La méthode extrinsèque de décomposition des produits tensoriels déformés.

Collection : "La Théorie de la Question (E)"

©Thierry PERIAT.

20 décembre 2023

Partie I : exposé des principes généraux et résolution de la question (E) dans le cas des espaces de dimension trois.

Table des matières

1 La méthode extrinsèque.

1.1 Motivations.

Je commencerai par quelques rappels :

1. La question (E) est, par définition, celle consistant à se demander comment un produit de Lie déformé donné peut se décomposer en une paire $(\mathbf{z}, [\mathrm{P}])$ de $\mathbb{C} \times \mathrm{E}(\mathrm{D}, \mathbb{R}) \times \mathrm{M}(\mathrm{D}, \mathbb{C})$; pour rappel, dans cette théorie, un produit de Lie déformé est un produit tensoriel déformé alterné bâti sur un cube dont les indices bas vérifient la propriété dite d'antisymétrie :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\alpha}_{\beta\chi} = 0$$

2. La question (E) pourrait très bien ne pas être limitée aux produits de Lie déformés et s'étendre à n'importe quel produit tensoriel déformé (Dans ce cas, le cube déformant est tout simplement quelconque).
3. Chronologiquement, la question (E) a d'abord été posée dans sa version restreinte pour les espaces de dimension trois (D = 3) et j'en ai exposé les motifs physiques dans [a].
4. Dans les espaces de dimension trois, il existe une méthode intrinsèque permettant de répondre partiellement à la question posée en ce sens qu'elle fournit les formalismes génériques des parties principales possibles (les matrices [P]) des paires recherchées ; voir [b]. Cette méthode ne donne aucune indication sur les parties résiduelles de ces décompositions. Ce constat motive le développement de méthodes complémentaires permettant de finir la résolution de la question posée, du moins dans les espaces de dimension trois uniquement.

1.2 Exposé des principes caractérisant la méthode extrinsèque de décomposition des produits tensoriels déformés.

Dans son essence, la méthode dite extrinsèque se caractérise par la démarche générique suivante :

1. Elle part du principe qu'il existe au moins une forme bilinéaire agissant sur les éléments de C $\otimes$ E(D, R) et que celle-ci se laisse représenter par un élément [B] de M(D, $\mathbb{C}$) ; nota bene : dans les applications physiques de ces méthodes, il pourrait en particulier s'agir de la métrique ([B] = [G]).
2. Elle introduit deux polynomiales P_i, pour i = 1, 2, destinées à mesurer le degré de réalisation des décompositions non-triviales d'un produit tensoriel déformé donné ;

   Définition 1.1. *Décomposition présumée.*

   Qu'il s'agisse d'un produit tensoriel, alterné ou de Lie déformé, la théorie de la question (E) présume de l'existence d'une décomposition de ce produit. Elle entend par là que celui-ci se laisse diviser et que cette manoeuvre livre un vecteur :

   $$|\mathbf{D}>= [P]\,.\,|d\mathbf{x}> \,+ |\mathbf{z}>$$

   Soit, par exemple ici, les produits du type $\otimes_A(\mathbf{q},\, \mathrm{d}\mathbf{x})$, la théorie se demande dans quelles conditions l'égalité suivante fait sens :

   $$|\otimes_A(\mathbf{q},\, d\mathbf{x})>= [P]\,.\,|d\mathbf{x}> \,+ |\mathbf{z}>$$

   Définition 1.2. *Scalaire associé au projectile.*

   Par convention, le scalaire associé au projectile intervenant dans un produit tensoriel déformé ayant a priori une décomposition est une différence définie par l'écriture :

   $$P_1(\mathbf{q}) \,-\, P_1(\mathbf{0}) \,=<\mathbf{q}\,,\, |\otimes_A(\mathbf{q},\, d\mathbf{x})> \,- \{[P]\,.\,|d\mathbf{x}> + |\mathbf{z}>\}>_{[B]}$$

Dans le langage des composantes il s'écrit comme une polynomiale de degré deux :

$$P_1(\mathbf{q}) \,=\, b_{mn}\,.\,q^m\,.\,A^n_{pr}\,.\,q^p\,.\,dx^r \,-\, b_{mn}\,.\,q^m\,.\,D^n \,+\, P_1(\mathbf{0})$$

Dans le cadre initial de la discussion, le cube A est anti-symétrique ; auquel cas, exceptionnellement pour ce qui concerne les coefficients de degré deux :

$$_{P_1}d_{mp} \,=\, b_{mn}\,.\,A^n_{pr}\,.\,dx^r \iff -[B]\,.\,_A\Phi(d\mathbf{x}) \,=\, [_{P_1}D]$$

