitre 18, p. 96, (18.19)]) sont nulles.

Arrivé à ce point de l'exposé, l'idéal serait de savoir exprimer les transformations spatiales du champ électromagnétique :

$$
\begin{aligned}
{}^{(3)}\mathbf{E}' &= f_1({}^{(3)}\mathbf{E},\, {}^{(3)}\mathbf{H}) \\
{}^{(3)}\mathbf{H}' &= f_2({}^{(3)}\mathbf{E},\, {}^{(3)}\mathbf{H})
\end{aligned}
$$

C'est en principe le rôle dévolu aux transformations de Lorentz. Dans un premier jet dont la portée n'est que pédagogique, je choisis de travailler avec n'importe quelle matrice carrée (3-3) inversible capable de rendre compte de la transformation des composantes d'un vecteur dans un changement de repère :

$$|{}^{(3)}\mathbf{E}' >= {}^{(3)}[\Lambda]\,.\,|{}^{(3)}\mathbf{E} >\,;\; |{}^{(3)}\mathbf{H}' >= {}^{(3)}[\Lambda]\,.\,|{}^{(3)}\mathbf{H} >$$

Ceci me permet d'écrire :

$${}^{(3)}E'_\pi = {}^{(3)}\Lambda^\lambda_\pi \,.\, {}^{(3)}E_\lambda \,;\; {}^{(3)}H'_\rho = {}^{(3)}\Lambda^\mu_\rho \,.\, {}^{(3)}H_\mu$$

Comme certains indices sont muets dans la relation traduisant la préservation de la vitesse de la propagation de la lumière, celle-ci peut se réécrire :

$$
\begin{gathered}
(\frac{c}{4\pi})^2 \\
= \\
\frac{1}{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}\,.\,{}^{(4)}R_{\lambda\omega\nu\mu}\,.\,{}^{(3)}E_\lambda\,.\,{}^{(3)}H_\mu\,.\,{}^{(3)}E_\nu\,.\,{}^{(3)}H_\omega \\
= \\
\frac{1}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha\pi\rho}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta\sigma\tau}\,.\,{}^{(3)}E'_\pi\,.\,{}^{(3)}H'_\rho\,.\,{}^{(3)}E'_\sigma\,.\,{}^{(3)}H'_\tau
\end{gathered}
$$

En injectant à cet endroit précis les transformations, elle se réécrit aussi :

$$
\begin{gathered}
(\frac{c}{4\pi})^2 \\
= \\
\frac{1}{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}\,.\,{}^{(4)}R_{\lambda\omega\nu\mu}\,.\,{}^{(3)}E_\lambda\,.\,{}^{(3)}H_\mu\,.\,{}^{(3)}E_\nu\,.\,{}^{(3)}H_\omega
\end{gathered}
$$

$$=$$

$$\frac{1}{\rho'^2} \,.\, {}^{(3)}g_{\alpha\beta} \,.\, {}^{(3)}A_{\alpha\pi\rho} \,.\, {}^{(3)}A_{\beta\sigma\tau} \,.\, {}^{(3)}\Lambda^{\lambda}_{\pi} \,.\, {}^{(3)}E_{\lambda} \,.\, {}^{(3)}\Lambda^{\mu}_{\rho} \,.\, {}^{(3)}H_{\mu} \,.\, {}^{(3)}\Lambda^{\nu}_{\sigma} \,.\, {}^{(3)}E_{\nu} \,.\, {}^{(3)}\Lambda^{\omega}_{\tau} \,.\, {}^{(3)}H_{\omega}$$

Comme la discussion se déroule avec des nombres réels, cette manoeuvre technique aboutit à permettre d'écrire :

$$\frac{1}{\rho^2 \,.\, a^2 \,.\, H^4} \,.\, {}^{(4)}R_{\lambda\omega\nu\mu}$$

$$=$$

$$\frac{1}{\rho'^2} \,.\, {}^{(3)}g_{\alpha\beta} \,.\, ({}^{(3)}A_{\alpha\pi\rho} \,.\, {}^{(3)}\Lambda^{\lambda}_{\pi} \,.\, {}^{(3)}\Lambda^{\mu}_{\rho}) \,.\, ({}^{(3)}A_{\beta\sigma\tau} \,.\, {}^{(3)}\Lambda^{\nu}_{\sigma} \,.\, {}^{(3)}\Lambda^{\omega}_{\tau})$$

Rien n'interdit d'écrire par convention que :

$${}^{(3)}A_{\alpha\pi\rho} \,.\, {}^{(3)}\Lambda^{\lambda}_{\pi} \,.\, {}^{(3)}\Lambda^{\mu}_{\rho} \;=\; {}^{(3)}A_{\alpha\lambda\mu}$$

$${}^{(3)}A_{\beta\sigma\tau} \,.\, {}^{(3)}\Lambda^{\nu}_{\sigma} \,.\, {}^{(3)}\Lambda^{\omega}_{\tau} \;=\; {}^{(3)}A_{\beta\nu\omega}$$

Cette convention permet de réécrire la relation préservant la vitesse de propagation comme suit :

$$\frac{1}{\rho^2 \,.\, a^2 \,.\, H^4} \,.\, {}^{(4)}R_{\lambda\omega\nu\mu} \;=\; \frac{1}{\rho'^2} \,.\, {}^{(3)}g_{\alpha\beta} \,.\, {}^{(3)}A_{\alpha\lambda\mu} \,.\, {}^{(3)}A_{\beta\nu\omega}$$

Dans un espace de dimension quatre, la formule liant les composantes du tenseur de courbure de Riemann [22 ; p.95, (18.14)] s'applique :

$${}^{(4)}R_{\lambda\nu\omega\mu} \;+\; {}^{(4)}R_{\lambda\mu\nu\omega} \;+\; {}^{(4)}R_{\lambda\omega\mu\nu} \;=\; 0$$

Elle introduit une dépendance bien visible entre la nouvelle géométrie spatiale ${}^{(3)}$[G] et une représentation du cube A appartenant à l'ensemble $\boxplus_C(3,\, 3)$ déformant le produit vectoriel classique défini sur C $\otimes$ E(3, R), partout et à tous les instants, quelle que soit la densité volumique d'énergie électromagnétique et l'évolution de celle-ci au cours du temps :

$$\sum_{\alpha,\, \beta} g_{\alpha\beta} \,.\, \{{}^{(3)}A_{\alpha\lambda\mu} \,.\, {}^{(3)}A_{\beta\nu\omega} \;+\; {}^{(3)}A_{\alpha\lambda\omega} \,.\, {}^{(3)}A_{\beta\mu\nu} \;+\; {}^{(3)}A_{\alpha\lambda\nu} \,.\, {}^{(3)}A_{\beta\omega\mu}\} \;=\; 0_R$$

4.2 La suggestion d'un lien avec l'identité de Jacobi.

J'ai démontré dans [a ; § 2.2, p. 15] que le respect de l'identité de Jacobi sur V_D(B) = {C $\otimes$ E(D, R), $\otimes_B$} où le symbole $\otimes_B$ désigne un produit tensoriel classique déformé par les composantes complexes d'un cube ${}^{(4,3)}$B appartenant à l'ensemble $\boxplus_C$(D, 3) [5] aboutit à devoir poser :

$$\forall\, \alpha,\ \beta,\ \delta,\ \epsilon \;=\; 1,\ 2,\ ...,\ D\ :$$

$${}^{(4,\,3)}B^{\epsilon}_{\chi\delta} \,.\, {}^{(4,\,3)}B^{\chi}_{\alpha\beta} \;+\; {}^{(4,\,3)}B^{\epsilon}_{\chi\alpha} \,.\, {}^{(4,\,3)}B^{\chi}_{\beta\delta} \;+\; {}^{(4,\,3)}B^{\epsilon}_{\chi\beta} \,.\, {}^{(4,\,3)}B^{\chi}_{\delta\alpha} \;=\; 0_C$$

5. La vérification de l'identité de Jacobi est compatible avec l'antisymétrie éventuelle du cube B mais elle ne l'exige pas ; sauf si la discussion veut se doter d'une algèbre de Lie.

A cause de la relation [22 ; p.95, (18.14)] considérée lorsque D = 4, j'ai également suggéré la possibilité éventuelle d'écrire :

$$^{(4)}R_{\epsilon\delta\alpha\beta} = {}^{(4,\,3)}B^{\epsilon}_{\chi\delta} \,.\, {}^{(4,\,3)}B^{\chi}_{\alpha\beta}$$

La confrontation visuelle des résultats acquis suggère que :
— si l'identité de Jacobi est vérifiée et
— si le comptage des combinaisons d'indices le permet,
... alors :

$$^{(4,\,3)}B^{\lambda}_{\chi\omega} \,.\, {}^{(4,\,3)}B^{\chi}_{\nu\mu} = \frac{\rho^2 \,.\, a^2 \,.\, H^4}{\rho'^2} \,.\, {}^{(3)}g_{\alpha\beta} \,.\, {}^{(3)}A_{\alpha\lambda\mu} \,.\, {}^{(3)}A_{\beta\nu\omega}$$

Pour rappel :

1. Ici le cube B est un élément de $\boxplus_C(4,\,3)$ tandis que le cube A appartient à $\boxplus_C(3,\,3)$.
2. Le produit de deux composantes du cube A (respectivement du cube B) doit redonner un nombre réel pour que chaque composante du tenseur de courbure de Riemann soit elle-même réelle. Un moyen simple de satisfaire cette contrainte est de réduire d'emblée la discussion aux cubes dont les composantes sont réelles ; mais ce n'est probablement pas le seul moyen possible.
3. Les indices sur lesquels des sommes sont effectuées de 0 à 3 ont été colorés en rouge et ceux sur lesquels les sommes effectuées le sont de 1 à 3 ont été colorés en bleu ; dans tous les cas, ces indices colorés sont muets.

Ceci étant dit, il devient impératif de règler le problème de comptage des composantes des cubes A et B pour pouvoir les relier et savoir si et quand il existe une structure d'algèbre de Lie dans ces espaces tri- et quadridimensionnels.

Ne considérant pour le moment que les composantes du tenseur de courbure de Riemann, voici les combinaisons non-nécessairement nulles théoriquement réalisables avec le jeu des indices 0, 1, 2 et 3 :

$$(\lambda,\,\omega,\,\nu,\,\mu) \,:\, {}^{(4,\,3)}B^{\lambda}_{\chi\omega} \,.\, {}^{(4,\,3)}B^{\chi}_{\nu\mu} \underbrace{=}_{?} \frac{\rho^2 \,.\, a^2 \,.\, H^4}{\rho'^2} \,.\, {}^{(3)}g_{\alpha\beta} \,.\, {}^{(3)}A_{\alpha\lambda\mu} \,.\, {}^{(3)}A_{\beta\nu\omega}$$

$$(0,\,1,\,0,\,1) \,:\, {}^{(4,\,3)}B^{0}_{\chi 1} \,.\, {}^{(4,\,3)}B^{\chi}_{01} \underbrace{=}_{?} \frac{\rho^2 \,.\, a^2 \,.\, H^4}{\rho'^2} \,.\, {}^{(3)}g_{\alpha\beta} \,.\, {}^{(3)}A_{\alpha 01} \,.\, {}^{(3)}A_{\beta 01}$$

$$(0,\,1,\,0,\,2) \,:\, {}^{(4,\,3)}B^{0}_{\chi 1} \,.\, {}^{(4,\,3)}B^{\chi}_{02} \underbrace{=}_{?} \frac{\rho^2 \,.\, a^2 \,.\, H^4}{\rho'^2} \,.\, {}^{(3)}g_{\alpha\beta} \,.\, {}^{(3)}A_{\alpha 02} \,.\, {}^{(3)}A_{\beta 01}$$

$$(0,\,1,\,0,\,3) \,:\, {}^{(4,\,3)}B^{0}_{\chi 1} \,.\, {}^{(4,\,3)}B^{\chi}_{03} \underbrace{=}_{?} \frac{\rho^2 \,.\, a^2 \,.\, H^4}{\rho'^2} \,.\, {}^{(3)}g_{\alpha\beta} \,.\, {}^{(3)}A_{\alpha 03} \,.\, {}^{(3)}A_{\beta 01}$$

$$(0,\,1,\,1,\,2) \,:\, {}^{(4,\,3)}B^{0}_{\chi 1} \,.\, {}^{(4,\,3)}B^{\chi}_{12} \underbrace{=}_{?} \frac{\rho^2 \,.\, a^2 \,.\, H^4}{\rho'^2} \,.\, {}^{(3)}g_{\alpha\beta} \,.\, {}^{(3)}A_{\alpha 02} \,.\, {}^{(3)}A_{\beta 11}$$

...

$$(0,\,1,\,1,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{0}_{\chi 1}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{13}\underbrace{=}_{?}\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 03}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 11}$$

$$(0,\,1,\,2,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{0}_{\chi 1}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{23}\underbrace{=}_{?}\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 03}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 21}$$

$$(0,\,2,\,0,\,2)\ :\ {}^{(4,3)}B^{0}_{\chi 2}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{02}\underbrace{=}_{?}\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 02}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 02}$$

$$(0,\,2,\,0,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{0}_{\chi 2}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{03}\underbrace{=}_{?}\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 03}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 02}$$

$$(0,\,2,\,1,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{0}_{\chi 2}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{13}\underbrace{=}_{?}\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 03}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 12}$$

$$(0,\,2,\,2,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{0}_{\chi 2}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{23}\underbrace{=}_{?}\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 03}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 22}$$

$$(0,\,3,\,0,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{0}_{\chi 3}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{03}\underbrace{=}_{?}\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 03}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 03}$$

$$(0,\,3,\,1,\,2)\ :\ {}^{(4,3)}B^{0}_{\chi 3}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{12}\underbrace{=}_{?}\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 02}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 13}$$

$$(0,\,3,\,1,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{0}_{\chi 3}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{13}\underbrace{=}_{?}\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 03}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 13}$$

$$(0,\,3,\,2,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{0}_{\chi 3}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{23}\underbrace{=}_{?}\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 03}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 23}$$

Les 14 premières relations contiennent au moins un indice 0 à droite du signe de l'égalité ; ce qui ne devrait pas être possible puisque les indices apparaissant de ce côté-là du signe de l'égalité ne peuvent en principe prendre que les valeurs 1, 2 et 3. Sinon :

$$(1,\,2,\,1,\,2)\ :\ {}^{(4,3)}B^{1}_{\chi 2}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{12}=\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 12}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 12}$$

$$(1,\,2,\,1,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{1}_{\chi 2}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{13}=\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 13}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 12}$$

$$(1,\,2,\,2,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{1}_{\chi 2}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{23}=\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 13}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 22}$$

$$(1,\,3,\,1,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{1}_{\chi 3}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{13}=\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 13}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 13}$$

$$(1,\,3,\,2,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{1}_{\chi 3}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{23}=\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 13}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 23}$$

$$(2,\,3,\,2,\,3)\ :\ {}^{(4,3)}B^{2}_{\chi 3}\,.\,{}^{(4,3)}B^{\chi}_{23}=\frac{\rho^2\,.\,a^2\,.\,H^4}{\rho'^2}\,.\,{}^{(3)}g_{\alpha\beta}\,.\,{}^{(3)}A_{\alpha 23}\,.\,{}^{(3)}A_{\beta 23}$$

... les 6 dernières relations ne posent en principe pas problème.

