

**Décompositions des produits tensoriels
déformés : la méthode des poupées russes.**
Collection : “La Théorie de la Question (E)”.

©Thierry PERIAT.

21 mars 2023

Résumé : La théorie de la Question (E) se préoccupe de diviser (synonyme : décomposer) des produits tensoriels, alternés et de Lie à l'aide de diverses méthodes mathématiques. Ceci étant fait, elle cherche à découvrir les applications qui peuvent en être faites dans le domaine de la physique. Ce document s'inscrit totalement au sein de cette démarche puisqu'elle propose une troisième méthode. Elle cherche à l'utiliser dans le cadre d'une analyse de la version covariante de la loi de Lorentz (électromagnétisme).

Avertissement : Les documents de la collection "La Théorie de la Question (E)" sont protégés par le droit d'auteur et destinés à l'usage privé de celles et ceux décidant de les télécharger. Ils ont pour seule vocation de guider ou d'inspirer une recherche personnelle en physique mathématique. La vente ou la revente de ceux-ci est strictement interdite.

Table des matières

1	Exposé du principe.	5
1.1	Introduction	5
1.2	Justifications.	5
1.2.1	Le contexte mathématique.	5
1.2.2	L'état d'avancement de la démarche théorique.	5
1.2.3	Les difficultés techniques.	5
1.2.4	La version covariante de la loi de Lorentz.	6
1.3	Le principe.	6
1.3.1	Enoncé.	6
1.3.2	Définition mathématique.	6
2	De la dimension deux à la dimension trois.	9
2.1	Le cas des cubes (2-2-2) antisymétriques en dimension deux.	9
2.1.1	Classification.	9
2.1.2	Focus sur les cubes d'arrivée de type (3-3-3) entièrement antisymétriques.	12
2.1.3	Repositionnement de la question (E) dans le cadre de la géométrie topologique.	14
2.1.4	Approfondissement des connaissances concernant l'espace de dimension deux.	17
2.1.5	Théorème concernant la montée des décompositions triviales de la dimension deux à la dimension trois.	22
2.1.6	Perspective d'application physique à l'électromagnétisme.	24
2.1.7	Bilan intermédiaire	26
2.2	Le cas des cubes (2-2-2) symétriques.	26
2.3	Le cas des cubes (2-2-2) quelconques.	26
3	De la dimension trois à la dimension quatre.	27
3.1	Rappel des motivations physiques.	27
3.2	Le cas des cubes (3-3-3) de départ antisymétriques.	27
3.3	Les solutions lorsque le cube (3-3-3) de départ est antisymétrique.	33
3.3.1	Quand la prolongation du reste de la décomposition est nulle.	33
3.3.2	Quand la prolongation du reste de la décomposition n'est pas nulle.	35
3.3.3	Quand un coeur trivial livre une décomposition triviale.	38
3.4	Application à la version covariante de la loi de Lorentz.	38

3.4.1	Lien formel entre la loi de Lorentz et la méthode des poupées russes.	38
3.4.2	Les situations de départ en dimension trois.	39
3.4.3	La piste du cube (4-4-4) sous-jacent entièrement antisymétrique.	43
3.4.4	Rappels concernant la jauge électromagnétique.	45
3.4.5	Rappels sur les transformations de Lorentz.	47
3.4.6	Etude des situations validant la quatrième relation.	49
3.5	Travaux personnels précisant le contexte de la discussion menée dans ce document.	51
3.6	Articles, Cours et Livres.	51

Chapitre 1

Exposé du principe.

1.1 Introduction

Ce chapitre expose le principe d'une méthode mathématique de montée de la dimension D à la dimension $D + 1$, dite « des poupées russes » par analogie avec les célèbres figures, dans le cadre d'une exploration visant à découvrir l'ensemble des décompositions des produits tensoriels déformés ; c'est-à-dire les réponses à la question (E).

1.2 Justifications.

1.2.1 Le contexte mathématique.

La théorie de la question (E) explore les manières dont les produits tensoriels déformés peuvent se décomposer en fonction d'informations données par des contextes sous-jacents implicitement représentés par des cubes dits déformants.

1.2.2 L'état d'avancement de la démarche théorique.

Si les explorations menées à ce jour ont bien permis de dégrossir les réponses pouvant être apportées à la question posée dans les espaces de dimension deux [a] et quatre [b], force est de reconnaître que l'état d'avancement maximal a surtout été atteint pour les espaces de dimension trois, grâce à la mise aux point des méthodes intrinsèque [c] et extrinsèque [d], à leur confrontation dans [e] et grâce à la construction d'un tenseur de courbure [f] permettant de relier toute la démarche à la notion de métrique construite sur des aires en évolution promue dès 1933 par [[01] ; E. Cartan]. La théorie de la question (E) devient ainsi un outil mathématique permettant potentiellement de relier les courbures d'un espace de dimension trois et les modifications des surfaces le limitant.

1.2.3 Les difficultés techniques.

En dimension D quelconque, la réponse à la question (E) nécessite le calcul du « déterminant stratégique » :

$$\Lambda^{(D)}(\mathbf{a}) = |{}_A\Phi^{(D)}(\mathbf{a}) - {}^{(D)}[P]| = {}^{(D)}|A_{\chi\beta}^{\alpha} \cdot a^{\chi} - p_{\alpha\beta}| \quad (1.1)$$

Son calcul dans les espaces de dimension deux n'a pas été particulièrement difficile mais il fait déjà intervenir un polynôme de degré deux contenant sept coefficients importants pour la résolution de la question (E) [a].

Son énoncé précis dans les espaces de dimension trois n'a été réalisé que dans le cas des cubes antisymétriques sur leurs indices bas dans [c] ; ce qui a permis d'établir le théorème dit initial de cette théorie et de commencer à mettre en exergue le volume des calculs algébriques accompagnant la démarche.

Sa formulation dans les espaces de dimension quatre a été débuté dans [b] ; la manoeuvre y devient extraordinairement fastidieuse et le risque de faire des erreurs devient aussi gigantesque que la taille des calculs à faire.

Visiblement, la difficulté technique grandit avec la dimension de l'espace dans lequel la question est posée. Ce constat justifie d'aborder la recherche des réponses à la question posée d'une autre manière. Cette technique alternative, idéalement, devrait (i) permettre la généralisation des résultats acquis pour les espaces de dimension deux et trois et (ii) fournir une clé autorisant les passages successifs aux espaces de la dimension D plus un lorsque les solutions ont été découvertes pour les espaces de dimension D .