Pour ceux de degré un :

$$_{P_1}d_m \,=\, -b_{mn}\,.\,D^n \iff -[B]\,.\,\{[P]\,.\,|d\mathbf{x}> + |\mathbf{z}>\} \,=\, |_{P_1}\mathbf{d}^*>$$

Et pour celui de degré zéro :

$$_{P_1}d \,=\, P_1(\mathbf{0})$$

Remarque 1.1. -

C'est l'endroit opportun pour signaler que :

(a) Dans la sémantique introduite et utilisée au cours de l'exposé de la méthode intrinsèque, [b], cette polynomiale est caractérisée par le triplé ($\mathrm{P}_1(\mathbf{0})$, $_1\mathbf{d}^*$, $[_1\mathrm{D}]$).

(b) J'ai démontré dans [a] que le déterminant d'une décomposition triviale est nul dès le moment où le cube déformant est antisymétrique :

$$A^\alpha_{\chi\beta} \,+\, A^\alpha_{\beta\chi} \,=\, 0 \Rightarrow |_A\Phi(d\mathbf{x})| \,=\, 0$$

Ainsi, quelle que soit la forme bilinéaire [B], le déterminant de la matrice des coefficients de degré deux de la polynomiale P_1 est nul :

$$|_A\Phi(d\mathbf{x})| \,=\, 0 \Rightarrow \forall\,[B] \,:\, |_{P_1}D| \,=\, 0$$

Définition 1.3. *Scalaire associé à la cible.*

Par convention, le scalaire associé à la cible intervenant dans un produit tensoriel déformé ayant a priori une décomposition est une différence définie par l'écriture :

$$P_2(d\mathbf{x}) \,-\, P_2(\mathbf{0}) \,=< d\mathbf{x}\,,\, | \otimes_A (\mathbf{q},\, d\mathbf{x}) > \,-\, \{[P]\,.\,|d\mathbf{x}> + |\mathbf{z}>\} >_{[B]}$$

Dans le langage des composantes il s'écrit également comme une polynomiale de degré deux impactant le projectile d$\mathbf{x}$:

$$P_2(d\mathbf{x}) \,=\, b_{\alpha\beta}\,.\,dx^\alpha\,.\,(A^\beta_{\chi\delta}\,.\,q^\chi \,-\, p_{\beta\delta})\,.\,dx^\delta \,+\, b_{\alpha\beta}\,.\,dx^\alpha\,.\,z^\beta \,+\, P_2(\mathbf{0})$$

Cette polynomiale est caractérisée par le triplé ($_2$d, $_2\mathbf{d}^*$, $[_2\mathrm{D}]$) tel que :

$$[_2D] \,=\, [B]\,.\,\{_A\Phi(\mathbf{q}) \,-\, [P]\}$$

$$|_2\mathbf{d}^* >= [B]\,.\,|\mathbf{z}>$$

$$_2d \,=\, P_2(\mathbf{0})$$

3. Une troisième caractéristique de la méthode extrinsèque est qu'elle cherche toujours à vouloir identifier chacune des polynomiales introduites et calculées de la manière exposée à l'item précédent avec un développement limité à l'ordre deux inclus de ces polynomiales.

   (a) Concrètement, toujours dans le cadre de l'exemple traité ici, elle propose ensuite de tester la plausibilité d'écrire que :

$$P_1(\mathbf{q})$$

$$=$$

$$P_1(\mathbf{0}) + \, < \mathbf{Grad_q} P_1(\mathbf{q}),\, \mathbf{q} >_{Id} \, + \frac{1}{2} \,.\, < \mathbf{q},\, \{[Hess_{(\mathbf{q},\,0)} P_1(\mathbf{q})]\,.\,|\mathbf{q} >\} >_{Id}$$

   De sorte que cette démarche livre encore pour la polynomiale P_1 (toujours et uniquement lorsque le cube A est antisymétrique) :
   — Concernant les termes de degré deux :

$$\frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{q},\,0)} P_1(\mathbf{q})] \;=\; -[B]\,.\,{}_A\Phi(d\mathbf{x})$$

   — Concernant les termes de degré un :

$$\mathbf{Grad_{(q)}} P_1(\mathbf{q}) \;=\; -[B]\,.\,\{[P]\,.\,|d\mathbf{x} > \, + |\mathbf{z} >\}$$