4.3 Le cas d'une métrique FLRW découplée du cube déformant.

Parmi toutes les configurations théoriquement permises, il en existe une pour laquelle la partie spatiale de la métrique se découple du cube déformant A ; dans ce cas, il n'est pas nécessaire de se soucier des problématiques soulevées au cours de la sous-section précédente (les symétries et les antisymétries sur les indices du tenseur de courbure de Riemann ; le nombre d'indices dans les cubes A et B) et il devient du coup possible d'écrire sans restriction :

$$\forall\,(\alpha,\,\beta)\,:\,\forall\,(\lambda,\,\mu,\,\nu,\,\omega),\; A_{\alpha\lambda\mu}\,.\,A_{\beta\nu\omega}\,+\,A_{\alpha\lambda\omega}\,.\,A_{\beta\mu\nu}\,+\,A_{\alpha\lambda\nu}\,.\,A_{\beta\omega\mu}\,=\,0$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\,(\alpha,\,\beta)\,:\,\sum_{\alpha\beta}\,=\,\sum_{\lambda\mu\nu\omega}\{A_{\alpha\lambda\mu}\,.\,A_{\beta\nu\omega}\,+\,A_{\alpha\lambda\omega}\,.\,A_{\beta\mu\nu}\,+\,A_{\alpha\lambda\nu}\,.\,A_{\beta\omega\mu}\}\,=\,0$$

Les indices α, β, λ, μ, ν et ω peuvent prendre les valeurs 1, 2 et 3. Il y a donc 9 relations liées aux valeurs de la paire d'indices $(\alpha,\,\beta)$. Et pour chacune des neufs valeurs possibles de cette paire, la somme notée $\sum_{\alpha\beta}$ contient en principe $3^4 = 81$ termes puisque cette somme s'opère sur les combinaisons permises des indices λ, μ, ν, ω. Pour l'exemple, la paire d'indices $(\alpha,\,\beta)$ étant donnée, chaque sous-somme $(\lambda,\,\mu)$ vaut :

$$\sum_{\nu,\,\omega}(\lambda,\,\mu,\,\nu,\,\omega)$$

$$=$$

$$(\lambda,\,\mu,\,1,\,1)\,+\,(\lambda,\,\mu,\,1,\,2)\,+\,(\lambda,\,\mu,\,1,\,3)$$
$$+\,(\lambda,\,\mu,\,2,\,1)\,+\,(\lambda,\,\mu,\,2,\,2)\,+\,(\lambda,\,\mu,\,2,\,3)$$
$$+\,(\lambda,\,\mu,\,3,\,1)\,+\,(\lambda,\,\mu,\,3,\,2)\,+\,(\lambda,\,\mu,\,3,\,3)$$

Il s'agit plus précisément de :

$$A_{\alpha\lambda\mu}\,.\,A_{\beta 11}\,+\,A_{\alpha\lambda 1}\,.\,A_{\beta\mu 1}\,+\,A_{\alpha\lambda 1}\,.\,A_{\beta 1\mu}$$

$$+$$

$$A_{\alpha\lambda\mu}\,.\,A_{\beta 12}\,+\,A_{\alpha\lambda 2}\,.\,A_{\beta\mu 1}\,+\,A_{\alpha\lambda 1}\,.\,A_{\beta 2\mu}$$

$$+$$

$$A_{\alpha\lambda\mu}\,.\,A_{\beta 13}\,+\,A_{\alpha\lambda 3}\,.\,A_{\beta\mu 1}\,+\,A_{\alpha\lambda 1}\,.\,A_{\beta 3\mu}$$

$$+$$

$$A_{\alpha\lambda\mu}\,.\,A_{\beta 21}\,+\,A_{\alpha\lambda 1}\,.\,A_{\beta\mu 2}\,+\,A_{\alpha\lambda 2}\,.\,A_{\beta 1\mu}$$

$$+$$

$$A_{\alpha\lambda\mu}\,.\,A_{\beta 22}\,+\,A_{\alpha\lambda 2}\,.\,A_{\beta\mu 2}\,+\,A_{\alpha\lambda 2}\,.\,A_{\beta 2\mu}$$

$$+$$

$$A_{\alpha\lambda\mu}\,.\,A_{\beta 23}\,+\,A_{\alpha\lambda 3}\,.\,A_{\beta\mu 2}\,+\,A_{\alpha\lambda 2}\,.\,A_{\beta 3\mu}$$

$$+$$

$$A_{\alpha\lambda\mu} \,.\, A_{\beta 31} \,+\, A_{\alpha\lambda 1} \,.\, A_{\beta\mu 3} \,+\, A_{\alpha\lambda 3} \,.\, A_{\beta 1\mu}$$
$$+$$
$$A_{\alpha\lambda\mu} \,.\, A_{\beta 32} \,+\, A_{\alpha\lambda 2} \,.\, A_{\beta\mu 3} \,+\, A_{\alpha\lambda 3} \,.\, A_{\beta 2\mu}$$
$$+$$
$$A_{\alpha\lambda\mu} \,.\, A_{\beta 33} \,+\, A_{\alpha\lambda 3} \,.\, A_{\beta\mu 3} \,+\, A_{\alpha\lambda 3} \,.\, A_{\beta 3\mu}$$

Une réorganisation transforme tout ceci en :

$$\sum_{\nu,\,\omega}(\lambda,\, \mu,\, \nu,\, \omega)$$
$$=$$
$$A_{\alpha\lambda\mu} \,.\, \sum_{\nu\omega} A_{\beta\nu\omega}$$
$$+\,(A_{\alpha\lambda 1} \,+\, A_{\alpha\lambda 2} \,+\, A_{\alpha\lambda 3}) \,.\, \{(A_{\beta\mu 1} \,+\, A_{\beta\mu 2} \,+\, A_{\beta\mu 3}) \,+\, (A_{\beta 1\mu} \,+\, A_{\beta 2\mu} \,+\, A_{\beta 3\mu})\}$$

Chaque cube de type (3-3-3) peut se comprendre comme la superposition de trois matrices carrées (3-3) :

$$A \,\in\, \boxplus_R(3,\, 3)$$
$$\equiv$$
$$\{{}^{(3)}[{}_1A],\, {}^{(3)}[{}_2A],\, {}^{(3)}[{}_3A]\}$$
$$=$$
$$\left\{ \begin{bmatrix} A_{111} & A_{112} & A_{113} \\ A_{121} & A_{122} & A_{123} \\ A_{131} & A_{132} & A_{133} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} A_{211} & A_{212} & A_{213} \\ A_{221} & A_{222} & A_{223} \\ A_{231} & A_{232} & A_{233} \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} A_{311} & A_{312} & A_{313} \\ A_{321} & A_{322} & A_{323} \\ A_{331} & A_{332} & A_{333} \end{bmatrix} \right\}$$

De sorte que, la sous-somme étudiée se laisse interpréter comme suit :

— Le premier terme est proportionnel à la caractéristique additive de la matrice $[_\beta \mathrm{A}]$ (voir définition du concept au niveau du § 1.1.4) :

$$A_{\alpha\lambda\mu} \,.\, \sum_{\nu\omega} A_{\beta\nu\omega} \,=\, A_{\alpha\lambda\mu} \,.\, {}^{(3)}[{}_\beta A]^{\oplus}$$

— Le second terme :

$$+\,(A_{\alpha\lambda 1} + A_{\alpha\lambda 2} + A_{\alpha\lambda 3}) \,.\, \{(A_{\beta\mu 1} + A_{\beta\mu 2} + A_{\beta\mu 3}) + (A_{\beta 1\mu} + A_{\beta 2\mu} + A_{\beta 3\mu})\}$$
$$=$$
$$\underbrace{{}^{(3)}[{}_\alpha A]}_{\lambda-eme\,ligne} \,.\, \{\ \underbrace{{}^{(3)}[{}_\beta A]^t}_{\mu-eme\,colonne} \ +\ \underbrace{{}^{(3)}[{}_\beta A]}_{\mu-eme\,colonne}\ \}$$

Cette analyse permet de finir le calcul de la somme $\sum_{\alpha\beta}$ et d'aboutir au :

Lemme 4.1. *Caractérisation des cubes déformants découplés de la partie spatiale de la métrique FLRW préservant la vitesse de propagation de la lumière.*

Il existe une configuration pour laquelle la partie spatiale d'une métrique de FLRW et le cube déformant le produit vectoriel classique sont découplés tout en permettant la préservation de la vitesse de propagation de la lumière dans le vide ; dans ce cas, les composantes du cube déformant A doivent obligatoirement satisfaire la relation :

$$\forall\,(\alpha,\,\beta) :\ {}^{(3)}[{}_\alpha A]^{\oplus} \,.\, {}^{(3)}[{}_\beta A]^{\oplus} \,+\, \{\{{}^{(3)}[{}_\alpha A] \,.\, {}^{(3)}[{}_\beta A]^t\}^{\oplus} \,+\, \{{}^{(3)}[{}_\alpha A] \,.\, {}^{(3)}[{}_\beta A]\}^{\oplus}\} \,=\, 0$$

4.4 L'exemple des cubes antisymétriques.

Pour le cas où le cube déformant serait totalement antisymétrique il convient de remarquer que :

$$[^{=} A] = [0]; \ \forall \alpha \, : \, [_{\alpha}A]^{t} = -[_{\alpha}A]$$

Compte tenu des propriétés élémentaires de la caractéristique d'une matrice qui ont été signalées au § 1.1.4 (page 11), la condition sur les matrices $[_{\alpha}\mathrm{A}]$ se réduit alors ici à :

$$\forall (\alpha, \beta) \, : \, [_{\alpha}A]^{\oplus} . [_{\beta}A]^{\oplus} = 0, \ \forall \alpha \, : \, \{[_{\alpha}A]^{2}\}^{\oplus} = 0$$

Lemme 4.2. *Toutes les matrices antisymétriques compatibles avec la condition préservant la vitesse de propagation de la lumière tout en restant découplées de la partie spatiale de la métrique FLRW ont une caractéristique additive nulle.*

Exemple 4.1. *Le cas des matrices représentant une rotation axiale.*

Il est connu que les matrices représentant une rotation axiale sont des matrices (3-3) antisymétriques qui, dans notre environnement euclidien, sont définies par un argument vectoriel, par exemple $\mathbf{a}_{\alpha}$ pouvant être un élément dans $\mathrm{C} \otimes \mathrm{E}(3, \mathrm{R})$; il est coutûme d'écrire :

$$[_{\alpha}A] = {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}_{\alpha})$$

La caractéristique additive de ce type de matrices est toujours nulle :

$$\forall \alpha \, : \, [_{\alpha}A]^{\oplus} = {}_{[J]}\Phi^{\oplus}(\mathbf{a}_{\alpha}) = 0$$

Compte tenu du résultat consigné dans le corollaire 1.2.1, il faut s'attendre à ce que la caractéristique additive du carré de ces matrices ne soit pas nécessairement nul ; et en effet :

$$\forall \alpha : \{[_{\alpha}A]^{2}\}^{\oplus} = 3 . ||\mathbf{a}_{\alpha}||^{2} - (\mathbf{a}_{\alpha}^{\oplus})^{2}$$

Ou plus précisément dans le langage des composantes vectorielles et en introduisant le ratio de Koide de l'argument :

$$\forall \alpha : \mathbf{a}_{\alpha} : (a_{\alpha 1}, a_{\alpha 2}, a_{\alpha 3})$$

$$\{[_{\alpha}A]^{2}\}^{\oplus} = 3 . (a_{\alpha 1}^{2} + a_{\alpha 2}^{2} + a_{\alpha 3}^{2}) - (a_{\alpha 1} + a_{\alpha 2} + a_{\alpha 3})^{2} = (3 . K(\mathbf{a}_{\alpha}) - 1) . (\mathbf{a}_{\alpha}^{\oplus})^{2}$$

La caractéristique additive du carré d'une matrice représentant une rotation axiale d'argument $\mathbf{a}_{\alpha}$ ne s'annule que lorsque les composantes de cet argument satisfont la relation :

$$(3 . K(\mathbf{a}_{\alpha}) - 1) . (\mathbf{a}_{\alpha}^{\oplus})^{2} = 0$$

Ceci ne peut survenir que dans deux types de situations :

1. Lorsque la somme des composantes de son argument n'est pas nulle et qu'elle définit un ratio de Koide égal à un tiers :
$$\forall \alpha \, : \, \mathbf{a}_{\alpha}^{\oplus} \neq 0, \, K(\mathbf{a}_{\alpha}) = \frac{1}{3}$$
2. Lorsque la somme des composantes de son argument est nulle ; ce qui constitue une obstruction à la définition d'un ratio de Koide associé à cet argument :
$$\forall \alpha \, : \, \nexists K(\mathbf{a}_{\alpha}), \, \mathbf{a}_{\alpha}^{\oplus} = 0$$

Lemme 4.3. *Existence ou non d'un ratio de Koide.*

Les matrices antisymétriques de M(3, C) représentant des rotations axiales (d'argument générique **a**) font partie de trios de matrices constituant un cube A déformant le produit vectoriel classique (i) sans être couplés à la partie spatiale de la géométrie mais (ii) en satisfaisant la condition de préservation de la vitesse de propagation de la lumière dans deux familles de situations ; soit :

1. le ratio de Koide de chacun des trois arguments vaut un tiers ($\mathrm{K}(\mathbf{a}) = 1/3$) et la somme des composantes de chaque argument ne doit pas être nulle ($\mathbf{a}^{\oplus} \neq 0$) ;
2. la somme des composantes de chaque argument est nulle ($\mathbf{a}^{\oplus} = 0$) mais il n'exite alors pas de ratio de Koide qui lui serait associé ($\nexists\ \mathrm{K}(\mathbf{a})$).

Ce premier contact avec la notion de ratio de Koide prend place dans le contexte de l'algèbre géométrique. Une discussion visant à introduire ce ratio dans le monde des particules (là où il a été introduit) doit donc s'attacher à découvrir des matrices aptes à décrire celles-ci. C'est ce à quoi je vais m'attacher un peu plus tard dans ce document.

4.5 Représentation des cubes déformant en cas de découplage.

Proposition 4.1. *La caractéristique additive du produit de deux matrices n'est pas égal au produit des caractéristiques additives de chacune d'elles ; concrètement :*

$$\{[M_1]\,.\,[M_2]\}^{\oplus} \neq [M_1]^{\oplus}\,.\,[M_2]^{\oplus}$$

Démonstration. Soit $[\mathrm{M}_1]$ une matrice diagonale, par exemple :

$$[M_1] = \begin{bmatrix} m_{111} & 0 & 0 \\ 0 & m_{122} & 0 \\ 0 & 0 & m_{133} \end{bmatrix}$$

... telle que sa trace est nulle :

$$m_{111} + m_{122} + m_{133} = 0$$

Et soit $[\mathrm{M}_2]$ une matrice à diagonale orthogonale, par exemple :

$$[M_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_{213} \\ 0 & m_{222} & 0 \\ m_{231} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

... telle que son anti-trace est nulle :

$$m_{231} + m_{222} + m_{213} = 0$$

Il est évident que :

$$[M_1]^{\oplus} = [M_2]^{\oplus} = 0,\ [M_1]^{\oplus}\,.\,[M_2]^{\oplus} = 0$$

Tandis que :

$$\{[M_1]\,.\,[M_2]\}^{\oplus}$$

$$=$$

$$\{\begin{bmatrix} m_{111} & 0 & 0 \\ 0 & m_{122} & 0 \\ 0 & 0 & m_{133} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & m_{213} \\ 0 & m_{222} & 0 \\ m_{231} & 0 & 0 \end{bmatrix}\}^{\oplus}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & m_{111}\,.\,m_{213} \\ 0 & m_{122}\,.\,m_{222} & 0 \\ m_{133}\,.\,m_{231} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\oplus}$$

$$=$$

$$m_{133}\,.\,m_{231} + m_{122}\,.\,m_{222} + m_{111}\,.\,m_{213}$$

Or, la seule évidence résultant des hypothèses s'écrit :

$$[M_1]^{\oplus}\,.\,[M_2]^{\oplus} = (m_{111} + m_{122} + m_{133})\,.\,(m_{231} + m_{222} + m_{213}) = 0\,.\,0 = 0$$

De sorte qu'en général la somme en question vaut :

$$m_{133}\,.\,m_{231} + m_{122}\,.\,m_{222} + m_{111}\,.\,m_{213}$$

$$=$$

$$-(m_{111}\,.\,m_{231} + m_{111}\,.\,m_{222} + m_{122}\,.\,m_{231} + m_{122}\,.\,m_{213} + m_{133}\,.\,m_{231} + m_{133}\,.\,m_{222})$$

Et il n'y a aucune raison justifiant qu'elle soit toujours nulle ; elle diffère donc du produit des caractéristiques additives. □

Corollaire 4.1. *de la proposition 1.2.1 précédente.*

$$\forall\,(\alpha,\,\beta) : {}^{(3)}[{}_{\alpha}A]^{\oplus}\,.\,{}^{(3)}[{}_{\beta}A]^{\oplus} \neq \{{}^{(3)}[{}_{\alpha}A]\,.\,{}^{(3)}[{}_{\beta}A]\}^{\oplus}$$

Pour rappel :

- Les cubes déformants totalement symétriques annulent les produits tensoriels déformés alternés.
- Le lemme 1.2.1 n'impose pas de restreindre la discussion aux cubes A entièrement antisymétriques ; l'éventualité où ils le sont a été traitée au niveau de la remarque 1.2.1 et elle a livré le lemme 1.2.2.

Ces constats invitent à faire la :

Proposition 4.2. *Les cubes déformants A validant la condition figurant au niveau du lemme 1.2.1 peuvent être ni totalement antisymétriques, ni totalement symétriques.*

Démonstration. 1. Prémisses.