1.2.4 La version covariante de la loi de Lorentz.

La version covariante de la loi de Lorentz en électromagnétisme (EM) illustre la question (E) de manière naturelle dans les espaces de dimension quatre. Un produit tensoriel carré impliquant la vitesse \mathbf{u} d'une particule y est déformé par le cube des symboles de Christoffel de la seconde espèce et il en résulte une décomposition éventuellement non-triviale constitué de la paire ([Représentation matricielle du champ EM], accélération propre de la particule).

1.3 Le principe.

1.3.1 Enoncé.

Je vais partir de l'a priori que la question a été résolue en dimension D (ce qui est vrai quand $D = 2$ et $D = 3$) et tenter d'en déduire les éléments manquants pour la question posée dans un espace de dimension $D + 1$.

Toutes les indications dont je viens de faire le résumé fondent la nécessité de mettre au point une méthode permettant « une montée » aux dimensions supérieures en partant de ceux acquis en dimension deux et trois ; partiellement, en dimension quatre.

1.3.2 Définition mathématique.

Quelle que soit la dimension D entière égale ou supérieure à deux, la première méthode dite des poupées russes est l'outil mathématique permettant de répondre à la question suivante :

$$\forall {}^{(D+1)}\mathbf{a}, {}^{(D+1)}\mathbf{b} \in E^2(D + 1, R), \forall A$$

$$\exists ? ({}^{(D+1)}[P], {}^{(D+1)}\mathbf{z}) \in M(D + 1, R) \times E(D + 1, R)$$

1. Tel que :

$$|\otimes_A^{(D+1)} \mathbf{a}, {}^{(D+1)}\mathbf{b}\rangle = {}^{(D+1)}[P] \cdot |{}^{(D+1)}\mathbf{b}\rangle + |{}^{(D+1)}\mathbf{z}\rangle$$

2. Lorsque :

$$\begin{aligned} & \exists ({}^{(D)}[P], {}^{(D)}\mathbf{z}) \in M(D, R) \times E(D, R) : \\ & |\otimes_A^{(D)} \mathbf{a}, {}^{(D)}\mathbf{b}\rangle = {}^{(D)}[P] \cdot |{}^{(D)}\mathbf{b}\rangle + |{}^{(D)}\mathbf{z}\rangle \end{aligned}$$

Chapitre 2

De la dimension deux à la dimension trois.

Avec la volonté d'ordonner l'investigation et les résultats qu'elle livre, je propose de classer les situations en fonction de la nature du cube de départ : celui qui définit la déformation dans l'espace de dimension deux.

2.1 Le cas des cubes (2-2-2) antisymétriques en dimension deux.

2.1.1 Classification.

Remarque 2.1.1. *La situation de départ.*

L'exploration menée dans [a; §4.2] a montré que ces cubes se résument à un simple vecteur \mathbf{A} de $E(2, \mathbb{R})$ et qu'ils modifient l'énoncé de la question (E) dans les espaces de dimension deux. Elle consiste à découvrir les paires $([P], \mathbf{z})$ de $M(2, \mathbb{R}) \times E(2, \mathbb{R})$ telles que [a; §4.2.2, (4.3)] :

$$|\otimes_{\mathbf{A}} ({}^{(2)}\mathbf{a}, {}^{(2)}\mathbf{b}) \rangle = |{}^{(2)}\mathbf{a}, {}^{(2)}\mathbf{b}\rangle \cdot |{}^{(2)}\mathbf{A}\rangle = ({}^{(2)}[P] \cdot |{}^{(2)}\mathbf{b}\rangle + |{}^{(2)}\mathbf{z}\rangle \quad (2.1)$$

... lorsque les vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{A} sont supposés connus. Le discriminant stratégique caractérisant ces situations s'écrit [a; §4.2.1, (4.2)] :

$$\Lambda({}^{(2)}\mathbf{a}) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=2} (-1)^{\alpha+1} \cdot |{}^{(2)}\mathbf{A}, {}^{(2)}\mathbf{p}_{\alpha}| \cdot a^{\alpha} + |{}^{(2)}\mathbf{p}_1, {}^{(2)}\mathbf{p}_2| \quad (2.2)$$

... sachant que (rappel), les vecteurs-colonnes \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_1 de type (2-1) sont des éléments de $E(2, \mathbb{R})$ formant la matrice inconnue $[P]$. Le formalisme de ce discriminant stratégique se distingue de celui caractérisant les situations dans lesquelles le cube est quelconque par le fait qu'il n'est pas un polynôme de degré deux mais seulement de degré un. Ce constat est important à au moins deux titres :

1. La perte d'un degré entre le cas général et le cas où le cube est antisymétrique sur ses indices bas se laisse généraliser aux espaces mathématiques

dont la dimension est quelconque.

Par exemple, comme je l'ai démontré dans [c], le discriminant stratégique accompagnant la question (E) lorsqu'elle est posée dans un espace de dimension trois équipé d'un produit vectoriel déformé¹ est de degré deux, et non pas trois : c'est une des informations portées par le théorème initial.

2. Le discriminant stratégique calculé après la montée d'un espace de dimension deux à un espace de dimension trois contenant le premier va se traduire par l'apparition de termes supplémentaires de degré deux et, éventuellement, trois que je préciserai ultérieurement.

Remarque 2.1.2. *Caractérisation des situations d'arrivée.*

Logiquement, trois types de situations vont caractériser le cube augmenté des coefficients en faisant un cube (3-3-3) agissant dans l'espace $E(3, \mathbb{R})$ contenant l'espace $E(2, \mathbb{R})$ de départ ; dans les trois cas, le *noyau* (2-2-2) de ces cubes est équivalent à un vecteur \mathbf{A} de $E(2, \mathbb{R})$.