   (b) Et de même, la plausibilité de poser :

$$P_2(d\mathbf{x})$$

$$=$$

$$P_2(\mathbf{0}) + \, < \mathbf{Grad}_{d\mathbf{x}} P_2(d\mathbf{x}),\, d\mathbf{x} >_{Id} \, + \frac{1}{2} \,.\, < d\mathbf{x},\, \{[Hess_{(d\mathbf{x},\,0)} P_2(d\mathbf{x})]\,.\,|d\mathbf{x} >\} >_{Id}$$

$$=$$

$$< d\mathbf{x}\,,\, | \otimes_A (\mathbf{q},\, d\mathbf{x}) > \, - \{[P]\,.\,|d\mathbf{x} > \, + |\mathbf{z} >\} >_{[B]} \, + P_2(\mathbf{0})$$

   C'est-à-dire :
   — concernant les termes de degré deux :

$$\frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(d\mathbf{x},\,0)} P_2(d\mathbf{x})] \;=\; [B]\,.\,\{{}_A\Phi(\mathbf{q}) \;-\; [P]\}$$

   — et ceux de degré un :

$$|\mathbf{Grad}_{(d\mathbf{x})} P_2(d\mathbf{x}) >= \, [B]\,.\,|\mathbf{z} >$$

   Remarque 1.2. *Conditions rendant le point 3 plausible.*

   La démarche devient plausible lorsque les dérivées partielles des composantes du gradient redonnent bien les entrées de la Hessienne ; concrètement :

(a) Puisque :

$$\frac{\partial P_1(\mathbf{q})}{\partial q^m} = -b_{mn} \,.\, D^n$$

Il doit en résulter par dérivation partielle par rapport aux composantes du projectile que :

$$\frac{\partial^2 P_1(\mathbf{q})}{\partial q^p \partial q^m} = -\frac{\partial b_{mn}}{\partial q^p} \,.\, D^n - b_{mn} \,.\, \frac{\partial D^n}{\partial q^p}$$

La cohérence est obtenue lorsque les relations suivantes sont vraies :

$$\frac{1}{2} \,.\, (\frac{\partial b_{mn}}{\partial q^p} \,.\, D^n + b_{mn} \,.\, \frac{\partial D^n}{\partial q^p}) = b_{mn} \,.\, A^n_{rp} \,.\, dx^r$$

Avec, à cause de la remarque 1.1.(b) :

$$\frac{1}{2} \,.\, |Hess_{(\mathbf{q},\,0)} P_1(\mathbf{q})| = -|B| \,.\, |{}_A\Phi(d\mathbf{x})| = 0$$

Autrement dit : la polynomiale P_1 est dégénérée.

Exemple 1.1. *Le cas des formes bilinéaires ne dépendant pas du projectile.*

Lorsque la forme bilinéaire [B] ne dépend pas du projectile, ces relations se réduisent à :

$$\frac{1}{2} \,.\, b_{mn} \,.\, \frac{\partial D^n}{\partial q^p} = b_{mn} \,.\, A^n_{rp} \,.\, dx^r$$

Avec, à cause de la remarque 1.1.(b) :

$$\frac{1}{2} \,.\, |Hess_{(\mathbf{q},\,0)} P_1(\mathbf{q})| = -|B| \,.\, |{}_A\Phi(d\mathbf{x})| = 0$$

Ces relations peuvent être vérifiées indépendamment de la forme bilinéaire [B] si :

$$\frac{1}{2} \,.\, \frac{\partial D^n}{\partial q^p} = A^n_{rp} \,.\, dx^r \iff \frac{1}{2} \,.\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}},\, \mathbf{D}) = {}_A\Phi(d\mathbf{x})$$

Avec, à cause de la remarque 1.1.(b) :

$$|T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}},\, \mathbf{D})| = 0$$

Lemme 1.1. *du scalaire associé au projectile.*

Les décompositions présupposées, **D**, d'un produit de Lie du type $[\mathbf{q},\, \mathrm{d}\mathbf{x}]_A$ (il est déformé par un cube antisymétrique A) sont étudiées dans un contexte où il existe une forme bilinéaire [B] ne dépendant pas du projectile **q**. Cette forme bilinéaire permet de construire des scalaires associés au projectile qui sont des polynomiales de degré deux.

Dans ce contexte, pour que la méthodologie consistant à vouloir identifier ces polynomiales avec des développements de Taylor soit cohérente :

i. il suffit que la moitié de la jacobienne $(\mathbf{D},\, \mathbf{q})$ soit égale à la décomposition triviale du produit de Lie déformé opposé, $[\mathrm{d}\mathbf{x},\, \mathbf{q}]_A$;
ii. il faut que la polynomiale obtenue de la sorte soit dégénérée ;
iii. il faut que le déterminant de cette jacobienne soit nul.