En effet, tenant compte de la nullité systématique de la caractéristique additive des représentations antisymétriques (lemme 1.2.2) et en particulier de celles des rotations axiales (exemple 1.2.1), la condition figurant au niveau du lemme 1.2.1 livre en particulier :

$$\forall\,\alpha:\,\{^{(3)}[_\alpha A]^{\oplus}\}^2\,+\,\{^{(3)}[_\alpha A]\,.\,\{^{(3)}[_\alpha A]\,+\,^{(3)}[_\alpha A]^t\}\}^{\oplus}\,=\,0$$

Ce résultat tient compte des propriétés élémentaires des caractéristiques additives des matrices, en particulier de celle qui s'énonce ainsi : “La caractéristique additive d'une somme de matrices est égale à la somme des caractéristiques additives de ces matrices”. Cette caractéristique particulière autorise à aller un cran plus loin en écrivant :

$$\forall\,\alpha:\,\{^{(3)}[_\alpha A]^{\oplus}\}^2\,+\,\{^{(3)}[_\alpha A]^2\}^{\oplus}\,+\,\{^{(3)}[_\alpha A]\,.\,^{(3)}[_\alpha A]^t\}^{\oplus}\,=\,0$$

A cause du corollaire 1.2.1 de la proposition 1.2.1, en général :

$$\forall\,\alpha:\,\{^{(3)}[_\alpha A]^{\oplus}\}^2\,\neq\,\{^{(3)}[_\alpha A]^2\}^{\oplus}$$

Mais dans certains cas particulier que je vais préciser, il peut arriver que :

$$\forall\,\alpha:\,\{^{(3)}[_\alpha A]^{\oplus}\}^2\,=\,\{^{(3)}[_\alpha A]^2\}^{\oplus}$$

Dans ces circonstances très particulières seulement, la condition figurant au niveau du lemme 1.2.1 s'écrit :

$$\forall\,\alpha\,:\,\{[_\alpha A]\,.\,\{2\,.\,[_\alpha A]\,+\,[_\alpha A]^t\}\}^{\oplus}\,=\,0$$

Elle invite alors à poser :

$$\forall\,\alpha,\,\exists\,\mathbf{a}_\alpha\,:\,_{[J]}\Phi(\mathbf{a}_\alpha)\,=\,[_\alpha A]\,.\,\{2\,.\,[_\alpha A]\,+\,[_\alpha A]^t\}$$

A supposer désormais que chaque matrice (3-3) $[_\alpha \mathrm{A}]$ est a priori totalement quelconque (i.e. : contient une partie antisymétrique et une partie symétrique), il est permis d'écrire :

$$\forall\,\alpha:\,[_\alpha A]\,=\,[^+_\alpha A]\,+\,[^-_\alpha A]$$

Son carré vaut :

$$\forall\,\alpha:\,[_\alpha A]^2\,=\,\{[^+_\alpha A]^2\,+\,[^-_\alpha A]^2\}\,+\,\{[^+_\alpha A]\,.\,[^-_\alpha A]\,+\,[^-_\alpha A]\,.\,[^+_\alpha A]\}$$

et par ailleurs :

$$\forall\,\alpha:\,[_\alpha A]\,.\,[_\alpha A]^t\,=\,\{[^+_\alpha A]\,.\,[^+_\alpha A]^t+[^-_\alpha A]\,.\,[^-_\alpha A]^t\}+\{[^+_\alpha A]\,.\,[^-_\alpha A]^t+[^-_\alpha A]\,.\,[^+_\alpha A]^t\}$$

La relation proposée devient vraie lorsque :

$$\forall\,\alpha:\,2\,.\,\{[^+_\alpha A]^2\,+\,[^-_\alpha A]^2\}\,+\,\{[^+_\alpha A]\,.\,[^+_\alpha A]^t\,+\,[^-_\alpha A]\,.\,[^-_\alpha A]^t\}\,=\,^{(3)}[0]$$

$$\forall\,\alpha:\,2\,.\,\{[^+_\alpha A]\,.\,[^-_\alpha A]+[^-_\alpha A]\,.\,[^+_\alpha A]\}+\{[^+_\alpha A]\,.\,[^+_\alpha A]^t+[^-_\alpha A]\,.\,[^-_\alpha A]^t\}\,=\,_{[J]}\Phi(\mathbf{a}_\alpha)$$

Mais, par construction :

$$[^+_\alpha A]^t = [^+_\alpha A]\,;\,[^-_\alpha A]^t = -[^-_\alpha A]$$

De sorte que la proposition n'est vraie que si :

$$\forall\,\alpha : 2\,.\,\{[^+_\alpha A]^2 + [^-_\alpha A]^2\} + \{[^+_\alpha A]^2 - [^-_\alpha A]^2\} = {}^{(3)}[0]$$

$$\forall\,\alpha : 2\,.\,\{[^+_\alpha A]\,.\,[^-_\alpha A] + [^-_\alpha A]\,.\,[^+_\alpha A]\} + \{[^+_\alpha A]^2 - [^-_\alpha A]^2\} = {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}_\alpha)$$

En soustrayant la seconde de la première, je trouve :

$$\forall\,\alpha : \underbrace{\{[^+_\alpha A]^2 + [^-_\alpha A]^2\}}_{matrice\,sym.} - \underbrace{\{[^+_\alpha A]\,.\,[^-_\alpha A] + [^-_\alpha A]\,.\,[^+_\alpha A]\}}_{matrice\,antisym.} = -\frac{1}{2}\,.\,\underbrace{{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}_\alpha)}_{matrice\,antisym.}$$

Cette soustraction n'est cohérente que si :

$$\forall\,\alpha : [^+_\alpha A]^2 + [^-_\alpha A]^2 = [0]$$

$$\forall\,\alpha : [^+_\alpha A]\,.\,[^-_\alpha A] + [^-_\alpha A]\,.\,[^+_\alpha A] = \frac{1}{2}\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}_\alpha)$$

Ces deux nouvelles relations suggèrent d'envisager l'existence éventuelle de trois *matrices (3-3) antisymétriques* $[\mathrm{I}_\alpha]$ satisfaisant les relations caractéristiques suivantes :

$$\forall\,\alpha : [^-_\alpha A] = [I_\alpha]\,.\,[^+_\alpha A]\,;\,[I_\alpha]^2 = -Id_3$$

Au cas où cette suggestion fait sens :

$$\forall\,\alpha : \{[^+_\alpha A]\,.\,[I_\alpha] + [I_\alpha]\,.\,[^+_\alpha A]\}\,.\,[^+_\alpha A] = \frac{1}{2}\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}_\alpha)$$

$$\forall\,\alpha : [_\alpha A] = \{Id_3 + [I_\alpha]\}\,.\,[^+_\alpha A]$$

Les propriétés des matrices $[\mathrm{I}_\alpha]$ évoquent la présence d'une structure quaternionique sous-jacente à cette théorie. L'existence effective de ces matrices permet de proposer un formalisme alternatif aux matrices $[_\alpha \mathrm{A}]$ qui ne dépend plus que des matrices $[\mathrm{I}_\alpha]$ et de la partie symétrique des matrices $[_\alpha \mathrm{A}]$. Ce formalisme ne peut jamais être entièrement antisymétrique sauf à s'identifier systématiquement avec la matrice nulle ; ce qui n'aurait pas beaucoup de sens.

2. La condition sur le carré des matrices $[_\alpha \mathrm{A}]$.
Soit $[\mathrm{M}] = [\mathrm{m}_{\alpha\beta}]$ un quelconque élément de M(3, C) :
— Le carré de sa caractéristique additive vaut :

$$\{[M]^\oplus\}^2$$

$$=$$

$$(m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{21} + m_{22} + m_{23} + m_{31} + m_{32} + m_{33})^2$$

Il s'agit du carré d'une somme de N = 9 termes. Elle contient les 9 carrés de ces termes *plus* (N -1).N/2 = 36 produits du genre $2.\mathrm{m}_{\alpha\beta}.\mathrm{m}_{\chi\delta}$ dont toutes les paires d'indices diffèrent les unes des autres ; soit au total : 45 termes.

— Le carré de cette matrice vaut :

$$[M]^2$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} (m_{11})^2 + m_{12} . m_{21} + m_{13} . m_{31} & m_{11} . m_{12} + m_{12} . m_{22} + m_{13} . m_{32} & m_{11} . m_{13} + m_{12} . m_{23} + m_{13} . m_{33} \\ m_{21} . m_{11} + m_{22} . m_{21} + m_{23} . m_{31} & m_{21} . m_{12} + (m_{22})^2 + m_{23} . m_{32} & m_{21} . m_{13} + m_{22} . m_{23} + m_{23} . m_{33} \\ m_{31} . m_{11} + m_{32} . m_{21} + m_{33} . m_{31} & m_{31} . m_{12} + m_{32} . m_{22} + m_{33} . m_{32} & m_{31} . m_{13} + m_{32} . m_{23} + (m_{33})^2 \end{bmatrix}$$

La caractéristique additive de ce carré est une somme contenant au plus 3 fois 9 = 27 termes. Cependant, comme pour ce qui se passe pour $\{[\mathrm{M}]^{\oplus}\}^2$, $\mathrm{m}_{12}.\mathrm{m}_{21}$, $\mathrm{m}_{23}.\mathrm{m}_{32}$, $\mathrm{m}_{31}.\mathrm{m}_{13}$, sont présents deux fois. En revanche, 6 des neuf carrés des composantes n'apparaissent pas, contrairement à ce qui se passe pour $\{[\mathrm{M}]^{\oplus}\}^2$.

— Ces premiers constats confirment que la différence entre le carré de la caractéristique additive et la caractéristique du carré n'est pas systématiquement nulle ; elle s'écrit :

$$\{[M]^{\oplus}\}^2 - \{[M]^2\}^{\oplus}$$
$$=$$
$$(m_{12})^2 + (m_{13})^2 + (m_{21})^2 + (m_{23})^2 + (m_{31})^2 + (m_{32})^2$$
$$+$$
$$m_{11} . m_{12} + m_{11} . m_{13} + m_{11} . m_{21} + m_{11} . m_{31}$$
$$+$$
$$2 . (m_{11} . m_{23} + m_{11} . m_{22} + m_{11} . m_{32} + m_{11} . m_{33})$$
$$+$$
$$2 . (m_{12} . m_{13} + m_{12} . m_{31} + m_{12} . m_{33}) + m_{12} . m_{22} + m_{12} . m_{23} + m_{12} . m_{32}$$
$$+$$
$$m_{13} . m_{21} + m_{13} . m_{32} + 2 . (m_{13} . m_{22} + m_{13} . m_{23} + m_{13} . m_{33})$$
$$+$$
$$m_{21} . m_{22} + m_{21} . m_{32} + 2 . (m_{21} . m_{23} + m_{21} . m_{31} + m_{21} . m_{33})$$
$$+$$
$$m_{22} . m_{23} + m_{22} . m_{32} + 2 . (m_{22} . m_{31} + m_{22} . m_{33})$$
$$+$$
$$m_{23} . m_{31} + m_{23} . m_{33}$$
$$+$$
$$2 . m_{31} . m_{32} + m_{31} . m_{33}$$
$$+$$
$$2 . m_{32} . m_{33}$$

La matrice [M] figure ici génériquement n'importe quelle matrice $[_\alpha \mathrm{A}]$ et celle-ci est a priori quelconque, entendre par là : ni totalement symétrique, ni totalement anti-symétrique ; les seules matrices capables de valider la proposition en cours de démonstration sont celles pour lesquelles :

$$\{[M]^\oplus\}^2 \,-\, \{[M]^2\}^\oplus \,=\, 0$$

Cette égalité représente forcément une contrainte sur les composantes de ces matrices.

3. La condition sur la liaison entre la partie symétrique et la partie antisymétrique des matrices $[_\alpha \mathrm{A}]$.
Il suffit que chaque $[\mathrm{I}_\alpha]$ commute avec sa matrice $[^+{}_\alpha \mathrm{A}]$ associée ; sous-entendu : pour laquelle l'indice α est identique. *Preuve* : en proposant :

$$\forall\, \alpha :\, [^-_\alpha A] \,=\, [I_\alpha]\,.\,[^+_\alpha A]\,;\, [I_\alpha]^2 \,=\, -Id_3$$

... et en supposant que :

$$\forall\, \alpha :\, [^-_\alpha A] \,=\, [I_\alpha]\,.\,[^+_\alpha A] \,=\, [^+_\alpha A]\,.\,[I_\alpha]$$

Il est permis d'écrire :

$$[^-_\alpha A]^2 \,=\, \{[^+_\alpha A]\,.\,[I_\alpha]\}\,.\,[I_\alpha]\,.\,[^+_\alpha A]$$

Comme la multiplication des matrices est associative sur M(3, C) :

$$[^-_\alpha A]^2 \,=\, [^+_\alpha A]\,.\,[I_\alpha]^2\,.\,[^+_\alpha A] \,=\, -[^+_\alpha A]^2$$

Il en résulte la relation qui avait suggéré la dépendance entre la partie symétrique et la partie anti-symétrique de chaque matrice $[_\alpha \mathrm{A}]$:

$$[^-_\alpha A]^2 \,+\, [^+_\alpha A]^2 \,=\, [0]$$

□

Lemme 4.4. *Au sujet des cubes ni totalement antisymétriques, ni totalment symétriques, préservant la vitesse de la lumière dans le vide.*

A condition de pouvoir :

1. découvrir des triplés de matrices $[\mathrm{I}_\alpha]$ dans M(3, C) ayant comme propriété en commun avec les générateurs i, j et k de la partie imaginaire des quaternions ($\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 =$ -1) d'avoir un carré égal à moins une fois la matrice identité Id_3 ;
2. vérifier que :

$$\forall\, \alpha :\, \{^{(3)}[_\alpha A]^\oplus\}^2 \,=\, \{^{(3)}[_\alpha A]^2\}^\oplus$$

... la condition sur les cubes déformants découplés de la partie spatiale de la métrique FLRW et préservant la vitesse de la lumière accepte pour solutions un ensemble de cubes qui (i) ne sont ni jamais totalement antisymétriques, ni jamais totalement symétriques et (ii) se laissent représenter par des triplés de matrices carrées (3-3) vérifiant les conditions :

$$\forall\,\alpha : [{}_{\alpha}A] = \{Id_3 + [I_\alpha]\} \,.\, [{}^{+}_{\alpha}A] \,;\, [{}^{-}_{\alpha}A]^2 + [{}^{+}_{\alpha}A]^2 = [0]$$

$$\forall\,\alpha : [{}^{-}_{\alpha}A] = [I_\alpha] \,.\, [{}^{+}_{\alpha}A] \,;\, [I_\alpha]^2 = -Id_3$$

$$\forall\,\alpha : \{[{}^{+}_{\alpha}A] \,.\, [I_\alpha] + [I_\alpha] \,.\, [{}^{+}_{\alpha}A]\} \,.\, [{}^{+}_{\alpha}A] = \frac{1}{2} \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{a}_\alpha)$$

4.6 Quel lien avec les paramétrisations d'Euler-Rodrigues ?

Les résultats précédents suggèrent de s'intéresser d'un peu plus près à l'hypothèse consistant à penser que chaque cube déformant compatible avec la préservation de la vitesse de propagation de la lumière pourrait être une superposition de trois matrices, chacune représentant une paramétrisation d'Euler-Rodrigues [21, p. 282 à condition de corriger le terme placé au centre de la matrice en lui ajoutant μ^2], [22, (5)] ; il revient au même d'envisager de poser :

$$\forall\,\alpha \,:\, [{}_{\alpha}A] = (2 \,.\, q_{\alpha 0}^2 - 1) \,.\, Id_3 + 2 \,.\, T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) + 2 \,.\, q_{\alpha 0} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

Cette hypothèse induit un certain nombre de résultats dérivés ; par exemple :

— La connaissance de la partie symétrique et de la partie antisymétrique de ces matrices :

$$\forall\,\alpha \,:\, [{}^{+}_{\alpha}A] = (2 \,.\, q_{\alpha 0}^2 - 1) \,.\, Id_3 + T_2(\otimes)(\sqrt{2} \,.\, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha, \sqrt{2} \,.\, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

$$\forall\,\alpha \,:\, [{}^{-}_{\alpha}A] = 2 \,.\, q_{\alpha 0} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

— La partie antisymétrique est une matrice rotation et elle a un déterminant nul ; elle n'est donc pas inversible.

