L'équation de Klein-Gordon
Nouvelle analyse et identifications fondamentales

Gravitation quantique - Les tétraèdres et la réalité.

©Thierry PERIAT, ISBN 978-2-36923-097-7, EAN 9782369230977, v6

15 novembre 2021

Ce document constate que les procédures de quantification de l'espace n'ont pas pu aboutir. Il ré-analyse en profondeur l'équation de Klein-Gordon à l'aide de la notion de produit vectoriel déformé. Elle permet d'introduire un ensemble d'identifications fondamentales jetant un regard nouveau sur la propagation des ondes massives. Une attention particulière est donnée au contexte euclidien classique qui, au sein de cette approche, montre un comportement contre-intuitif dans lequel apparaissent forcément des bi-spineurs. La logique interne de la théorie démontre que les espaces vides s'apparentent à un bain instable de bi-spineurs. La métrique euclidienne fait partie des métriques admissibles et les métriques dégénérées livrent des sextuplets de solutions qu'on a envie de relier aux double triplets de particules. Enfin, la jonction entre cette démarche et le traitement des sections de cordes élastiques soumises à des pressions est réalisée, ce qui donne une cohérence globale accrue à la théorie des produits déformés.

Table des matières

french

1 Introduction

1.1 Obstruction expérimentale à la quantification de l'espace des positions.

Je poursuis depuis plusieurs années l'analyse des conséquences du formalisme des diviseurs intrinsèques non triviaux pour les produits vectoriels déformés obtenus dans les espaces mathématiques de dimension trois [[a]]. En particulier j'approfondis la recherche d'une *utilisation réaliste* (d'où le titre) de la notion de tétraèdre au sein de mon approche.

Depuis un siècle environ (les années 1920), diverses communautés scientifiques cherchent à formuler une théorie de la gravitation quantique acceptable.

La volonté de réunir sous un même toit théorique les phénomènes électromagnétiques et gravitationnels a été particulièrement personnifiée par A. Einstein ; elle débute après la parutionde l'oeuvre qui l'a rendu célèbre [[01]] et ne s'évanouit pas avec sa disparition en 1955. H. Weyl a concrétisé cet espoir en définissant le contexte théorique permettant sa réalisation et une formulation précise en a été donnée en 1954 par Yang et Mills dans le cadre d'une discussion concernant les isospins nucléaires. Le cadre a pu ensuite être étendu aux interactions faibles et fortes au cours des années 1960-1970. La progression de ces idées a donné naissance au modèle standard des particules défini comme une théorie de jauge s'appuyant sur le groupe symétrique $\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ [[02]].

Les idées initiales reposent énormément sur l'utilisation de la théorie des groupes en mécanique quantique [[03]], [[04]], [[05]].

Les passionnés de l'histoire de la physique découvriront une chronologie de cette quête dans [[06]] ; les amoureux de la physique mathématique y découvriront un exposé (en anglais) de la théorie des boucles gravitationnelles quantiques (Loop quantum Gravity). Il peut utilement se compléter avec la lecture de [[07]]. Certaines ont tenté de promouvoir l'idée de l'existence d'une discrétisation effective de l'espace-temps en démontrant la possibilité de quantifier les longueurs [[08]], les surfaces [[07] ; §4.1], [[09]] et les volumes [[07] ; §4.2].

Malheureusement, un article datant de 2014 [[10]] jette un doute sur cette vision intuitive et prometteuse. Il relate une tentative visant à mesurer la taille des mailles de l'univers et aboutit à la conclusion décevante que, si cette discrétisation est une réalité effective, alors la taille de ces mailles est trop petite pour que nos instruments puissent la mesurer. Les détracteurs de cet article disent que les conditions de l'expérience analysée ne correspondent pas à la représentation communément admise pour la propagation de la lumière dans les régions vides (cette vitesse doit être indépendante de l'énergie des photons).

1.2 La présence sous-jacente des tétraèdres.

Ces tentatives de quantifications ont cependant eu de très nombreuses retombées positives sur divers secteurs économiques. L'objectif visant à reproduire les objets volumineux, leurs déplacements dans l'espace et leurs déformations éventuelles au cours du temps [[11]], [[12]], [[13]], en particulier grâce à l'outil informatique en plein essor au cours des mêmes années, a permis d'innombrables progrès dans l'industrie médicale (visualisation des tissus vivants, aides au diagnostic, etc.), automobile, aéronautique, chimique et pharmaceutique, sans oublier celle -d'un intérêt plus discutable- des jeux.

Il se trouve que parmi les nombreux procédés visant à découper l'espace en petites unités volumiques, certains se servent de la tétraédrisation. Il est aisé de comprendre une des difficultés essentielles de ce type de protocole : comment être sur —.

Dans de nombreuses tentatives, la figure platonique du tétraèdre apparait comme l'outil idéal permettant la description des flux de spins [[14]], [[15]], [[16]].

1.3 Comment le tétraèdre apparait au sein de la théorie des produits tensoriels déformés.

La théorie des produits tensoriels déformés, tout comme certaines tentatives récentes [[17]], prend acte des résultats précédents en réorientant modestement l'axe principal des recherches.

Remarque 1.1. *Les points communs avec une tentative récente.*

Il y a au moins deux points de contact entre l'approche exposée dans [[17]] et celle promue par la théorie des produits tensoriels déformés (TQE) :

1. le fait de travailler avec des produits tensoriels puisque les auteurs privilégient l'utilisation de théories impliquant des champs de groupes tensoriels ;
2. le rôle fondamental dévolu à la structure tétraédrique, notamment comme expression d'un réseau de spins.

Remarque 1.2. *La justification de la présence de tétraèdres.*

Le tétraèdre apparait au sein de la TQE d'une façon un peu différente de celle utilisée dans [[17]]. Tout d'abord, la présence de cette figure platonique ne saute pas aux yeux.

Elle s'impose seulement comme conséquence d'un cheminement logique qui semble inviter à penser que chaque événement (ici et maintenant) se déroule au sein d'une structure géométrique ayant une apparence faussement euclidienne (du type $3 + 1$) et devant se concevoir comme une forme de bouchon d'étranglement entre passés et futurs au sein duquel les énergies s'écoulent en flux tourbillonnaires, un peu comme ils le feraient dans le syphon d'un fond de baignoire.

Ainsi, l'étude des décompositions des produits vectoriels classiques agissant sur des éléments de E(3, C) mène au constat totalement contre-intuitif que les représentations les plus triviales de ces produits dans $so(3) \in M(3,\ C)$ ne coïncident pas avec les décompositions effectives de ces produits au sein de la TQE ; voir la démonstration dans [[b]]. Il en résulte que :

$$\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2 = -\mathbf{q}_2 + \mathbf{z} \,;\, < \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_2 >_{Id_3} = 0 \,;\, \mathbf{z} \perp \mathbf{q}_2 \tag{1}$$

$$\mathbf{q}_2 \wedge \mathbf{q}_1 = -\mathbf{q}_1 + \mathbf{Z} \,;\, < \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_1 >_{Id_3} = 0 \,;\, \mathbf{Z} \perp \mathbf{q}_1 \tag{2}$$

Et c'est à cet endroit exact qu'apparaissent, par nécessité mathématique mais pas à cause d'un a priori conceptuel sur la nature de l'univers, deux paires de vecteurs orthogonaux entre eux du type (un des deux arguments du produit, un des résidus de la décomposition).

Lorsque deux bi-vecteurs ont une origine ponctuelle commune, ils dessinent toutes sortes de figures allant de la pyramide à cinq faces (type Gyzeh) jusqu'au point leur servant d'origine en passant par un segment de droite, un triangle ou un tétraèdre (pyramide à quatre faces).

Définition : Tétraèdre. Les tétraèdres éventuels de la TQE ont une série de caractéristiques spécifiques :

1. **Dans le cadre euclidien** :
   — Les deux bi-vecteurs dont l'existence découle de la décomposition en ambiance euclidienne ont une origine commune ;
   — Ils ont également la ligne directrice d'un des trois côtés issus de cette origine en commun. Ce qui revient à dire que deux des quatre vecteurs sont égaux en direction. Ils doivent aussi l'être en intensité ;
   — De plus, les deux arguments doivent être des vecteurs isotropiques au sens donné à cet adjectif par E. Cartan dans son œuvre fondant l'existence des spineurs [[18]] ; en clair : ce sont des vecteurs non nuls de E(3, C) dont la norme euclidienne est nulle.
2. **Dans le cadre non euclidien** :
   La TQE propose d'écrire :

$$|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2 >= [P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} > \tag{3}$$

$$|\mathbf{q}_2 \wedge \mathbf{q}_1 >= [Q] \,.\, |\mathbf{q}_1 > + |\mathbf{Z} > \tag{4}$$

   L'anti-symétrie naturelle du produit vectoriel permet de parvenir sans exception à :

$$[Q] \,.\, |\mathbf{q}_1 > + |\mathbf{Z} > + [P] \,.\, |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >= |\mathbf{0} > \tag{5}$$

   C'est une somme de quatre vecteurs a priori et en général différents ; elle peut donc parfois s'interpréter comme une relation de fermeture liant les quatre normales aux faces d'un tétraédre.

Proposition 1.1. *Absence de tétraèdre dans le contexte tri-dimensionnel euclidien strict.*

Enoncé : En supposant que les démonstrations réalisées dans [[a]] et [b] sont recevables -notamment parce que le formalisme des décompositions peut être calibré par l'usage de la méthode extrinsèque- et que les deux bi-vecteurs définis par la décomposition des crochets $[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]$ et $[\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1]$ dans le cadre euclidien classique ont même origine ponctuelle, leurs extrêmités ne définissent jamais de tétraèdre.

Preuve : Les caractéristiques imposées par la mathématique des décompositions en milieu euclidien permettent une classification sur la base des représentations graphiques tridimensionnelles usuelles du tétraèdre.

Les deux arguments, $\mathbf{q}_1$ et $\mathbf{q}_2$, ont forcément la même norme euclidienne nulle puisqu'ils sont des vecteurs isotropiques ; mais ils n'ont pas nécessairement la même direction. Cette distinction introduit un critère permettant de classifier l'ensemble des configurations réalisables avec les paires $(\mathbf{q}_1, \mathbf{z})$ et $(\mathbf{q}_2, \mathbf{Z})$.

1. **Famille 1** : $\mathbf{q}_1 \,//\, \mathbf{q}_1$
   Les deux vecteurs isotropiques coïncident, constituent par là-même le côté commun du tétraèdre espéré.
   — Famille 1.0 : Si $\mathbf{z}$ et $\mathbf{Z}$ ont la même directrice, la figure crée par ces positionnements relatifs et respectifs est un segment de droite de norme euclidienne égale à la différence $\mathbf{Z}$ - $\mathbf{z}$; il est perpendiculaire aux arguments.

   — Famille 1.1 : Si $\mathbf{z}$ et $\mathbf{Z}$ n'ont pas la même directrice, il existe un ensemble de bi-vecteurs dessinant un triangle perpendiculaire aux arguments.
2. **Famille 2** : $\mathbf{q}_1$ a une direction différente de celle de $\mathbf{q}_2$:
   Comme les deux vecteurs isotropiques ne sont pas parallèles mais de longueur nulle, et qu'un des deux autres résidus au moins doit coïncider avec un de ces deux vecteurs isotropiques en direction et en intensité, il ne reste au mieux qu'un seul résidu de norme non nulle et du coup, quel que soit le positionnement relatif des trois vecteurs de longueur nulle, il ne reste comme figure que celle d'un segment de droite porté par une directrice coïncidant avec celle de ce vecteur non nul. Il n'y a donc pas de tétraèdre non plus.

□

1.4 De la lumière dans le vide.

Exemple 1.1. *La densité volumique d'énergie électromagnétique dans le vide.*

La densité volumique d'énergie contenue (ou portée par) un champ électromagnétique (EM) dans les régions décrites comme étant vides mais dans lesquelles la lumière se propage pourtant est réputée nulle et décrite par un cas particulier de la relation plus générale [19; Berkeley] :

$$\rho_{EM} \;=\; \frac{1}{2}\cdot({}^{(3)}\mathbf{E}^2 \,+\, {}^{(3)}\mathbf{H}^2) \tag{6}$$

$$\rho_{EM,\,vide} \;=\; \frac{1}{2}\cdot({}^{(3)}\mathbf{E}^2 \,+\, {}^{(3)}\mathbf{H}^2) \;=\; 0 \tag{7}$$

Sachant que cette relation concerne aussi des ondes EM planes non polarisée et qu'elle est sensée s'appliquer dans des régions de dimension trois rapportées à une géométrie localement euclidienne, le choix du domaine mathématique dans lequel la discussion physique a lieu revêt un aspect crucial. Dans E(3, R), les champs doivent être nuls et il devient difficile d'imaginer qu'il se passe quoique se soit dans les régions étudiées. Elles sont absolument vides. Dans E(3, C), des champs possédant des composantes complexes peuvent s'envisager ; ce qui n'est plus un scoop depuis longtemps. Considérant alors les Equ.(1) et (2), il semble raisonnable d'accepter les identifications suivantes :

$$\mathbf{q}_1 \;=\; \mathbf{E} \tag{8}$$

$$\mathbf{q}_2 \;=\; \mathbf{H} \tag{9}$$

Ce qui mène à :

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \;=\; -\mathbf{H} \,+\, \mathbf{z}\,;\, <\mathbf{H},\, \mathbf{H}>_{Id_3} =\; \mathbf{H}^2 \;=\; 0\,;\, \mathbf{z} \,\perp\, \mathbf{H} \tag{10}$$

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{E} \;=\; -\mathbf{E} \,+\, \mathbf{Z}\,;\, <\mathbf{E},\, \mathbf{E}>_{Id_3} =\; \mathbf{E}^2 \;=\; 0\,;\, \mathbf{Z} \,\perp\, \mathbf{E} \tag{11}$$

Sachant que le produit vectoriel d'un champ électrique et d'un champ magnétique décrit un vecteur de Poynting indiquant la direction d'un transport d'énergie EM, la question de l'existence possible d'une propagation dans ces conditions extrêmes semble résolue.

Pour autant, quelques précisions supplémentaires ne nuiront pas car les Equ.(10) et (11) ne disent encore rien des résidus $\mathbf{z}$ et $\mathbf{Z}$. Dans le vide, la lumière non polarisée se propage de telle façon que les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont orthogonaux.

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{H} \Rightarrow < \mathbf{E}, \mathbf{H} >_{Id_3} = 0 \tag{12}$$

Une des propriétés élémentaires du produit vectoriel dans E(3, R) impose que le vecteur de Poynting soit perpendiculaire au plan formé par les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$. L'extension de cette propriété à l'espace E(3, C) exigerait de poser les relations suivantes et de choisir les résidus $\mathbf{z}$, $\mathbf{Z}$ en conséquence :

$$\mathbf{S} \equiv -\mathbf{H} + \mathbf{z} : < -\mathbf{H} + \mathbf{z}, \mathbf{H} >_{Id_3} = 0\,; < -\mathbf{H} + \mathbf{z}, \mathbf{E} >_{Id_3} = 0 \tag{13}$$

$$-\mathbf{S} \equiv -\mathbf{E} + \mathbf{Z}\,; < -\mathbf{E} + \mathbf{Z}, \mathbf{E} >_{Id_3} = 0\,; < -\mathbf{E} + \mathbf{Z}, \mathbf{H} >_{Id_3} = 0 \tag{14}$$

A cause de l'effet concomittant des Equ.(1), (2) et (12), les deux relations mènent ainsi aux conditions simultanées :

$$< \mathbf{Z}, \mathbf{E} >_{Id_3} = < \mathbf{Z}, \mathbf{H} >_{Id_3} = < \mathbf{z}, \mathbf{E} >_{Id_3} = < \mathbf{z}, \mathbf{H} >_{Id_3} = 0 \tag{15}$$

Elles se résument en disant que les résidus doivent se situer dans un plan perpendiculaire au plan dessiné par les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$.

Il existe cependant une exception notable à l'affirmation précédente. Elle est due au fait qu'un vecteur isotropique est orthogonal à lui-même. Ainsi, à la limite, il devient possible d'envisager les identifications inattendues suivantes :

$$\mathbf{z} = \mathbf{E}\,; \mathbf{Z} = \mathbf{H} \tag{16}$$

ou :

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\,; \mathbf{Z} = \mathbf{E} \tag{17}$$

Elles valident l'ensemble des Equ.(15) sans difficulté et un calcul simple montre que, dans ce cas, le carré du vecteur de Poynting et le second invariant accompagnant l'onde plane ainsi définie sont nuls.

Remarque 1.3. *Introduction d'une polynomiale essentielle.*

L'équation de Klein-Gordon (EKG) [[20]; p. 44, (3.26)] :

$$g^{\alpha\beta} \, . \, \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha x^\beta} + (m^2 + \xi \, . \, R(\mathbf{x})) \, . \, \phi(\mathbf{x}) = 0$$

lorsqu'elle est définie pour les régions sans courbure de l'espace-temps ($\mathrm{R}_{\alpha\beta} = 0$) :

$$g^{\alpha\beta} \, . \, \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x})}{\partial x^\alpha x^\beta} + m^2 \, . \, \phi(\mathbf{x}) = 0 \tag{18}$$

se laisse généralement relier à l'équation d'une sphère unitaire de dimension quatre qui, elle-même, se laisse métamorphoser en une relation de dispersion pour la lumière se propageant dans ces régions.