(b) De manière analogue pour ce qui concerne le scalaire associé avec la cible, puisque :

$$\frac{\partial P_2(d\mathbf{x})}{\partial dx^m} = -b_{mn} \, . \, z^n$$

Il doit en résulter par dérivation partielle par rapport aux composantes de la cible que :

$$\frac{\partial^2 P_2(d\mathbf{x})}{\partial dx^p \partial dx^m} = -\frac{\partial b_{mn}}{\partial dx^p} \, . \, z^n - b_{mn} \cdot \frac{\partial z^n}{\partial dx^p}$$

La cohérence est obtenue lorsque les relations suivantes sont vraies :

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial b_{mn}}{\partial dx^p} \, . \, z^n + b_{mn} \cdot \frac{\partial z^n}{\partial dx^p}\right) = b_{mn} \, . \, (A^n_{\chi p} \, . \, q^\chi - p_{np})$$

Exemple 1.2. *Le cas des formes bilinéaires ne dépendant pas de la cible.*

Lorsque la forme bilinéaire [B] ne dépend pas de la cible, ces relations se réduisent à :

$$-\frac{1}{2} \, . \, b_{mn} \cdot \frac{\partial z^n}{\partial dx^p} = b_{mn} \, . \, (A^n_{\chi p} \, . \, q^\chi - p_{np})$$

Il suffit alors que :

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial z^n}{\partial dx^p} = A^n_{\chi p} \, . \, q^\chi - p_{np} \iff \frac{1}{2} \, . \, T_2(o)(\partial_{d\mathbf{x}},\, \mathbf{z}) = {}_A\Phi(\mathbf{q}) - [P]$$

pour qu'elles soient vérifiées.

Lemme 1.2. *du scalaire associé à la cible.*

Les décompositions présupposées, $\mathbf{D}$, d'un produit de Lie du type $[\mathbf{q},\, \mathrm{d}\mathbf{x}]_A$ (il est déformé par un cube antisymétrique A) sont étudiées dans un contexte où il existe une forme bilinéaire [B] ne dépendant pas de la cible. Cette forme bilinéaire permet de construire des scalaires associés à la cible qui sont des polynomiales de degré deux.

Dans ce contexte, pour que la méthodologie consistant à vouloir identifier ces polynomiales avec des développements de Taylor soit cohérente, il suffit que la moitié de la jacobienne $(\mathrm{d}\mathbf{x},\, \mathbf{z})$ soit égale à la différence matricielle entre la décomposition triviale du produit de Lie déformé étudié et la partie principale de la décomposition.

Dans ces conditions, le déterminant de la jacobienne (d$\mathbf{x}$, $\mathbf{z}$) est égale à la polynomiale $\Lambda(\mathbf{q})$. Elle n'est rien d'autre que le discriminant du système linéaire :

$$[\mathbf{q},\, d\mathbf{x}]_A \;=\; \mathbf{D}$$

Avec :

$$\Lambda(\mathbf{q}) \;=\; |\frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_{d\mathbf{x}},\, \mathbf{z})|$$

L'écart entre la décomposition triviale et la partie principale de la décomposition non-triviale dépend des variations des composantes du résidu de cette décomposition non-triviale par rapport à celles de la cible.

Remarque 1.3. *Les avantages de la méthode.*

Dans le contexte limitatif précisé au niveau des deux lemmes précédents, cette méthodologie présente au moins deux avantages :

(a) Le premier réside dans le constat qu'elle peut s'appliquer quelle que soit la dimension de l'espace mathématique dans lequel la discussion prend place ; elle n'est pas limitée aux espaces de dimension trois.

(b) Le second tient au fait que :

i. la non-dégénérescence de la forme bilinéaire (i.e. : $|\mathrm{B}| \neq 0$) et

ii. la connaissance d'une polynomiale P_2 de degré deux agissant sur la cible d$\mathbf{x}$

... suffisent à proposer une paire ($\mathbf{z}$, [P]) dont il est logique de penser qu'elle peut être une solution approchée de la question (E) :

$$|\mathbf{z}> = \, [B]^{-1}\,.\,|\mathbf{Grad}_{(d\mathbf{x})}P_2(d\mathbf{x})>$$

$$[P]$$

$$=$$

$${}_A\Phi(\mathbf{q}) \;-\; \frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,[Hess_{(d\mathbf{x},\,0)}P_2(d\mathbf{x})]$$

$$=$$

$${}_A\Phi(\mathbf{q}) \;-\; \frac{1}{2}\,.\,T_2(o)(\partial_{d\mathbf{x}},\, \mathbf{z})$$

Ainsi, par opposition avec la méthode exposée dans [a] et [b], la méthode extrinsèque est complète.