— Le déterminant de la partie symétrique vaut en général (voir plus bas la remarque 1.3.1) :

$$\forall\,\alpha \,:\, |{}^{+}_{\alpha}A| = (2 \,.\, q_{\alpha 0}^2 - 1)^2 \,.\, \{(2 \,.\, q_{\alpha 0}^2 - 1) + 2 \,.\, <^{(3)} \mathbf{q}_\alpha, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha >_{Id_3}\}$$

Si en particulier, les représentations d'Euler-Rodrigues figurent des quaternions unitaires, voir la référence [22], alors :

$$q_{\alpha 0}^2 + <^{(3)} \mathbf{q}_\alpha, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha >_{Id_3} = 1$$

Et il en résulte que :

$$\forall\,\alpha \,:\, |{}^{+}_{\alpha}A| = (2 \,.\, q_{\alpha 0}^2 - 1)^2$$

Dans ce cas, la partie symétrique n'est pas inversible lorsque :

$$\forall\,\alpha \,:\, q_{\alpha 0} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

A) Lorsque la partie symétrique est inversible (i.e. : $q_{0\alpha} \neq \pm 1/\sqrt{2}$) et que la paramétrisation est *unitaire*, son inverse a pour formalisme générique :

$$\forall\, \alpha \,:\, [{}^{+}_{\alpha}A]^{-1} \,=\, \frac{1}{2\,.\,q^2_{\alpha 0}\,-\,1}\,.\,\{Id_3\,-\,2\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\}$$

Il est alors possible d'en déduire une représentation de la matrice $[I_\alpha]$ puisqu'il faut en principe vérifier la validité de la relation :

$$\begin{gathered}[I_\alpha]\\ =\\ [{}^{-}_{\alpha}A]\,.\,[{}^{+}_{\alpha}A]^{-1}\\ =\\ \frac{2\,.\,q_{\alpha 0}}{2\,.\,q^2_{\alpha 0}\,-\,1}\,.\,{}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\,.\,\{Id_3\,-\,2\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\}\\ =\\ \frac{2\,.\,q_{\alpha 0}}{2\,.\,q^2_{\alpha 0}\,-\,1}\,.\,{}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\end{gathered}$$

La vérification des conditions imposées par le lemme 1.3.4 ne s'arrête pas là ; il convient de calculer le carré de la matrice précédemment trouvée :

$$\begin{gathered}[I_\alpha]^2\\ =\\ \frac{4\,.\,q^2_{\alpha 0}}{(2\,.\,q^2_{\alpha 0}\,-\,1)^2}\,.\,\{T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) - <^{(3)}\,\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha>_{Id_3}\,.\,Id_3\}\\ =\\ \frac{4\,.\,q^2_{\alpha 0}}{(2\,.\,q^2_{\alpha 0}\,-\,1)^2}\,.\,\{T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\,+\,(q^2_{\alpha 0}\,-\,1)\,.\,Id_3\}\end{gathered}$$

Ce carré devrait valoir moins une fois la matrice identité Id_3.

1. Pour annuler le premier terme, il n'est pas envisageable d'annuler $q_{0\alpha}$ parce que ce choix annulerait le carré ; il faut donc imposer une première sous-condition :
$$^{(3)}\mathbf{q}_\alpha \,=\, {}^{(3)}\mathbf{0}$$
2. Pour annuler ensuite le second terme, il faut imposer une seconde sous-condition :
$$\frac{4\,.\,q^2_{\alpha 0}\,.\,(q^2_{\alpha 0}\,-\,1)}{(2\,.\,q^2_{\alpha 0}\,-\,1)^2}\,=\,-1$$
Cette sous-condition est un trinôme du second degré dépendant de ${q^2}_{0\alpha}$:
$$8\,.\,q^4_{0\alpha}\,-\,8\,.\,q^2_{0\alpha}\,+\,1\,=\,0$$
Ses solutions valent :
$$q^2_{\alpha 0}\,=\,\frac{1}{2}\,.\,(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}})$$
Or si la paramétrisation est unitaire et que la première sous-condition est validée, il suit que ${q^2}_{0\alpha} = 1$. Les deux valeurs diffèrent l'une de l'autre. Il en résulte donc l'impossibilité de faire coincider le carré de la matrice $[I_\alpha]$ avec la matrice $-Id_3$.

Lemme 4.5. *De la paramétrisation d'Euler-Rodrigues unitaire inversible.*

Une paramétrisation d'Euler-Rodrigues unitaire dont la partie symétrique est inversible ne remplit pas les conditions imposées par le lemme 1.3.4.

B) Lorsque la partie symétrique n'est pas inversible (i.e. : $\mathrm{q}_{0\alpha} = \pm 1/\sqrt{2}$) :

1. Il n'est pas possible d'en déduire les représentations matricielles $[\mathrm{I}_\alpha]$ des générateurs imaginaires du corps des quaternions, les I_α (avec par exemple : $\mathrm{i} = \mathrm{I}_1$, $\mathrm{j} = \mathrm{I}_2$ et $\mathrm{k} = \mathrm{I}_3$), à l'aide des relations proposées au niveau du lemme 1.3.4 ; à savoir, entre autres :

$$\forall\, \alpha : [{}^{-}_{\alpha}A] \,=\, [I_\alpha] \,.\, [{}^{+}_{\alpha}A] \,;\, [I_\alpha]^2 \,=\, -Id_3$$

   Ce qui ne veut pas dire que cette proposition est irrecevable ; elle n'est tout simplement pas l'outil qui permettra de déduire le formalisme précis des $[\mathrm{I}_\alpha]$. En revanche l'analyse *périenne* des matrices [b] trouve peut-être ici une opportunité de s'appliquer utilement.

2. La proposition examinée revient à poser :

$$\forall\, \alpha \,:\, [{}_{\alpha}A] \,=\, T_2(\otimes)(\sqrt{2}\,.\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, \sqrt{2}\,.\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) \,\pm_{[J]}\, \Phi(\sqrt{2}\,.\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

   C'est-à-dire :

$$\forall\, \alpha \,:\, [{}^{+}_{\alpha}A] \,=\, 2\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$
$$\forall\, \alpha \,:\, [{}^{-}_{\alpha}A] \,=\, \pm\sqrt{2}\,.\,{}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

3. Il faut néanmoins vérifier que l'identité suivante est validée :

$$\forall\, \alpha : [{}^{-}_{\alpha}A]^2 \,+\, [{}^{+}_{\alpha}A]^2 \,=\, [0]$$

   C'est-à-dire ici :

$$\forall\, \alpha :$$
$$2\,.\,\{{}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\}^2 \,+\, 4\,.\,T_2^2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\} \,=\, {}^{(3)}[0]$$

   Or d'une part :

$${}_{[J]}\Phi^2({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$
$$=$$
$$T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) \,-\, \underbrace{<^{(3)}\,\mathbf{q}_\alpha,\, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha >_{Id_3}}_{1 - q_{\alpha 0}^2 = \frac{1}{2}\; si\; unitaire} .\, Id_3$$
$$=$$
$$T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) \,-\, \frac{1}{2}\,.\, Id_3$$

   Et d'autre part :

$$\{T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\}^2$$
$$=$$

...

$$\underbrace{<^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, ^{(3)}\mathbf{q}_\alpha>_{Id_3}}_{1-q_{\alpha 0}^2=\frac{1}{2}\,si\,unitaire} . T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, ^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

$$=$$

$$\frac{1}{2} . T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, ^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

Par conséquent, lorsque la partie symétrique n'est pas inversible et que la paramétrisation est unitaire, la somme de ces deux carrés vaut en général :

$$\forall\,\alpha : \, ^{(3)}[^{-}_{\alpha}A]^2 \,+\, ^{(3)}[^{+}_{\alpha}A]^2 \,=\, -Id_3 \,+\, 4 . T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, ^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) \,\neq\, ^{(3)}[0]$$

Elle ne peut pas être nulle.

Lemme 4.6. *De la paramétrisation d'Euler-Rodrigues unitaire non-inversible.*

Une paramétrisation d'Euler-Rodrigues unitaire et non-inversible ne remplit pas les conditions imposées par le lemme 1.3.4.

Corollaire 4.2. *Suites logiques des lemmes 1.3.5 et 1.3.6.*

De deux choses l'une :

1. Soit il convient de réitérer la démarche effectuée précédemment avec des représentations d'Euler-Rodrigues *non-unitaires*, c'est-à-dire en posant :

$$q_{\alpha 0}^2 + \, <^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, ^{(3)}\mathbf{q}_\alpha>_{Id_3} = \, k \,\neq\, 1$$

... en espérant découvrir une valeur de k qui permettra de satisfaire l'ensemble des conditions résumées dans le lemme 1.3.4.

2. Soit il convient d'envisager d'autres représentations que celles d'Euler-Rodrigues satisfaire l'ensemble des conditions résumées dans le lemme 1.3.4 ; par exemple, proposer d'écrire à la place de celles-ci :

$$\forall\,\alpha \,:\, [_\alpha A] \,=\, \lambda_\alpha . Id_3 \,+\, \mu_\alpha . T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, ^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) \,+\, \nu_\alpha . _{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

Soit la première des deux alternatives logiques proposées dans le corollaire. En reprenant les calculs précédents au niveau du calcul du déterminant de la partie symétrique :

$$\forall\,\alpha \,:\, |^{+}_{\alpha}A|$$

$$=$$

$$(2 . q_{\alpha 0}^2 \,-\, 1)^2 . \{(2 . q_{\alpha 0}^2 \,-\, 1) \,+\, 2 . <^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, ^{(3)}\mathbf{q}_\alpha>_{Id_3}\}$$

$$=$$

$$(2 . q_{\alpha 0}^2 \,-\, 1)^2 . \{(2 . q_{\alpha 0}^2 \,-\, 1) \,+\, 2 . (k \,-\, q_{\alpha 0}^2)\}$$

$$=$$

$$(2 . q_{\alpha 0}^2 \,-\, 1)^2 . (2 . k \,-\, 1)$$

En plus des valeurs $\pm 1/\sqrt{2}$, la valeur k = 1/2 peut également annuler ce déterminant.

A) Lorsque la partie symétrique est inversible (i.e. : $q_{0\alpha} \neq \pm 1/\sqrt{2}$, $k \neq 1/2$) et que la paramétrisation *n'est pas unitaire*, son inverse a pour formalisme générique :

$$\forall\, \alpha \,:\, [{}^{+}_{\alpha} A]^{-1}$$

$$=$$

$$\frac{1}{2\,.\,q_{\alpha 0}^2\,-\,1}\,.\,Id_3 - \frac{2}{(2\,.\,q_{\alpha 0}^2\,-\,1)\,.\,(2\,.\,q_{\alpha 0}^2\,-\,1\,+\,2\,.\,(k\,-\,q_{\alpha 0}^2))}\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

$$=$$

$$\frac{1}{2\,.\,q_{\alpha 0}^2\,-\,1}\,.\,\{Id_3\,-\,\frac{2}{2\,.\,k\,-\,1}\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\}$$

Il est alors possible d'en déduire une représentation de la matrice $[I_\alpha]$ puisqu'il faut en principe vérifier la validité de la relation :

$$[I_\alpha]$$

$$=$$

$$[{}^{-}_{\alpha} A]\,.\,[{}^{+}_{\alpha} A]^{-1}$$

$$=$$

$$2\,.\,\frac{q_{\alpha 0}}{2\,.\,q_{\alpha 0}^2\,-\,1}\,.\,{}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\,.\,\{Id_3\,-\,\frac{2}{2\,.\,k\,-\,1}\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\}$$

$$=$$

$$\frac{2\,.\,q_{\alpha 0}}{2\,.\,q_{\alpha 0}^2\,-\,1}\,.\,{}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

La non-unitarité de la paramétrisation ne change strictement rien à ce résultat particulier parce que :

$$\forall\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha\,:\,{}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\,=\,{}^{(3)}[0]$$

La vérification des conditions résumées au lemme 1.3.4 exige de calculer le carré de cette matrice ; elle vaut cette fois-ci :

$$[I_\alpha]^2$$

$$=$$

$$\frac{4\,.\,q_{\alpha 0}^2}{(2\,.\,q_{\alpha 0}^2\,-\,1)^2}\,.\,\{T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) - <^{(3)}\,\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha>_{Id_3}\,.\,Id_3\}$$

$$=$$

$$\frac{4\,.\,q_{\alpha 0}^2}{(2\,.\,q_{\alpha 0}^2\,-\,1)^2}\,.\,\{T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\,-\,(k\,-\,q_{\alpha 0}^2)\,.\,Id_3\}$$

Ce carré devrait valoir moins une fois la matrice identité Id_3.

1. L'éventualité :

$$q_{\alpha 0} \,=\, 0$$

... ne peut pas être envisagée ici puisqu'elle annule le carré de la matrice $[\mathrm{I}_\alpha]$.

2. Par contre, il semble possible d'envisager :

$$^{(3)}\mathbf{q}_\alpha \,=\, ^{(3)}\mathbf{0}\,;\; \frac{4\,.\,q_{\alpha 0}^2}{(2\,.\,q_{\alpha 0}^2 \,-\, 1)^2}\,.\,(k \,-\, q_{\alpha 0}^2) \,=\, 1$$

Comme la paramétrisation est non-unitaire, cette première sous-condition entraine la nécessité de poser $\mathrm{q}^2{}_{0\alpha} = \mathrm{k}$; or la seconde sous-condition est un trinôme du second degré dépendant de $\mathrm{q}^2{}_{0\alpha}$:

$$8\,.\,q_{0\alpha}^4 \,-\, 4\,.\,(k \,+\, 1)\,.\,q_{0\alpha}^2 \,+\, 1 \,=\, 0$$

Ses solutions valent :

$$q_{\alpha 0}^2 \,=\, \frac{k \,+\, 1}{4} \,\pm\, \frac{1}{8}\,.\,\sqrt{4\,.\,k^2 \,+\, 8\,k \,-\, 4}$$

Ces deux expressions coincideraient s'il existait au moins une valeur de k tel que :

$$q_{\alpha 0}^2 \,=\, \frac{k \,+\, 1}{4} \,\pm\, \frac{1}{8}\,.\,\sqrt{4\,.\,k^2 \,+\, 8\,k \,-\, 4} = k$$

Or cette exigence reviendrait à résoudre :

$$(2\,.\,k \,-\, 1)^2 \,=\, 0$$

Dont la solution s'écrit :

$$k \,=\, \frac{1}{2}$$

Or cette valeur est interdite lorsque la partie symétrique de la représentation envisagée est supposée être inversible ; par conséquent :

Lemme 4.7. *De la paramétrisation d'Euler-Rodrigues non-unitaire dont la partie symétrique est inversible.*

Une paramétrisation d'Euler-Rodrigues non-unitaire dont la partie symétrique est inversible ne remplit pas les conditions imposées par le lemme 1.3.4.

B) Lorsque la partie symétrique n'est pas inversible (i.e. : $\mathrm{q}_{0\alpha} = \pm 1/\sqrt{2}$, k $= 1/2$) et que la paramétrisation *n'est pas unitaire*, elle a un des formalismes :

$$\forall\,\alpha\,:\,[_\alpha A] \,=\, T_2(\otimes)(\sqrt{2}\,.\,^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, \sqrt{2}\,.\,^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) \,\pm\, _{[J]}\Phi(\sqrt{2}\,.\,^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

Ici aussi il convient de vérifier la validité ou la non-validité de la condition :

$$\forall\,\alpha : \,[^-_\alpha A]^2 \,+\, [^+_\alpha A]^2 \,=\, [0]$$

Comme :

$$\forall\,\alpha : [{}^{+}_{\alpha}A] \,=\, T_2(\otimes)(\sqrt{2}\,.\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,\sqrt{2}\,.\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$
$$[{}^{-}_{\alpha}A] \,=\, \pm_{[J]}\Phi(\sqrt{2}\,.\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

En supposant que ${\mathrm{q}^2}_{0\alpha} = 1/2$, il vient :

$$\forall\,\alpha : [{}^{+}_{\alpha}A]^2 \,=\, 4\,.\,(k\,-\,\frac{1}{2})\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

$$[{}^{-}_{\alpha}A]^2 \,=\, 2\,.\,\{T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\,-\,(k\,-\,\frac{1}{2})\,.\,Id_3\}$$

La somme des deux carrés vaut alors :

$$\forall\,\alpha : [{}^{-}_{\alpha}A]^2 \,+\, [{}^{+}_{\alpha}A]^2$$
$$=$$
$$(1\,-\,2\,.k)\,.\,Id_3\,+\,4\,.\,k\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

Elle ne peut s'annuler que lorsque :

$$k \,=\, \frac{1}{2}\,;\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha \,=\, {}^{(3)}\mathbf{0}$$

Auquel cas la représentation étudiée ici vaut la matrice nulle :

$$\forall\,\alpha\,:\,[{}_{\alpha}A] \,=\, {}^{(3)}[0]$$

Ce qui n'a pas un réel intérêt.

Théorème 4.1. *De non-admissibilité des représentations d'Euler-Rodrigues.*

Les représentations d'Euler-Rodrigues ne sont pas des représentations admissibles des cubes déformants préservant la vitesse de la lumière en respectant les conditions résumées au lemme 1.3.4.