Pour rappel, le passage de l'équation de Klein-Gordon à celle de la sphère unitaire se fait en injectant dans la première les formulations les plus élémentaires des fonctions d'onde et il aboutit à une forme polynomiale de degré deux, $\Lambda(\,^{(4)}[\mathrm{G}]^{-1}, {}^{(4)}\mathbf{k}^*)$; traditionnellement [[21]; p. 16, (43)] :

$$\phi({}^{(4)}\mathbf{x}) = \phi_0({}^{(4)}\mathbf{x}) \, . \, exp^{\frac{i}{\hbar} \, . \, ({}^{(3)}\mathbf{p} \, . \, {}^{(3)}\mathbf{x} \, - \, E \, . \, t)}$$

Cette formulation peut être étendue à :

$$\phi({}^{(4)}\mathbf{x}) \;=\; \phi_0({}^{(4)}\mathbf{x})\,.\,exp^{\frac{i}{\hbar}\,.\,<{}^{(4)}\mathbf{p}\,.\,{}^{(4)}\mathbf{x}>_{[G]}} \tag{19}$$

Expression dans laquelle ϕ_0 désigne un spineur invariant. Une première série de dérivations partielles fournit :

$$\frac{\partial\phi({}^{(4)}\mathbf{x})}{\partial x^{\beta}} \;=\; \frac{i}{\hbar}\,.\,(p_{\beta} \,+\, \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\,.\,x^{\alpha})\,.\,\phi({}^{(4)}\mathbf{x}) \tag{20}$$

Tandis qu'une seconde livre :

$$\frac{\partial^2\phi({}^{(4)}\mathbf{x})}{\partial x^{\chi}\partial x^{\beta}} \tag{21}$$

$$=$$

$$\frac{i}{\hbar}\,.\,\frac{\partial(p_{\beta} \,+\, \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\,.\,x^{\alpha})}{\partial x^{\chi}}\,.\,\phi({}^{(4)}\mathbf{x}) \,+\, \frac{i}{\hbar}\,.\,(p_{\beta} \,+\, \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\,.\,x^{\alpha})\,.\,\frac{\partial\phi({}^{(4)}\mathbf{x})}{\partial x^{\chi}}$$

$$=$$

$$\{\frac{i}{\hbar}\,.\,(\frac{\partial p_{\beta}}{\partial x^{\chi}} \,+\, \frac{\partial p_{\chi}}{\partial x^{\beta}} \,+\, \frac{\partial^2 p_{\alpha}}{\partial x^{\chi}\partial x^{\beta}}\,.\,x^{\alpha}) \,-\, \frac{1}{\hbar^2}\,.\,(p_{\beta} \,+\, \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\,.\,x^{\alpha})\,.\,(p_{\chi} \,+\, \frac{\partial p_{\epsilon}}{\partial x^{\chi}}\,.\,x^{\epsilon})\}\,.\,\phi({}^{(4)}\mathbf{x})$$

En injectant ces relations dans l'Equ.(18) :

$$g^{\chi\beta}\,.\,\frac{\partial^2\phi({}^{(4)}\mathbf{x})}{\partial x^{\chi}\partial x^{\beta}} \,+\, \frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}\,.\,\phi({}^{(4)}\mathbf{x}) \tag{22}$$

$$=$$

$$\{g^{\chi\beta}\,.\,\{\frac{i}{\hbar}\,.\,(\frac{\partial p_{\beta}}{\partial x^{\chi}} + \frac{\partial p_{\chi}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial^2 p_{\alpha}}{\partial x^{\chi}\partial x^{\beta}}\,.\,x^{\alpha}) - \frac{1}{\hbar^2}\,.\,(p_{\beta} + \frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\,.\,x^{\alpha})\,.\,(p_{\chi} + \frac{\partial p_{\epsilon}}{\partial x^{\chi}}\,.\,x^{\epsilon})\} + \frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}\}$$

$$\times$$

$$\phi({}^{(4)}\mathbf{x})$$

$$=$$

$$0$$

De sorte que lorsque l'onde massive suit une géodésique (phénomène de chutte libre apparente) :

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} \;=\; \mathbf{0}$$

$$\Downarrow$$

$$g^{\chi\beta}\,.\,\frac{\partial^2\phi({}^{(4)}\mathbf{x})}{\partial x^{\chi}\partial x^{\beta}} \,+\, \frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}\,.\,\phi({}^{(4)}\mathbf{x}) \tag{23}$$

$$=$$

$$-\frac{1}{\hbar^2}\,.\,\{g^{\chi\beta}\,.\,p_{\chi}\,.\,p_{\beta} \,-\, m^2\,.\,c^2\}\,.\,\phi({}^{(4)}\mathbf{x})$$

Ainsi, en rappelant à cet endroit précis un certain nombre de relations désormais basiques :

— La relation de dispersion de la lumière se propageant dans des régions vides [[21]; p. 4, (5)] :

$$E^2 \;=\; m^2\,.\,c^4 \,+\, c^2\,.\,<^{(3)}\,\mathbf{p}^*,\,{}^{(3)}\mathbf{p}^*>_{Id_3} \tag{24}$$

— Les relations caractéristiques d'une onde :

$$c \,=\, \lambda\,.\,\nu\;;\; 2\,.\,\pi\,.\,\nu \,=\, \omega\,;\; 2\,.\,\pi\,.\,c \,=\, \lambda\,.\,\omega$$

— Les équivalences introduites par la mécanique quantique et la relativité restreinte :

$$E = h . \nu = \hbar . \omega \; ; \; E_0 = m . c^2 \tag{25}$$

Il vient :

$$g^{\chi\beta} . \frac{\partial^2 \phi({}^{(4)}\mathbf{x})}{\partial x^\chi \partial x^\beta} + \frac{m^2 . c^2}{\hbar^2} . \phi({}^{(4)}\mathbf{x}) = -\{g^{\chi\beta} . k_\chi . k_\beta - \frac{m^2 . c^2}{\hbar^2}\} . \phi({}^{(4)}\mathbf{x}) = 0$$

Comme annoncé, cette démonstration fait bien ressortir l'existence d'une polynomiale :

$$\Lambda({}^{(4)}[G], {}^{(4)}\mathbf{k}) = g^{\chi\beta} . k_\chi . k_\beta - \frac{m^2 . c^2}{\hbar^2} \tag{26}$$

dont les solutions ne dépendent finalement pas d'une onde ϕ particulière mais coincident avec celles de l'équation de Klein-Gordon dans les circonstances introduites et décrites précédemment.

Soit dit en passant, sachant que les ondes de Klein-Gordon peuvent éventuellement être massives, certaines manifestations ondulatoires lumineuses devraient pouvoir l'être aussi... et ce principe devrait également concerner les neutrinos.

Remarque 1.4. *Traitement spécifique de la relation de dispersion dans le vide.*

Pour les ondes transportant une masse non nulle (m $\neq 0$), il est facile de réécrire les solutions de l'Equ.(26) comme suit :

$$<^{(4)} \mathbf{P}^*, {}^{(4)}\mathbf{P}^* >_{[G]^{-1}} = 1 \tag{27}$$

à condition de préciser que :

$${}^{(4)}\mathbf{P}^* = \frac{\hbar}{m . c} . {}^{(4)}\mathbf{k}^*, \; m \neq 0$$

Un théorème d'E. Cartan [[18]; pp. 5-7, §3] [1], dit qu'il est toujours possible - *même dans le domaine des nombres complexes*- de reconditionner l'Equ.(27) sous le format caractéristique d'une forme quadratique fondamentale unitaire de signature quelconque dans un espace de dimension quatre aussi longtemps que l'inverse de la métrique spatio-temporelle n'est pas dégénérée ${}^{(4)}|\mathrm{G}| \neq 0$.

De sorte que, grâce à ce théorème, rien ne s'oppose à pouvoir mettre l'Equ.(27) représentant les solutions de l'équation de Klein-Gordon par exemple sous la forme d'une sphère unitaire euclidienne de dimension quatre ; elle a une signature du type $(+ + + +)$ et s'écrit génériquement :

$$(\eta^0)^2 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 = 1 \tag{28}$$

après une transformation linéaire ad hoc du genre :

$$|^{(4)}\eta >= [T]^{-1} . |^{(4)}\mathbf{P}^* > \tag{29}$$

Une sphère unitaire euclidienne de dimension quatre se laisse aisément identifier avec la relation de dispersion de la lumière se propageant dans le vide donnée par l'Equ.(24) en posant par exemple :

$$E \neq 0 \; ; \; \eta^0 = \frac{m . c^2}{E}, \; \forall a = 1, 2, 3 : \eta^a = \frac{c . p_a}{E} \tag{30}$$

1. (citation) *"Every quadratic form can be reduced to a sum of squares by a linear transformation of the variables."*

Pour rappel, la quantité de mouvement dans un espace de dimension quatre de signature (+ - - -) se définit par [[31] ; p. 18] :

$$^{(4)}\mathbf{p} = m\,.\,(v^0,\, v^1,\, v^2,\, v^3) = m\,.\,(c,\, v_1,\, v_2,\, v_3) = (m\,.\,c,\, {}^{(3)}\mathbf{p})$$

$$^{(4)}\mathbf{p}^* = m\,.\,(v_0,\, -v_1,\, -v_2,\, -v_3) = m\,.\,(c,\, -v_1,\, -v_2,\, -v_3) = (m\,.\,c,\, -{}^{(3)}\mathbf{p})$$

Les Equ.(28) et (29) permettent d'introduire le vecteur noté conventionnellement **n** ayant pour composantes :

$$(\eta^1,\, \eta^2,\, \eta^3) = (\sum_{\mu=0}^{\mu=3} t^{1\mu}\,.\,P_\mu,\, \sum_{\mu=0}^{\mu=3} t^{2\mu}\,.\,P_\mu,\, \sum_{\mu=0}^{\mu=3} t^{3\mu}\,.\,P_\mu) \tag{31}$$

C'est-à-dire à cause des Equ.(27) et (30) :

$$\forall\, a = 1,\, 2,\, 3 : \eta^a = \frac{\hbar}{m\,.\,c}\,.\,\sum_{\mu=0}^{\mu=3} t^{a\mu}\,.\,k_\mu = \frac{c\,.\,p_a}{E} \tag{32}$$

Ce qui permettra de calculer une *pseudo-norme euclidienne* pour le vecteur **n** :

$$||\mathbf{n}||^2 = \sum_{a=1}^{a=3} (\eta^a)^2 \in C \tag{33}$$

sachant que ce nombre peut être complexe à cause de la présence de l'énergie E dont nous savons qu'il peut être un nombre imaginaire pur en mécanique quantique lorsqu'il s'agit de décrire une transition entre deux états énergétiques [[05] ; tome I, complément H_{IV} ; pages 468-473] ... ce qui décrit bien la vie des particules.

Remarque 1.5. *Traitement spécifique de la relation de dispersion dans le vide.*

Chaque sphère unitaire de dimension quatre se laisse exprimer sous la forme d'un élément de M(3, R ou C) grâce à l'usage de la paramétrisation d'Euler-Rodrigues [[22] ; p. 282 [2]], [[23] ; p. 15, (125)], [[24] ; §3, p. 423] :

$$[M(\eta)] = \begin{pmatrix} (\eta^0)^2 + (\eta^1)^2 - (\eta^2)^2 - (\eta^3)^2 & 2\,.\,(\eta^1\,.\,\eta^2 - \eta^0\,.\,\eta^3) & 2\,.\,(\eta^0\,.\,\eta^2 + \eta^1\,.\,\eta^3) \\ 2\,.\,(\eta^1\,.\,\eta^2 + \eta^0\,.\,\eta^3) & (\eta^0)^2 - (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 - (\eta^3)^2 & 2\,.\,(\eta^2\,.\,\eta^3 - \eta^0\,.\,\eta^1) \\ 2\,.\,(\eta^1\,.\,\eta^3 - \eta^0\,.\,\eta^2) & 2\,.\,(\eta^2\,.\,\eta^3 + \eta^0\,.\,\eta^1) & (\eta^0)^2 - (\eta^1)^2 - (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 \end{pmatrix}$$

Il se trouve que, par un heureux hasard, le formalisme des représentations matricielles de ces sphères coincide avec celui des noyaux de type I de décompositions non-triviales de produits vectoriels déformés. La démonstration de cette affirmation s'effectue en deux temps.

1. Tout d'abord en remarquant que les conventions adoptées ci-dessus mènent à pouvoir écrire :

$$[M(\eta)] = \{(\eta^0)^2 - 1\}\,.\,Id_3 + 2\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{n},\, \mathbf{n}) + 2\,.\,\eta^0\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{n}) \tag{34}$$

où la symbolique $T_2(\otimes)$ désigne une table de Pythagore (synonyme : une table de multiplication) agissant sur les composantes de l'argument $^{(3)}\mathbf{n}$ défini au travers des Equ.(31) et (32).

Il s'avèrera bientôt judicieux de définir le vecteur $^{(3)}\mathbf{s}$:

$$^{(3)}\mathbf{s} = 2\,.\,\eta^0\,.\,{}^{(3)}\mathbf{n} = \frac{2\,.\,\eta^0\,.\,c}{E}\,.\,{}^{(3)}\mathbf{p} \tag{35}$$

2. A condition de corriger la petite erreur d'impression.

et de réécrire l'Equ.(34) :

$$[M(\eta)] \,=\, \alpha\,.\,Id_3 \,+\, 2\,.\,T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{n},\,{}^{(3)}\mathbf{n}) \,+\, {}_{[J]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{s}) \tag{36}$$

en prenant soin de préciser que :

$$\alpha \,=\, (\eta^0)^2 \,-\, 1 \,=\, -||\mathbf{n}||^2 \tag{37}$$

2. Puis en se souvenant que :
   — les produits vectoriels déformés par les éléments [A] de M(3, R ou C) se décomposant sous la forme générique :

$$|[\mathbf{a},\,...]_{[A]}> = \,|A|\,.\,\{[A]^t\,.\,[J]\}\,.\,[_{\kappa(\mathbf{a})}K]\,.\,|...>\,+|\mathbf{reste}> \tag{38}$$

   sont immanquablement associés avec l'existence d'une polynomiale de degré deux écrite en fonction des composantes de l'argument **a** ;

   — l'expression précise du noyau $[_{\kappa(\mathbf{a})}\mathrm{K}]$ d'une décomposition- également un élément de M(3, R ou C)- dépend de la dégénérescence ou non de cette polynomiale ;

   — le noyau de type I caractérisant les polynomiales non dégénérées (elles sont parfois dites *propres*) vaut :

$$[_{\kappa(\mathbf{a})}K]_{|A|} \,=\, \frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\kappa(\mathbf{a})] \,+\, \frac{1}{|A|}\,.\,{}_{[J]}\Phi(_{\kappa}\mathbf{s})\,;\,|A| \,=\, \pm 1 \tag{39}$$

Il est alors très aisé de constater la coincidence possible entre les Equ.(36) et (39) :

$$[M(\eta)] \,=\, [_{\kappa(\mathbf{a})}K]_{|A|} \tag{40}$$

lorsque :

$$\mathbf{s} \,=\, \frac{1}{|A|}\,.\,_{\Lambda}\mathbf{s}\,;\,|A| \,=\, \pm 1 \tag{41}$$

et :

$$\frac{1}{2}\,.\,Hess_{(\mathbf{a},0)}\kappa(\mathbf{a}) \,=\, \alpha\,.\,Id_3 \,+\, 2\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{n},\,\mathbf{n}) \tag{42}$$

Les méthodes mathématiques développées par la TQE offrent par conséquent la possibilité naturelle d'associer au moins deux polynomiales de degré deux, soit $\Lambda($ ${}^{(4)}[\mathrm{G}]^{-1}$, ${}^{(4)}\mathbf{k}^*)$ et $\kappa({}^{(3)}\mathbf{a})$ ces polynomiales, avec chacune des paramétrisations d'Euler-Rodrigues d'une sphère unitaire de dimension quatre ; à noter : l'argument ${}^{(3)}\mathbf{a}$ n'est pas au départ clairement défini.

Constatant cependant que cette approche livre deux polynomiales pour la même sphère unitaire, et sachant que la polynomiale $\Lambda($ ${}^{(4)}[\mathrm{G}]^{-1}$, ${}^{(4)}\mathbf{k}^*)$ peut toujours se réécrire comme une polynomiale dépendant de ${}^{(3)}\mathbf{k}$, la tentation est grande de penser que ces deux polynomiales décrivent le même phénomène physique lorsqu'il existe un facteur Ψ non nul tel que ${}^{(3)}\mathbf{a} = \Psi.{}^{(3)}\mathbf{k}$.