1.3 Les difficultés techniques liées à l'usage de la méthode extrinsèque.

Comme toutes les procédures, la méthode extrinsèque a aussi ses faiblesses.

1. Puisqu'elle s'applique en particulier dans les espaces mathématiques de dimension trois, elle devrait fournir des solutions à la question (E) qui coïncident avec celles obtenues grâce à la méthode intrinsèque.

   Le seul objet permettant de tester la coïncidence est la partie principale des décompositions non-triviales puisque l'usage de la méthode intrinsèque ne livre aucune indication sur les résidus de celles-ci.

   Or, il est facile de constater que les solutions issues de la méthode extrinsèque ne font aucune référence directement visible à la non-dégénérescence (ou à la dégénérescence) de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{q})$ et, par conséquent, au vecteur singulier de cette polynomiale quand elle en a un.

   Ce constat justifie donc de commencer une réflexion sur les moyens nécessaires à mettre en œuvre pour que la coïncidence attendue soit effective.

2. Les polynomiales P_i s'ajoutent à la polynomiale $\Lambda(\mathbf{q})$ et rien ne garantit l'égalité entre cette dernière et la polynomiale P_1.

1.4 Lorsque $\mathbf{P}_1 = \Lambda$ dans un espace mathématique de dimension trois.

Dans un espace mathématique de dimension trois, il peut occasionnellement arriver que la polynomiale $\Lambda(\mathbf{q})$ résultant de l'existence d'une décomposition non-triviale $\mathbf{D}$ du produit de Lie déformé par le cube antisymétrique A (il devient alors une matrice [A]), soit $[\mathbf{q},\, \mathrm{d}\mathbf{x}]_{[A]}$ ce produit, coïncide avec celle issue de la construction du scalaire associé avec le projectile. Dans ce cas particulier, il convient alors d'écrire :

$$\forall\, \mathbf{q} \,:\, P_1 \,=\, \Lambda$$

Les résultats précédemment acquis amènent alors à poser les égalités :

— Concernant les termes de degré deux :

$$\frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{q},\,0)}\Lambda(\mathbf{q})] \;=\; -[B]\,.\,{}_A\Phi(d\mathbf{x})$$

— Concernant les termes de degré un :

$$\mathbf{Grad}_{(\mathbf{q})}\Lambda(\mathbf{q}) \;=\; -[B]\,.\,\{[P]\,.\,|d\mathbf{x}> \,+ |\mathbf{z}>\}$$

De :

1. la première de ces relations,
2. l'anti-symétrie naturelle des produits de Lie déformés,
3. la remarque 1.1,

il résulte que ces situations se caractérisent par la dégénérescence de la Hessienne de la polynomiale Λ. Dans ce cas et spécifiquement lorsque la discussion se limite aux espaces de dimension trois :

1. Le travail effectué dans [b] permet d'aboutir à la conclusion que la partie principale de la décomposition non-triviale est forcément de classe II :

$$|Hess_{(\mathbf{q},\,0)}\Lambda(\mathbf{q})| \,=\, 0$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, \mathbf{h},\, \mathbf{g} \,\in\, \mathbb{C} \,\otimes\, E(3,\, \mathbb{R}) \,:\, [Hess_{(\mathbf{q},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})] \,=\, T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})$$
$$[P] \,=\, |A| \,.\, [A]^* \,.\, T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})$$

2. Par ailleurs, continuant à faire usage de la méthode extrinsèque dans ces conditions lorsque la forme bilinéaire ne dépend ni du projectile ni de la cible, la plausibilité de la démarche exige :

$$\frac{1}{2} \,.\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}},\, \mathbf{D}) \,=\, {}_{[A]}\Phi(d\mathbf{x})$$

Et :

$$\frac{1}{2} \,.\, T_2(o)(\partial_{d\mathbf{x}},\, \mathbf{z}) \,=\, {}_{[A]}\Phi(\mathbf{q}) \,-\, [P]$$

Ainsi, puisque (rappel) la décomposition dont l'existence est présumée se définit conventionnellement par :

$$|\mathbf{D} >= [P] \,.\, |d\mathbf{x} > + |\mathbf{z} >$$

Il découle de la première relation que :

$$\frac{1}{2} \,.\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}},\, \mathbf{D})$$
$$=$$
$$\frac{1}{2} \,.\, \{T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}},\, [P] \,.\, |d\mathbf{x} >) \,+\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}},\, \mathbf{z})\}$$
$$=$$
$${}_{[A]}\Phi(d\mathbf{x})$$

Sachant que le but consiste maintenant à découvrir le résidu des décompositions non-triviales, il est sans doute utile d'isoler la jacobienne :

$$\frac{1}{2} \,.\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}},\, \mathbf{z}) \,=\, {}_{[A]}\Phi(d\mathbf{x}) \,-\, \frac{|A|}{2} \,.\, T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}},\, [A]^* \,.\, T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \,.\, |d\mathbf{x} >)$$

En théorie, dans une démarche conventionnelle, la réalisation des intégrations nécessaires devrait alors livrer la partie résiduelle $\mathbf{z}$.