1. La *couverture* du noyau (2-2-2) est telle que le cube (3-3-3) obtenu est entièrement antisymétrique sur ses indices bas.
J'ai montré dans [c] que ce cube est équivalent à un élément $[A]$ de $M(3, \mathbb{R})$.
Dans l'espace d'arrivée, ici $E(3, \mathbb{R})$, la question (E) prend alors la formulation particulière :

$$\exists ? ({}^{(3)}[P], ({}^{(3)}\mathbf{z}) \in M(3, \mathbb{R}) \times E(3, \mathbb{R}) :$$

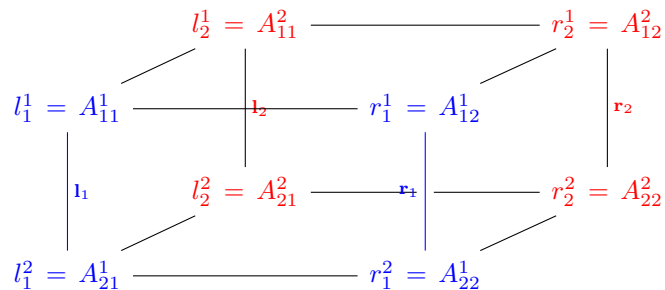
$$|\otimes_{[A]} ({}^{(3)}\mathbf{a}, ({}^{(3)}\mathbf{b}) \rangle = ({}^{(3)}[P] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{b} \rangle + |{}^{(3)}\mathbf{z} \rangle$$

... sachant que l'Equ.(2.1) ci-dessus est vérifiée.

2. Les composantes de la couverture du noyau (2-2-2) sont symétriques sur leurs indices bas.
3. Les composantes de la couverture du noyau (2-2-2) sont parfaitement quelconques.

Remarque 2.1.3. *Aide à la visualisation des cubes (3-3-3).*

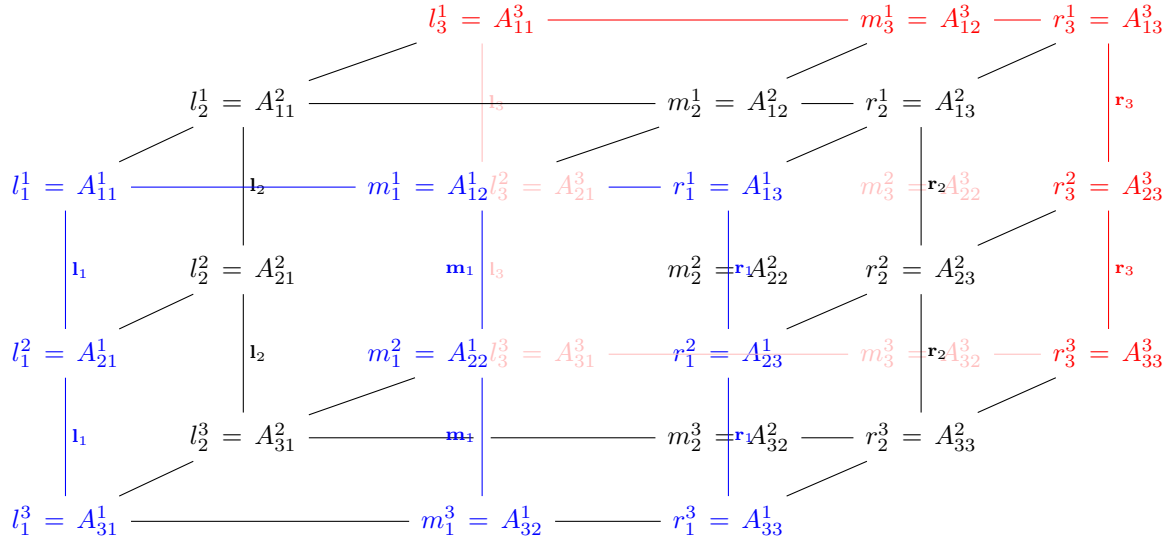
Je vais généraliser la figure apparaissant dans [a ; remarque 4.5.1].



1. Cette description est équivalente à la phrase : un espace de dimension trois équipé d'un produit tensoriel déformé par un cube antisymétrique sur ses indices bas.

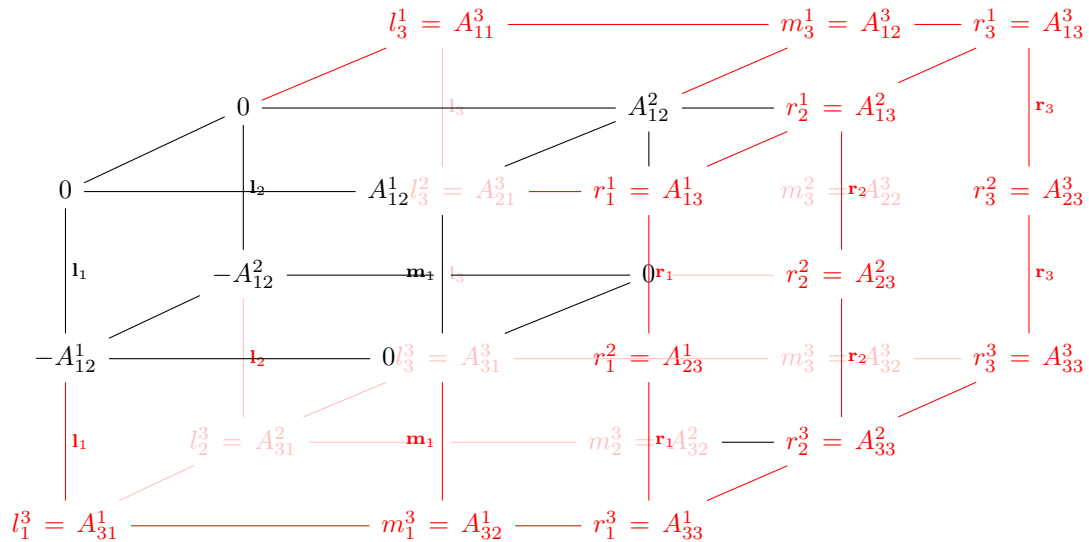
2.1. LE CAS DES CUBES (2-2-2) ANTISYMMÉTRIQUES EN DIMENSION DEUX.

En général, un cube (3-3-3) peut se comprendre comme la superposition spatiale de trois éléments de $M(3, \mathbb{R})$ et se représenter grosso modo de la façon suivante :



Remarque 2.1.4. Aide à la visualisation des cubes (3-3-3) dont le noyau (2-2-2) est antisymétrique.

Dans le cas particulier d'un cube (2-2-2) ayant des composantes antisymétriques sur leurs indices bas (par abus du langage, le noyau est dit antisymétrique) et servant de noyau à un cube (3-3-3), la figure générale de la remarque précédente se réduit à :



Concernant le noyau, les résultats exposés dans [a] se retrouvent visuellement en se plaçant au dessus du cube (3-3-3). Toutes les composantes rouges ou roses

constituent la *couverture* du noyau (2-2-2) dont les composantes sont antisymétriques sur leurs indices bas. Il y a en général $3^3 - 2^2 = 19$ composantes dans la couverture. Lorsque le noyau est antisymétrique, il n'a en plus du 0 que deux composantes distinctes au plus et par conséquent le cube (3-3-3) a au plus $19 + 3 = 22$ composantes dont une est nulle².