Remarque 1.6. *En géométrie de Minkowski.*

En considérant la formulation particulière de l'équation de Klein-Gordon pour les régions vides rapportées à une géométrie de Minkowski ayant la signature (+ - - -) ; voir [[21] ; p. 4 (6)] dans laquelle j'ai arbitrairement posé $\hbar = \mathrm{c} = 1$ et dont il est possible de trouver confirmation dans [[20] ; p. 10, (2.1)] :

$$\eta^{\alpha\beta}\,.\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\alpha x^\beta} \,+\, m^2\,.\,\phi \,=\, 0$$

et ses solutions habituelles, à savoir [[20] ; p. 11, (2.5)], [[21] ; p. 16, (43)] :

$$\phi(\mathbf{x},\, t) \;=\; \phi(\mathbf{0}, 0)\, .\, e^{i.(\mathbf{k}\, .\, \mathbf{x}\, -\, \omega\, .\, t)}$$

où $\mathbf{x}$ représente une position spatiale, t une époque, ω une pulsation et $\mathbf{k}$ un vecteur d'onde spatial, il est possible de montrer que pour des paires $(\mathbf{k},\, \omega)$ ne dépendant pas significativement des paires *événementielles* $(\mathbf{x},\, \mathrm{t})$:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^a} \;=\; i\, .\, k_a\, .\, \phi(\mathbf{x}, t)\; et\; \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^0} \;=\; -i\, .\, \omega\, .\, \phi(\mathbf{x}, t)$$

puis :

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^a \partial x^b} \;=\; -\, k_a\, .\, k_b\, .\, \phi(\mathbf{x}, t)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x^a \partial x^0} \;=\; \omega\, .\, k_a\, .\, \phi(\mathbf{x},\, t)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial^2 x^0} \;=\; -\, \omega^2\, .\, \phi(\mathbf{x},\, t)$$

En réinjectant ces résultats dans la formulation particulière de l'équation de Klein-Gordon, il vient :

$$\forall\, \phi\; :\; \{\eta^{ab}\, .\, k_a\, .\, k_b\; -\; (\eta^{a0}\; +\; \eta^{0a})\, .\, \omega\, .\, k_a\; +\; \eta^{00}\, .\, \omega^2\; -\; m^2\}\, .\, \phi\; =\; 0$$

et, plus simplement ici :

$$\forall\, \phi\; :\; \{\eta^{ab}\, .\, k_a\, .\, k_b\; +\; \eta^{00}\, .\, \omega^2\; -\; m^2\}\, .\, \phi\; =\; 0$$

En rétablissant la présence des constantes universelles c et $\hbar$, il devient aisé de constater que la somme entre les parenthèses est une illustration particulière de l'Equ.(27) donnant la forme polynomiale de degré deux écrite en fonction des trois composantes spatiales du vecteur d'onde (car ici : a, b $=$ 1, 2, 3 et la convention d'Einstein sur les sommes de termes indiciés s'applique) :

$$\Lambda({}^{(4)}[\eta],\, {}^{(4)}\mathbf{k}) \;=\; \eta^{\chi\beta}\, .\, k_\chi\, .\, k_\beta \;-\; \frac{m^2\, .\, c^2}{\hbar^2} \tag{43}$$

Bien qu'elle ait été énoncée au départ pour des vecteurs de E(3, R) dont les composantes sont exprimées dans la base canonique Ω des $\mathbf{e}_\alpha$ pour $\alpha = 1,\, 2,\, 3$, comme suit :

$$\forall\, \mathbf{X}\, \in\, E(3,\, R)\; :\; \mathbf{X} = \sum_{a=1,2,3} X^a\, .\, \mathbf{e}_a$$

la théorie des produits vectoriels déformés et éventuellement décomposés non-trivialement qui a été exposée dans le document [[a]] aurait tout aussi bien pu l'être de façon équivalente sur l'espace isomorphe et dual E*(3, R) ou, pourquoi pas, sur E*(3, C). Il n'y a donc pas d'obstruction technique à préférer travailler sur l'espace dual ; ce fait justifie le formalisme de l'Equ.(38) que rien n'empêche ici de réécrire :

$$\exists\, ({}^{(3)}[P],\, {}^{(3)}\mathbf{z}^*)\, \in\, M(3,\, C)\, \times\, E^*(3,\, C)\, |\; : \tag{44}$$

$$|[{}^{(3)}\mathbf{k}^*,\, {}^{(3)}\mathbf{...}^*]_{[A]} >=\, {}^{(3)}[P]\, .\, |{}^{(3)}\mathbf{k}^* >\, +|{}^{(3)}\mathbf{z}^* >$$

Cette décomposition est irrémédiablement associée avec une polynomiale générique :

$$\Pi({}^{(3)}\mathbf{k}^*) \;=\; |_{[A]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{k}^*) \;-\; {}^{(3)}[P]| \;=\; \sum_{ab} d^{ab}\, .\, k_a\, .\, k_b \;+\; \sum_a d^a\, .\, k_a \;-\; |P| \tag{45}$$

D'une façon générale, deux formes polynomiales sont identiques/équivalentes si leurs termes d'un degré donné sont égaux/proportionnels. Cette éventualité peut survenir ici ($\Lambda \equiv \Pi$) ou -dit avec d'autres mots- la polynomiale Λ associée avec la formulation particulière de l'équation de Klein Gordon, l'Equ.(43), peut s'interpréter comme la preuve de l'existence d'un produit vectoriel déformé et décomposé non-trivialement selon l'Equ.(44) lorsque, simultanément :

$$\begin{aligned} a,\, b \,&=\, 1,\, 2,\, 3 \\ d^{ab} \,&=\, \eta^{ab} \\ d^{a} \,&=\, -\,(\eta^{a0} \,+\, \eta^{0a})\,.\,\omega \,=\, 0 \\ -\,|P| \,&=\, \eta^{00}\,.\,\omega^2 \,-\, m^2 \,=\, \omega^2 \,-\, m^2 \end{aligned} \tag{46}$$

Dans la théorie exposée dans [[a]], l'équation caractéristique de la fonction Π coincide avec le déterminant de sa Hessienne classique [3], [$_{\Pi}$H], et il existe effectivement au moins une décomposition non-triviale du genre indiqué ci-dessus, Equ.(44), si et seulement si ce déterminant n'est pas nul.

Quand tel est le cas, la fonction polynomiale Π possède un vecteur singulier [4], $\mathbf{s}^*$, unique à chaque instant ; de manière générale :

$$\begin{gathered} |_{\Pi}H| \,=\, |Hess_{(\mathbf{k}^*,\,0)}\Pi(\mathbf{k}^*)| \,\neq\, 0 \\ \Downarrow \\ \exists\,([P]_{|A|}\,,\, |_{\Pi(\mathbf{k}^*)}\mathbf{s}^* >=\, -Hess^{-1}_{(\mathbf{k}^*,0)}\Pi(\mathbf{k}^*)\,.\,|\mathbf{d}>) \\ |P|_{|A|} \,=<_{\Pi(\mathbf{k}^*)}\,\mathbf{s}^*\,,\, _{\Pi(\mathbf{k}^*)}\mathbf{s}^* >_{[_{\Pi}H]} \,+\, \frac{|_{\Pi}H|}{8} \\ [P]_{|A|} \,=\, |A|\,.\,\{[A]^t\,.\,[J]\}\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,Hess_{(\mathbf{k}^*,\,0)}\Pi(\mathbf{k}^*) \,+\, \frac{1}{|A|}\,.\,_{[J]}\Phi(_{\Pi(\mathbf{k}^*)}\mathbf{s}^*)\} \end{gathered} \tag{47}$$

avec :

$$|A| \,=\, \pm 1;\, |\mathbf{d}>=\, |d^1\,,\, d^2\,,\, d^3>;\, [_{\Pi}H] \,=\, [d^{ab}] \,+\, [d^{ab}]^t$$

Par conséquent, lorsque l'éventualité :

$$\Pi \,\equiv\, \Lambda \tag{48}$$

se réalise, il devient possible d'écrire :

$$|A| \,=\, \pm 1;\, \mathbf{d} \,\equiv\, \omega\,.\,(\eta^{10} \,+\, \eta^{01}\,,\, \eta^{20} \,+\, \eta^{02}\,,\, \eta^{30} \,+\, \eta^{03}) \,=\, (0,\,0,\,0) \,\equiv\, \mathbf{0},\, \forall\,\omega \tag{49}$$

$$[_{\Pi}H] \,=\, \{[g^{ab}] \,+\, [g^{ab}]^t\} \,=\, \{-Id_3 \,+\, (-Id_3)^t\} \,=\, -2\,.\,Id_3 \tag{50}$$

De sorte que :

$$|_{\Pi}H| \,=\, |Hess_{(\mathbf{k}^*,\,0)}\Pi(\mathbf{k}^*)| \,=\, -8 \,\neq\, 0 \tag{51}$$

Et qu'il existe une décomposition dont la partie principale s'écrit :

$$[P]_{|A|} \,=\, -|A|\,.\,[A]^t\,.\,[J] \tag{52}$$

Avec en particulier ici :

$$|P|_{|A|} \,=\, |A| \,=\, \pm 1 \tag{53}$$

3. sous-entendu : celle qui est définie dans un espace sans courbure, pour R = 0
4. signant une configutation particulière caractérisée par l'annulation simultanée de toutes les pentes.

Dans le cadre de volumes rapportés à une géométrie de Minkowski ayant la signature (+ - - -) *dont la partie spatiale est rapportable à une géométrie euclidienne* :

$$[A] = [J]\,;\, |A| = -1 \tag{54}$$

$$[P]_{-1} = Id_3$$

$$|^{(3)}P|_{-1} = -1 = \{m^2 - \omega^2\} = -(^{(3)}\mathbf{p}^*)^2$$

L'étude de cette géométrie - particulière, mais majoritaire quand on considère l'ensemble des volumes décrits par les filaments inter-galactiques sillonnant l'univers- livre deux résultats importants :

1. Un sens physique au déterminant de la décomposition non-triviale des produits vectoriels déformés du type donné par l'Equ.(44) : il est à la fois (i) le terme de degré zéro pour la polynomiale $\Pi \equiv \Lambda$ accompagnant cette décomposition ; et (ii) le carré euclidien de la quantité de mouvement spatiale et covariante $\mathbf{p}^*$ de l'onde décrite.
2. Le formalisme des décompositions des produits vectoriels en géométrie euclidienne tridimensionnelle :

$$|[\mathbf{k}^*, \,...]_{[J]}> = \mathbf{k}^* \wedge \,... = |...> + |\mathbf{reste}> \tag{55}$$

   Peut-être à un signe moins près qui n'aura pas d'importance ici parce qu'il peut s'incorporer en intervertissant l'ordre des arguments du produit vectoriel, c'est une forme particulière de l'Equ.(1) donnée sans sa démonstration explicite au début de ce document en citant [[b]].

   Comme je l'ai d'ailleurs déjà indiqué dans [b], cette limite euclidienne n'a de sens qu'en étendant la discussion physique à E*(3, C). Je remarque au passage que j'obtiens ici la même limite euclidienne que dans [b] bien que la démonstration y ait été basée sur l'élément de longueur *relativiste* et sur [[a]] sans jamais faire la moindre référence à l'équation de Klein-Gordon. Cette concordance constitue un argument plaidant en faveur de la cohérence des calculs et des raisonnements.

Lemme 1.1. *Sur l'équation de Klein-Gordon.*

L'équation historique de Klein-Gordon peut donner lieu et corps à une interprétation complète et cohérente dans le cadre de la théorie des produits vectoriels déformés et décomposés non-trivialement. Complète signifiant ici pour toutes les géométries planes ($R_{\alpha\beta} = 0$) incluant l'euclidienne tridimensionnelle stricte.

Pour qu'il en soit ainsi, à un instant donné d'une chronologie, le déterminant de la partie symétrique de l'inverse de la métrique spatiale locale ne doit pas être nul.

Quand cette condition sine qua non est remplie, cette équation historique contient tous les ingédients nécessaires justifiant l'existence de la relation générique écrite sur le dual E*(3, C).

$$\exists\,([P], \mathbf{z}^*) \in M(3, C) \times E^*(3, C)\,|\, : |[\mathbf{k}^*, \mathbf{...}^*]_{[A]}> = [P]\,.\,|\mathbf{...}^*> + |\mathbf{z}^*>$$

1. Le vecteur formé à partir des coefficients de degré un de la polynomiale de degrè deux caractérisant ce type de décomposition peut, lorsqu'il n'est pas nul, par exemple trouver son interprétation physique dans le cadre d'une analyse incluant l'effet Thirring-lense [[25] ; chapitre 30] parce qu'il semble correct de penser que toute onde massive se propage forcément quelque part dans l'univers à une certaine distance des concentrations de matières plus ou moins importantes et plus ou moins en rotation.

2. A la limite euclidienne de cette théorie (la TQE) :
   — Le déterminant de la décomposition non-triviale prend une signification physique claire. Il rend compte du carré de la norme euclidienne de la quantité de mouvement de l'onde (de la particule) étudiée ; voir l'Equ.(54).
   — Le produit vectoriel n'est plus déformé ou, formulé plus exactement, il l'est par la matrice [J] qui est un générateur du groupe cyclique C6 ;
   — Le produit vectoriel, contre-intuitivement, *ne se décompose pas trivialement* - voir l'Equ.(55)- et la théorie présentée dans ce document n'a d'intérêt que sur E*(3, C) en introduisant des bi-spineurs d'E. Cartan [[18]].
3. Une nouvelle analyse de l'équation de Klein-Gordon peut être conduite en confrontant les deux polynomiales qu'il est toujours possible de lui associer via celle d'une sphère unitaire de dimension quatre.

2 Analyse de l'équation de Klein-Gordon à l'aide des produits de Lie déformés.

2.1 Les identifications fondamentales.

Remarque 2.1. *La forme polynomiale κ.*

Comme suite au raisonnement tenu au cours de la remarque 1.4 il est possible de démontrer que [[c]] :

$$\begin{gathered}\kappa(\mathbf{a}) \\ = \\ <\mathbf{a}|\,.\,\{\{\alpha\,.\,Id_3\,+\,2\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{n},\,\mathbf{n})\,\pm\,2\,.\,\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{n})\}\,.\,|\mathbf{a}>\} \\ +2\,.\,|A|\,.\,\alpha\,.\,<\mathbf{s},\,\mathbf{a}>_{Id_3}\,+\alpha^2\,.\,(4\,+\,3\,.\,\alpha) \\ \forall\,\mathbf{a}\,\in\,E(3,\,C)\end{gathered} \tag{56}$$

avec, pour rappel :

$$\alpha\,=\,(\eta^0)^2\,-\,1\,=\,-||^{(3)}\mathbf{n}||^2\,=\,-\frac{c^2}{E^2}\,.\,||^{(3)}\mathbf{p}||^2\,=\,-\frac{||^{(3)}\mathbf{p}||^2}{m^2\,.\,c^2\,+\,||^{(3)}\mathbf{p}||^2} \tag{57}$$

Cette relation résultant d'une combinaison des Equ.(24), (32), (33) et (37).

Remarque 2.2. *Les identifications.*

En supposant simplement l'existence d'un scalaire Ψ tel que :

$$\mathbf{a}\,=\,\Psi\,.\,\mathbf{k}^*,\;\Psi\,\neq\,0 \tag{58}$$

il devient possible de comparer les polynomiales $\Lambda(\,^{(4)}[\mathrm{G}]^{-1},\,^{(4)}\mathbf{k}^*)$ et $\kappa(^{(3)}\mathbf{a})$:

$$\begin{gathered}\Lambda(^{(4)}[G]^{-1},\,^{(4)}\mathbf{k}^*) \\ = \\ g^{\chi\beta}\,.\,k_\chi\,.\,k_\beta\,-\,\frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2} \\ = \\ <\Psi\,.\,^{(3)}\mathbf{k}^*|\,.\,\{\{\alpha\,.\,Id_3\,+\,2\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{n},\,\mathbf{n})\,\pm\,2\,.\,\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,_{[J]}\Phi(\mathbf{n})\}\,.\,|\Psi\,.\,^{(3)}\mathbf{k}^*>\}\end{gathered} \tag{59}$$

$$+2\,.\,|A|\,.\,\alpha\,.\,<\mathbf{s},\,\Psi\,.\,{}^{(3)}\mathbf{k}^*>_{Id_3}\,+\alpha^2\,.\,(4\,+\,3\,.\,\alpha)$$
$$=$$
$$\kappa(\Psi\,.\,{}^{(3)}\mathbf{k}^*)$$

Il en découle une série d'identifications dont la portée physique apparait être fondamentale :

— Au niveau des matrices :

$$^{(3)}[G]_{\pm}^{-1}\,=\,\Psi^2\,.\,\{\alpha\,.\,Id_3\,+\,2\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{n},\,\mathbf{n})\,\pm\,2\,.\,\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{n})\} \tag{60}$$

Cette métrique n'est pas systématiquement symétrique. Elle ne l'est que lorsque $\alpha\,+\,1\,=\,0$ ou, ce qui revient au même, lorsque $\eta^0\,=\,0$; dans ce cas :

$$^{(3)}[G]_{sym}^{-1}\,=\,\Psi^2\,.\,\{-Id_3\,+\,2\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{n},\,\mathbf{n})\} \tag{61}$$

— Au niveau des vecteurs :

$$k_0\,.\,{}^{(3)}\mathbf{g}\,=\,2\,.\,|A|\,.\,\Psi\,.\,\alpha\,.\,{}^{(3)}\mathbf{s}_\Lambda,\;|A|\,=\,\pm 1 \tag{62}$$

Avec le gyro-vecteur :

$$|\mathbf{g}>:\;(g^{01}\,+\,g^{10},\,g^{02}\,+\,g^{20},\,g^{03}\,+\,g^{30}) \tag{63}$$

— Au niveau des scalaires :

$$g^{00}\,.\,(k_0)^2\,-\,\frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}\,=\,\alpha^2\,.\,(4\,+\,3\,.\,\alpha) \tag{64}$$

2.2 Conséquences sur les scalaires.

L'observation de l'Equ.(64) montre que certaines valeurs annulent le terme de droite :

$$\alpha\,\in\,\{-\frac{4}{3},\,0\}\,\Rightarrow\,||^{(3)}\mathbf{n}||\,\in\,\{\frac{2}{\sqrt{3}},\,0\}\,\Rightarrow\,g^{00}\,.\,(k_0)^2\,-\,\frac{m^2\,.\,c^2}{\hbar^2}\,=\,0 \tag{65}$$

Remarque 2.3. *Quand α est nul.*

Lorsque le coefficient α s'annule, le gyro-vecteur aussi :

$$\alpha\,=\,0\,\Rightarrow\,||^{(3)}\mathbf{n}||\,=\,0\,;\;{}^{(3)}\mathbf{g}\,=\,{}^{(3)}\mathbf{0} \tag{66}$$

et la métrique revêt le formalisme particulier :

$$^{(3)}[G(\alpha\,=\,0)]_{\pm}^{-1}\,=\,2\,.\,\Psi^2\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{n},\,\mathbf{n})\,\pm\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{n})\} \tag{67}$$

L'agglomération de ces résultats partiels permet de découvrir que la métrique spatio-temporelle associée à un vecteur $\mathbf{n}$ isotropique est représentée par plusieurs sous-ensembles de matrices :

$$^{(4)}[G]^{-1}\,=\,\begin{vmatrix} \frac{m^2\,.\,c^2}{k_0\,.\,\hbar^2} & <^{(3)}\,\mathbf{g}(\rightarrow)| \\ |^{(3)}\mathbf{g}(\downarrow)> & 2\,.\,\Psi^2\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{n},\,\mathbf{n})\,\pm\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{n})\} \end{vmatrix} \tag{68}$$

avec :

$$\mathbf{g}\,=\,\mathbf{g}(\rightarrow)\,+\,\mathbf{g}(\downarrow)\,=\,\mathbf{0} \tag{69}$$

La composante géométrique positionnés dans le coin Nord-Ouest de cette matrice représente le carré d'un ratio entre une quantité de mouvement de type *matériel* et d'une quantité de mouvement de type *ondulatoire*. La métrique inverse associée avec ces situations semblent rendre naturellement compte de la *dualité matière - onde*. Je sous-entend par là : si l'énergie est ondulatoire par essence mais capable de se matérialiser sous certaines conditions, le dénominateur n'est jamais nul tandis que le numérateur peut l'être ... justement lorsque m = 0.