Dans la pratique, il existe une identité remarquable sur les jacobiennes invitant à considérer l'élément transposé du précédent :

$$\frac{1}{2} \,.\, T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{q}},\, \mathbf{z}) \,=\, {}_{[A]}\Phi^t(d\mathbf{x}) \,-\, \frac{|A|}{2} \,.\, T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{q}},\, [A]^* \,.\, T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g}) \,.\, |d\mathbf{x} >)$$

Et à calculer :

$$\frac{1}{2} \,.\, \{T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}},\, \mathbf{z}) \,-\, T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{q}},\, \mathbf{z})\}$$

$$=$$

$$2\,{}_{[A]}\Phi(d\mathbf{x})$$

$$+$$

$$\frac{|A|}{2}\,.\,\{T_2^t(o)(\partial_{\mathbf{q}},\,[A]^*\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\,.\,|d\mathbf{x}>) - T_2(o)(\partial_{\mathbf{q}},\,[A]^*\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\,.\,|d\mathbf{x}>)\}$$

Ce qui fournit :

$$\frac{1}{2}\cdot{}_{[J]}\Phi(\mathbf{Rot_q z})$$

$$=$$

$$2\,{}_{[A]}\Phi(d\mathbf{x})$$

$$-$$

$$\frac{|A|}{2}\cdot{}_{[J]}\Phi(\mathbf{Rot_q}[A]^*\,.\,T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\,.\,|d\mathbf{x}>)$$

Exemple 1.3. *Lorsque le produit vectoriel est classique.*

En particulier, lorsque le produit vectoriel est classique (synonyme : non déformé), alors [A] = [J], $[\mathrm{A}]^*$ = [J].$[\mathrm{J}]^t$ = Id_3, |A| = -1, et cette identité remarquable ouvre a minima la possibilité d'isoler le rotationnel du résidu de la décomposition non-triviale à défaut de trouver le résidu lui-même. En effet, ici :

$$\frac{1}{2}\cdot{}_{[J]}\Phi(\mathbf{Rot_q z})$$

$$=$$

$$2\,{}_{[J]}\Phi(d\mathbf{x})$$

$$+$$

$$\frac{1}{2}\cdot{}_{[J]}\Phi(\mathbf{Rot_q}T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\,.\,|d\mathbf{x}>)$$

Comme ${}_{[J]}\Phi$ est un isomorphisme d'espace vectoriel, cette identité livre la relation :

$$\frac{1}{2}\,.\,\mathbf{Rot_q z} \;=\; 2\,.\,d\mathbf{x} \;+\; \frac{1}{2}\,.\,\mathbf{Rot_q}\{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})\,.\,|d\mathbf{x}>\}$$

Les propriétés des tables de Pythagore bâties sur la multiplication permettent de la réécrire :

$$\mathbf{Rot_q z} \;=\; 4\,.\,d\mathbf{x} \;+\; \mathbf{Rot_q}(<\mathbf{h}, d\mathbf{x}>_{Id_3}\;.\,\mathbf{g})$$

Exemple 1.4. *Décompositions du vecteur nul lorsque le produit vectoriel est classique.*

Lorsque le projectile ($\mathbf{q} = \mathrm{d}\mathbf{x}$) et la cible coïncident quand le produit vectoriel est classique, cette relation vaut

$$\mathbf{Rot_q z} \,=\, 4\,.\,\mathbf{q} \,+\, \mathbf{Rot_q}(<\mathbf{h}, \mathbf{q}>_{Id_3}\; .\, \mathbf{g})$$

... tandis que les décompositions présumées sont nulles :

$$[\mathbf{q},\, \mathbf{q}]_{[J]} \,=\, \mathbf{q} \wedge \mathbf{q} \,=\, \mathbf{0} \,=\, \mathbf{D}$$

De sorte que, tenant compte de l'expression de la matrice [P] dans ce contexte, le résidu peut être isolé et vaut :

$$\mathbf{z} \,=\, -<\mathbf{h}, \mathbf{q}>_{Id_3}\; .\, \mathbf{g}$$

Finalement :

$$\mathbf{Rot_q z} \,=\, 2\,.\,\mathbf{q}$$

Lemme 1.3. *De la décomposition du vecteur nul en milieu euclidien classique.*

Bilan : en ambiance tridimensionnelle euclidienne, cette théorie prédit que les vecteurs nuls se décomposent de manière non-triviale en paires ($\mathbf{z}$, [P]) telles que :