2.1.2 Focus sur les cubes d'arrivée de type (3-3-3) entièrement antisymétriques.

Il s'agit des situations pour lesquelles je dispose actuellement du plus grand nombre d'informations; je commencerai donc cette étude par elles.

Remarque 2.1.5. *Le système à étudier.*

Il s'écrit de la manière suivante dans laquelle, pour la pédagogie, les inconnues sont colorées en rouge. Les sept composantes de la couverture du noyau (2-2-2) sont colorées en bleu et elles sont supposées connues :

$$\begin{aligned}
 & | \otimes_A ({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b}) \rangle \\
 & = \\
 & \begin{bmatrix} A_{\chi\beta}^1 \cdot a^\chi \cdot b^\beta \\ A_{\chi\beta}^2 \cdot a^\chi \cdot b^\beta \\ A_{\chi\beta}^3 \cdot a^\chi \cdot b^\beta \end{bmatrix} \\
 & = {}^3 \\
 & \begin{bmatrix} A_{12}^1 \cdot a^1 \cdot b^2 + A_{13}^1 \cdot a^1 \cdot b^3 - A_{12}^2 \cdot a^2 \cdot b^1 + A_{23}^1 \cdot a^2 \cdot b^3 - A_{13}^1 \cdot a^3 \cdot b^1 - A_{23}^1 \cdot a^3 \cdot b^2 \\ A_{12}^2 \cdot a^1 \cdot b^2 + A_{13}^2 \cdot a^1 \cdot b^3 - A_{12}^2 \cdot a^2 \cdot b^1 + A_{23}^2 \cdot a^2 \cdot b^3 - A_{13}^2 \cdot a^3 \cdot b^1 - A_{23}^2 \cdot a^3 \cdot b^2 \\ A_{12}^3 \cdot a^1 \cdot b^2 + A_{13}^3 \cdot a^1 \cdot b^3 - A_{12}^3 \cdot a^2 \cdot b^1 + A_{23}^3 \cdot a^2 \cdot b^3 - A_{13}^3 \cdot a^3 \cdot b^1 - A_{23}^3 \cdot a^3 \cdot b^2 \end{bmatrix} \\
 & = {}^4 \\
 & \begin{bmatrix} A_{12}^1 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^1 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^2 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^2 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^3 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^3 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^3 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \end{bmatrix} \\
 & = \\
 & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Je dis ceci sans savoir si cette remarque a la moindre signification, juste parce que $21 = 3$ fois 7 , que sept est le nombre de coefficients ayant de l'importance pour le traitement de la question (E) dans un espace de dimension deux et que trois est le nombre de dimensions indépendantes dans le processus de montée examiné ici.

3. Il faut prendre en compte le fait que :

$$A_{\chi\beta}^\alpha + A_{\beta\chi}^\alpha = 0$$

4. Il faut prendre en compte le fait que la discussion implique des nombres réels et que l'ensemble de ces nombres est un corps commutatif.

2.1. LE CAS DES CUBES (2-2-2) ANTISYMMÉTRIQUES EN DIMENSION DEUX.

Toutes les composantes en noire sont supposées connues ; ce qui veut dire que la question (E) a déjà trouvée une ou plusieurs réponses dans l'espace de dimension deux englobé par l'espace $E(3, \mathbb{R})$ et que le système suivant est validé⁵ :

$$\begin{bmatrix} A_{12}^1 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) \\ A_{12}^2 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z^1 \\ z^2 \end{bmatrix}$$

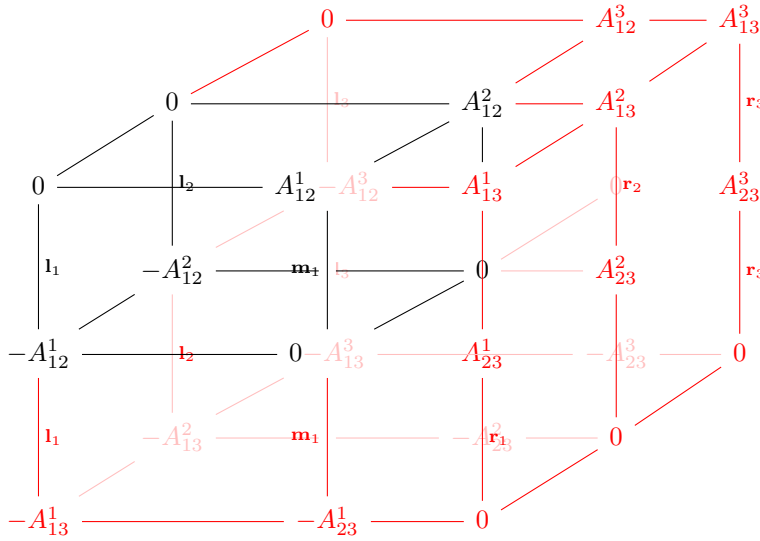
En injectant ces données supposées acquises dans le système à étudier, celui-ci se réduit à :

$$\begin{bmatrix} A_{13}^1 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{13}^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^2 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^3 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^3 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^3 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$= \begin{bmatrix} p_{13} \cdot b^3 \\ p_{23} \cdot b^3 \\ p_{31} \cdot b^1 + p_{32} \cdot b^2 + p_{33} \cdot b^3 + z^3 \end{bmatrix}$$

Remarque 2.1.6. Visualisation d'un cube (3-3-3) antisymétrique.

La figure suivante représente grosso modo un cube (3-3-3) dont toutes les composantes exhibent la propriété d'antisymétrie sur les indices bas (par abus du langage, ce cube est dit antisymétrique) :



La figure exhibe trois lignes allant d'avant en arrière, parallèlement disposées, correspondant chacune au vecteur nul $(0, 0, 0)$ de $E(3, \mathbb{R})$. Elles définissent une matrice nulle, la matrice $[0]$ de $M(3, \mathbb{R})$, disposée de manière oblique entre la ligne nulle située en haut à gauche et la ligne nulle située en bas à droite. L'antisymétrie fait qu'il suffit de considérer la partie du cube située au dessus de ce plan nul pour connaître la partie basse. Comme expliqué dans d'autres

5. Il ne s'agit que de l'expression développée de l'Equ.(2.1) :

parties de mon travail, ce cube peut se concevoir comme la superposition de trois éléments antisymétriques de $M(3, \mathbb{R})$. De sorte que, à la limite, ce cube peut se condenser sous la forme d'un élément quelconque de $M(3, \mathbb{R})$ à condition d'omettre le zéro.