Proposition 4.3. *Corollaire du théorème*

Il semble a priori raisonnable d'élargir la discussion en considérant les représentations génériques :

$$\forall\,\alpha\,:\,[{}_{\alpha}A] \,=\, \lambda_\alpha\,.\,Id_3\,+\,\mu_\alpha\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\,+\,\nu_\alpha\cdot{}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

4.7 Les représentations périennes.

Définition 4.1. *Représentations périennes.*

Par convention et par manque d'imagination, ces représentations seront provisoirement qualifiées de *périennes*. Toute représentation périenne contient explicitement deux vecteurs de E(3, C) : celui de composantes $(\lambda_\alpha,\,\mu_\alpha,\,\nu_\alpha)$ et $\mathbf{q}_\alpha$. Le formalisme de ces représentations permet aisément de reconnaitre une partie symétrique :

$$\forall\,\alpha : [{}^{+}_{\alpha}A] \,=\, \lambda_\alpha\,.\,Id_3\,+\,\mu_\alpha\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

et une partie antisymétrique :

$$[{}^{-}_{\alpha}A] \,=\, \nu_\alpha\cdot{}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

Remarque 4.1. *Calcul d'un déterminant-type.*

Soit à calculer en général :

$$|\beta \,.\, Id_3 \,+\, T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{M},\, {}^{(3)}\mathbf{M}) \,+\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N})|$$

$$=$$

$$\begin{vmatrix} \beta + m_x^2 & m_x \,.\, m_y - Z & m_x \,.\, m_z + Y \\ m_x \,.\, m_y + Z & \beta + m_y^2 & m_x \,.\, m_y - X \\ m_x \,.\, m_z - Y & m_y \,.\, m_z + X & \beta + m_z^2 \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$\beta^3 + [\,(m_x^2 + m_y^2 + m_z^2) + (X^2 + Y^2 + Z^2)\,] \,.\, \beta + (m_x \,.\, X + m_y \,.\, Y + m_z \,.\, Z)^2$$

$$=$$

$$\beta^3 \,+\, \{||\mathbf{M}||^2 \,+\, ||\mathbf{N}||^2\} \,.\, \beta \,+\, (\mathbf{M} \,.\, \mathbf{N})^2$$

avec :

$$\mathbf{M} \,:\, (m_x,\, m_y,\, m_z),\, \mathbf{N} :\, (X,\, Y,\, Z)$$

Exemple 4.2. *Déterminant des représentations périennes.*

Ces représentations se caractérisent par :

$$|{}_{\alpha}^{-}A| \,=\, 0$$

$$|{}_{\alpha}^{+}A| \,=\, \lambda_\alpha^2 \,.\, (\lambda_\alpha \,+\, \mu_\alpha \,.\, <^{(3)} \mathbf{q}_\alpha,\, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha >_{Id_3})$$

$$|{}_{\alpha}A| \,=\, \lambda_\alpha^3 + (\mu_\alpha + \nu_\alpha) \,.\, <^{(3)} \mathbf{q}_\alpha,\, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha >_{Id_3} \,.\, \lambda_\alpha + \sqrt{\mu_\alpha \,.\, \nu_\alpha} \,.\, <^{(3)} \mathbf{q}_\alpha,\, {}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha >_{Id_3}$$

Remarque 4.2. *Autres calculs utiles.*

De simples manipulations fournissent les relations :

1. $$T_2(\otimes)(\mathbf{M},\, \mathbf{N}) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{N},\, \mathbf{M}) \,=\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N})$$

2. $$T_2(\otimes)(\mathbf{M},\, \mathbf{M}) \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) \,=\, T_2(\otimes)(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N},\, \mathbf{M})$$

3. $${}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) \,.\, T_2(\otimes)(\mathbf{M},\, \mathbf{M}) \,=\, T_2(\otimes)(\mathbf{M},\, -\mathbf{M} \wedge \mathbf{N})$$

4. $$T_2(\otimes)(\mathbf{M},\, \mathbf{M}) \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) \,+\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) \,.\, T_2(\otimes)(\mathbf{M},\, \mathbf{M})$$

$$=$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N},\, \mathbf{M}) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{M},\, \mathbf{M} \wedge \mathbf{N})$$

$$=$$

$${}_{[J]}\Phi((\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}) \wedge \mathbf{M})$$

$$=$$

$$||\mathbf{M}||^2 \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) - \,<\mathbf{M},\, \mathbf{N}>_{Id_3} \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{M})$$

5.
$$_{[J]}\Phi^2(\mathbf{M}) = T_2(\otimes)(\mathbf{M},\mathbf{M}) - ||\mathbf{M}||^2 . Id_3$$

6.
$$T_2^2(\otimes)(\mathbf{M},\mathbf{M}) = ||\mathbf{M}||^2 . T_2(\otimes)(\mathbf{M},\mathbf{M})$$

Lemme 4.8. *Si les vecteurs $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont proportionnels, alors les matrices apparaissant dans les quatre premières relations s'annulent.*

Définition 4.2. *Cellule périenne d'un vecteur.*

Par conventionn du langage, la cellule périenne d'un vecteur $\mathbf{M}$ de E(3, C) est une application de E(3, C) dans P(M(3, C)), l'ensemble des parties de M(3, C) qui à ce vecteur fait correspondre le sous-ensemble des quatre éléments :

$$\mathbf{M} \to Cell(\mathbf{M}) = \{[0],\, Id_3,\, T_2(\otimes)(\mathbf{M},\mathbf{M}),\, _{[J]}\Phi(\mathbf{M})\}$$

Remarque 4.3. *Structure multiplicative interne.*

La multiplication matricielle habituellement définie sur M(3, C) est une opération interne sur Cell($\mathbf{M}$) ; en effet :

$$\begin{array}{cc} \mathbf{M} & \begin{array}{ccc} Id_3 & T & \Phi \end{array} \\ \begin{array}{c} Id_3 \\ T \\ \Phi \end{array} & \begin{bmatrix} Id_3 & T_2(\otimes)(\mathbf{M},\mathbf{M}) & _{[J]}\Phi(\mathbf{M}) \\ T_2(\otimes)(\mathbf{M},\mathbf{M}) & ||\mathbf{M}||^2 . T_2(\otimes)(\mathbf{M},\mathbf{M}) & [0] \\ _{[J]}\Phi(\mathbf{M}) & [0] & T_2(\otimes)(\mathbf{M},\mathbf{M}) - ||\mathbf{M}||^2 . Id_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

4.8 Etude de compatibilité des représentations périennes.

La question posée est celle de savoir si les représentations périennes sont compatibles avec les conditions imposées par le lemme 1.3.4 ?

Remarque 4.4. *Sur les caractéristiques additives.*

La première contrainte s'écrit (lemme 1.3.4) :

$$\forall \alpha : \{^{(3)}[_\alpha A]^\oplus\}^2 = \{^{(3)}[_\alpha A]^2\}^\oplus$$

Pour la vérifier, il convient de commencer par calculer :

$$\forall \alpha : [_\alpha A]^\oplus$$
$$=$$
$$\{\lambda_\alpha . Id_3 + \mu_\alpha . T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\, ^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) + \nu_\alpha . _{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\}^\oplus$$
$$=$$
$$3 . \lambda_\alpha + \mu_\alpha . (^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2$$

Ce qui fournit :

$$\forall \alpha : \{[_\alpha A]^\oplus\}^2 = \mu_\alpha^2 . (^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^4 + 6 . \lambda_\alpha . \mu_\alpha . (^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2 + 9 . \lambda_\alpha^2$$

...

Il convient ensuite de calculer :

$$\forall\,\alpha\,:\,[_\alpha A]^2$$
$$=$$
$$\{\lambda_\alpha\,.\,Id_3\,+\,\mu_\alpha\,.\,T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\,+\,\nu_\alpha\,.\,_{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\}^2$$
$$=$$
$$(\lambda_\alpha^2\,-\,\nu_\alpha^2\,.\,||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^2)\,.\,Id_3$$
$$+(\nu_\alpha^2\,+\,\mu_\alpha^2\,.\,||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^2\,+\,2\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\alpha)\,.\,T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$
$$+2\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\nu_\alpha\,.\,_{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

De sorte que :

$$\forall\,\alpha\,:\,\{[_\alpha A]^2\}^\oplus\,=\,3\,.\,(\lambda_\alpha^2-\nu_\alpha^2\,.\,||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^2)+(\nu_\alpha^2+\mu_\alpha^2\,.\,||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^2+2\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\alpha)\,.\,(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2$$

Les représentations périennes admises à l'analyse des conditions suivantes doivent d'abord vérifier :

$$\mu_\alpha^2\,.\,(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^4\,+\,6\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\alpha\,.\,(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,+\,9\,.\,\lambda_\alpha^2$$
$$=$$
$$3\,.\,(\lambda_\alpha^2\,-\,\nu_\alpha^2\,.\,||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^2)\,+\,(\nu_\alpha^2\,+\,\mu_\alpha^2\,.\,||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^2\,+\,2\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\alpha)\,.\,(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2$$

Pour tenter de tirer quelques informations de cette première contrainte, il peut être utile de noter que :

$$(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,=\,||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^2\,+\,z_\alpha\,;\,z_\alpha\,=\,2\,.\,(q_{1\alpha}\,.\,q_{2\alpha}\,+\,q_{2\alpha}\,.\,q_{3\alpha}\,+\,q_{3\alpha}\,.\,q_{1\alpha})$$

... et de remarquer, puisque la discussion a lieu sur $\mathbb{C}$, que les vecteurs $\mathbf{q}$ dont les composantes sont une des permutations cycliques du triplé $\{1,\,\mathrm{j},\,\mathrm{j}^2\}$ des racines cubiques de l'unité complexes ont cette remarquable propriété d'autoriser à écrire :

$$(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,=\,||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^2$$

Car :

$$1\,.\,j\,+\,j\,.\,j^2\,+\,j^2\,.\,1\,=\,0_\mathbb{C}$$

Mise à part cette singularité :

$$(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^4\,=\,||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^4\,+\,2\,.\,z_\alpha\,.\,||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^2\,+\,z_\alpha^2$$

Ce constat laisse augurer du fait que la contrainte : (i) consiste en un polynôme de degré quatre écrit en fonction de $||\mathbf{q}_\alpha||$ ou de $\mathbf{q}^\oplus{}_\alpha$; et (ii) contient de très nombreuses situations.

©Thierry PERIAT, Cosmologie et algèbres de Lie, **première partie** : les espaces de dimension trois équipés de produits tensoriels déformés et d'une métrique initiale de FLRW - Loi de préservation de la vitesse de propagation de la lumière - Proposition d'un lien avec la formule du Professeur Koide ; ISBN 978-2-36923-136-3, EAN 9782369231363, version du 3 janvier 2023.

Exemple 4.3. *Les vecteurs isotropiques.*

Par définition les vecteurs isotropiques sont des vecteurs non-nuls dont la somme des carrés des composantes est nul ; voir E. Cartan dans [01]. Pour eux, la première des contraintes de cette théorie s'écrit :

$$\mu_\alpha^2 \,.\, z_\alpha^2 \,+\, 6 \,.\, \lambda_\alpha \,.\, \mu_\alpha \,.\, z_\alpha \,+\, 9 \,.\, \lambda_\alpha^2$$
$$=$$
$$3 \,.\, \lambda_\alpha^2 \,+\, (\nu_\alpha^2 \,+\, 2 \,.\, \lambda_\alpha \,.\, \mu_\alpha) \,.\, z_\alpha$$

Car :

$$||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^2 \,=\, 0 \,\Rightarrow\, (^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2 \,=\, z_\alpha$$

Cette contrainte prend ici le visage simplifié d'un trinôme de degré deux écrit en fonction de la variable complexe z :

$$\mu_\alpha^2 \,.\, z_\alpha^2 \,+\, (4 \,.\, \lambda_\alpha \,.\, \mu_\alpha \,-\, \nu_\alpha^2) \,.\, z_\alpha \,+\, 6 \,.\, \lambda_\alpha^2 \,=\, 0$$

4.9 Représentations périennes préservant la vitesse de la lumière et ratio de Koide.

Remarque 4.5. *Une représentation périenne particulière.*

La première contrainte étant a priori supposée vérifiée, soit la représentation particulière :

$$[_\alpha A] \,=\, 2 \,.\, \{(q_{\alpha 0}^2 \,-\, 1) \,.\, Id_3 \,+\, T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha, \,^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) \,-\, q_{\alpha 0} \,.\, _{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\}$$

1) Elle se caractérise par les deux vecteurs :

$$(\lambda_\alpha, \,\mu_\alpha, \,\nu_\alpha) \,=\, 2 \,.\, (q_{\alpha 0}^2 \,-\, 1, \,1, \,-q_{\alpha 0})$$

et :

$$^{(3)}\mathbf{q}_\alpha$$

2) Elle se laisse relier au formalisme générique apparu au niveau de la remarque 1.3.1 en posant :

$$\beta_\alpha \,=\, 2 \,.\, (q_{\alpha 0}^2 \,-\, 1) \,;\, \mathbf{M}_\alpha \,=\, \sqrt{2} \,.\, ^{(3)}\mathbf{q}_\alpha \,;\, \mathbf{N}_\alpha \,=\, 2 \,.\, ^{(3)}\mathbf{q}_\alpha \,=\, \sqrt{2} \,.\, ^{(3)}\mathbf{M}_\alpha$$

3) Elle se raccorde à la représentation d'un quaternion $[\mathrm{Q}_\alpha]$ en remarquant que :

$$[_\alpha A] \,+\, Id_3$$
$$=$$
$$(2 \,.\, q_{\alpha 0}^2 \,-\, 1) \,.\, Id_3 \,+\, 2 \,.\, T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha, \,^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) \,-\, 2 \,.\, q_{\alpha 0} \,.\, _{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$
$$=$$
$$[Q_\alpha]$$

4) Elle se décline de diverses manières dont celle-ci :

$$[_\beta A] \,=\, 2 \,.\, \{(q_{\beta 0}^2 \,-\, 1) \,.\, Id_3 \,+\, T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\beta, \,\mathbf{q}_\beta) \,-\, q_{\beta 0} \,.\, _{[J]}\Phi(\mathbf{q}_\beta)\}$$

... dont la transposée vaut :

$$[_\beta A]^t \,=\, 2 \,.\, \{(q_{\beta 0}^2 \,-\, 1) \,.\, Id_3 \,+\, T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\beta, \,\mathbf{q}_\beta) \,+\, q_{\beta 0} \,.\, _{[J]}\Phi(\mathbf{q}_\beta)\}$$

...

Remarque 4.6. *Quelques calculs préliminaires.*

De sorte que :

$$[_\alpha A]\,.\,[_\beta A]^t$$

$$=$$

$$4\,.\,\{(q_{\alpha 0}^2\,-\,1)\,.\,Id_3\,+\,T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\alpha,\,\mathbf{q}_\alpha)\,-\,q_{\alpha 0}\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_\alpha)\}$$

$$.\,\{(q_{\beta 0}^2\,-\,1)\,.\,Id_3\,+\,T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\beta,\,\mathbf{q}_\beta)\,+\,q_{\beta 0}\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_\beta)\}$$

Et :

$$[_\alpha A]\,.\,[_\beta A]$$

$$=$$

$$4\,.\,\{(q_{\alpha 0}^2\,-\,1)\,.\,Id_3\,+\,T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\alpha,\,\mathbf{q}_\alpha)\,-\,q_{\alpha 0}\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_\alpha)\}$$

$$.\,\{(q_{\beta 0}^2\,-\,1)\,.\,Id_3\,+\,T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\beta,\,\mathbf{q}_\beta)\,-\,q_{\beta 0}\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_\beta)\}$$

A l'aide des relations intermédiaires empruntées à celles établies à la remarque 1.3.2 :

$$_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_\alpha)\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_\beta)\,=\,T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\alpha,\,\mathbf{q}_\beta) -\,<\mathbf{q}_\alpha,\,\mathbf{q}_\beta>_{Id_3}\,.\,Id_3$$

$$_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_\alpha)\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\beta,\,\mathbf{q}_\beta)\,=\,T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\beta,\,\mathbf{q}_\alpha\,\wedge\,\mathbf{q}_\beta)$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\alpha,\,\mathbf{q}_\alpha)\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_\beta)\,=\,T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\alpha\,\wedge\,\mathbf{q}_\beta,\,\mathbf{q}_\alpha)$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\alpha,\,\mathbf{q}_\alpha)\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\beta,\,\mathbf{q}_\beta)\,=<\mathbf{q}_\alpha,\,\mathbf{q}_\beta>_{Id_3}\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\alpha,\,\mathbf{q}_\beta)$$

Pour simplifier provisoirement le symbolisme et faciliter les calculs, je noterai :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\alpha,\,\mathbf{q}_\beta)\,=\,T_{\alpha\beta}$$

$$_{[J]}\Phi(\mathbf{q}_\alpha)\,=\,\Phi_\alpha$$

$$<\mathbf{q}_\alpha,\,\mathbf{q}_\beta>_{Id_3}=<\alpha,\,\beta>$$

$$<\mathbf{q}_\alpha\,\wedge\,\mathbf{q}_\beta>_{Id_3}=\,(\alpha\,\wedge\,\beta)$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{q}_\alpha\,\wedge\,\mathbf{q}_\beta,\,\mathbf{q}_\alpha)\,=\,T_{(\alpha\,\wedge\,\beta)\beta}$$