1. la partie principale [P] est une table de Pythagore construite sur le produit tensoriel classique impliquant une paire de vecteurs ($\mathbf{h}$, $\mathbf{g}$) ;
2. la partie résiduelle, $\mathbf{z}$, est colinéaire au vecteur $\mathbf{g}$ et proportionnelle à moins une fois le produit scalaire euclidien entre le vecteur $\mathbf{h}$ et n'importe quel vecteur $\mathbf{q}$;
3. le rotationnel de la partie résiduelle relativement au vecteur $\mathbf{q}$ choisi arbitrairement vaut deux fois ce vecteur $\mathbf{q}$.

1.5 Lorsque, dans un espace de dimension trois, la polynomiale P_1 ne coïncide pas avec la polynomiale Λ.

La discussion continue dans un espace de dimension trois ; mais cette fois-ci, les deux polynomiales P_1 et Λ ne coïncident pas.

$$\forall\, \mathbf{q} \,:\, P_1 \,\neq\, \Lambda$$

Il faut alors contraindre le résultat issu de l'usage de la méthode extrinsèque - voir la remarque 1.3.(b)- à coïncider avec celui issu des travaux réalisés dans [b]. A cause de cette exigence, il convient de tenir compte de la dégénérescence éventuelle de la polynomiale Λ. Dans tous les cas, $|\mathrm{A}| = \pm 1$.

1. **Classe I** : La polynomiale Λ n'est pas dégénérée ; il s'agit de découvrir les situations autorisant à identifier :

$$[P]_{|A|,\, intr.} \,=\, |A|\,.\,[A]^*\,.\,\{\frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{q},0)}\Lambda(\mathbf{q})] \,+\, \frac{1}{|A|}\cdot{}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})\}$$

Avec :

$$[P]_{extr.} \,=\, {}_{A}\Phi(\mathbf{q}) \,-\, \frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,[Hess_{(d\mathbf{x},\,0)}P_2(d\mathbf{x})]$$

...

2. **Classe II** : La polynomiale Λ est dégénérée ; il existe des paires $(\mathbf{h},\, \mathbf{g})$ et il s'agit de découvrir les situations autorisant à identifier :

$$[P]_{|A|,\,intr.} \;=\; |A|\,.\,[A]^{*}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) + T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h})\} + {}_{[J]}\Phi(\frac{1}{2}\,.\,\mathbf{h}\wedge\mathbf{g})$$

Avec :

$$[P]_{extr.} \;=\; {}_{A}\Phi(\mathbf{q}) \;-\; \frac{1}{2}\,.\,[B]^{-1}\,.\,[Hess_{(d\mathbf{x},\,0)}P_2(d\mathbf{x})]$$

Remarque 1.4. *Scénarios de jonction pour les noyaux de classe I.*

Il y a *a priori* au moins deux scénarios rendant l'identification possible ; les deux scénarios ont en commun une relation de continuité reliant les décompositions triviales au cours des déformations :

$${}_{[A]}\Phi(\mathbf{q}) \;=\; [A]^{*}\,.\,{}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})$$

Sinon, chacun des scénarios se définit au travers d'un couple de relations :

1. Scénario de type I :
   (a) Relation d'interdépendance entre la matrice déformante [A] et la forme bilinéaire non-dégénérée [B] permettant de calculer les scalaires associés aux décompositions (les polynomiales P_1 et P_2) :

   $$|A|\,.\,[A]^{*} \;=\; -\frac{1}{\alpha}\,.\,[B]^{-1},\;\forall\,\alpha\,\neq\,0$$

   (b) Relation d'interdépendance entre la polynomiale Λ issue de l'usage de la méthode intrinsèque et la polynomiale P_2 issue de l'usage de la méthode extrinsèque au travers de leurs Hessiennes :

   $$[Hess_{(\mathbf{q},0)}\Lambda(\mathbf{q})] \;=\; \alpha\,.\,[Hess_{(d\mathbf{x},\,0)}P_2(d\mathbf{x})]$$

2. Scénario de type II :
   (a) A un facteur de proportionalité près, elle promeut la forme bilinéaire [B] au rang de métrique de Cartan bâtie sur une aire [B03 ; p. 16, (V)] :

   $$[Hess_{(\mathbf{q},0)}\Lambda(\mathbf{q})] \;=\; -[B]^{-1}$$

   (b) La Hessienne de la seconde polynomiale (P_2) définit au signe moins près ($|\mathrm{A}| = \pm 1$) la matrice déformante [A] :

   $$[Hess_{d\mathbf{x}}P_2(d\mathbf{x})] \;=\; |A|\,.\,[A]^{*}$$

Ces scénarios appellent les commentaires suivants :
— La relation de continuité entre les décompositions triviales (celles de l'espace classique et celles de l'espace déformé) est indépendante du scénario retenu (type I ou type II).