Remarque 2.1.7. *Première famille de solutions.*

Soit la troisième ligne de ce système. Un regroupement des termes placés à gauche du signe de l'égalité fournit :

$$-(A_{12}^3 \cdot a^2 + A_{13}^3 \cdot a^3) \cdot b^1 + (A_{12}^3 \cdot a^1 - A_{23}^3 \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2) \cdot b^3$$

De sorte que si la troisième composante du reste de la décomposition est nul ($z^3 = 0$) mais que celle de la cible ne l'est pas ($b^3 \neq 0$), il devient possible de proposer :

$${}^{(3)}[P] \tag{2.4}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} p_{11} & p_{12} & \frac{1}{b^3} \cdot \{A_{13}^1 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \\ p_{21} & p_{22} & \frac{1}{b^3} \cdot \{A_{13}^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^2 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \\ -(A_{12}^3 \cdot a^2 + A_{13}^3 \cdot a^3) & (A_{12}^3 \cdot a^1 - A_{23}^3 \cdot a^3) & (A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2) \end{array} \right]$$

... comme solution générique du système particulier :

$$b^3 \neq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} A_{12}^1 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^1 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^2 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^2 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^3 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^3 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^3 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} z^1 \\ z^2 \\ 0 \end{array} \right]$$

Si par contre $z^3 \neq 0$, l'approche précédente n'est pas réalisable et il convient de trouver d'autres stratégies pour obtenir des solutions.

2.1.3 Repositionnement de la question (E) dans le cadre de la géométrie topologique.

Remarque 2.1.8. *Interprétation géométrique des décompositions réalisées dans l'espace de dimension deux.*

La reformulation de la question (E) posée dans les espaces de dimension deux dont les produits tensoriels sont déformés par des cubes antisymétriques mérite un commentaire de nature géométrique. En effet, chaque produit de ce genre peut s'interpréter comme une *surface* (le facteur noté : $a^1 \cdot b^2 - a^1 \cdot b^2$) soumise à l'action du vecteur ${}^{(2)}\mathbf{A}$, élément de $E(2, \mathbb{R})$, résultant de l'antisymétrisation des composantes du cube (2-2-2) \mathbf{A} . L'existence de décompositions signe le fait que cette action modifie le positionnement de la cible ${}^{(2)}\mathbf{b}$ et provoque un éclatement symbolisé par le reste ${}^{(2)}\mathbf{z}$.

En portant cette discussion dans l'espace de dimension trois $E(3, \mathbb{R})$ implicitement rapporté à une géométrie euclidienne, le produit vectoriel classique

2.1. LE CAS DES CUBES (2-2-2) ANTISYMMÉTRIQUES EN DIMENSION
DEUX.

des arguments de la paire $(^{(3)}\mathbf{a}, ^{(3)}\mathbf{b})$ définit un vecteur $^{(3)}\mathbf{n}$ orthogonal à la surface dessinée par ces arguments ... aussi longtemps que ceux-ci ne sont pas colinéaires, auquel cas la surface s'annule et la soit-disant normale aussi.

Il n'y a dans la formulation générale de cette théorie en dimension deux aucune indication sur la direction de l'action déformante $^{(2)}\mathbf{A}$; in extenso : les deux composantes de ce vecteur ne coïncident pas nécessairement avec deux des trois composantes du vecteur orthogonal à l'élément de surface sur lequel il agit.

$$^{(3)}\mathbf{n} = ^{(3)}\mathbf{a} \wedge ^{(3)}\mathbf{b}, \quad ^{(3)}\mathbf{a} \neq ^{(3)}\mathbf{b}$$

L'espace $E(3, \mathbb{R})$ étant rapporté à sa base canonique $\Omega \equiv (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$:

$$^{(3)}\mathbf{n} = n^\alpha \cdot ^{(3)}\mathbf{e}_\alpha = (^{(3)}\mathbf{a} \wedge ^{(3)}\mathbf{b})^\alpha \cdot ^{(3)}\mathbf{e}_\alpha = \epsilon_{\chi\beta}^\alpha \cdot a^\chi \cdot b^\beta \cdot ^{(3)}\mathbf{e}_\alpha$$

Dans ce contexte, l'Equ.(2.1) s'écrit aussi :

$$|\otimes_{\mathbf{A}} (^{(2)}\mathbf{a}, ^{(2)}\mathbf{b}) \rangle = n^3 \cdot |^{(2)}\mathbf{A} \rangle = ^{(2)}[P] \cdot |^{(2)}\mathbf{b} \rangle + |^{(2)}\mathbf{z} \rangle \quad (2.5)$$

Le côté remarquable de cette équation tient au fait qu'elle introduit la troisième composante d'un vecteur de $E(3, \mathbb{R})$ à partir d'objets mathématiques intrinsèques à une discussion se déroulant dans un espace de dimension deux : les composantes des arguments de la paire $(^{(2)}\mathbf{a}, ^{(2)}\mathbf{b})$. Il est tentant de penser que ce fait n'est qu'une illustration particulière du théorème remarquable de Gauss (theorema egregium) [[02]] ; voir aussi [03], [04] et [05] ainsi que la nombreuse littérature écrite autour de ce théorème.

Il est également certain que la discussion entourant la résolution de la question (E) à l'aide de la méthode dite des poupées russes s'inscrit dans celle, plus vaste et plus ancienne, de l'inclusion - éventuellement isométrique- d'un espace de petite dimension dans un espace de dimension plus grande.

Remarque 2.1.9. *Ce qu'enseigne le prix Abel 2022.*

La surface terrestre considérée depuis le sol d'une belle plaine semble approximativement plane. Pour autant, survolée depuis un avion, la même plaine exhibera une partie de la courbure terrestre naturelle au regard du spectateur. Ce phénomène n'est pas propre à la sphère. Il peut être répété pour de nombreux objets, dont - par exemple- les tores. Ceux-ci illustrent à leur tour le concept de tubule ou de corde. L'étude de ces structures a par ailleurs de nombreuses retombées en physique fondamentale des particules (les cordes bosoniques) et en cosmologie (les filaments).