Remarque 2.4. *Quand α vaut moins quatre tiers.*

$$\alpha = -\frac{4}{3}$$

implique au niveau des vecteurs :

$$k_0 \, . \, ^{(3)}\mathbf{g} = -|A| \, . \, \frac{8 \, . \, \Psi}{3} \, . \, ^{(3)}\mathbf{s}_\Lambda, \; |A| = \pm 1 \tag{70}$$

Et au niveau des métriques :

$$^{(3)}[G]_{\pm}^{-1} = \Psi^2 \, . \, \{-\frac{4}{3} \, . \, Id_3 + 2 \, . \, T_2(\otimes)(\mathbf{n}, \, \mathbf{n}) \pm i \, . \, \frac{2}{\sqrt{3}} \, . \, _{[J]}\Phi(\mathbf{n})\} \tag{71}$$

A cet endroit du niveau de développement de ce travail je ne peux pas aller plus loin. Les résultats généraux qui seront acquis plus tard dans ce document, par exemple l'Equ.(146), permettront cependant de prouver que lorsque l'inverse de la métrique donnée par l'Equ.(71) est dégénérée :

$$E^2 = \pm \frac{1}{X} \, . \, E_0^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \, . \, E_0^2$$

Par conséquent, les situations particulières abordées ici correspondent alors à :

$$E^2(\alpha = -\frac{4}{3}) = \pm i \, . \, \frac{\sqrt{3}}{2} \, . \, E_0^2$$

2.3 Conséquences sur les vecteurs.

Remarque 2.5. *Un lien avec le principe de moindre action.*

Sauf lorsque le coefficient α s'annule, le gyro-vecteur a la même porteuse que le vecteur singulier de la polynomiale $\Lambda \equiv \kappa$. Ce qui permet d'introduire une thématique importante et propre à cette approche théorique ; à savoir : puisque le vecteur singulier signe l'annulation simultanée des pentes de la polynomiale, il correspond à une minimisation des variations du vecteur d'onde, donc - par ricochet, via la constante de Planck- à une minimisation des variations de la quantité de mouvement et des forces qui s'exercent ici et maintenant sur l'onde massive de Klein-Gordon. La direction porteuse du vecteur singulier indique la ligne de moindre effort. Elle devrait rendre compte de l'écoulement du mouvement. Cette analyse mathématique donne ainsi un rôle physique essentiel au gyro-vecteur. Ce fait devrait avoir d'importantes conséquences dans l'étude de l'effet Thirring-Lense.

Remarque 2.6. *Existence d'une contrainte sur le vecteur singulier.*

Par ailleurs et de façon générale pour les polynomiales propres :

$$|\mathbf{s}_\Lambda >= -[Hess_{(\mathbf{k}^*, \, 0)}\Lambda(\mathbf{k}^*)]^{-1} \, . \, |\mathbf{d} >$$

Dans le cas précis se focalisant sur l'équation de Klein-Gordon :

$$\mathbf{d} = -k_0 \, . \, \mathbf{g}, \; [Hess_{(\mathbf{k}^*, \, 0)}\Lambda(\mathbf{k}^*)] = \{^{(3)}[G]^{-1} + (^{(4)}[G]^{-1})^t\}$$

Par conséquent :

$$|\mathbf{s}_\Lambda >= k_0 \, . \, \{^{(3)}[G]^{-1} + (^{(4)}[G]^{-1})^t\}^{-1} \, . \, |\mathbf{g} >$$

La confrontation avec l'Equ.(62) -rappel :

$$k_0 \, . \, ^{(3)}\mathbf{g} = 2 \, . \, |A| \, . \, \Psi \, . \, \alpha \, . \, ^{(3)}\mathbf{s}_\Lambda, \; |A| = \pm 1$$

fournit alors une contrainte claire sur le gyro-vecteur et donc indirectement sur le vecteur singulier ; à savoir :

$$k_0 \,.\, |^{(3)}\mathbf{g}>= 2 \,.\, |A| \,.\, \Psi \,.\, \alpha \,.\, k_0 \,.\, \{^{(3)}[G]^{-1} + (^{(4)}[G]^{-1})^t\}^{-1} \,.\, |\mathbf{g}>, \; |A| = \pm 1$$

ou encore, quelle que soit la pulsation $\omega = \mathrm{k}_0$ et aussi longtemps que le coefficient α n'est pas nul (sans oublier que $|\mathrm{A}| = \pm\, 1$) :

$$\{\{^{(3)}[G]^{-1} + (^{(4)}[G]^{-1})^t\}^{-1} - \frac{1}{2 \,.\, |A| \,.\, \Psi \,.\, \alpha} \,.\, Id_3\} \,.\, |^{(3)}\mathbf{g}>= |\mathbf{0}>, \; \alpha \neq 0 \quad (72)$$

Il sera possible de montrer ultérieurement que cette contrainte révèle l'existence d'une involution induite par la déformation du produit vectoriel ; rappel : cette déformation se laisse concrètement représenter par la matrice [A].

2.4 Conséquences sur les matrices.

Remarque 2.7. *Un lien avec les métriques construites sur des aires en évolution.*

Il faut rappeler à cet endroit que les identifications proposées concernent des polynomiales Λ et κ propres ; ce qui veut dire que leurs hessiennes respectives (ici les mêmes) ne sont pas dégénérées ou, ce qui revient au même, que le déterminant de ces hessiennes n'est pas nul. En l'occurence dans le cas précis :

$$\begin{gathered} ^{(3)}[Hess_{\mathbf{k}^*}\Lambda(\mathbf{k}^*)] \\ = \\ ^{(3)}[G]^{-1} + (^{(4)}[G]^{-1})^t \\ = \\ \Psi^2 \,.\, \{2 \,.\, \alpha \,.\, Id_3 + 4 \,.\, T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{n}, {}^{(3)}\mathbf{n})\} \\ = \\ 2 \,.\, \Psi^2 \,.\, \{\frac{m \,.\, c^2}{E} \,.\, Id_3 + \frac{2 \,.\, c^2}{E^2} \,.\, T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{p}^*, {}^{(3)}\mathbf{p}^*)\} \end{gathered} \quad (73)$$

Cette expression s'obtient en réinjectant les valeurs physiques du coefficient α et des composantes du vecteur $\mathbf{n}$ obtenues dans la discussion tenue après l'Equ.(28). Dans le cadre de cette étude centrée sur l'équation de Klein-Gordon, le lemme suivant peut être énoncé :

Lemme 2.1. *Les métriques basées sur les aires en évolution.*

La partie symétrique des parties spatiales des métriques peuvent s'interpréter dans le cadre balisé par le travail précurseur d'E. Cartan consigné dans [[26] ; 1933] expliquant comment des aires en évolution génèrent des métriques.

Remarque 2.8. *Un calcul générique qui sera fort utile ensuite.*

Soit à calculer en général :

$$\begin{gathered} |\beta \,.\, Id_3 + T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{M}^*, {}^{(3)}\mathbf{M}^*) + {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}^*)| \\ = \\ \begin{vmatrix} \beta + m_x^2 & m_x \,.\, m_y - Z & m_x \,.\, m_z + Y \\ m_x \,.\, m_y + Z & \beta + m_y^2 & m_x \,.\, m_y - X \\ m_x \,.\, m_z - Y & m_y \,.\, m_z + X & \beta + m_z^2 \end{vmatrix} \\ = \end{gathered} \quad (74)$$

$$\beta^3 + [(m_x^2 + m_y^2 + m_z^2) + (X^2 + Y^2 + Z^2)] . \beta + (m_x . X + m_y . Y + m_z . Z)^2$$
$$=$$
$$\beta^3 + [||\mathbf{M}||^2 + ||\mathbf{N}||^2] . \beta + (\mathbf{M} . \mathbf{N})^2$$

avec :

$$\mathbf{M}^* : (m_x, m_y, m_z), \mathbf{N}^* : (X, Y, Z)$$

Remarque 2.9. *Le déterminant des hessiennes de la polynomiale Λ.*

Le calcul de la remarque précédente trouve une application immédiate dans celui des déterminants des hessiennes des diverses représentations de la hessienne de la polynomiale Λ associée avec l'équation de Klein-Gordon. De fait, en posant simplement :

$$\beta = \frac{2 . \Psi^2 . m . c^2}{E}$$
$$\mathbf{M} = \frac{2 . \Psi . m . c}{E} . \mathbf{p}^*$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{0}, E \neq 0$$

le calcul livre :

$$|^{(3)}Hess_{\mathbf{k}^*}\Lambda(\mathbf{k}^*)|$$
$$=$$
$$\{\frac{2 . \Psi^2 . m . c^2}{E}\} . \{\{\frac{2 . \Psi^2 . m . c^2}{E}\}^2 + (\frac{2 . \Psi . m . c}{E} . \mathbf{p}^*)^2\}$$

D'où il devient facile de comprendre que, sauf pour les masses nulles (m $=$ 0), les hessiennes ne sont jamais dégénérées. Elles se laissent donc inverser.

Remarque 2.10. *Autres calculs fort utiles.*

De simples manipulations fournissent les relations :

—
$$T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{N}) - T_2(\otimes)(\mathbf{N}, \mathbf{M}) = {}_{[J]}\Phi(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}) \tag{75}$$

—
$$T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) . {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) = T_2(\otimes)(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}, \mathbf{M}) \tag{76}$$

—
$${}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) . T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = T_2(\otimes)(\mathbf{M}, -\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}) \tag{77}$$

—
$$T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) . {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) + {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) . T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) \tag{78}$$
$$=$$
$$T_2(\otimes)(\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}, \mathbf{M}) - T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M} \wedge \mathbf{N})$$
$$=$$
$${}_{[J]}\Phi((\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}) \wedge \mathbf{M})$$
$$=$$
$$||\mathbf{M}||^2 . {}_{[J]}\Phi(\mathbf{N}) - <\mathbf{M}, \mathbf{N}>_{Id_3} . {}_{[J]}\Phi(\mathbf{M})$$

—
$${}_{[J]}\Phi^2(\mathbf{M}) = T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) - ||\mathbf{M}||^2 . Id_3 \tag{79}$$

—
$$T_2^2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) = ||\mathbf{M}||^2 . T_2(\otimes)(\mathbf{M}, \mathbf{M}) \tag{80}$$

Lemme 2.2. *Si les vecteurs **M** et **N** sont proportionnels, alors les matrices apparaissant dans les Equ.(75) à (78) s'annulent.*

Remarque 2.11. *Structure multiplicative.*

Pour un argument $\mathbf{M}$ donné, l'ensemble $\{[0], \mathrm{Id}_3, \mathrm{T}_2, \Phi\}$ est équipé de la structure multiplicative suivante :

$$\begin{array}{cc} \mathbf{m} & \begin{array}{ccc} Id_3 & T & \Phi \end{array} \\ \begin{array}{c} Id_3 \\ T \\ \Phi \end{array} & \begin{bmatrix} Id_3 & T & \Phi \\ T & ||\mathbf{m}||^2 . T & [0] \\ \Phi & [0] & T - ||\mathbf{m}||^2 . Id_3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Remarque 2.12. *Retour sur le vecteur singulier.*

Il convient justement maintenant de calculer l'inverse de la Hessienne pour pouvoir poursuivre l'exploration. Il semble raisonnable de présumer du formalisme de l'inverse et d'écrire :

$$\{^{(3)}[G]^{-1} + (^{(4)}[G]^{-1})^t\}^{-1} = \frac{1}{\Psi^2} . \{\chi . Id_3 + \delta . T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{n}, {}^{(3)}\mathbf{n})\}$$

Par suite il convient de valider :

$$Id_3 = \{2 . \alpha . Id_3 + 4 . T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{n}, {}^{(3)}\mathbf{n})\} . \{\chi . Id_3 + \delta . T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{n}, {}^{(3)}\mathbf{n})\}$$

Ce qui revient à vérifier (voir la table de la structure multiplicative) :

$$Id_3 = 2 . \alpha . \chi . Id_3 + (2 . \delta . \alpha + 4 . \chi + 4 . \delta . ||\mathbf{n}||^2) . T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{n}, {}^{(3)}\mathbf{n})$$

L'inversibilité ne pouvant s'envisager que lorsque le coefficient α n'est pas nul, il devient possible de déduire d'abord :

$$\chi = \frac{1}{2 . \alpha}$$

Par ailleurs, le second terme s'annule lorsque :

$$2 . \delta . (\alpha + 2 . ||\mathbf{n}||^2) = -4 . \chi = -\frac{2}{\alpha}$$

soit, à cause de l'Equ.(57) :

$$||\mathbf{n}||^2 + \alpha = 0, \alpha \neq 0$$

lorsque :

$$\delta . ||\mathbf{n}||^2 = -\frac{1}{\alpha}$$

Le formalisme présupposé n'existe donc que si le vecteur $\mathbf{n}$ n'est pas isotropique, ce qui est toujours le cas dès le moment où le coefficient α ne s'annule pas ; dans ces circonstances :

$$\{^{(3)}[G]^{-1} + (^{(4)}[G]^{-1})^t\}^{-1} = \frac{1}{2 . \alpha . \Psi^2} . \{Id_3 - \frac{1}{||\mathbf{n}||^2} . T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{n}, {}^{(3)}\mathbf{n})\}$$

La table multiplicative permet de réaliser alors que cet inverse vaut :

$$\{^{(3)}[G]^{-1} + (^{(4)}[G]^{-1})^t\}^{-1} = -\frac{1}{2 . \alpha . \Psi^2 . ||\mathbf{n}||^2} . {}_{[J]}\Phi^2(\mathbf{n}) \tag{81}$$

L'équation précédente peut s'injecter dans L'Equ.(72) ; ce qui fournit, avec (rappel) $|\mathrm{A}| = \pm 1$:

$$\{_{[J]}\Phi^2(\frac{\mathbf{n}}{||\mathbf{n}||}) + \frac{\Psi}{|A|} . Id_3\} . |^{(3)}\mathbf{g} >= |\mathbf{0}> \tag{82}$$

Lemme 2.3. *Sur le vecteur singulier des ondes de Klein-Gordon portant une masse non nulle.*

Ce qui veut finalement dire que le paramètre a priori arbitraire Ψ doit en réalité être, peut-être au signe moins près contenu dans la condition $|\mathrm{A}| = \pm 1$, une valeur propre du carré d'une matrice de rotation ayant pour argument la version normalisée du vecteur ${}^{(3)}\mathbf{n}$ qui n'est également rien d'autre que la version normalisée du vecteur représentant la quantité de mouvement spatiale ${}^{(3)}\mathbf{p}$; voir l'Equ.(28) et suivantes ainsi que les conséquences de son identification avec la relation de dispersion de la lumière dans le vide : l'Equ.(24).

$$ {}^{(3)}\mathbf{n} \, = \, \frac{c}{E} \, . \, {}^{(3)}\mathbf{p}^{*}, \; E \, \neq \, 0 \tag{83} $$

Cette réalité mathématique induit l'existence de valeurs propres (entre 0 et 3). Elle ouvre une réflexion sur l'interprétation à donner à l'Equ.(58) se trouvant à l'origine de la partie de ce travail destinée à analyser les identifications fondamentales entre deux polynomiales ; en l'occurence ici : Λ et κ, voir Equ.(59).