Je suppose également que la matrice $[\mathrm{Q}_\alpha]$ représente un quaternion unitaire ; en clair :

$$\forall\,\alpha\,:\,q_{0\alpha}^2+\,<\alpha,\,\alpha>=\,1$$

Ceci ayant été précisé, il ne reste qu'à constater que :

$$\frac{1}{4}\,.\,[_\alpha A]\,.\,[_\beta A]$$

$$=$$

$$(-<\alpha,\,\alpha>\,.\,Id_3\,+\,T_{\alpha\alpha}\,-\,q_{\alpha 0}\,.\,\Phi_\alpha)\,.\,(-<\beta,\,\beta>\,.\,Id_3\,+\,T_{\beta\beta}\,-\,q_{\beta 0}\,.\,\Phi_\beta)$$

$$=$$

$$<\alpha,\,\alpha>\,.\,<\beta,\,\beta>\,.\,Id_3-\,<\alpha,\,\alpha>\,.\,T_{\beta\beta}\,+\,q_{\beta 0}\,.\,<\alpha,\,\alpha>\,.\,\Phi_\beta$$

$$- < \beta,\, \beta > \,.\, T_{\alpha\alpha} + < \alpha,\, \beta > \,.\, T_{\alpha\beta} \,-\, q_{\beta 0} \,.\, T_{(\alpha \wedge \beta)\alpha}$$

$$+\, q_{\alpha 0} \,.\, < \beta,\, \beta > \,.\, \Phi_\alpha \,-\, q_{\alpha 0} \,.\, T_{\beta(\alpha\wedge\beta)} \,+\, q_{\alpha 0} \,.\, q_{\beta 0} \,.\, \{T_{\alpha\beta} - < \alpha,\, \beta > \,.\, Id_3\}$$

Et, dans le même genre mais en prenant soin de changer quelques signes, que :

$$\frac{1}{4} \,.\, [_\alpha A] \,.\, [_\beta A]^t$$

$$=$$

$$(- < \alpha,\, \alpha > \,.\, Id_3 \,+\, T_{\alpha\alpha} \,-\, q_{\alpha 0} \,.\, \Phi_\alpha) \,.\, (- < \beta,\, \beta > \,.\, Id_3 \,+\, T_{\beta\beta} + q_{\beta 0} \,.\, \Phi_\beta)$$

$$=$$

$$< \alpha,\, \alpha > \,.\, < \beta,\, \beta > \,.\, Id_3 - < \alpha,\, \alpha > \,.\, T_{\beta\beta} - q_{\beta 0} \,.\, < \alpha,\, \alpha > \,.\, \Phi_\beta$$

$$- < \beta,\, \beta > \,.\, T_{\alpha\alpha} + < \alpha,\, \beta > \,.\, T_{\alpha\beta} + q_{\beta 0} \,.\, T_{(\alpha\wedge\beta)\alpha}$$

$$+\, q_{\alpha 0} \,.\, < \beta,\, \beta > \,.\, \Phi_\alpha \,-\, q_{\alpha 0} \,.\, T_{\beta(\alpha\wedge\beta)} - q_{\alpha 0} \,.\, q_{\beta 0} \,.\, \{T_{\alpha\beta} - < \alpha,\, \beta > \,.\, Id_3\}$$

Remarque 4.7. *Calcul de la caractéristique additive des matrices respectant la condition exposée au lemme 1.3.4.*

La contrainte exposée au lemme 1.3.4 est supposée valide a priori. Cette partie de l'exploration se fixe maintenant de calculer la caractéristique additive de la somme matricielle :

$$[_\alpha A] \,.\, \{2 \,.\, [_\beta A] \,+\, [_\beta A]^t\}$$

$$=$$

$$2 \,.\, [_\alpha A] \,.\, [_\beta A] \,+\, [_\alpha A] \,.\, [_\beta A]^t$$

$$=$$

$$8 \,.\, < \alpha,\, \alpha > \,.\, < \beta,\, \beta > \,.\, Id_3 \,-\, 8 \,.\, < \alpha,\, \alpha > \,.\, T_{\beta\beta} \,+\, 8 \,.\, q_{\beta 0} \,.\, < \alpha,\, \alpha > \,.\, \Phi_\beta$$

$$-\, 8 \,.\, < \beta,\, \beta > \,.\, T_{\alpha\alpha} \,+\, 8 \,.\, < \alpha,\, \beta > \,.\, T_{\alpha\beta} \,-\, 8 \,.\, q_{\beta 0} \,.\, T_{(\alpha\wedge\beta)\alpha}$$

$$+\, 8 \,.\, q_{\alpha 0} \,.\, < \beta,\, \beta > \,.\, \Phi_\alpha - 8 \,.\, q_{\alpha 0} \,.\, T_{\beta(\alpha\wedge\beta)} + 8 \,.\, q_{\alpha 0} \,.\, q_{\beta 0} \,.\, \{T_{\alpha\beta} - < \alpha,\, \beta > \,.\, Id_3\}$$

$$+\, 4 \,.\, < \alpha,\, \alpha > \,.\, < \beta,\, \beta > \,.\, Id_3 \,-\, 4 \,.\, < \alpha,\, \alpha > \,.\, T_{\beta\beta} - 4 \,.\, q_{\beta 0} \,.\, < \alpha,\, \alpha > \,.\, \Phi_\beta$$

$$-\, 4 \,.\, < \beta,\, \beta > \,.\, T_{\alpha\alpha} \,+\, 4 \,.\, < \alpha,\, \beta > \,.\, T_{\alpha\beta} + 4 \,.\, q_{\beta 0} \,.\, T_{(\alpha\wedge\beta)\alpha}$$

$$+\, 4 \,.\, q_{\alpha 0} \,.\, < \beta,\, \beta > \,.\, \Phi_\alpha - 4 \,.\, q_{\alpha 0} \,.\, T_{\beta(\alpha\wedge\beta)} - 4 \,.\, q_{\alpha 0} \,.\, q_{\beta 0} \,.\, \{T_{\alpha\beta} - < \alpha,\, \beta > \,.\, Id_3\}$$

$$=$$

$$12 \,.\, < \alpha,\, \alpha > \,.\, < \beta,\, \beta > \,.\, Id_3 \,-\, 12 \,.\, < \alpha,\, \alpha > \,.\, T_{\beta\beta} \,+\, 4 \,.\, q_{\beta 0} \,.\, < \alpha,\, \alpha > \,.\, \Phi_\beta$$

$$-\, 12 \,.\, < \beta,\, \beta > \,.\, T_{\alpha\alpha} \,+\, 12 \,.\, < \alpha,\, \beta > \,.\, T_{\alpha\beta} \,-\, 4 \,.\, q_{\beta 0} \,.\, T_{(\alpha\wedge\beta)\alpha}$$

$$+\, 12 \,.\, q_{\alpha 0} \,.\, < \beta,\, \beta > \,.\, \Phi_\alpha - 12 \,.\, q_{\alpha 0} \,.\, T_{\beta(\alpha\wedge\beta)} + 4 \,.\, q_{\alpha 0} \,.\, q_{\beta 0} \,.\, \{T_{\alpha\beta} - < \alpha,\, \beta > \,.\, Id_3\}$$

Comme l'application *caractéristique additive d'une matrice* est linéaire et que la somme des composantes des matrices du type Φ est nulle, il suffit de calculer :

$$\sum_{\alpha\beta}$$

$$=$$

$$12\,.<\alpha,\,\alpha>\,.<\beta,\,\beta>\,.\,Id_3^{\oplus}\,-\,12\,.<\alpha,\,\alpha>\,.\,T_{\beta\beta}^{\oplus}$$

$$-\,12\,.<\beta,\,\beta>\,.\,T_{\alpha\alpha}^{\oplus}\,+\,12\,.<\alpha,\,\beta>\,.\,T_{\alpha\beta}^{\oplus}\,-\,4\,.\,q_{\beta 0}\,.\,T_{(\alpha\wedge\beta)\alpha}^{\oplus}$$

$$-\,12\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,T_{\beta(\alpha\wedge\beta)}^{\oplus}\,+\,4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,q_{\beta 0}\,.\,\{T_{\alpha\beta}^{\oplus}-<\alpha,\,\beta>\,.\,Id_3^{\oplus}\}$$

Pour y parvenir, quelques calculs intermédiaires sont à nouveau nécessaires ; par exemple :

$$Id_3^{\oplus}\,=\,3$$

$$T_{\alpha\alpha}^{\oplus}\,=\,(\mathbf{q}_{\alpha}^{\oplus})^2$$

$$T_{(\alpha\wedge\beta)\alpha}^{\oplus}\,=\,T_{\alpha(\alpha\wedge\beta)}^{\oplus}\,=\,(\mathbf{q}_{\alpha}^{\oplus})\,.\,(\mathbf{q}_{\alpha}\,\wedge\,\mathbf{q}_{\beta})^{\oplus}$$

$$T_{\alpha\beta}^{\oplus}\,=\,(\mathbf{q}_{\alpha}^{\oplus})\,.\,(\mathbf{q}_{\beta}^{\oplus})\,=\,T_{\beta\alpha}^{\oplus}$$

$$T_{\beta(\alpha\wedge\beta)}^{\oplus}\,=\,T_{(\alpha\wedge\beta)\beta}^{\oplus}\,=\,(\mathbf{q}_{\beta}^{\oplus})\,.\,(\mathbf{q}_{\alpha}\,\wedge\,\mathbf{q}_{\beta})^{\oplus}$$

De sorte que :

$$\sum_{\alpha\beta}$$

$$=$$

$$36\,.<\alpha,\,\alpha>\,.<\beta,\,\beta>-12\,.<\alpha,\,\alpha>\,.\,(\mathbf{q}_{\beta}^{\oplus})^2$$

$$-\,12\,.<\beta,\,\beta>\,.\,(\mathbf{q}_{\alpha}^{\oplus})^2+12\,.<\alpha,\,\beta>\,.\,(\mathbf{q}_{\alpha}^{\oplus})\,.\,(\mathbf{q}_{\beta}^{\oplus})-4\,.\,q_{\beta 0}\,.\,(\mathbf{q}_{\alpha}^{\oplus})\,.\,(\mathbf{q}_{\alpha}\wedge\mathbf{q}_{\beta})^{\oplus}$$

$$-\,12\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,(\mathbf{q}_{\beta}^{\oplus})\,.\,(\mathbf{q}_{\alpha}\,\wedge\,\mathbf{q}_{\beta})^{\oplus}\,+\,4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,q_{\beta 0}\,.\,\{(\mathbf{q}_{\alpha}^{\oplus})\,.\,(\mathbf{q}_{\beta}^{\oplus})\,-\,3\,.<\alpha,\,\beta>\}$$

Remarque 4.8. *Le cas des repères orthonormés.*

A partir de ce point, la somme peut être annulée autoritairement pour retrouver la condition de préservation de la vitesse de la lumière ou bien une analyse de certaines configurations particulières peut débuter. Par exemple, celles pour lesquelles les trois vecteurs $\mathbf{q}_{\alpha}$ forment un trièdre orthogonal qui n'est pas forcément direct et unitaire ; dans ce cas :

$$\forall\,\alpha\,\neq\,\beta\,:<\alpha,\,\beta>=\,0$$

Auquel cas, la somme se réduit une première fois à :

$$\sum_{\alpha\beta}$$

$$=$$

$$36\,.<\alpha,\,\alpha>\,.<\beta,\,\beta>-12\,.<\alpha,\,\alpha>\,.\,(\mathbf{q}_{\beta}^{\oplus})^2$$

$$-\,12\,.<\beta,\,\beta>\,.\,(\mathbf{q}_{\alpha}^{\oplus})^2\,-\,4\,.\,q_{\beta 0}\,.\,(\mathbf{q}_{\alpha}^{\oplus})\,.\,(\mathbf{q}_{\alpha}\,\wedge\,\mathbf{q}_{\beta})^{\oplus}$$

$$-\,12\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,(\mathbf{q}_{\beta}^{\oplus})\,.\,(\mathbf{q}_{\alpha}\,\wedge\,\mathbf{q}_{\beta})^{\oplus}\,+\,4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,q_{\beta 0}\,.\,(\mathbf{q}_{\alpha}^{\oplus})\,.\,(\mathbf{q}_{\beta}^{\oplus})$$

La somme impliquée dans la condition de préservation de la vitesse de la lumière prend un formalisme spécifique lorsque $\alpha = \beta$:

$$\forall\, \alpha \,:\, \sum_{\alpha\alpha}$$

$$=$$

$$36\,.\, <\alpha,\,\alpha>^2\, - 12\,.\, <\alpha,\,\alpha>\,.\,(\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2$$

$$- 12\,.\, <\alpha,\,\alpha>\,.\,(\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2\, -\, 4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,\underbrace{(\mathbf{q}_\alpha\,\wedge\,\mathbf{q}_\alpha)^{\oplus}}_{=0}$$

$$- 12\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,(\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})\,.\,\underbrace{(\mathbf{q}_\alpha\,\wedge\,\mathbf{q}_\alpha)^{\oplus}}_{=0} + 4\,.\,q_{\alpha 0}^2\,.\,(\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2$$

$$=$$

$$36\,.\, <\alpha,\,\alpha>^2\, + (4\,.\,q_{\alpha 0}^2\, -\, 24\,.\, <\alpha,\,\alpha>)\,.\,(\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2$$

Lorsque les trois vecteurs $\mathbf{q}_\alpha$ sont non seulement orthogonaux mais normés :

$$\forall\, \alpha \,: <\alpha,\,\alpha>= 1$$

Alors, la somme impliquée dans la condition de préservation se réduit à :

$$\forall\, \alpha \,:\, \sum_{\alpha\alpha}\, =\, 36\, +\, (4\,.\,q_{\alpha 0}^2\, -\, 24)\,.\,(\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2$$

En rappelant ici que la matrice $[\mathrm{Q}_\alpha]$ est supposée représenter un quaternion unitaire, la normalisation des vecteurs $\mathbf{q}_\alpha$ équivaut à restreindre la discussion à l'étude de trois quaternions tels que :

$$\forall\, \alpha \,:\, q_{0\alpha}\, =\, 1- <\alpha,\,\alpha>=\, 1\, -\, 1\, =\, 0$$

Dans ces circonstances ultra-précises, la somme impliquée dans la condition de préservation se réduit à :

$$\forall\, \alpha \,:\, \sum_{\alpha\alpha}\, =\, 36\, -\, 24\,.\,(\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2$$

Lorsque la condition est effectivement préservée, cette somme est nulle :

$$\forall\, \alpha \,:\, 36\, -\, 24\,.\,(\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2\, =\, 0\, \equiv\, (\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2\, =\, \frac{3}{2}$$

Il en découle directement que le ratio de Koide des trois vecteurs impliqués dans ces représentations périennes d'un genre particulier vaut :

$$K(\mathbf{q}_\alpha)\, =\, \frac{<\alpha,\,\alpha>}{(\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2}\, =\, \frac{q_{\alpha 1}^2\, +\, q_{\alpha 2}^2\, +\, q_{\alpha 3}^2}{(q_{\alpha 1}\, +\, q_{\alpha 2}\, +\, q_{\alpha 3})^2}\, =\, \frac{1}{\frac{3}{2}}\, =\, \frac{2}{3}$$

Pour rappel, la première condition sur les caractéristiques additives des matrices $[_\alpha\mathrm{A}]$ s'écrit (remarque 1.3.4) :

$$\mu_\alpha^2\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^4\, +\, 6\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\alpha\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2\, +\, 9\,.\,\lambda_\alpha^2$$

$$=$$

$$3\,.\,(\lambda_\alpha^2\,-\,\nu_\alpha^2\,.\,||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^2)\,+\,(\nu_\alpha^2\,+\,\mu_\alpha^2\,.\,||^{(3)}\mathbf{q}_\alpha||^2\,+\,2\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\alpha)\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2$$

Mais elle s'écrit aussi :

$$\mu_\alpha^2\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^4\,+\,6\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\alpha\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,+\,9\,.\,\lambda_\alpha^2$$

$$=$$

$$3\,.\,(\lambda_\alpha^2-\nu_\alpha^2\,.\,(({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2)-z))+(\nu_\alpha^2+\mu_\alpha^2\,.\,(({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2)-z)+2\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\alpha)\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2$$

Avec ici en particulier (voir la remarque 1.3.5 au début de cette sous-section) :

$$(\lambda_\alpha,\,\mu_\alpha,\,\nu_\alpha)\,=\,2\,.\,(q_{\alpha0}^2\,-\,1,\,1,\,-q_{\alpha0})\,=\,2\,.\,(-1,\,1,\,0)$$

Elle s'écrit plus précisément :

$$4\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^4\,+\,\underbrace{(6\,.\,-2\,.\,2)}_{-24}\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,+\,\underbrace{(9\,.\,4)}_{36}$$

$$=$$

$$\underbrace{(3\,.\,(4\,-\,0))}_{12}+\underbrace{(0\,+\,4\,.\,(({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2)\,-\,z)\,+\,\underbrace{(2\,.\,-2\,.\,2)}_{-8})}_{-4}\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2$$

Un regroupement et une division par quatre mènent à :

$$-6\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,+\,6\,=\,-(z\,+\,2)\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2$$

Ou encore à :

$$(z\,-\,4)\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,=\,-6$$

Quand les circonstances retenues (vecteurs orthonormés) mènent à la caractéristique additive :

$$({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,=\,\frac{3}{2}$$

Il faut forcément que :

$$z\,=\,0$$

Or si z est nul, le carré de la norme additive est égal au carré de la norme euclidienne ; ici, malheureusement, l'un vaut un (1) pendant que l'autre vaut trois demis (3/2). La condition (rappel) :

$$\forall\,\alpha\,:\,\{{}^{(3)}[{}_\alpha A]^\oplus\}^2\,=\,\{{}^{(3)}[{}_\alpha A]^2\}^\oplus$$

... qui avait été supposée a priori vraie, **ne l'est ici en fait pas** ... et il faut encore approfondir ce travail.