Cet exemple permet de se forger une idée intuitive sur les notions complémentaires de courbure intrinsèque (de Riemann, un élève de Gauss) et de courbure extrinsèque. Elles jouent un rôle indéniable lors de l'étude de la théorie de la gravitation d'A. Einstein. Les amoureux des mathématiques devront aller chercher les prémisses de ces études dans les travaux de Gauss, Weingarten, Weierstrass et - de manière plus éclectique- dans ceux de tous les mathématiciens s'étant penchés sur les géométries non-euclidiennes.

Le phénomène de courbure apparente et relative est d'ailleurs parfois utilisé dans les chapitres introduisant les prémisses de certaines théories des cordes.

Le jury du prestigieux prix Abel a honoré en 2022 le travail de D. Sullivan et une vision dont les premiers pas remontent à 1970 [[06]]. L'originalité de la démarche repose en particulier sur l'invention de méthodes mathématiques rendant l'étude et la classification des surfaces plus aisées; notamment celles consistant à envisager de diviser des algèbres, ou - plus facile à visualiser- de diviser des surfaces en objets plus petits (des triangles par exemple).

La triangulation des objets - ce n'est plus une nouveauté- joue aujourd'hui un rôle essentiel dans tous les secteurs de l'activité humaine pour lesquels des modélisations exploratoires sont nécessaires (industrie automobile, aéronautique, navale, des jeux électroniques; climatologie, océanographie, etc.).

De manière plus générale, une tendance se dessine : celle du développement des interconnexions entre divers domaines théoriques et leurs applications à la physique [[07]]; l'une d'entre elles concerne l'application des connaissances acquises sur les topologies à l'écoulement des fluides. Il y a là du travail pour de nombreuses années.

Remarque 2.1.10. *La vieille problématique de l'immersion des objets.*

Trente ans environ après E. Cartan [[08]], mais quarante ans avant d'obtenir le prix Nobel pour ses contributions à la théorie des jeux ou d'inspirer le film « Un bel esprit », le mathématicien américain J. Nash s'est penché sur l'opération géométrique consistant à immerger des objets mathématiques d'une certaine dimension, par exemple D , dans des objets de dimension plus grande; par exemple $D' > D$ [[09]], [[10]].

Cette quête apporte des éléments de réponse à une double question que se posent les physiciens : « Un espace riemannien de dimension quatre peut-il être immergé dans un espace euclidien de dimension supérieure et si oui, quelle est la valeur minimale de cette dimension supérieure? » Gromov ajoute une pierre à cet édifice en 1985 [[11]].

Les travaux de Nash prédisaient qu'il devrait être possible de remodeler n'importe quelle sphère en une balle de dimension bien plus petite sans l'écraser et en détruire des caractéristiques essentielles.

Au-delà du sourire de tous ceux qui, en entendant l'énoncé de ce problème, penseront immédiatement à un jeu mathématique n'ayant d'intérêt que pour celui qui l'a imaginé, se cache un passionnant problème de mathématique concernant les surfaces.

Il y a de très nombreux moyens d'inclure un objet dans un autre; il suffit (i) de penser à une balle de ping-pong (tennis de table) qui -par sa fabrication même- s'identifie assez bien à une surface sphérique quasiment sans épaisseur ($D = 2$) et (ii) de constater sans effort mental particulier qu'elle s'inscrit sans difficulté dans le volume parallélépipédique de la salle dans laquelle on la tient en main ($D' = 3$) pour commencer à comprendre l'essence du sujet traité.

Ce seul exemple permet d'ailleurs de comprendre pourquoi (i) la problématique de l'immersion implique forcément aussi celle de la courbure (des lignes,

des surfaces, des volumes, des espace-temps, etc.) et (ii) il n'est pas si simple qu'il y paraît de construire un espace de dimension quatre à partir d'un espace de dimension trois.

Le mérite de Nash semble d'avoir été capable d'inventer une technique particulière d'immersion impliquant des twists des courbes présentes dans l'objet à immerger. Et celui de ses successeurs de comprendre que cette technique peut s'utiliser dans l'étude de l'écoulement des fluides ; d'où, aujourd'hui, tout l'intérêt de ce problème au travers de ses implications en physique appliquée [[12]].

2.1.4 Approfondissement des connaissances concernant l'espace de dimension deux.

Tout ceci ayant été dit, je vais tenter de trouver d'autres familles de solutions à la question (E) dans le cadre d'une montée à la dimension trois. Cette tentative nécessite d'approfondir encore plus ce qui se passe en dimension deux.

Remarque 2.1.11. *Décomposition de la contrainte dans le plan dessiné par la paire (projectile, cible).*

Par exemple, dès le moment où les arguments ${}^{(2)}\mathbf{a}$ et ${}^{(2)}\mathbf{b}$ diffèrent l'un de l'autre, (i) ils n'ont pas le même support et (ii) ils dessinent un plan dont ils indiquent les directions principales - au demeurant non nécessairement perpendiculaires entre elles. Il en résulte qu'il existe toujours une paire de nombres réels (λ, μ) permettant la décomposition du vecteur déformant ${}^{(2)}\mathbf{A}$:

$$\forall {}^{(2)}\mathbf{a} \neq {}^{(2)}\mathbf{b}, \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 : {}^{(2)}\mathbf{A} = \lambda \cdot {}^{(2)}\mathbf{a} + \mu \cdot {}^{(2)}\mathbf{b} \quad (2.6)$$

En injectant cette donnée dans l'énoncé de la question (E) posée en dimension deux, il vient :

$$|\otimes_{\mathbf{A}} ({}^{(2)}\mathbf{a}, {}^{(2)}\mathbf{b}) \rangle = n^3 \cdot |\lambda \cdot {}^{(2)}\mathbf{a} + \mu \cdot {}^{(2)}\mathbf{b} \rangle = {}^{(2)}[P] \cdot |{}^{(2)}\mathbf{b} \rangle + |{}^{(2)}\mathbf{z} \rangle \quad (2.7)$$

Le formalisme de cette relation fait aussitôt ressortir l'existence d'une famille de *solutions simples* :

$$\begin{aligned} \forall {}^{(2)}\mathbf{b} : {}^{(2)}[P] &= n^3 \cdot \mu \cdot Id_2 \\ {}^{(2)}\mathbf{z} &= n^3 \cdot \lambda \cdot {}^{(2)}\mathbf{a} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Remarque 2.1.12. *L'instructive question des décompositions triviales.*

Deux points à remarquer absolument :

1. Ces solutions simples ne dépendent d'aucun scénario (i) impliquant le discriminant stratégique, $\Lambda({}^{(2)}\mathbf{a})$ et ses dérivées partielles successives ou (ii) la paire inversée $({}^{(2)}\mathbf{b}, {}^{(2)}\mathbf{a})$.