1. Soit l'onde étant unique, sa vitesse spatiale est donnée à un moment et à un endroit donnés. Dans ce cas la multiplicité éventuelle des valeurs propres signe forcément l'existence d'autant de familles de particules, chacune ayant une masse caractéristique.
2. Soit l'onde est multiple mais porte une particule d'un type donné de masse m et alors, dans ce cas, la multiplicité éventuelle des valeurs propres signifie celle de vitesses combinées à un moment et à un endroit donné.

Je ne suis pas encore en mesure de trancher clairement cette apparente dualité. Celle-ci évoque au passage deux thèmes brûlants de l'actualité physique : (i) la question de la masse des neutrinos et (ii) celle dite des trois générations de particules pour un type donné de particules.

Remarque 2.13. *Valeurs propres du carré de la matrice rotation.*

Je vais donc maintenant tenter de découvrir les valeurs propres du carré de la matrice rotation ayant la quantité de mouvement normalisée pour argument. Il convient de calculer en fait le discriminant suivant :

$$ |{}_{[J]}\Phi^{2}(\frac{\mathbf{n}}{||\mathbf{n}||}) \, + \, \frac{\Psi}{|A|} \, . \, Id_{3}| \, = \, 0 $$

qui, grâce à la table de multiplication de la remarque 2.11, se laisse mettre sous la forme :

$$ |T_{2}(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{n}, \, {}^{(3)}\mathbf{n}) \, - \, (||\mathbf{n}||^{2} \, - \, \frac{\Psi}{|A|}) \, . \, Id_{3}| \, = \, 0 \tag{84} $$

La quantité générique (84.1) :

$$ \beta \, = \, ||\mathbf{n}||^{2} \, - \, \frac{\Psi}{|A|} $$

représente les diverses valeurs propres recherchées. Les calculs de la remarque 2.8 montrent qu'il revient au même de vouloir résoudre :

$$ (\beta^{2} \, + \, ||\mathbf{n}||^{2}) \, . \, \beta \, = \, 0 $$

et qu'il existe finalement deux grandes familles de solutions :

1. Compte tenu de l'Equ.(57) :

$$ \beta^{2} \, = \, \alpha \tag{85} $$

2. Trivialement :

$$\beta = 0 \tag{86}$$

Si je développe un peu ces constats :

1. Compte tenu de l'Equ.(57) :

$$||\mathbf{p}||^2 = ... \tag{87}$$

2. Trivialement :

$$||\mathbf{p}||^2 = \frac{\Psi}{|A|} \cdot \frac{E}{c} \tag{88}$$

Pour chaque valeur du paramètre Ψ il y a donc quatre valeurs permises pour le carré de la norme euclidienne spatiale de la quantité de mouvement.

Pour les besoins futurs de cette thèse (voir la section4.5 consacrée à la question du lien entre les propos tenus ici et la notion de corde élastique), je remplace ici le vecteur $\mathbf{n}$ par la quantité de mouvement spatiale $\mathbf{p}$ grâce à l'Equ.(83) ; ce qui transforme l'Equ.(84) en :

$$|\frac{c^2}{E^2} \cdot T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{p}^*, {}^{(3)}\mathbf{p}^*) - (\frac{c^2}{E^2} \cdot ||\mathbf{p}^*||^2 - \frac{\Psi}{|A|}) \cdot Id_3| = 0$$

Ou encore :

$$|T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{p}^*, {}^{(3)}\mathbf{p}^*) - (||\mathbf{p}^*||^2 - \frac{E^2}{c^2} \cdot \frac{\Psi}{|A|}) \cdot Id_3| = 0$$

Cette formulation met bien en exergue le côté trivial des solutions de la seconde famille puisqu'elles aboutissent à écrire une tautologie ; à savoir :

$$|T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{p}^*, {}^{(3)}\mathbf{p}^*)| = 0$$

La première famille peut aussi s'ecrire :

$$|T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{p}^*, {}^{(3)}\mathbf{p}^*) - \frac{E^2}{c^2} \cdot \beta(84.1) \cdot Id_3| = 0$$

3 Analyse des moments angulaires.

3.1 La notion de moment angulaire déformé.

Remarque 3.1. *Les raisons de son existence.*

La très célèbre relation de Planck-Einstein reliant la quantité de mouvement et le vecteur d'onde ($\mathbf{p}^* = \hbar.\mathbf{k}^*$), alliée aux Equ.(38) et (58), induit une relation matricio-vectorielle surprenante :

$$\Psi \cdot |[\mathbf{k}^*, ...]_{[A]} >= |A| \cdot \{[A]^t \cdot [J]\} \cdot [_{\kappa(\mathbf{k}^*)}K] \cdot |... > + |\mathbf{reste}>$$

qui semble indiquer l'existence possible de moments angulaires déformés chaque fois que le vecteur **...** est une position spatiale $\mathbf{x}^*$; plus précisément :

$$\Psi \cdot |[\mathbf{p}^*, \mathbf{x}]_{[A]} >= |A| \cdot \hbar \cdot \{[A]^t \cdot [J]\} \cdot [_{\kappa(\mathbf{k}^*)}K] \cdot |\mathbf{x} > + \hbar \cdot |\mathbf{reste}> \tag{89}$$

Remarque 3.2. *Son traitement au sein de la théorie des produits déformés.*

Pour autant, un des résultats élémentaires de cette théorie [[d] ; remarque 1.7, p.8, sans numéro] se traduit par :

$$|[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >= [A]^t \,.\, [J] \,.\, |\mathbf{q}_1 \,\wedge\, \mathbf{q}_2 > \,;\; |A| \,=\, \pm 1 \tag{90}$$

avec :

$$[J] \,=\, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} ;\; [J]^t \,=\, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{91}$$

Et, puisque les matrices [J] et [A] sont inversibles, par :

$$|\mathbf{q}_1 \,\wedge\, \mathbf{q}_2 >= \{[A]^t \,.\, [J]\}^{-1} \,.\, |[\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2]_{[A]} >$$

Par ailleurs :

$$[P_{I\,ou\,II\,|A|}] \,=\, \{[A]^t \,.\, [J]\} \,.\, [K_{I\,ou\,II\,|A|}]$$

avec :

— Pour les noyaux de type I, voir [[a] ; p. 25] ou Equ.(39) ci-dessus :

$$[_{\kappa(\mathbf{a})}K]_{|A|} \,=\, \frac{1}{2} \,.\, [Hess_{(\mathbf{a},0)}\kappa(\mathbf{a})] \,+\, \frac{1}{|A|} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}_{\kappa}\mathbf{s}) \,;\; |A| \,=\, \pm 1$$

— Pour les noyaux type II, il existe une paire de vecteurs $(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$ dans E(3, C) $\times$ E(3, C) telle que :

$$[K_{II}] \,=\, \frac{1}{2} \,.\, \{T_2(\otimes)(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \,+\, T_2^t(\otimes)(\mathbf{a},\, \mathbf{b})\} \,+\, {}_{[J]}\Phi(\frac{1}{2} \,.\, ({}^{(3)}\mathbf{a} \,\wedge\, \mathbf{b})) \tag{92}$$

Finalement :

$$|\mathbf{q}_1 \,\wedge\, \mathbf{q}_2 >= [K_{I\,ou\,II}] \,.\, |\mathbf{q}_2 > + \{[A]^t \,.\, [J]\}^{-1} \,.\, |\mathbf{reste} > \tag{93}$$

En posant en particulier ici :

$$\mathbf{q}_1 \,=\, \mathbf{p}^*$$

et :

$$\mathbf{q}_2 \,=\, \Psi \,.\, \mathbf{x}^*$$

Alors il devient clair que :

$$|\mathbf{p}^* \,\wedge\, \mathbf{x}^* >= |A| \,.\, \hbar \,.\, [_{\kappa(\mathbf{k}^*)}K] \,.\, |\mathbf{x}^* > + \hbar \,.\, \{[A]^t \,.\, [J]\}^{-1} \,.\, |\mathbf{reste} > \tag{94}$$

Cette première démarche permet a minima de retrouver l'expression du moment angulaire classique, à un signe moins près et à un facteur près égal au paramètre Ψ. Pour autant, elle remplace la déformation par une somme de deux termes dont la signification ne saute pas aux yeux. L'étude des noyaux de type I va éclairer un peu la scène.

3.2 La notion de spin orbital dans la théorie.

Remarque 3.3. *Le cas des noyaux de type I.*

Dans ce cas :

$$|\mathbf{p}^* \,\wedge\, \mathbf{x}^* >$$
$$=$$
$$|A| \,.\, \hbar \,.\, \{\frac{1}{2} \,.\, [Hess_{(\mathbf{a},0)}\kappa(\mathbf{a})] \,+\, \frac{1}{|A|} \,.\, {}_{[J]}\Phi({}_{\kappa}\mathbf{s})\} \,.\, |\mathbf{x}^* > + \hbar \,.\, \{[A]^t \,.\, [J]\}^{-1} \,.\, |\mathbf{reste} >$$

$$=$$

$$\{\frac{|A|\,.\,\hbar}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\kappa(\mathbf{a})] + \frac{1}{|A|}\,.\,{}_{[J]}\Phi(|A|\,.\,\hbar\,.\,{}_{\kappa}\mathbf{s})\}\,.\,|\mathbf{x}^* > \,+ \hbar\,.\,\{[A]^t\,.\,[J]\}^{-1}\,.\,|\mathbf{reste} >$$

$$=$$

$${}_{[J]}\Phi(\hbar\,.\,{}_{\kappa}\mathbf{s})\,.\,|\mathbf{x}^* > \,+\, \{\frac{|A|\,.\,\hbar}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\kappa(\mathbf{a})]\,.\,|\mathbf{x}^* > \,+ \hbar\,.\,\{[A]^t\,.\,[J]\}^{-1}\,.\,|\mathbf{reste} >\}$$

$$=$$

$$|\hbar\,.\,({}_{\kappa}\mathbf{s} \wedge \mathbf{x}^*) > \,+\, \{\frac{|A|\,.\,\hbar}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\kappa(\mathbf{a})]\,.\,|\mathbf{x}^* > \,+ \hbar\,.\,\{[A]^t\,.\,[J]\}^{-1}\,.\,|\mathbf{reste} >\}$$

Comme indiqué au cours de la remarque 2.5, le vecteur singulier de la polynomiale $\kappa \equiv \Lambda$ indique la direction de moindre effort. Par conséquent, relisant le travail de Dyson Freeman [5] dans [[21] ; §2.5, p. 15, surtout (42)] et comprenant que tout moment angulaire comporte deux parties : la composante classique et la composante du spin orbital, la relation trouvée ci-dessus devient parfaitement limpide. Le terme en bleu est la partie classique du moment angulaire et la partie en noir représente la partie relevant d'un spin orbital.

$$\mathbf{J}^*_{classique} = \mathbf{x}^* \wedge \hbar\,.\,{}_{\kappa}\mathbf{s} \tag{95}$$

$$\mathbf{J}^*_{spin-orbital} \tag{96}$$

$$=$$

$$-\hbar\,.\,\{\frac{|A|}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\kappa(\mathbf{a})]\,.\,|\mathbf{x}^* > \,+ \{[A]^t\,.\,[J]\}^{-1}\,.\,|\mathbf{reste} >\}$$

$$\equiv$$

$$\frac{|A|}{2}\,.\,\sigma(Dirac)$$

$$\mathbf{J}^*_{total} = \mathbf{x}^* \wedge \hbar\,.\,\mathbf{k}^* = \mathbf{J}^*_{classique} + \mathbf{J}^*_{spin-orbital}$$

Je suis en mesure de compléter cette sous-section en prouvant que l'expression du spin orbital de cette théorie définit une classe d'équivalence et qu'elle permet de générer une métrique ; les travaux d'E. Cartan consignés dans [[18]] jouent un rôle crucial dans cette démonstration.

3.3 Le cadre euclidien tridimensionnel.

Remarque 3.4. *Les noyaux de type I en géométrie euclidienne tridimensionnelle.*

Je reviens maintenant sur le début de cette thèse, en particulier sur l'Equ.(55) que j'applique maintenant à la notion de moment angulaire pour en tester la cohérence, la plausibilité et les conséquences. Comme indiqué dans [[b]], l'aplication stricte des résultats de la méthode intrinsèque expliquée dans [a] livre les relations contre-intuitives :

$$-\mathbf{J}^*_{total} = \mathbf{p}^* \wedge \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^* + \mathbf{Z}^*\;;\; {}^{(3)}\mathbf{Z}^* \perp {}^{(3)}\mathbf{x}^*\;;\; ({}^{(3)}\mathbf{x}^*)^2 = 0 \tag{97}$$

$$\mathbf{J}^*_{total} = \mathbf{x}^* \wedge \mathbf{p}^* = \mathbf{p}^* + \mathbf{z}^*\;;\; {}^{(3)}\mathbf{z}^* \perp {}^{(3)}\mathbf{p}^*\;;\; ({}^{(3)}\mathbf{p}^*)^2 = 0 \tag{98}$$

donnant de la géométrie euclidienne tridimensionnelle une représentation l'identifiant avec un monde de paires de spineurs $(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}^*)$.

Or une décomposition quelconque d'un moment angulaire se traduit en général par :

$$-|\mathbf{J}_{total} >= \{[A]^t\,.\,[J]\}^{-1}\,.\,\{[P]\,.\,|\mathbf{x}^* > \,+ |\mathbf{Z}^* >\} \tag{99}$$

5. Un des fondateurs de la chromo-dynamique quantique avec Feymann et de nombreux autres.

Par conséquent, pour les ondes de Klein-Gordon ayant un noyau de type I il conviendrait d'écrire lorsque la configuration locale semble euclidienne :

$$|\mathbf{Z}^* >= \{[A]^t \,.\, [J]\}^{-1} \,.\, |\mathbf{Z}^* >$$

et :

$$[K_I] \,.\, |\mathbf{x}^* >= |\mathbf{x}^* >$$

Remarque 3.5. *Analyse de la première relation de cohérence euclidienne.*

Lorsque la géométrie est euclidienne tridimensionnelle, le produit vectoriel est caractérisé par la matrice [A] = [J] et par le fait que |A| = |J| = -1 ; de sorte que la seconde des deux identités devient une tautologie (une évidence).

Remarque 3.6. *Conséquence de la seconde relation de cohérence euclidienne.*

Pour ce qui concerne la seconde des relations de cohérence euclidienne, et à partir du moment où la discussion peut effectivement être étendue sur E(3, C) [6], il convient :

1. de rappeler que le cadre de la discussion s'appuie sur l'hypothèse contenue dans les Equ.(58), (59) ; de sorte que la première des deux relations s'écrit aussi :

$$[K_{\Lambda,\, I}] \,.\, |\mathbf{x}^* >= |\mathbf{x}^* >$$

2. de tenir ensuite compte de l'Equ.(60) donnant une expression plus précise du noyau ; il se confond toujours avec les coefficients de degré deux de la polynomiale qu'on a sous la main et ici en particulier avec l'inverse de la partie spatiale de la métrique :

$$\Psi^2 \,.\, \{\alpha \,.\, Id_3 \,+\, 2 \,.\, T_2(\otimes)(\mathbf{n},\, \mathbf{n}) \,\pm\, 2 \,.\, \sqrt{1 \,+\, \alpha} \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{n})\} \,.\, |\mathbf{x}^* >= |\mathbf{x}^* >$$

$$\downarrow$$

$$\{(\alpha \,.\, \Psi^2 \,-\, 1) \,.\, Id_3 \,+\, 2 \,.\, \Psi^2 \,.\, T_2(\otimes)({}^{(3)}\mathbf{n},\, {}^{(3)}\mathbf{n}) \,\pm\, {}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})\} \,.\, |\mathbf{x}^* >= |\mathbf{0}^* >$$

3. de calculer enfin les solutions du discriminant du système :

$$|(\Psi^2 \,.\, \alpha \,-\, 1) \,.\, Id_3 \,+\, 2 \,.\, \Psi^2 \,.\, T_2(\otimes)(\mathbf{n},\, \mathbf{n}) \,\pm\, \Psi^2 \,.\, {}_{[J]}\Phi(\mathbf{s})| \,=\, 0 \qquad (100)$$

Les calculs généraux faits au niveau de la remarque 2.8 permettent d'y parvenir sans trop d'effort ; en posant :

$$\beta \,=\, \Psi^2 \,.\, \alpha \,-\, 1$$

$$\mathbf{M} \,=\, \sqrt{2} \,.\, \Psi \,.\, \mathbf{n}$$

$$\mathbf{N} \,=\, \Psi^2 \,.\, {}_{\Lambda}\mathbf{s}$$

Il faut résoudre :

$$\beta^3 \,+\, (||\mathbf{M}||^2 \,+\, ||\mathbf{N}||^2) \,.\, \beta \,+\, (\mathbf{M} \,.\, \mathbf{N})^2 \,=\, 0$$

C'est-à-dire ici :

$$(\Psi^2 \,.\, \alpha \,-\, 1)^3 \,+\, (2 \,.\, \Psi^2 \,.\, ||\mathbf{n}||^2 \,+\, \Psi^4 \,.\, ||{}_{\Lambda}\mathbf{s}||^2) \,.\, (\Psi^2 \,.\, \alpha \,-\, 1) \,+\, 2 \,.\, \Psi^4 \,.\, (\mathbf{n} \,.\, {}_{\Lambda}\mathbf{s})^2 \,=\, 0$$

6. En clair : à partir du moment où la discussion ne se résume pas à la solution unique et sans intérêt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Il convient de rappeler à cet endroit l'Equ.(35) permettant l'élimination du vecteur singulier $\mathbf{s}$:

$$(\Psi^2 \,.\, \alpha - 1)^3 + (2 \,.\, \Psi^2 \,.\, ||\mathbf{n}||^2 + \Psi^4 \,.\, (\eta^0)^2 \,.\, ||\mathbf{n}||^2) \,.\, (\Psi^2 \,.\, \alpha - 1) + 2 \,.\, \Psi^4 \,.\, (\eta^0)^2 \,.\, ||\mathbf{n}||^4 \,=\, 0$$

et l'Equ.(37) autorisant l'élimination du paramètre η_0 et du vecteur $\mathbf{n}$:

$$(\Psi^2 \,.\, \alpha - 1)^3 + (-2 \,.\, \Psi^2 \,.\, \alpha - \Psi^4 \,.\, (\alpha + 1) \,.\, \alpha) \,.\, (\Psi^2 \,.\, \alpha - 1) - 2 \,.\, \Psi^4 \,.\, (\alpha + 1) \,.\, \alpha^2 \,=\, 0$$

Après un peu d'algèbre, j'aboutis à un polynome de degré trois relativement à la variable α :

$$\Psi^4 \,.\, (\Psi^2 \,+\, 2) \,.\, \alpha^3 \,+\, 6\, \Psi^4 \,.\, \alpha^2 \,-\, \Psi^2 \,.\, (\Psi^2 \,+\, 5) \,.\, \alpha \,+\, 1 \,=\, 0 \tag{101}$$

A ce stade de l'exploration théorique, il faut s'interroger sur la bonne façon de traiter et vouloir interpréter l'Equ.(101).