4.10 Représentations périennes dans le cadre du lemme 1.3.1.

Remarque 4.9. *Prérequis.*

Dans cette nouvelle sous-section, les matrices recherchées ne sont assujeties qu'à la seule condition énoncée au lemme 1.3.1 ; précisément :

$$\forall\,(\alpha,\,\beta) :\; {}^{(3)}[_\alpha A]^{\oplus}\,.\,{}^{(3)}[_\beta A]^{\oplus} \,+\, \{{}^{(3)}[_\alpha A]\,.\,{}^{(3)}[_\beta A]^t\}^{\oplus} \,+\, \{{}^{(3)}[_\alpha A]\,.\,{}^{(3)}[_\beta A]\}^{\oplus} \,=\, 0$$

Avec de façon tout à fait générale :

$$\forall\,\alpha :\; \{{}^{(3)}[_\alpha A]^{\oplus}\}^2 \,\neq\, \{{}^{(3)}[_\alpha A]^2\}^{\oplus}$$

Et en supposant qu'elles ont une représentation périenne :

$$\forall\,\alpha \,:\, [_\alpha A] \,=\, \lambda_\alpha\,.\,Id_3 \,+\, \mu_\alpha\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha) \,+\, \nu_\alpha\,.\,{}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

... éventuellement et parfois reliable à un contenu quaternionique unitaire du genre exploité dans la sous-section précédente à la remarque 1.3.5, point 3).

De manière générale, il est clair que :

$$\forall\,\alpha \,:\, [_\alpha A]^{\oplus} \,=\, 3\,.\,\lambda_\alpha \,+\, \mu_\alpha\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2$$

Ce qui signifie aussi que :

$${}^{(3)}[_\alpha A]^{\oplus}\,.\,{}^{(3)}[_\beta A]^{\oplus}$$

$$=$$

$$(3\,.\,\lambda_\alpha \,+\, \mu_\alpha\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2)\,.\,(3\,.\,\lambda_\beta \,+\, \mu_\beta\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^{\oplus})^2)$$

$$=$$

$$9\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\lambda_\beta + 3\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\beta\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^{\oplus})^2 + 3\,.\,\lambda_\beta\,.\,\mu_\alpha\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2 + \mu_\alpha\,.\,\mu_\beta\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^{\oplus})^2$$

Et, pour une matrice indiciée α donnée :

$$({}^{(3)}[_\alpha A]^{\oplus})^2$$

$$=$$

$$9\,.\,\lambda_\alpha^2 \,+\, 6\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\alpha\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2 \,+\, \mu_\alpha^2\,.\,({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^{\oplus})^2 4$$

Or les calculs précédents ont déjà livré :

$${}^{(3)}[_\alpha A]\,.\,{}^{(3)}[_\beta A]$$

$$=$$

$$4\,.\,<\alpha,\,\alpha>\,.\,<\beta,\,\beta>\,.\,Id_3 \,-\, 4\,.\,<\alpha,\,\alpha>\,.\,T_{\beta\beta} \,+\, 4\,.\,q_{\beta 0}\,.\,<\alpha,\,\alpha>\,.\,\Phi_\beta$$

$$-\,4\,.\,<\beta,\,\beta>\,.\,T_{\alpha\alpha} \,+\, 4\,.\,<\alpha,\,\beta>\,.\,T_{\alpha\beta} \,-\, 4\,.\,q_{\beta 0}\,.\,T_{(\alpha\wedge\beta)\alpha}$$

$$+\,4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,<\beta,\,\beta>\,.\,\Phi_\alpha - 4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,T_{\beta(\alpha\wedge\beta)} + 4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,q_{\beta 0}\,.\,\{T_{\alpha\beta} -\,<\alpha,\,\beta>\,.\,Id_3\}$$

Et :

$${}^{(3)}[_\alpha A]\,.\,{}^{(3)}[_\beta A]^t$$

$$=$$

$$4\,.<\alpha,\,\alpha>\,.<\beta,\,\beta>\,.Id_3\;-\;4\,.<\alpha,\,\alpha>\,.T_{\beta\beta}-4\,.\,q_{\beta 0}\,.<\alpha,\,\alpha>\,.\Phi_\beta$$
$$-4\,.<\beta,\,\beta>\,.T_{\alpha\alpha}\;+\;4\,.<\alpha,\,\beta>\,.T_{\alpha\beta}+4\,.\,q_{\beta 0}\,.\,T_{(\alpha\wedge\beta)\alpha}$$
$$+4\,.\,q_{\alpha 0}\,.<\beta,\,\beta>\,.\Phi_\alpha-4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,T_{\beta(\alpha\wedge\beta)}-4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,q_{\beta 0}\,.\{T_{\alpha\beta}-<\alpha,\,\beta>\,.Id_3\}$$

Les caractéristiques additives sont donc respectivement égales à :

$$\{{}^{(3)}[{}_\alpha A]\,.\,{}^{(3)}[{}_\beta A]\}^\oplus$$
$$=$$
$$4\,.<\alpha,\,\alpha>\,.<\beta,\,\beta>\,.Id_3^\oplus\;-\;4\,.<\alpha,\,\alpha>\,.T_{\beta\beta}^\oplus$$
$$-4\,.<\beta,\,\beta>\,.T_{\alpha\alpha}^\oplus\;+\;4\,.<\alpha,\,\beta>\,.T_{\alpha\beta}^\oplus\;-\;4\,.\,q_{\beta 0}\,.\,T_{(\alpha\wedge\beta)\alpha}^\oplus$$
$$-4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,T_{\beta(\alpha\wedge\beta)}^\oplus\;+\;4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,q_{\beta 0}\,.\{T_{\alpha\beta}^\oplus-<\alpha,\,\beta>\,.Id_3^\oplus\}$$
$$=$$
$$12\,.<\alpha,\,\alpha>\,.<\beta,\,\beta>-4\,.<\alpha,\,\alpha>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)^2$$
$$-4\,.<\beta,\,\beta>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2+4\,.<\alpha,\,\beta>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)-4\,.\,q_{\beta 0}\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha\wedge{}^{(3)}\mathbf{q}_\beta)^\oplus$$
$$-4\,.\,q_{\alpha 0}\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha\wedge{}^{(3)}\mathbf{q}_\beta)^\oplus+4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,q_{\beta 0}\,.\{({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)-3\,.<\alpha,\,\beta>\}$$

Et :

$$\{{}^{(3)}[{}_\alpha A]\,.\,{}^{(3)}[{}_\beta A]^t\}^\oplus$$
$$=$$
$$4\,.<\alpha,\,\alpha>\,.<\beta,\,\beta>\,.Id_3^\oplus\;-\;4\,.<\alpha,\,\alpha>\,.T_{\beta\beta}^\oplus$$
$$-4\,.<\beta,\,\beta>\,.T_{\alpha\alpha}^\oplus\;+\;4\,.<\alpha,\,\beta>\,.T_{\alpha\beta}^\oplus+4\,.\,q_{\beta 0}\,.\,T_{(\alpha\wedge\beta)\alpha}^\oplus$$
$$-4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,T_{\beta(\alpha\wedge\beta)}^\oplus-4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,q_{\beta 0}\,.\{T_{\alpha\beta}^\oplus-<\alpha,\,\beta>\,.Id_3^\oplus\}$$
$$=$$
$$12\,.<\alpha,\,\alpha>\,.<\beta,\,\beta>-4\,.<\alpha,\,\alpha>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)^2$$
$$-4\,.<\beta,\,\beta>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2+4\,.<\alpha,\,\beta>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)+4\,.\,q_{\beta 0}\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha\wedge{}^{(3)}\mathbf{q}_\beta)^\oplus$$
$$-4\,.\,q_{\alpha 0}\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha\wedge{}^{(3)}\mathbf{q}_\beta)^\oplus-4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,q_{\beta 0}\,.\{({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)-3\,.<\alpha,\,\beta>\}$$

Et la somme à étudier s'écrit :

$$\sum_{\alpha\beta}$$
$$=$$
$$9\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\lambda_\beta+3\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\beta\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)^2+3\,.\,\lambda_\beta\,.\,\mu_\alpha\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2+\mu_\alpha\,.\,\mu_\beta\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)^2$$
$$12\,.<\alpha,\,\alpha>\,.<\beta,\,\beta>-4\,.<\alpha,\,\alpha>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)^2$$
$$-4\,.<\beta,\,\beta>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2+4\,.<\alpha,\,\beta>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)-4\,.\,q_{\beta 0}\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha\wedge{}^{(3)}\mathbf{q}_\beta)^\oplus$$
$$-4\,.\,q_{\alpha 0}\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha\wedge{}^{(3)}\mathbf{q}_\beta)^\oplus+4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,q_{\beta 0}\,.\{({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)-3\,.<\alpha,\,\beta>\}$$

$$+12\,.<\alpha,\,\alpha>\,.<\beta,\,\beta>-4\,.<\alpha,\,\alpha>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)^2$$

$$-4\,.<\beta,\,\beta>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2+4\,.<\alpha,\,\beta>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)+4\,.\,q_{\beta 0}\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha\wedge{}^{(3)}\mathbf{q}_\beta)^\oplus$$

$$-4\,.\,q_{\alpha 0}\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha\wedge{}^{(3)}\mathbf{q}_\beta)^\oplus-4\,.\,q_{\alpha 0}\,.\,q_{\beta 0}\,.\{({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)-3\,.<\alpha,\,\beta>\}$$

$$=$$

$$9\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\lambda_\beta+3\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\beta\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)^2+3\,.\,\lambda_\beta\,.\,\mu_\alpha\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2+\mu_\alpha\,.\,\mu_\beta\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)^2$$

$$24\,.<\alpha,\,\alpha>\,.<\beta,\,\beta>-8\,.<\alpha,\,\alpha>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)^2$$

$$-8\,.<\beta,\,\beta>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,+\,8\,.<\alpha,\,\beta>\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)$$

$$-8\,.\,q_{\alpha 0}\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha\,\wedge\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\beta)^\oplus$$

Remarque 4.10. *Le cas des bases orthonormées.*

Lorsque les trois vecteurs $\mathbf{q}_\alpha$ forment une base orthonormée, alors :

$$<\alpha,\,\beta>=\,\delta_{\alpha\beta}$$

... et la somme étudiée se réduit à :

$$\sum_{\alpha\beta}$$

$$=$$

$$9\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\lambda_\beta+3\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\beta\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)^2+3\,.\,\lambda_\beta\,.\,\mu_\alpha\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2+\mu_\alpha\,.\,\mu_\beta\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)^2$$

$$24\,-\,8\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)^2\,-\,8\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,-\,8\,.\,q_{\alpha 0}\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\beta^\oplus)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha\,\wedge\,{}^{(3)}\mathbf{q}_\beta)^\oplus$$

En considérant la matrice indiciée α, cette somme devient :

$$\sum_{\alpha\alpha}$$

$$=$$

$$(24\,+\,9\,.\,\lambda_\alpha^2)\,+\,(6\,.\,\lambda_\alpha\,.\,\mu_\alpha\,-\,16)\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,+\,\mu_\alpha^2\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^4$$

Remarque 4.11. *Le cas des représentations périennes liées à des quaternions unitaires dans une base orthonormée selon la proposition faite au point 3) de la remarque 1.3.5.*

Dans ce cas, pour rappel :

$$q_{\alpha 0}\,=\,0,\;(\lambda_\alpha,\,\mu_\alpha,\,\nu_\alpha)\,=\,2\,.(q_{\alpha 0}^2\,-\,1,\,1,\,-q_{\alpha 0})\,=\,2\,.(-1,\,1,\,0)$$

Ce qui induit la somme :

$$\sum_{\alpha\alpha}$$

$$=$$

$$60\,-\,40\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^2\,+\,4\,.({}^{(3)}\mathbf{q}_\alpha^\oplus)^4$$

Aucune des racines de ce trinôme ne coincide avec le ratio 3/2.

Ce constat ouvre un débat sur la logique poursuivie dans cette exploration. Si la valeur 3/2 est absolument escomptée pour obtenir trois vecteurs orthonormés dont le ratio de Koide vaut 2/3, c'est-à-dire exactement celui prédit par le physicien japonais pour les trois générations d'électrons, alors :

1. Il faut également admettre que les composantes de chacun des vecteurs orthogonaux et unitaires (donc de base) $\mathbf{q}_\alpha$ représentent une des trois masses observées. Ceci n'est techniquement possible qu'en posant :

$$q_{\alpha\theta} = m_\theta \, . \, c, \; c = 300.000 km/s$$

Ou :

$$q_{\alpha\theta} = m_\theta \, . \, c^2, \; c = 300.000 km/s$$

Ce qui revient à interpréter chaque composante du vecteur $\mathbf{q}_\alpha$ comme la quantité de mouvement (ou comme l'énergie) de l'électron de masse m_α.

2. Cette approche suppose implicitement qu'il en est de même pour deux autres familles de particules élémentaires apparaissant sous trois niveaux énergétiques dans la nature ; les neutrinos et les quarks viennent assez spontanément et intuitivement à l'esprit.

3. Il faut poursuivre le calcul de la somme en posant qu'elle vaut toujours :

$$\sum_{\alpha\alpha}$$

$$=$$

$$(24 + 9 \, . \, \lambda_\alpha^2) + (6 \, . \, \lambda_\alpha \, . \, \mu_\alpha - 16) \, . \, (\frac{3}{2})^2 + \mu_\alpha^2 \, . \, (\frac{3}{2})^4$$

... et se demander comment relier la représentation périenne caractérisée par les $(\lambda_\alpha, \, \mu_\alpha, \, \nu_\alpha)$, $(0, \, \mathbf{q}_\alpha)$ à celle d'un quaternion unitaire autrement que de la manière qui a été envisagée au niveau de la remarque 1.3.5, point 3) ?

La réponse se trouve fort probablement dans une approche déjà ancienne : la carte exponentielle ; voir à nouveau [22] :

$$[Q_\alpha] = exp([_\alpha A]) = \underbrace{Id_3 + [_\alpha A]}_{proposition\, remarque 1.3.5} + \frac{1}{2} \, . \, [_\alpha A]^2 + \frac{1}{3!} \, . \, [_\alpha A]^3 + ...$$

Cette proposition représente visiblement une extension de la proposition faite au niveau du point 3) de la remarque 1.3.5 puisque cette proposition constitue tout simplement les deux premiers terme du développement limité de l'exponentielle.

Remarque 4.12. *Le quaternion comme carte exponentielle d'une représentation périenne.*

Comme la multiplication est une opération interne sur l'ensemble des représentations périennes (voir les résultats exposés au niveau de la remarque 1.3.3, l'exponentielle d'une représentation est encore une représentation. Pour se donner une idée de ce que vaut l'exponentielle et pour ainsi se donner le moyen de la relier à une paramétrisation d'Euler-Rodrigues, je vais calculer les premiers termes du développement limité :

$$\forall\,\alpha\,:\,[_\alpha A]\,=\,\lambda_\alpha\,.\,Id_3\,+\,\mu_\alpha\,.\,T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\,+\,\nu_\alpha\,.\,_{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)$$

$$[_\alpha A]^2\,=\,...$$

$$[_\alpha A]^3\,=\,...$$

etc.