— Lorsque l'espace est euclidien, tridimensionnel et classique, c'est-à-dire non déformé, alors [A] = [J], |A| = -1, et cette relation impose la coincidence entre le projectile, ici $\mathbf{q}$, et le vecteur singulier de la polynomiale intrinsèque, Λ.

$$[A] = [J] \Rightarrow \mathbf{q} = {}_{\Lambda}\mathbf{s}$$

A contrario, il faut s'attendre à ce que cette coincidence disparaisse dans les espaces déformés.

— Dans le cadre du scénario de type I, l'inverse de la matrice [B] représentant la forme bilinéaire non-dégénérée servant à mettre la méthode extrinsèque en oeuvre, peut-être à un signe moins près (|A| = ± 1), est égale à la *matrice déformante effective* [A*] du produit vectoriel classique.

En relisant [b ; corollaire 1.2 et §1.5], il est possible de comprendre que ces situations correspondent à celles où le contexte géométrique est donné au travers de la matrice [B].

— Eventuellement, les deux scénarios peuvent facilement être rendus équivalents ; par exemple, en égalant les Hessiennes dans le scénario de type II, le scénario de type I est retrouvé. Ces situations seront cependant considérées à part comme des scénarios de type III caractérisés par la réalisation simultanée des égalités :

$$|A|\,.\,[A]^{*} = [Hess_{d\mathbf{x}}P_2(d\mathbf{x})] = [Hess_{(\mathbf{q},0)}\Lambda(\mathbf{q})] = -[B]^{-1}$$

Remarque 1.5. *Scénarios de jonction pour les noyaux de classe II.*

La démarche entreprise au cours de la remarque précédente peut être réitérée sans grande difficulté en opérant les substitutions évidentes :

$$[Hess_{(\mathbf{q},0)}\Lambda(\mathbf{q})] \to T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) + T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h})$$

$${}_{\lambda}\mathbf{s} \to \frac{1}{2}\,.\,\mathbf{h} \wedge \mathbf{g}$$

Remarque 1.6. *Les résidus des décompositions.*

Dans une discussion restreinte aux espaces de dimension trois, ils s'obtiennent forcément en partant du résultat proposé par la méthode extrinsèque et en tenant compte ensuite d'un des scénarios de jonction.

2 Remerciements

N'étant pas dans une position sociale me permettant de publier selon les canaux orthodoxes (faute d'un diplôme officiel en physique mathématique), je présente cette exploration sous ma seule responsabilité. J'appuie mes propos sur l'étude d'ouvrages acquis personnellement et sur des oeuvres librement accessibles en ligne. Je remercie les auteurs ayant accepté de les mettre gracieusement à disposition.

2.1 Travaux personnels à l'appui de l'exposé présenté dans ce document.

Ces travaux sont consultables sur ma homepage.

[a] PERIAT, T. : La méthode intrinsèque dans les espaces de dimension trois ; partie I : motivation physique, introduction à la problématique centrale de la question (E) et premières indications signalant un lien avec la notion de polarisation de la lumière, ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, v3, 16 janvier 2023, 25 pages.

[b] PERIAT, T. : La méthode intrinsèque dans les espaces de dimension trois ; partie II : les parties principales des décompositions non triviales des produits vectoriels déformés, ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, v3, 19 janvier 2023, 31 pages.

3 Bibliographie

Références

3.1 Livres.

[B01] Weber and Arfken : Essential mathematical methods for physicists, international edition, ISBN 0-12-059878-7, Copyright ©2004 by Elsevier Science, 932 pages.

[B02] Landau, L. D. und Lifschitz, E.M. : Klassische Feldtheorie, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II ; Akademische Verlag, Berlin (1992), ISBN 3-05-501550-9, 480 pages.

[B03] Cartan, E. : Les espaces métriques fondés sur la notion de d'aire ; "Actualités scientifiques et industrielles", numéro 72, exposés de géométrie publiés sous la direction de monsieur Elie Cartan, membre de l'institut et professeur à la Sorbonne ; Hermann et Cie, éditeurs, Paris, 1933, 46 pages (partie centrale de l'exposé).