Elles complètent celles exposées dans [[a]] pour le cas général (i.e. : quand le cube A est quelconque) et elles devraient en principe en constituer un cas particulier (à vérifier toutefois : voir la suite de cet exposé).

2. Ces solutions simples peuvent parfois être triviales, c'est-à-dire avoir un *reste nul* (${}^{(2)}\mathbf{z} = {}^{(2)}\mathbf{0}$).

Cette éventualité se présente dans trois sortes de configurations :

(a) Les arguments de la paire $(^{(2)}\mathbf{a}, ^{(2)}\mathbf{b})$ sont colinéaires car :

$$\mathbf{a} // \mathbf{b} \Rightarrow \exists \psi \in R : \mathbf{b} = \psi \cdot \mathbf{a} \Rightarrow n^3 = 0$$

(b) La composante λ est nulle ; ce qui équivaut à dire que la déformation $^{(2)}\mathbf{A}$ s'exerce parallèlement à l'argument $^{(2)}\mathbf{b}$ (la cible).

(c) L'argument $^{(2)}\mathbf{a}$ (le projectile) est nul.

La question des décompositions triviales dans un espace de dimension deux a été effleurée dans [[a] ; §4.2.3 point 4, pp. 40-41] ; l'étude a livré une représentation de la partie principale :

$$^{(2)}[P[[a]]] = T_2(\otimes)(\langle ^{(2)}\mathbf{a} | \cdot ^{(2)}[C]^t, | ^{(2)}\mathbf{A} \rangle) \quad (2.9)$$

La matrice [C] apparaissant ici fait partie de l'ensemble des représentations des réflexions (reversals en anglais ; voir [[13] ; §7, §61, §126]) :

$$^{(2)}[C] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

La solution découverte dans [a] ne coïncide pas du tout avec celle découverte au début de cette remarque ; et elle ne va a priori pas coïncider avec elle car elle est une table de Pythagore construite sur le produit tensoriel classique, donc une matrice dégénérée (i. e : dont le déterminant est nul), alors que celle proposée ci-dessus est proportionnelle à la matrice identité, Id_2 , et de déterminant égal à $(\mu \cdot n^3)^2$.

Reprenant systématiquement, et dans le même ordre, les trois configurations pour lesquelles les solutions simples découvertes ci-dessus n'ont pas de reste, l'examen détaillé des opportunités de coïncidence entre ces deux formalismes fournit les indications suivantes :

1. Si le projectile est colinéaire à la cible, alors (i) la déformation est à la fois proportionnelle au projectile et à la cible (les trois vecteurs $^{(2)}\mathbf{a}$, $^{(2)}\mathbf{b}$, $^{(2)}\mathbf{A}$ sont alignés) ; et (ii) la solution simple découverte ci-dessus est nulle ($[P] = [0]$) tandis que celle proposée dans [a] va s'écrire :

$$^{(2)}[P[a]] \sim T_2(\otimes)(\langle ^{(2)}\mathbf{a} | \cdot ^{(2)}[C]^t, | ^{(2)}\mathbf{a} \rangle) \quad (2.11)$$

Elle n'est nulle que si le projectile est nul.

2. Si la déformation est colinéaire à la cible sans que celle-ci soit colinéaire au projectile (cas de l'item précédent), alors la solution simple découverte ci-dessus est nulle ($[P] = [0]$) tandis que celle proposée dans [a] va s'écrire :

$$^{(2)}[P[a]] \sim T_2(\otimes)(\langle ^{(2)}\mathbf{a} | \cdot ^{(2)}[C]^t, | ^{(2)}\mathbf{b} \rangle) \quad (2.12)$$

3. Si le projectile est nul, alors la solution simple découverte ci-dessus est nulle ($[P] = [0]$) et celle proposée dans [a] aussi :

$$^{(2)}[P[a]] = T_2(\otimes)(\langle ^{(2)}\mathbf{0} | \cdot ^{(2)}[C]^t, | ^{(2)}\mathbf{A} \rangle) = ^{(2)}[0] \quad (2.13)$$

C'est la seule fois où les deux décompositions coïncident entièrement. Pour autant, ces situations n'ont strictement aucun intérêt puisqu'elles

décrivent simplement des décompositions nulles du vecteur nul ; en effet elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} & |^{(2)}\mathbf{0}\rangle \\ & = \\ & ^{(2)}|\otimes_{\mathbf{A}}(^{(2)}\mathbf{0}, ^{(2)}\mathbf{b})\rangle = n^3 \cdot |\lambda \cdot ^{(2)}\mathbf{0} + \mu \cdot ^{(2)}\mathbf{b}\rangle = ^{(2)}[0] \cdot |^{(2)}\mathbf{b}\rangle + |^{(2)}\mathbf{0}\rangle \end{aligned}$$

Ce qui impose la nullité de la cible.

Il résulte des analyses réalisées jusque là un :

Lemme 2.1.1. *Des décompositions triviales dans les espaces réels de dimension deux.*

Il existe deux familles disjointes, sauf au niveau du vecteur nul, de *solutions simples et triviales* pour la question de la décomposition du produit tensoriel des arguments de la paire $(^{(2)}\mathbf{a}, ^{(2)}\mathbf{b})$ lorsque celui-ci est déformé par un vecteur $(^2)\mathbf{A}$ et que les trois vecteurs $(^2)\mathbf{a}, (^2)\mathbf{b}, (^2)\mathbf{A}$, sont situés dans un seul et même plan dessiné par la paire étudiée.