Remarque 3.7. *Analyse classique de la seconde relation de cohérence euclidienne.*

Sachant que le paramètre Ψ est pour le moment libre, je peux chercher à découvrir les valeurs du coefficient α en fonction de celles de ce paramètre et il en résultera en général des triplets de solutions dans l'ensemble des nombres complexes (théorème de D'Alambert). Compte tenu de la relation (rappel) :

$$a \,=\, 1,\, 2,\, 3 \,:\, \alpha_a \,=\, -||\mathbf{n}_a||^2 \,=\, -\frac{c^2}{E^2} \,.\, ||\mathbf{p}_a||^2$$

et du fait que la norme euclidienne spatiale de la quantité de mouvement est une quantité réelle positive ou nulle dans le cadre d'une analyse ultra-classique de cette équation, je recherche dans un premier temps les valeurs réelles négatives ou nulles du coefficient : $0 \geq \alpha$.

La suite de cette exploration va démontrer qu'il faudra envisager l'existence d'énergies transitoires imaginaires. Elles peuvent d'ailleurs apparaitre dans le cadre de la mécanique quantique ; par exemple lorsqu'il s'agit de décrire des transitions entre un niveau stable et un qui ne l'est pas ; voir [[05] ; tome I, complément H_{IV} ; pages 468-473].

3.4 L'exemple des neutrinos.

Remarque 3.8. *Conséquence de l'unicité des vitesses.*

L'analyse des résultats des expériences réalisées à ce jour [[28] ; §14.8 ; 2014] semblent indiquer que la vitesse de tous les neutrinos reste proche de celle de la lumière dans le vide quel que soit leur type χ : 1 = électronique, 2 = muonique ou 3 = taunique.

$$\forall\, \chi \,=\, 1,\, 2,\, 3,\, \forall\, a \,=\, 1,\, 2,\, 3 \,:\, p_{a,\,\chi} \,=\, m_\chi \,.\, v_a \tag{102}$$
$$\mathbf{p}_\chi \,=\, m_\chi \,.\, \mathbf{v}_\chi \,;\, ||\mathbf{p}_\chi||^2 \,\sim\, m_\chi^2 \,.\, c^2$$

La relation de dispersion de la lumière dans le vide s'écrit, rappel de l'Equ.(24) :

$$\chi \,=\, 1,\, 2,\, 3 \,:\, E_\chi^2 \,=\, m_\chi^2 \,.\, c^4 \,+\, c^2 \,.\, ||\mathbf{p}_\chi||^2 \,\sim\, 2 \,.\, m_\chi^2 \,.\, c^4$$

Une analyse de ce résultat expérimental lorsque :

— (i) la relation de dispersion de la lumière dans le vide, Equ.(24), est supposée applicable à ces particules (parce que leur masse est nulle au sein du modèle standard) ;

— (ii) l'analyse que j'en fais est supposée vraie en géométrie euclidienne, donc l'Equ.(101) aussi,

indique que les trois racines devraient être à peu près égales entre elles et égales à moins un demi :

$$\chi\,=\,1,\,2,\,3\,:\,\alpha_\chi\,=\,-\frac{c^2}{E_\chi^2}\,.\,||\mathbf{p}_\chi||^2\,\sim\,-\frac{c^2}{2\,.\,m_\chi^2\,.\,c^4}\,.\,m_\chi^2\,.\,c^2\,=\,-0,5$$

C'est un des scénarios évoqués dans [[28]; p. 253]; dans le contexte de ce que la littérature nomme *le problème de l'ordonnancement hiérarchique des masses des neutrinos*, il correspond à un spectre dégénéré.

En explorant les racines du polynome en fonction de valeurs entières N croissantes pour le paramètre Ψ, il est possible de constater que des triplets de racines apparaissent; voir la Figure1. Comme indiqué plus haut, seules les racines négatives peuvent être retenues dans le cadre d'interprétation classique de cette discussion. Il est possible d'en induire que la valeur de Ψ compatible avec cette valeur se situe entre 3 et 4 mais probablement plus proche de 4 que de trois.

	coefficients du polynome de degré				valeurs des solutions en fonction de Ψ		
Ψ = ↓	c3	c2	c1	c0	alpha1	alpha2	alpha3
1	3	6	-6	1	-2,7665000	0,5457000	0,2208000
2	96	96	-36	1	-1,2956000	0,2653000	0,0303000
3	891	486	-126	1	-0,7389000	0,1852000	0,0082000
4	4608	1536	-336	1	-0,4847000	0,1483000	0,0030000
5	16875	3750	-750	1	-0,3498000	0,1262000	0,0013000
6	49248	7776	-1476	1	-0,2694000	0,1108000	0,0007000
7	122451	14406	-2646	1	-0,2173000	0,0992000	0,0004000
8	270336	24576	-4416	1	-0,1812000	0,0900000	0,0002000
9	544563	39366	-6966	1	-0,1549000	0,0825000	0,0001000
10	1020000	60000	-10500	1	-0,1045000	0,0985000	0,0001000
11	1800843	87846	-15246	1	-0,1196000	0,0708000	0,0001000
12	3027456	124416	-21456	1	-0,1072000	0,0661000	0,0000000

Figure 1 –

Remarque 3.9. *Analyse alternative de la seconde relation de cohérence euclidienne.*

Dans le cadre d'une analyse alternative de la théorie classique il est possible de supposer que la masse m apparaissant dans la relation de dispersion, Equ.(24), représente la masse apparente de la particule pour un observateur se déplaçant comme l'origine du référentiel; elle serait donc nulle pour les neutrinos et les masses recherchées seraient relatives et d'origine cinétique. La composante η^0 serait nulle et il faudrait alors se contenter d'écrire :

$$\chi\,=\,1,\,2,\,3\,:\,E_\chi^2\,=\,0\,.\,c^4\,+\,c^2\,.\,||\mathbf{p}_\chi||^2\,\sim\,m_\chi^2\,.\,c^4$$

Cette interprétation de la relation de dispersion aboutit à :

$$\chi\,=\,1,\,2,\,3\,:\,\alpha_\chi\,=\,-\frac{c^2}{E^2}\,.\,||\mathbf{p}_\chi||^2\,\sim\,-\frac{c^2}{m_\chi^2\,.\,c^4}\,.\,m_\chi^2\,.\,c^2\,=\,-1$$

La Fig.1 permet d'en induire que la valeur de Ψ compatible avec cette valeur alternative se situe entre 2 et 3.

Continuant à croire a priori que mon approche globale a du sens, je constate que l'Equ.(101) peut servir à déterminer les valeurs du paramètre Ψ. Pour un niveau d'énergie donné se traduisant par une valeur particulière du coefficient α, il existe au plus six valeurs acceptables pour le paramètre Ψ qui sont solutions du polynome de degré six :

$$\alpha^3 . \Psi^6 + (2 . \alpha^3 + 6 . \alpha^2 - \alpha) . \Psi^4 - 5 . \alpha . \Psi^2 + 1 = 0$$

Par exemple, l'injection de la valeur moins un (α = -1) livre quatre solutions imaginaires pures (Ψ = ± 0,7695.i ; Ψ = ± 0,536.i) et deux solutions réelles dont une seule est positive :

$$\alpha = -1 \Rightarrow \exists \Psi = 2,4247 > 0$$

En injectant la valeur moins un demi issue des réflexions classiques (voir ci-dessus), le résultat est du même type sauf que :

$$\alpha = -1/2 \Rightarrow \exists \Psi = 3,9164 > 0$$

Ces deux exemples confirment les estimations faites précédemment à l'aide de la Fig.1. Ils ne disent encore rien sur l'unicité ou non des masses des trois sortes de neutrinos.

L'existence du polynome (101) dans un contexte géométrique euclidien de dimension trois ouvre la voie à des solutions plus subtiles impliquant six valeurs pour le paramètre Ψ et trois pour le coefficient α. Par exemple :

— en reportant la valeur 3,9164 dans l'Equ.(101), celui-ci s'écrit :

$$4078,9830 . \alpha^3 + 1411,5602 . \alpha^2 - 311,9509 . \alpha + 1 = 0$$

Il a trois trois solutions réelles dont l'une, négative, vaut effectivement -0,5 tandis que les deux autres, positives, valent respectivement 0,1507 et 0,0033 mais ne peuvent pas s'interpréter dans un cadre classique.

— en reportant la valeur 2,4247 dans l'Equ.(101), celui-ci s'écrit :

$$272,3406 . \alpha^3 + 207,3878 . \alpha^2 - 63,9605 . \alpha + 1 = 0 \qquad (103)$$

Il a trois trois solutions réelles dont l'une, négative, vaut effectivement -1 tandis que les deux autres, positives, valent respectivement 0,222 et 0,0165 qui ne peuvent pas s'interpréter dans un cadre classique.

Pour autant, je démontre un peu plus loin dans ce document que les *métriques admissibles diagonales* de cette théorie se caractérisent forcément par cette valeur moins un du coefficient α ; voir la Rem.4.1, page 30, Equ.(108) et l'exemple 4.1. Or la métrique euclidienne de dimension trois appartient à ce sous-ensemble. La juxtaposition de ce résultat et de l'analyse alternative de la relation de dispersion plaide en faveur du fait que les masses des neutrinos illustrent un phénomène cinétique.

Remarque 3.10. *Quelques données expérimentales sur les neutrinos.*

Il reste à se poser une question, absolument essentielle, de savoir comment relier cette exploration théorique à la réalité physique expérimentale et aux résultats déjà acquis. L'absence de plus en plus probable de neutrino stérile confirme a contrario l'existence de seulement trois types de neutrinos (électronique, muonique et taunique). Les mixtes de masses réelles mesurées valent [[27]] :

$$m_{\nu_e} < 2,5\,eV \; ; \; m_{\nu_\mu} < 170\,keV \; ; \; m_{\nu_\tau} < 18,2\,MeV$$

Pour retrouver les masses pures des particules il faut en principe utiliser l'inverse de la matrice de Pontecorvo, Maki, Nakagawa et Sakata (dite PMNS dans la littérature) ; encore faut-il en connaitre la valeur des composantes. Le lectorat intéressé par ce sujet trouvera son bonheur en découvrant le quatorzième chapitre de la référence consacrée aux neutrinos et, en particulier le paragraphe dédié au mixage de ces particules [[28] ; §14.8 ; 2014]. Il y découvrira que dans le cadre d'un ordonnancement dit normal correspondant à $m_1 < m_2 < m_3$, les valeurs actuellement acceptées (2014) valent :

$$m_1 << m_2 \sim 0,0087\,eV \; ; \; m_3 \sim 0,050\,eV$$

$$\sum_a m_a < 0,23\,eV\,[BAO], < 0,66\,eV\,[[29]; PlanckColl].$$

4 Les métriques admissibles.

4.1 La métrique spatiale euclidienne dans cette théorie.

Cette sous-section démontre que la métrique spatiale euclidienne fait partie des métriques admissible de cette théorie.

Définition 4.1. *Métrique spatiale admissible.*

Les *métriques spatiales admissibles* de cette théorie se définissent au travers de l'Equ.(60).

Remarque 4.1. *L'inatteignable métrique euclidienne ?*

Dans un cadre euclidien tridimensionnel spatial qui serait immergé dans une géométrie de Minkowski de signature (+ - - -), la partie spatiale du tenseur métrique se laisserait en principe et a priori représenter par la matrice (3-3) de M(3, R) :

$$[G] = -Id_3$$

dont le déterminant vaudrait $|G^{-1}| = -1$.

Sachant que les *métriques admissibles* de cette théorie se définissent par :

$$^{(3)}[G]^{-1}_{\pm} = \Psi^2 . \{\alpha . Id_3 + 2 . T_2(\otimes)(\mathbf{n}, \mathbf{n}) \pm 2 . \sqrt{1+\alpha} . _{[J]}\Phi(\mathbf{n})\},$$

en première intention, il semble apparemment et trivialement possible de les identifier avec moins une fois la matrice identité Id_3 lorsque :

$$\mathbf{n} = \mathbf{0}, \; \Psi^2 . \alpha = -1 \tag{104}$$

Or, dans cette théorie, la simultanéité de ces deux conditions est rendue impossible par le respect obligatoire de l'Equ.(57). En effet, la nullité du vecteur **n** entraine celle la norme de ce vecteur et, par ricochet, celle du coefficient α.

A ce constat j'ajouterai les commentaires suivants :

— La première des deux exigences contenues dans l'Equ.(104) ($\mathbf{n} = \mathbf{0}$) indique que cette identification ne peut concerner que les particules dont la quantité de mouvement s'annule ($\mathbf{n} = \mathbf{0}$) ; voir l'Equ.(83). Pour les particules se déplaçant à la vitesse de la lumière, l'unique manière d'annuler la quantité de mouvement est de présumer qu'elles ont une masse nulle en géométrie euclidienne ; voir l'Equ.(102) pour ce qui concernerait (conditionnel) les neutrinos. Ce fait plaide en faveur d'un interprétation de la relation de dispersion dans le vide telle que je la propose au niveau de la remarque 2.8 et -pour les neutrinos- correspond à la situation classique historique telle qu'elle était avant la découverte expérimentale de l'existence de leurs masses [[30]].

Ce qui soulève aussi une double question de physique fondamentale : (i) celle de la dépendance de la masse d'une particule aux variations de la géométrie et (ii) celle de l'influence de la présence d'une masse sur la géométrie. Cette double interrogation trouve bien entendu une réponse essentielle au travers de l'oeuvre et des équations maitresses d'A. Einstein concernant la gravitation. Le comportement apparent des neutrinos invite à aller un cran plus loin en disant qu'ils sont des déformations codifiées et mobiles de la géométrie.

— Concernant la seconde exigence contenue dans l'Equ.(104), à supposer qu'elle puisse être traitée indépendamment de la première et en partant du principe intangible que l'une des valeurs pour le coefficient α doit être la valeur moins un demi conforme à l'analyse classique de la relation de dispersion, il faudrait l'écrire :

$$\alpha = -0,5 \Rightarrow \Psi^2 = 2 \tag{105}$$

Toujours concernant la seconde exigence contenue dans l'Equ.(104) mais en s'appuyant cette fois-ci sur une interprétation alternative ne justifiant la masse des neutrinos qu'au travers de leurs mouvements, le coefficient α doit valoir moins un et il faut écrire :

$$\alpha = -1 \Rightarrow \Psi^2 = 1 \tag{106}$$

La valeur entière positive $\Psi = 1$ semble naturelle au sein de la démarche entreprise tout au long de cette thèse.

Donc, à ce stade de l'exploration, il convient de prendre conscience de quelques faits importants :

1. Les conditions contenues dans l'Equ.(104) ne peuvent pas être réalisées simultanément et cette équation ne permet pas de réaliser des métriques admissibles valant moins une fois la matrice identité.
2. Il existe cependant peut-être d'autres solutions moins triviales permettant d'identifier l'inverse d'une métrique spatiale admissible avec moins une fois la matrice identité ; voir la suite du raisonnement ci-dessous.
3. Il y a incompatibilité mathématique totale entre la réalisation de l'Equ.(101) symbolisant la condition euclidienne imposant la nullité du déterminant de l'inverse d'une métrique spatiale admissible et le fait que cette métrique puisse être euclidienne.

   Ce qui revient à dire que la seconde condition (voir les remarques 3.4 et 3.6) assurant la cohérence euclidienne de la méthode intrinsèque de décomposition des produits vectoriels déformés (voir [[a]]) concerne uniquement des *métriques admissibles dégénérées* (synonyme : dont le déterminant est nul) qui ne peuvent contre-intuitivement jamais être euclidienne au sens classique de ce terme.