Pour allèger au maximum les écritures, je vais poser :

$$Id_3\,=\,I,\;T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha,\,^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\,=\,T,\;_{[J]}\Phi(^{(3)}\mathbf{q}_\alpha)\,=\,\Phi$$

... et faire abstraction de l'indice α ; ce qui permet de débuter la série de calcul avec :

$$[A]\,=\,\lambda\,.\,I\,+\,\mu\,.\,T\,+\,\nu\,.\,\Phi$$

Ce qui fournit **pour le degré deux** :

$$[A]^2$$

$$=$$

$$(\lambda\,.\,I\,+\,\mu\,.\,T\,+\,\nu\,.\,\Phi)\,.\,(\lambda\,.\,I\,+\,\mu\,.\,T\,+\,\nu\,.\,\Phi)$$

$$=$$

$$(\lambda^2\,-\,\nu^2\,.\,||\mathbf{q}||^2)\,.\,I\,+\,(2\,.\,\lambda\,.\,\mu\,+\,\mu^2\,.\,||\mathbf{q}||^2\,+\,\nu^2)\,.\,T\,+\,2\,.\,\lambda\,.\,\nu\,.\,\Phi$$

De manière à créer les séries de coefficients, j'écrirai :

$$\lambda(2)\,=\,\lambda^2\,-\,\nu^2\,.\,||\mathbf{q}||^2$$

$$\mu(2)\,=\,2\,.\,\lambda\,.\,\mu\,+\,\mu^2\,.\,||\mathbf{q}||^2\,+\,\nu^2\,=$$

$$\nu(2)\,=\,2\,.\,\lambda\,.\,\nu$$

En particulier, lorsque $||\mathbf{q}||^2 = 1$:

$$\lambda(2,1)\,=\,\lambda^2\,-\,\nu^2$$

$$\mu(2,1)\,=\,2\,.\,\lambda\,.\,\mu\,+\,\mu^2\,+\,\nu^2\,=\,(\lambda\,+\,\mu)^2\,-\,\lambda(2,1)$$

$$\nu(2,1)\,=\,2\,.\,\lambda\,.\,\nu$$

Pour le degré trois, il convient maintenant de calculer :

$$[A]^3$$
$$=$$
$$\{\lambda \,.\, I \,+\, \mu \,.\, T \,+\, \nu \,.\, \Phi\} \,.\, \{\lambda(2) \,.\, I \,+\, \mu(2) \,.\, T \,+\, \nu(2) \,.\, \Phi\}$$
$$=$$
$$\{\lambda \,.\, \lambda(2) \,-\, \nu \,.\, \nu(2) \,.\, ||\mathbf{q}||^2\} \,.\, I$$
$$+\{\lambda \,.\, \mu(2) \,+\, \lambda(2) \,.\, \mu \,+\, \mu \,.\, \mu(2) \,.\, ||\mathbf{q}||^2 \,+\, \nu \,.\, \nu(2)\} \,.\, T$$
$$+\{\lambda \,.\, \nu(2) \,+\, \lambda(2) \,.\, \nu\} \,.\, \Phi$$

D'où il ressort que :

$$\lambda(3) \,=\, \lambda^3 \,-\, 3 \,.\, \lambda \,.\, \nu^2 \,.\, ||\mathbf{q}||^2$$
$$\mu(3)$$
$$=$$
$$\lambda \,.\, \{2 \,.\, \lambda \,.\, \mu \,+\, \mu^2 \,.\, ||\mathbf{q}||^2 \,+\, \nu^2\}$$
$$+\{\lambda^2 \,-\, \nu^2 \,.\, ||\mathbf{q}||^2\} \,.\, \mu$$
$$+\mu \,.\, \{2 \,.\, \lambda \,.\, \mu \,+\, \mu^2 \,.\, ||\mathbf{q}||^2 \,+\, \nu^2\} \,.\, ||\mathbf{q}||^2 \,+\, 2 \,.\, \lambda \,.\, \nu^2$$
$$=$$
$$3 \,.\, \lambda^2 \,.\, \mu \,+\, \lambda \,.\, \mu \,.\, ||\mathbf{q}||^2 \,+\, 3 \,.\, \lambda \,.\, \nu^2 \,-\, \mu \,.\, \nu^2 \,.\, ||\mathbf{q}||^2$$
$$+2 \,.\, ||\mathbf{q}||^2 \,.\, \lambda \,.\, \mu^2 \,+\, ||\mathbf{q}||^4 \,.\, \mu^3 \,+\, ||\mathbf{q}||^2 \,.\, \mu \,.\, \nu^2$$

Et :

$$\nu(3) \,=\, \lambda \,.\, 2 \,.\, \lambda \,.\, \nu \,+\, \{\lambda^2 \,-\, \nu^2 \,.\, ||\mathbf{q}||^2\} \,.\, \nu \,=\, 3 \,.\, \lambda^2 \,.\, \nu \,-\, ||\mathbf{q}||^2 \,.\, \nu^3$$

En particulier, lorsque $||\mathbf{q}||^2 = 1$:

$$\lambda(3,1) \,=\, \lambda \,.\, (\lambda^2 \,-\, 3 \,.\, \nu^2)$$
$$\mu(3)$$
$$=$$
$$3 \,.\, \lambda^2 \,.\, \mu \,+\, \lambda \,.\, \mu \,+\, 3 \,.\, \lambda \,.\, \nu^2 \,+\, 2 \,.\, \lambda \,.\, \mu^2 \,+\, \mu^3$$
$$=$$
$$(\lambda \,+\, \mu)^3 \,-\, \lambda(3,1)$$
$$\nu(3,1) \,=\, 3 \,.\, \lambda^2 \,.\, \nu \,-\, \nu^3 \,=\, \nu \,.\, (3 \,.\, \lambda^2 \,-\, \nu^2)$$

Pour les coefficients de degré quatre, ceux de degré deux fournissent :

$$\lambda(4)$$
$$=$$

$$\lambda^2(2) \,-\, \nu^2(2)\,.\,||\mathbf{q}||^2$$
$$=$$
$$(\lambda^2 \,-\, \nu^2\,.\,||\mathbf{q}||^2)^2 \,-\, 4\,.\,||\mathbf{q}||^2\,.\,\lambda^2\,.\,\nu^2$$
$$=$$
$$(\lambda^2 \,-\, 3\,.\,\nu^2\,.\,||\mathbf{q}||^2)^2$$

Et :

$$\mu(4)$$
$$=$$
$$2\,.\,\lambda(2)\,.\,\mu(2) \,+\, \mu^2(2)\,.\,||\mathbf{q}||^2 \,+\, \nu^2(2)$$
$$=$$
$$2\,.\,(\lambda^2-\nu^2\,.\,||\mathbf{q}||^2)\,.\,(2\,.\,\lambda\,.\,\mu+\mu^2\,.\,||\mathbf{q}||^2+\nu^2)+(2\,.\,\lambda\,.\,\mu+\mu^2\,.\,||\mathbf{q}||^2+\nu^2)\,.\,||\mathbf{q}||^2+4\,.\,\lambda^2\,.\,\nu^2$$
$$=$$
$$etc.$$

Et :

$$\nu(4)$$
$$=$$
$$2\,.\,\lambda(2)\,.\,\nu(2)$$
$$=$$
$$4\,.\,(\lambda^2 \,-\, \nu^2\,.\,||\mathbf{q}||^2)\,.\,\lambda\,.\,\nu$$

etc... Il convient ensuite de calculer :

$$exp([A])$$
$$=$$
$$Id_3 \,+\, [A] \,+\, \frac{1}{2}\,.\,[A]^2 \,+\, ...$$
$$=$$
$$\sum_{K\,=\,0}^{K\,=\,N} \frac{1}{K!}\,.\,[A]^K$$
$$=$$
$$\sum_{K\,=\,0}^{K\,=\,N} \frac{1}{K!}\,.\,\{\lambda(K)\,.\,Id_3 \,+\, \mu(K)\,.\,T \,+\, \nu(K)\,.\,\Phi\}$$
$$=$$
$$\sum_{K\,=\,0}^{K\,=\,N} \frac{1}{K!}\,.\,\lambda(K)\,.\,Id_3 \,+\, \sum_{K\,=\,0}^{K\,=\,N} \frac{1}{K!}\,.\,\mu(K)\,.\,T \,+\, \sum_{K\,=\,0}^{K\,=\,N} \frac{1}{K!}\,.\,\nu(K)\,.\,\Phi$$
$$=$$
$$\lambda(N)\,.\,Id_3 \,+\, \mu(N)\,.\,T \,+\, \nu(N)\,.\,\Phi$$

L'objectif suivant consiste à préciser le formalisme des trois séries.

Proposition 4.4. *Formalismes génériques des séries impliquées dans le calcul de l'exponentielle d'une représentation périenne.*

Considérant les premiers résultats, je propose d'examiner :

1. Pour les coefficients λ, les premiers calculs donnent envie (i) de distinguer les puissances paires et impaires et (ii) de proposer :

$$k = 1, 2, ... : \lambda(2.k) = \{\lambda^2 - (2.k - 1).\nu^2.||\mathbf{q}||^2\}^k$$

$$k = 0, 1, 2, ... : \lambda(2.k + 1) = \lambda.\{\lambda^2 - (2.k + 1).\nu^2.||\mathbf{q}||^2\}^k$$

2. Pour les coefficients μ lorsque $||\mathbf{q}||^2$ est quelconque :

$$=$$

3. Pour les coefficients μ lorsque $||\mathbf{q}||^2 = 1$:

$$\mu(K, 1) = (\lambda + \mu)^K - \lambda(K, 1)$$

4. Pour les coefficients ν :

$$\nu(K) = ...$$

$$=$$

Comment je trouve finalement le ratio de Koide : Quels que soient les calculs intermédiaires, l'idée poursuivie consiste à écrire que l'exponentielle a les coefficients suivants :

$$2.q_0 - 1 = \lambda(N \to \infty)$$

$$2 = \mu(N \to \infty)$$

$$2.q_0 = \nu(N \to \infty)$$

Et à calculer ensuite la somme :

$$\sum_{\alpha\alpha}$$

$$=$$

$$(24 + 9.\lambda^2) + (6.\lambda.\mu - 16).({}^{(3)}\mathbf{q}^{\oplus})^2 + \mu^2.({}^{(3)}\mathbf{q}^{\oplus})^4$$

... lorsque q_0 est nul. Je trouve :

$$\sum_{\alpha\alpha}$$

$$=$$

$$(24 + 9.1) + (6. - 1.2 - 16).({}^{(3)}\mathbf{q}^{\oplus})^2 + 4.({}^{(3)}\mathbf{q}^{\oplus})^4$$

$$=$$

$$33 - 28.({}^{(3)}\mathbf{q}^{\oplus})^2 + 4.({}^{(3)}\mathbf{q}^{\oplus})^4$$

Il se trouve que ce trinôme du second degré a au moins pour solution :

$$({}^{(3)}\mathbf{q}^{\oplus})^2 = \frac{3}{2}$$

Vérification :

$$33 \,-\, 28\,.\,\frac{3}{2} \,+\, 4\,.\,(\frac{3}{2})^2 \,=\, 33 \,-\, 42 \,+\, 9 \,=\, 0$$

Il est possible de vérifier que ce trinôme a une seconde solution valant :

$$({}^{(3)}\mathbf{q}^{\oplus})^2 \,=\, \frac{11}{2}$$

Lemme 4.9. *Sur les quaternions unitaires réduits à leurs parties imaginaires pures.*

1) Ces calculs viennent de démontrer que si l'exponentielle d'une représentation périenne redonne la représentation d'un quaternion unitaire réduit à sa partie imaginaire, alors le ratio de Koide du vecteur associé avec cette partie imaginaire vaut deux tiers.

2) Les conditions assurant la coincidence des représentations sont données par les relations de convergence de trois séries :

$$\lambda(N \,\rightarrow\, \infty) \,=\, -1$$

$$\mu(N \,\rightarrow\, \infty) \,=\, 2$$

$$\nu(N \,\rightarrow\, \infty) \,=\, 0$$

3) La matrice associée à ce quaternion imaginaire et unitaire est totalement symétrique puisqu'elle s'écrit :

$$\forall\, \alpha \,:\, [{}_{\alpha}A] \,=\, [{}^{+}_{\alpha}A] \,=\, -2\,.\,Id_3 \,+\, T_2(\otimes)(\mathbf{q}_{\alpha},\, \mathbf{q}_{\alpha})$$

$$\forall\, \alpha \,:\, [{}^{-}_{\alpha}A] \,=\, [0]$$

4) La remarque préliminaire 1.1.1 a noté que les cubes A symétriques annulent tous les produits tensoriels déformés alternés. Par conséquent, lorsque les trois quaternions unitaires sont réduit à leurs parties imaginaires respectives, tous les produits tensoriels déformés alternés par le cube A préservant la vitesse de la lumière et reconstitué à partir des matrices symétriques représentant ces trois quaternions sont nuls :

$$\forall\, (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \,\rightarrow\, \wedge_A(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \,=\, \mathbf{0}$$

5 Remerciements.

Etant ancien élève des classes préparatoires aux grandes écoles (mathématiques supérieures et spéciales section P' de l'école Sainte-Geneviève, Versailles, en 1974-1975), retraité de l'art dentaire (doctorat d'état en chirurgie dentaire, Paris, 1982 ; certificat en radioprotection dentaire sur la période 2007-2022) et self-made man dans le domaine de la physique mathématique que j'étudie désormais par passion, je prie le lectorat de faire preuve d'un sens critique aigu lorsqu'il parcourt mes documents.

Je remercie chaleureusement tous les auteurs acceptant, comme moi, de mettre leurs travaux à libre disposition du public. Vos commentaires éclairés seront toujours bien venus car l'heure du repos n'est pas arrivée, le travail n'est jamais achevé et de longs et pénibles efforts restent à accomplir ...

Thierry PERIAT, version du 3 janvier 2023.

Références

6 Livres, ouvrages et cours.

[01] Cartan, E. : The theory of spinors ; ISBN 0-486-64070-1, translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)", Hermann, 1937 - 154 p. Dover Publications, Inc. New York ©by Hermann, Paris (1966), 157 pages.

[02] Koïde, Y. : Fermion-boson two-body model of quarks and leptons and cabbibo mixing ; Lettere al Nuovo Cimento, 34 (8), 201-205 (1982).

[03] Koïde, Y. : A fermion-boson composite model of quarks and leptons ; Physics Letter B. 120 (1-3) : 161- 165 (1983).

[04] A note on Koide's lepton relation ; arXiv :hep-ph/9402242v1, 7 February 1994.

[05] Quark and lepton mass matrices with a cyclic permutation invariant form ; arXiv :hep-ph/0005137v1, 15 May 2000.

[06] Challenge to the mystery of the charged lepton mass formula ; arXiv : hep-ph/0506247v1, 24 June 2005.

[07] BESIII Collaboration : Precision measurement of the mass of the tau lepton ; arXiv :1405.1076v2, 13 July 2014.

[08] Production of the smallest QED atom : true muonium (μ^+, μ^-) ; arXiv :0904.2225v2, https ://doi.org/10.48550/arXiv.0904.2225.

[09] Maxwell, J.C. : A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, 1884, 54 pages.

[10] Newton, I. : Mathematical principles of natural philosophy, 1687.

[11] Michelson, A. and Morley, E : "On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether". Originally published in "The American Journal of Science", N° 203 November 1887 (Editors James D. and Edward S. Dana ; associated editors : Prof. A. Gray, J. P. Cooke and J. Trowbridge, of Cambridge, Prof. H.A. Newton and A. E. Verrill of New Haven ; Prof. G. F. Barker of Philadelphia. Third series, Vol. XXXIV.- (Whole number, CXXXIV.)

[12] Lennuier, R., Gal, P.-Y., Perrin, D. : Mécanique des particules, champs ; collection U, ©librairie Armand Colin, Paris 1970, 363 pages.

[13] Purcell, Edward, M., Guthmann, C. et Lallemand, p. : Electricité et magnétisme ; Berkeley : cours de physique, volume 2, collection U, ©Librairie Armand Colin, Paris 1973, traduit de l'américain, 460 pages.

[14] Labarthe, J. J. : Electromagnétisme ; Université Paris Orsay, maîtrise et magistère de physique, version du 26 octobre 2002, 97 pages.

[15] Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7.

[16] Cartan, E. : Sur les équations de la gravitation d'Einstein ; extrait du journal de mathématiques 1922. Fasc. n°2. Gauthier-Villard et Cie, éditeurs, Paris, 74 pages.

[17] Riemann, B. : Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen (Habilitationschrift : 10 June 1854, Göttingen, Gesammelte Math. Werke, Leipzig, 1872, p. 254-269).

[18] Stanford Report, May 4, 2011 : Standord's Gravity Probe B confirms two Einstein theories ; The official Stanford University website.

[19] The official Virgo website : https ://virgo-gw.eu

[20] Landau, L. D. and Lifschitz, E. M. : The Classical Theory of Fields, Course of Theoretical Physics, Third Revised English Edition, ©1971 Pergamon Press Ltd, 387 pages. Version allemande : Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II, Klassische Feldtheorie : L.D. Landau, E.M. Lifschitz ; 12. ueberarbeitete Auflage, in dt. Sprache hrsg. von Hans-Georg Schoepf [Uebers. aus dem russ. von Georg Dautcourt], - 1992, ISBN 3-05-501550-9.

[21] Bröcker T. : Lineare Algebra und analytische Geometrie, ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker, zweite korrigierte Auflage, ©2004 Birhäuser Verlag, Basel, 366 pages.

[22] https ://rotations.berkeley.edu, the Euler-Rodrigues and quaternion parametrizations, consulté le 12 décembre 2022 ; la dernière mise à jour datait du 10 mars 2022, texte en américain sous licence CC BY-NC 4.0.

7 Travaux personnels précisant le contexte de la discussion menée dans ce document.

[a] PERIAT, T. : Les algèbres de Lie des espaces dotés d'un produit tensoriel déformé ; ISBN 978-2-36923-030-4, EAN 9782369230304, 2 décembre 2022, v2, 21 pages.

[b] PERIAT, T. : Représentations matricielles de l'opérateur de Hodge agissant sur les 2-formes d'un espace de dimension quatre - partie I : analyse périenne des matrices ; ISBN 9782-36923-068-7, EAN 9782369230687, version 3, 17 janvier 2022, 13 pages.