   Par conséquent, il est inutile et vain de confronter les résultats acquis au cours de la recherche de métriques admissibles euclidiennes avec l'Equ.(101) qui ne peut en aucun cas les concerner !

Ainsi, la réalisation d'une métrique euclidienne spatiale admissible consiste à savoir quand la relation suivante peut être écrite de manière cohérente :

$$\alpha\,.\,Id_3 \,+\, T_2(\otimes)(\mathbf{n},\,\mathbf{n}) \,\pm\, \sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,{}_{[J]}\Phi(\mathbf{n})$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} \alpha \,+\, n_x^2 & n_x\,.\,n_y \,-\, \pm\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,n_z & n_x\,.\,n_z \,+\, \pm\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,n_y \\ n_x\,.\,n_y \,+\, \pm\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,n_z & \alpha \,+\, n_y^2 & n_x\,.\,n_y \,-\, \pm\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,n_x \\ n_x\,.\,n_z \,-\, \pm\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,n_y & n_y\,.\,n_z \,+\, \pm\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,n_x & \alpha \,+\, n_z^2 \end{bmatrix} \tag{107}$$

$$=$$

$$K\,.\,Id_3$$

lorsque celle-ci est accompagnée de la relation -Equ.(57) :

$$\alpha \,=\, -(n_x^2 \,+\, n_y^2 \,+\, n_z^2)$$

La réalisation des conditions sur les termes placés en dehors de la diagonale impose :

$$\forall\,\mathbf{n}\;:$$

$$n_x\,.\,n_y \,-\, \pm\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,n_z \,=\, n_x\,.\,n_y \,+\, \pm\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,n_z \,=\, 0$$

$$n_x\,.\,n_z \,-\, \pm\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,n_y \,=\, n_x\,.\,n_z \,+\, \pm\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,n_y \,=\, 0$$

$$n_x\,.\,n_y \,-\, \pm\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,n_x \,=\, n_x\,.\,n_y \,+\, \pm\sqrt{1\,+\,\alpha}\,.\,n_x \,=\, 0$$

Ces relations ne laissent alors que deux possibilités ; la première mène à l'Equ.(104) dont je viens de montrer de manière exhaustive qu'elle n'est pas compatible avec la réalisation concomittante de l'Equ.(57) :

$$\mathbf{n} \,=\, \mathbf{0}$$

La seconde mène à :

$$\forall\,\mathbf{n}\,:\,\alpha \,=\, -1 \tag{108}$$

C'est-à-dire à l'interprétation correspondant à une particule circulant à la vitesse de la lumière dans le vide et ayant acquis sa masse à cause de son mouvement (remarque 3.9). Cette situation a également l'avantage de fournir un vecteur $\mathbf{n}$ de norme unitaire à cause de l'Equ.(57) et de faire que les polynomiales κ et Λ sont exactement les mêmes au signe moins près ; toujours est-il que dans ce cas :

$$||\mathbf{n}||^2 \,=\, n_x^2 \,+\, n_y^2 \,+\, n_z^2 \,=\, 1 \tag{109}$$

et que la réalisation de l'Equ.(107) mène désormais à :

$${}^{(3)}[G(\alpha \,=\, -1)]^{-1}$$

$$=$$

$$\Psi^2\,.\,\{-Id_3 \,+\, 2\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{n},\,\mathbf{n})\}$$

$$=$$

$$\Psi^2\,.\,\begin{bmatrix} -1 \,+\, 2\,.\,n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 \,+\, 2\,.\,n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \,+\, 2\,.\,n_z^2 \end{bmatrix} \tag{110}$$

$$=$$

$$K\,.\,Id_3$$

Cette relation est effective lorsque :

$$K = \Psi^2 . (-1 + 2 . n_x^2) = \Psi^2 . (-1 + 2 . n_y^2) = \Psi^2 . (-1 + 2 . n_z^2)$$

C'est-à-dire lorsque :

$$n_x^2 = n_y^2 = n_z^2 = \theta$$

Ce qui implique par ricochet :

$$3 . \theta = 1$$

et :

$$K = \Psi^2 . (-1 + 2 . \theta) = -\frac{\Psi^2}{3} \tag{111}$$

4.2 La problématique du lien entre α et Ψ.

Les réflexions des sous-sections précédentes exhibent une problématique centrale de cette théorie : "Quel est le lien correct entre α et Ψ ?" Je précise ma pensée.

Remarque 4.2. *Les deux familles de liens issues de la contrainte sur le vecteur singulier.*

Les Equ.(84), (85) et (86) livrent un élément important de cette discussion car les règles concernant le vecteur singulier fournissent deux familles de liens :

1. Trivialement :
$$\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{\Psi}{|A|} \tag{112}$$
2. Non trivialement :
$$\beta^2 = \alpha \Rightarrow (\alpha + \frac{\Psi}{|A|})^2 = \alpha \tag{113}$$

De sorte que si la valeur du coefficient α est imposée, comme c'est le cas dans le cadre de la recherche des métriques admissibles euclidiennes de cette théorie, alors celle du paramètre Ψ en découle automatiquement.

Exemple 4.1. *Les métriques admissibles diagonales.*

Ici, comme je viens de le démontrer un peu plus tôt, α = -1 ; il en résulte que les deux familles de métriques diagonales se caractérisent obligatoirement par :

1. Trivialement :
$$\beta = 0 \Rightarrow \Psi = |A| = \pm 1 \tag{114}$$
2. Non trivialement :
$$\beta^2 = \alpha \Rightarrow (-1 + \frac{\Psi}{|A|})^2 = -1 \Rightarrow \Psi_{\pm} = \frac{1}{|A|} \pm i \, ; \, i^2 + 1 = 0 \tag{115}$$

Il existe au total six (6) métriques admissibles diagonales se caractérisant obligatoirement par :

1. Trivialement :
$$\beta = 0 \Rightarrow K = -|A| = \pm 1 \tag{116}$$
2. Non trivialement :
$$\beta^2 = \alpha \Rightarrow K = -\frac{\Psi_{\pm}^2}{3} = -\frac{(\frac{1}{|A|} \pm i)^2}{3} = \mp \frac{2 . i}{3 . |A|} \, ; \, i^2 + 1 = 0 \tag{117}$$

Parmi ces six métriques admissibles et diagonales, seules les deux triviales sont en plus réelles et euclidiennes de signature plus ou moins un. Les deux autres sont diagonales et complexes sans qu'il soit à ce stade possible de dire à quelle réalité physique elles correspondent éventuellement.

4.3 Les métriques admissibles dégénérées.

Remarque 4.3. *Déterminant des métriques spatiales admissibles.*

Une fois encore les calculs préparatoires de la remarque 2.8 vont rendre grand service. En écrivant :

$$\beta \,=\, \Psi^2 \,.\, \alpha \tag{118}$$

$$\mathbf{M} \,=\, \frac{\Psi}{\sqrt{2\,.\,(1\,+\,\alpha)}}\,.\,\mathbf{s}$$

$$\mathbf{N} \,=\, \Psi^2\,.\,\mathbf{s}$$

Il vient :

$$(\mathbf{M})^2 \,=\, \frac{\Psi^2}{2\,.\,(1\,+\,\alpha)}\,.\,||\mathbf{s}||^2 \tag{119}$$

$$(\mathbf{N})^2 \,=\, \Psi^4\,.\,||\mathbf{s}||^2$$

$$\mathbf{M}\,.\,\mathbf{N} \,=\, \frac{\Psi^3}{\sqrt{2\,.\,(1\,+\,\alpha)}}\,.\,||\mathbf{s}||^2$$

$$(\mathbf{m}\,.\,\mathbf{n})^2 \,=\, \frac{\Psi^6}{2\,.\,(1\,+\,\alpha)}\,.\,||\mathbf{s}||^4$$

L'utilisation de ces résultats intermédiaires fournit ici :

$$|^{(3)}[G]^{-1}| \tag{120}$$

$$=$$

$$\beta^3 \,+\, [\,(\mathbf{M})^2 \,+\, (\mathbf{N})^2\,]\,.\,\beta \,+\, (\mathbf{M}\,.\,\mathbf{N})^2$$

$$=$$

$$\Psi^6\,.\,\alpha^3 \,+\, [\frac{\Psi^2}{2\,.\,(1\,+\,\alpha)}\,.\,||\mathbf{s}||^2 \,+\, \Psi^4\,.\,||\mathbf{s}||^2]\,.\,\Psi^2\,.\,\alpha \,+\, \frac{\Psi^6}{2\,.\,(1\,+\,\alpha)}\,.\,||\mathbf{s}||^4$$

Hence :

$$|^{(3)}[G]^{-1}| \,=\, (\alpha^3 \,+\, ||\mathbf{s}||^2\,.\,\alpha \,+\, \frac{||\mathbf{s}||^4}{2\,.\,(1\,+\,\alpha)})\,.\,\Psi^6 \,+\, \frac{\alpha\,.\,||\mathbf{s}||^2}{2\,.\,(1\,+\,\alpha)}\,.\,\Psi^4 \tag{121}$$

Les Equ.(ex32) et (ex52) permettent aisément d'établir :

$$||\mathbf{s}||^2 \,=\, -4\,.\,\alpha\,.\,(1\,+\,\alpha) \tag{122}$$

L'injection de cette relation dans l'expression du déterminant livre :

$$|^{(3)}[G]^{-1}| \,=\, (\alpha^3 \,-\, 4\,.\,\alpha^2\,.\,(1\,+\,\alpha) \,+\, \frac{8\,.\,\alpha^2\,.\,(1\,+\,\alpha)^2}{(1\,+\,\alpha)})\,.\,\Psi^6 \,-\, \frac{4\,.\,\alpha^2\,.\,(1\,+\,\alpha)}{2\,.\,(1\,+\,\alpha)}\,.\,\Psi^4$$

$$\downarrow$$

$$|^{(3)}[G]^{-1}| \,=\, (\alpha^3 \,-\, 4\,.\,\alpha^2 \,-\, 4\,.\,\alpha^3 \,+\, 8\,.\,\alpha^2 \,+\, 8\,.\,\alpha^3)\,.\,\Psi^6 \,-\, 2\,.\,\alpha^2\,.\,\Psi^4$$

$$\downarrow$$

$$|^{(3)}[G]^{-1}| \,=\, \alpha^2\,.\,\Psi^4\,.\,\{(4\,+\,5\,.\,\alpha)\,.\,\Psi^2 \,-\, 2\} \tag{123}$$

Remarque 4.4. *Les métriques admissibles dégénérées.*

Comme je vais le montrer plus loin dans ce document, les métriques admissibles dégénérées jouent un rôle important dans le cadre de la quantification de cette théorie. A noter ici : la valeur du coefficient α n'est plus contrainte comme c'était le cas dans le cadre de la recherche des métriques admissibles diagonales. Par conséquent, les métriques dégénérées se partagent en principe entre deux familles selon que l'Equ.(112) ou (113) s'applique :

1. Au cas où c'est l'Equ.(112), alors :

$$\beta = 0 \Rightarrow \alpha^2 = \Psi^2$$

et du coup l'Equ.(123) permet de trouver :

$$|^{(3)}[G]^{-1}| = \alpha^2 . \alpha^4 . \{(4 + 5 . \alpha) . \alpha^2 - 2\} = 0$$

C'est-à-dire :

$$(5 . \alpha^3 + 4 . \alpha^2 - 2) . \alpha^6 = 0 \tag{124}$$

Les solutions de cette équation sont les suivantes :

$$\alpha = 0$$

$$\alpha = 0,5453$$

$$\alpha = -0,6727 \pm 0,5302 . i$$

La racine réelle positive et les racines complexes sont inacceptables dans le cadre classique qui ne peut s'appliquer ici que lorsque le coefficient α s'annule. A cause de l'Equ.(57) il s'agit d'un contexte dans lequel le vecteur $\mathbf{n}$ et, par voie de conséquence, la quantité de mouvement $\mathbf{p}^*$ sont des vecteurs isotropiques. Mais ce contexte est tellement dégénéré que les métriques admissibles s'y annulent à cause du formalisme de l'Equ.(123) !

$$^{(3)}[G]_{\pm}^{-1} = [0] \tag{125}$$

Ceci signifie que, dans ce contexte, les identifications issues de l'Equ.(59) ne concernent plus des polynomiales de degré deux mais de degré au plus égal à un. En particulier, les Equ.(62), (63) et (64) induisent :

$$\forall \, k_0 \, : \, ^{(3)}\mathbf{g} = \mathbf{0}$$

Avec (rappel) :

$$|\mathbf{g} >: (g^{01} + g^{10}, g^{02} + g^{20}, g^{03} + g^{30})$$

et :

$$g^{00} . (k_0)^2 = \frac{m^2 . c^2}{\hbar^2}$$

2. Au cas où l'Equ.(113) prévaut, alors :

$$\Psi = -\frac{\alpha}{|A|} \pm \sqrt{\alpha}$$

Pour simplifier les calculs j'effectue un changement de variable provisoire :

$$\sqrt{\alpha} = X \tag{126}$$

Il en résulte :

$$\Psi_{+} = -\frac{X^2}{|A|} + X \tag{127}$$

$$\Psi_{-} = -\frac{X^2}{|A|} - X \tag{128}$$

Puis :

$$\Psi_{+}^2 = X^4 - 2 \, . \frac{X^3}{|A|} + X^2 \tag{129}$$

$$\Psi_{-}^2 = X^4 + 2 \, . \frac{X^3}{|A|} + X^2 \tag{130}$$

Ils se poursuivent avec :

$$\Psi_{+}^4 = X^8 - 4 \, . \frac{X^7}{|A|} + 6 \, . X^6 - 4 \, . \frac{X^5}{|A|} + X^4 \tag{131}$$

$$\Psi_{-}^4 = X^8 + 4 \, . \frac{X^7}{|A|} + 6 \, . X^6 + 4 \, . \frac{X^5}{|A|} + X^4 \tag{132}$$

Et :

$$\Psi_{+}^6 = (X^2 - 2 \, . \frac{X}{|A|} + 1) \, . (X^4 - 4 \, . \frac{X^3}{|A|} + 6 \, . X^2 - 4 \, . \frac{X}{|A|} + 1) \, . X^6$$

qui s'écrit encore :

$$\Psi_{+}^6 = (X^6 - 6 \, . \frac{X^5}{|A|} + 15 \, . X^4 - 20 \, . \frac{X^3}{|A|} + 15 \, . X^2 - 6 \, . \frac{X}{|A|} + 1) \, . X^6 \tag{133}$$

Les calculs pourraient bien entendu se poursuivre en injectant les résultats précédents dans l'Equ.(123) mais il existe une manière bien plus subtile de faire consistant à constater que cette équation (123) se divise elle-même en deux, défissant par là-même deux sous-familles :

(a) soit :

$$\alpha^2 \, . \Psi_{\pm}^4 = 0 \tag{134}$$

Je ne reviendrai pas sur la nullité éventuelle du coefficient α qui a déjà été traitée de multiples fois dans ce document. Je m'attarderai au contraire sur les deux nouvelles possibilités offertes par cette approche ; grâce aux Equ.(131) et (132) :

$$\Psi_{+}^4 = (X^4 - 4 \, . \frac{X^3}{|A|} + 6 \, . X^2 - 4 \, . \frac{X}{|A|} + 1) \, . X^4 = 0 \tag{135}$$

$$\Psi_{-}^4 = (X^4 + 4 \, . \frac{X^3}{|A|} + 6 \, . X^2 + 4 \, . \frac{X}{|A|} + 1) \, . X^4 = 0 \tag{136}$$

Les solutions non nulles en sont respectivement, pour le premier polynome :

$$X = 1,0002$$

$$X = 1 + 0,0002 \, . i$$

$$X = 0,9998$$

$$X = 1 - 0,0002 \, . i$$

et pour le second :

$$X = -1,0002$$

$$X = -1 + 0,0002 \,.\, i$$

$$X = -0,9998$$

$$X = -1 - 0,0002 \,.\, i$$

Dans tous les cas :

$$\alpha = X^2 \sim 1 \pm \epsilon \,.\, i$$

Les valeurs correspondantes possibles pour le coefficient α sont au nombre de six dont deux réelles positives et quatre constituées de deux paires de nombres complexes conjugués. Toutes sont très proches de l'unité. L'Equ.(57) induit alors que le carré de la norme du vecteur **n**, donc de la quantité de mouvement **p** est négative.

(b) soit :

$$(4 + 5 \,.\, \alpha) \,.\, \Psi_{\pm}^2 = 2$$

Ce qui induit ici :

$$(4 + 5 \,.\, X^2) \,.\, (X^4 \mp 2 \,.\, \frac{X^3}{|A|} + X^2) = 2$$

ou encore :

$$5 \,.\, X^6 \mp 10 \,.\, \frac{X^5}{|A|} + 9 \,.\, X^4 \mp 8 \,.\, \frac{X^3}{|A|} + 4 \,.\, X^2 - 2 = 0 \tag{137}$$

Les solutions sont pour le premier polynome (+ - + -) :

$$X = 1,3060$$

$$X = 0,6713 + 0,5680 \,.\, i$$

$$X = 0,6713 - 0,5680 \,.\, i$$

$$X = -0,1041 + 0,9426 \,.\, i$$

$$X = -0,1041 - 0,9426 \,.\, i$$

$$X = -0,4404$$

et pour le second (+ + + +) :

$$X = -1,3060$$

$$X = -0,6713 + 0,5680 \,.\, i$$

$$X = -0,6713 - 0,5680 \,.\, i$$

$$X = 0,1041 + 0,9426 \,.\, i$$

$$X = 0,1041 - 0,9426 \,.\, i$$

$$X = 0,4404$$

Les valeurs du coefficient α sont plus éloignées de l'unité que dans la première des sous-familles.

4.4 Comment analyser les solutions ?

Remarque 4.5. *La question de l'analyse des solutions dégénérées.*

D'une manière générale, les solutions X des polynomes qui viennent d'être étudiés s'écrivent :

$$X_\lambda = a_\lambda + b_\lambda \,.\, i,\ \lambda = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6. \tag{138}$$

Elles sont au nombre de six dont deux réelles (l'une positive et l'autre négative) et quatre constituées de deux paires de nombres complexes conjugués. Je cherche surtout à connaitre le coefficient α et à cause de l'Equ.(126) il vaut :

$$X_\lambda^2 = \alpha_\lambda = (a_\lambda + b_\lambda \,.\, i)^2 = (a_\lambda^2 - b_\lambda^2) + 2 \,.\, a_\lambda \,.\, b_\lambda \,.\, i \tag{139}$$

Pour savoir ce que représente physiquement ce coefficient, il convient de revenir sur les Equ.(30), (32), (33) et (37). Si cette théorie décrit des neutrinos, c'est-à-dire des particules ayant des masses non nulles différentes les unes des autres se propageant à la même vitesse c (voir remarque 3.8), alors il devient légitime d'écrire l'Equ.(102) et α_χ = -0,5 (voir remarque 3.8) ou - 1 (voir remarque 3.9) quel que soit le type de neutrino, selon l'interprétation retenue de la relation de dispersion. Si les neutrinos ont la même masse, le coefficient α est le même pour les trois types et X doit être une racine complexe de moins un demi (voir remarque 3.8) ou de moins un (voir remarque 3.9) et il n'y a en réalité que deux particules : un neutrino et son anti-neutrino.

$$X(\alpha_\chi = -\frac{1}{2}) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \,.\, i = \pm 0,707 \,.\, i$$

ou :

$$X(\alpha_\chi = -1) = \pm\, i$$

Nonobstant le fait qu'aucune des valeurs citées ici ne coincide avec les solutions caractérisant les métriques admissibles dégénérées, il n'y a pas non plus que deux types de neutrinos puisque les expériences actuelles plaident en faveur de l'existence de trois neutrinos et de trois anti-neutrinos, soit six particules, n'ayant pas forcément un comportement symétrique. Ainsi si ma théorie décrit ces particules, alors il faut admettre que le coefficient α dépend du type de neutrino considéré.

Par conséquent, sans savoir si les valeurs proposées ci-dessus sont correctes, le fait qu'elles soient au nombre de six peut constituer un argument en faveur de ma théorie.

Remarque 4.6. *Retour sur la signification du coefficient α.*

Même en admettant que la démarche soit globalement recevable, il faut pouvoir expliquer -au moins en théorie- pourquoi le coefficient α dépend du type de neutrino bien que les expériences semblent indiquer des vitesses semblables proches de celles de la lumière.

Je vais donc me livrer à un certain nombre de réflexions et, pour commencer, revenir sur l'Equ.(29) :

$$\forall\, \theta = 0,\, 1,\, 2,\, 3 \,:\, \eta^\theta = \frac{\hbar}{m \,.\, c} \,.\, \sum_{\mu=0}^{\mu=3} t^{\theta\mu} \,.\, k_\mu = \frac{c \,.\, p_\theta}{E}$$

Elle se laisse reformuler en utilisant un formalisme mixte *matrice-vecteur* :

$$|^{(4)}\eta> = \frac{\hbar}{m \,.\, c} \,.\, {}^{(4)}[T]^{-1} \,.\, |^{(4)}\mathbf{k}> = \frac{c}{E} \,.\, |^{(4)}\mathbf{p}> \tag{140}$$

Si la relation de Planck-Einstein [[05] ; (A-1)] est a priori vraie -ce qui a toutes les chances du monde d'être acceptable en l'état actuel de nos connaissances scientifiques,

$$^{(4)}\mathbf{p} \,=\, \hbar \,.\, ^{(4)}\mathbf{k}$$

alors cette équation fournit aisément :

$$\{^{(4)}[T]^{-1} \,-\, \frac{m\,.\,c^2}{E}\,.\,Id_4\}\,.\,|^{(4)}\mathbf{p}> = \,|^{(4)}\mathbf{0}>$$

Soit la quantité de mouvement est nulle, soit elle ne l'est pas et dans ce cas, le ratio entre l'énergie dite de la particule au repos, $\mathrm{E}_0 = \mathrm{m.c}^2$, et l'énergie totale de celle-ci, E, à un endroit et à un moment donnés est une valeur propre de la matrice de passage $[\mathrm{T}]^{-1}$.

En partant de l'Equ.(24) il devient alors facile de voir -par exemple- qu'une particule dont la norme spatiale euclidienne de la quantité de mouvement s'annule se caractérise par le fait de donner à la matrice de passage une valeur propre quadruple égale à un. Mais cet exemple n'avance pas la réflexion sur la notion de particule.

4.5 Analyse avec l'aide de la notion de corde élastique en élongation.

Proposition 4.1. *Lien avec les cordes en élongation.*

La condition sur le vecteur singulier, l'Equ.(82), rend en réalité compte du comportement d'une corde en élongation. En fait les valeurs propres $\beta(84.1)$ sont proportionnelles aux ratios pression divisée par une densité volumique de matière :

$$\frac{E^2}{m^2\,.\,c^2}\,.\,\beta(84.1) \,=\, -\frac{p_{ression}}{\rho^*}$$

preuve :
J'ai démontré plus haut, page 22, que la condition sur le vecteur singulier s'écrit en fait aussi :

$$|T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{p}^*,\, ^{(3)}\mathbf{p}^*) \,-\, \frac{E^2}{c^2}\,.\,\beta(84.1)\,.\,Id_3| \,=\, 0$$

En partant du principe que la quantité de mouvement se définit classiquement par :

$$\mathbf{p}^* \,=\, m\,.\,\mathbf{v}^*$$

Cette condition prend encore le formalisme :

$$|T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{v}^*,\, ^{(3)}\mathbf{v}^*) \,-\, \frac{E^2}{m^2\,.\,c^2}\,.\,\beta(84.1)\,.\,Id_3| \,=\, 0 \tag{141}$$

Or en étudiant le comportement des surfaces soumises à des tensions, j'ai mis en évidence une relation tout à fait similaire dans le cas des régions vides ; voir [[d], page 9] :

$$|T_2(\otimes)(^{(3)}\mathbf{v}^*,\, ^{(3)}\mathbf{v}^*) \,-\, (-\frac{p_{ression}}{\rho^*})\,.\,Id_3| \,=\, 0 \tag{142}$$

Il semble raisonnable d'identifier les deux expressions et les valeurs propres ; c'est-à-dire, il me paraît juste de poser dans le vide :

$$\frac{E^2}{m^2\,.\,c^2}\,.\,\beta(84.1) \,=\, -\frac{p_{ression}}{\rho^*} \tag{143}$$

□

Dans les régions vides il faut s'attendre à pouvoir poser :

$$\frac{E^2}{m^2 \,.\, c^2} \,.\, \beta(84.1) \;=\; -\frac{p_{ression}}{\rho^*} \;=\; c^2 \qquad (144)$$

En prenant soin :

1. de rappeler et préciser que ρ^* est une densité volumique de matière et qu'une masse m est génériquement égale au produit de sa densité volumique de matière par son volume (m = ρ^*.Volume),
2. de faire appel aux Equ.(85) et (126),

je remarque au passage que l'Equ.(143) mène à :

1. en général :
$$\frac{E^2}{E_0} \,.\, X \;=\; -p_{ression} \,.\, Volume \qquad (145)$$
Cette théorie permet donc l'introduction les éléments d'une formule de thermodynamique (pression et volume). Ils concernent ici la propagation de la lumière.
2. en particulier dans les régions vides :
$$\frac{E^2}{E_0^2} \,.\, X \;=\; 1 \;\Longleftrightarrow\; E \;=\pm \frac{1}{\sqrt{X}} \,.\, E_0 \qquad (146)$$
Cette relation donne quelques indications :
   — L'énergie totale de la particule en cours de propagation, E, est proportionnelle à son énergie au repos $E_0 = m.c^2$.
   — Le ratio est égal à plus ou moins un sur la racine carré des solutions, X, des polynomes carctérisant les métriques admissibles dégénérées dont je démontre dans une autre partie de mon travail qu'elles peuvent servir à construire des paires d'observables quantiques.
   — Les énergies physiques peuvent être positives (particules de la matière classique), négatives (particule d'anti-matière) et imaginaires pures (particules de transition entre deux états dont l'un est instable ; [[05] ; tome I, complément H_{IV} ; pages 468-473]) ou un mélange de ces divers types.

4.6 Conclusion

Le document considère l'équation de Klein-Gordon pour le cas d'ondes massives se propageant le long de géodésiques dans des régions globalement vides d'un l'espace-temps sans courbure (le scalaire de Rici, R, est nul). Une analyse à l'aide du regard spécifique de la théorie des produits vectoriels déformés de cette équation lorsque les solutions les plus élémentaires y ont été injectées permet de l'associer avec une polynomiale Λ de degré deux dépendant des composantes spatiales du vecteur d'onde et, par contre coup avec un moment angulaire déformé.

Le concept de déformation d'un moment angulaire, a priori irrecevable parce qu'il est un objet mathématique quantifié, est étudié et relativisé ; en ce sens que la déformation équivaut en réalité à l'apparition de l'équivalent d'un spin orbital. La décomposition des moments angulaires fait apparaitre des noyaux matriciels que la formule d'Euler-Rodrigues permet d'interpréter comme des représentations de la relation de dispersion d'une lumière dans le vide. Je déduis de ce fait qu'une même onde se laisse simultanément décrire par deux polynomiales qui doivent être finalement les mêmes.

La confrontation entre les deux formalismes fournit des identifications tout à fait fondamentales dans l'état d'esprit de cet approche. Elles permettent de définir les métriques admissibles, en particulier celles qui sont diagonales et celles qui sont dégénérées. Une attention toute particulière est donnée à la compréhension de la géométrie euclidienne tri-dimensionnelle dont je démontre qu'elle appartient bien à l'ensemble des métriques admissibles.

Je mets ainsi en exergue une propriété de la géométrie euclidienne classique dont la logique parait contradictoire ; à savoir : les conditions mathématiques rendant cohérente la méthode de décomposition intrinsèque mise au point dans [[a]] lorsque la géométrie devient euclidienne tri-dimensionnelle interdisent aux métriques spatiales admissibles (leurs inverses respectives) d'être euclidienne, les forçant à devenir dégénérées (et donc à ne pas avoir d'inverse). Dans le même temps et dans ces conditions géométriques, le moment angulaire doit alors impliquer deux vecteurs isotropiques de E(3, C).

Parallèlement à ces aspects essentiellement mathématiques, le document tente de trouver une explication théorique aux masses de certaines particules existant sous forme de triplets dans la nature ; les neutrinos en sont une illustration encore en cours d'investigation dans les diverses communautés scientifiques. Si cette étude permet bien de faire apparaitre de tels triplets et leurs anti-triplets respectifs à l'aide des métriques admissibles dégénérées, elle ne permet pas encore de savoir (démontrer) avec certitude si ses résultats expliquent (coincident bien avec) les masses des neutrinos.

Il semble donc, une fois de plus, que le travail ne soit pas achevé.

5 Bibliographie internationale

Références

5.1 Articles, cours et livres

[01] Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie ; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7.

[02] Aspect of Yang-Mills theory in twistor space ; arXiv :0809.0328v1 [hep-th] 1 September 2008.

[03] E.P. Wigner : Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra, Academic Press, New York (1959).

[04] Michel, L. : Applications of group theory to quantum physics, algebraic aspects ; 1970.

[05] Cohen-Tanoudji, C., Diu B. et Laloe F. : Mécanique quantique tome I ; collection "Enseignement des sciences", nouvelle édition revue, corrigée et augmentée de 1977, ISBN 2-7056-5733-9, v1, ©1973 Hermann Paris.

[06] Co-variant Loop Quantum Gravity, an elementary introduction to quantum gravity and spin foam theory ; ISBN 9781107069626, December 2014, 347 pages.

[07] An elementary introduction to loop quantum gravity ; arXiv :1607.05129 [gr-qc] 18 July 2016.

[08] A length operator for quantum gravity ; arXiv :gr-qc/9606092v1 29 June 1996.

[09] Quantum theory of geometry ; arXiv :gr-qc/9602046v2 23 August 1996.

[10] Astrophysical constraints on Planck scale dissipative phenomena ; Phys. Rev. Lett. 112, 151301 - Published 14 April 2014.

[11] Finite calculus formulation for incompressible solids using linear triangles and tetrahedra ; International journal for numerical methods in engeenering, Int. J. Numer. Meth. Engng 2004 ; 59 :1473,1500 (DOI : 10.1002/nme.922), copyright ©2004 John Wiley and Sons, Ltd.

[12] On the Volume of a Hyperbolic and Spherical Tetrahedron ; communications in analysis and geometry Volume 13, Number 2, 379-400, 2005.

[13] Recherche de la symétrie tétraèdrique dans le noyau 156 Gd par spectro-scopie gamma. Nuclear Theory. Université Claude Bernard - Lyon I, 2009. French. <tel-00467280>

[14] Dual formulation of spin network evolution ; arXiv :gr-qc/9704013v1, 06 April 1997.

[15] On the interpretation of relativistics spin networks and the balanced state sum ; [arXiv :gr-qc/9710108v1, 22 October 1997].

[16] Quantum tetrahedra and simplicial spin networks ; [arXiv :gr-qc/9707010v2, 08 May 1998].

[17] Phantom like dark energy from quantum gravity, arXiv :2105.03751 [gr-qc] 21 juin 2021.

[18] Cartan, E. : The theory of spinors ; edition 1981, ISBN 0-486-64070-1, Dover Publications, Inc. New York, unabridged republication of the complete English translation first published in 1966 ; ©by Hermann, Paris. La version originale de ce travail est parue en 1937 en français sous le titre de “Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)”. Elle résultait des lectures faites par E. Cartan, assemblées et imprimées par André Mercier.

[19] Collection de l’Université de Berkeley

[20] Birell, N. D. and Davies, P. C. W. : Quantum fields in curved space, Cambridge monographs on mathematical physics ; ISBN 0-521-278-58-9 paperback, ©Cambridge University Press, 1982.

[21] Freeman, D. : Dyson-Quantenfeldtheorie (édition allemande) ; ISBN 978-3-642-37677-1, ©Springer Verlag Berlin Heidelberg 2014.

[22] Broecker, T. : Lineare Algebra und Analytische Geometrie (Ein Lehrbuch fuer Physiker und Mathematiker, zweite, korrigierte Auflage) ; ©2004 Birkhaueser Verlag, Basel, ISBN 3-7643-7144-7, 366 pages.

[23] Diebel, J. : Representing attitude : Euler’s angles, unit quaternions and rotation vectors.

[24] Stuelpnagel, J. : On the parametrization of the three-dimensional rotation group ; SIAM Review Vol. 6, No. 4, October, 1964.

[25] Fliessbach, T. : Allgemeine Relativitaetstheorie, 4. Auflage, ISBN 3-8274-1356-7, ©Springer Akademischer Verlag GmbH Heidelberg Berlin, 2003.

[26] Cartan, E. : “Les espaces métriques fondés sur la notion d’aire” dans la revue Actualités scientifiques et industrielles, exposé de géométrie, numéro 72, 1933 ; ©1932 by Librairie scientifique Hermann et Cie, Editeurs.

[27] Collot, J. : Masses et oscillations des neutrinos ; cours de physique des particules, maîtrise de recherche en physique subatomique et astro-particules, Université de Savoie, année 2004-2005.

[28] Documentation-physique/Particules/rpp2014-0122-0321.pdf

[29] [Planck Collab.], arXiv :1303.5076.

[30] Cribier, M. : Les neutrinos solaires, une énigme enfin résolue ; CLEFS CEA, N°49, Printemps 2004.

[31] Landau, L.D. et Lifschitz, E.M. : Klassische Feldtheorie, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II, Klassische Feldtheorie, 12., ueberarbeit. Aufl. ©Akademischer Verlag, Berlin, 1992, ISBN 3-05-501550-9, 480 pages.

5.2 Mes travaux

[a] PERIAT, T. : Décompositions intrinsèques des produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, v2, 14 août 2018, 27 pages.

[b] PERIAT, T. : Produits vectoriels déformés, spineurs de Cartan et paramétrisation d'Euler ; ISBN 978-2-36923-073-1, EAN 9782369230731, 31 mars 2019, 26 pages.

[c] PERIAT, T. : The dispersion relation in vacuum and its associated surface ; ISBN 978-2-36923-157-8, EAN 9782369231578, 8 October 2021, 18 pages.

[d] PERIAT, T. : Aspects mathématiques de la théorie des produits tensoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-028-1, EAN 9782369230281, 6 juin 2021, 21 pages.

[d] PERIAT, T. : Particules idéales, vides de Maxwell et cordes élastiques ; ISBN-978-2-36923-116-5, v2, 1 septembre 2021, 15 pages.