Remarque 2.1.13. *Commentaires sur le lemme.*

Une transposition de la matrice triviale découverte dans [a] fournit :

$$\begin{aligned} & ^{(2)}[P[a]]^t \tag{2.14} \\ & = \\ & T_2^t(\otimes)(\langle ^{(2)}\mathbf{a} | \cdot ^{(2)}[C]^t, |^{(2)}\mathbf{A}\rangle) \\ & = \\ & \begin{bmatrix} -A_{12}^1 \cdot a^2 & A_{12}^1 \cdot a^1 \\ -A_{12}^2 \cdot a^2 & A_{12}^2 \cdot a^1 \end{bmatrix}^t \\ & = \\ & \begin{bmatrix} -A_{12}^1 \cdot a^2 & -A_{12}^2 \cdot a^2 \\ A_{12}^1 \cdot a^1 & A_{12}^2 \cdot a^1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il est toujours possible de scinder la décomposition triviale obtenue dans [a] en deux parties, l'une symétrique et l'autre antisymétrique :

$$^{(2)}[P[a]] = \frac{1}{2} \cdot \{^{(2)}[P[a]] + ^{(2)}[P[a]]^t\} + \frac{1}{2} \cdot \{^{(2)}[P[a]] - ^{(2)}[P[a]]^t\}$$

qui vaut plus en détail :

$$\begin{aligned} & ^{(2)}[P[a]] \\ & = \\ & \begin{bmatrix} -A_{12}^1 \cdot a^2 & \frac{1}{2} \cdot (A_{12}^1 \cdot a^1 - A_{12}^2 \cdot a^2) \\ \frac{1}{2} \cdot (A_{12}^1 \cdot a^1 - A_{12}^2 \cdot a^2) & A_{12}^2 \cdot a^1 \end{bmatrix} \\ & + \\ & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \cdot (A_{12}^1 \cdot a^1 + A_{12}^2 \cdot a^2) \\ -\frac{1}{2} \cdot (A_{12}^1 \cdot a^1 + A_{12}^2 \cdot a^2) & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pour que cette matrice triviale puisse se réduire à une matrice totalement symétrique il suffit que le produit scalaire euclidien classique (= non déformé)

défini dans les espaces de dimension deux entre le vecteur déformant ${}^{(2)}\mathbf{A}$ et le projectile ${}^{(2)}\mathbf{a}$ soit nul; dit avec d'autres mots : il suffit que ces deux vecteurs soient orthogonaux :

$$\langle {}^{(2)}\mathbf{A}, {}^{(2)}\mathbf{a} \rangle_{Id_2} = 0 \quad (2.15)$$

Si tel est le cas, alors :

$${}^{(2)}[P[a]] = \begin{bmatrix} -A_{12}^1 \cdot a^2 & A_{12}^1 \cdot a^1 \\ A_{12}^1 \cdot a^1 & A_{12}^2 \cdot a^1 \end{bmatrix}$$

La matrice obtenue est bien symétrique; par ailleurs, elle reste dégénérée (son déterminant est nul) et non proportionnelle à la matrice identité Id_2 . S'il est souhaité savoir dans quelle mesure elle se laisse diagonaliser, il convient de calculer les solutions de $|[P] - \kappa \cdot Id_2| = 0$. Sans que je sois pour le moment en mesure d'interpréter correctement ces résultats, les calculs livrent lorsque ni le projectile, ni le vecteur déformant n'est nul :

$$\kappa = 0; \kappa = \frac{a^1}{A_{12}^2} \cdot \langle {}^{(2)}\mathbf{A}, {}^{(2)}\mathbf{A} \rangle_{Id_2}$$

L'objectif de cette remarque était d'examiner une fois encore s'il existait un processus permettant de passer continuellement de la matrice quelconque ${}^{(2)}[P[a]]$ à la matrice simple et triviale ${}^{(2)}[P]$ trouvée ci-dessus. A ce stade précis de l'exploration, la conclusion reste négative et elle invite aux sentences suivantes :

1. Soit l'unique moyen de rendre cohérent les deux approches est d'affirmer que toutes les décompositions simples et triviales sont nulles dans le contexte sur lequel cette partie du document focalise son attention.
2. Soit les deux ensembles de solutions à la question (E) coexistent mais il faudra alors chercher à comprendre pourquoi et comment.
3. Soit les *solutions simples* proposées ci-dessus n'existent tout simplement pas et seule la matrice triviale $[P[a]]$ a une existence plausible. Auquel cas, il conviendrait de poursuivre l'approfondissement des décompositions triviales en posant en général :

$$\begin{aligned} & | \otimes_{\mathbf{A}} ({}^{(2)}\mathbf{a}, {}^{(2)}\mathbf{b}) \rangle & (2.16) \\ & = \\ & n^3 \cdot | {}^{(2)}\mathbf{A} \rangle \\ & = \\ & {}^{(2)}[P[a]] \cdot | {}^{(2)}\mathbf{b} \rangle \\ & = \\ & {}^{(2)}T_2(\otimes)(\langle {}^{(2)}\mathbf{a} | \cdot {}^{(2)}[C]^t \cdot | {}^{(2)}\mathbf{A} \rangle) \cdot | {}^{(2)}\mathbf{b} \rangle \end{aligned}$$

avec (rappel) :

$${}^{(2)}\mathbf{A} = \lambda \cdot {}^{(2)}\mathbf{a} + \mu \cdot {}^{(2)}\mathbf{b}; {}^{(2)}\mathbf{z} = {}^{(2)}\mathbf{0}; {}^{(2)}[C] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il est aisé de démontrer avec un peu d'algèbre que cette relation est toujours vraie, quelle que soit la paire (λ, μ) , en posant $n^3 = 1$ aussi longtemps que les arguments de la paire $({}^{(2)}\mathbf{a}, {}^{(2)}\mathbf{b})$ diffèrent l'un de l'autre sans qu'aucun d'eux soit nul.

Proposition 2.1.1. *Concernant la montée de la dimension deux à la dimension trois des décompositions triviales.*

Reprenant le résultat acquis préalablement au niveau de la remarque 2.1.7, il devient clair que les matrices de $M(3, \mathbb{R})$ répondant trivialement à la question (E) dans un espace de dimension trois équipé d'un produit vectoriel déformé lorsqu'il y est déjà répondu trivialement dans un espace de dimension deux ont forcément le formalisme :

$$\begin{aligned} & {}^{(3)}[P] \tag{2.17} \\ & = \\ & \left[\begin{array}{ccc} -A_{12}^1 \cdot a^2 & A_{12}^1 \cdot a^1 & \frac{1}{b^3} \cdot \{A_{13}^1 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \\ -A_{12}^2 \cdot a^2 & A_{12}^2 \cdot a^1 & \frac{1}{b^3} \cdot \{A_{13}^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^2 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2)\} \\ -(A_{12}^3 \cdot a^2 + A_{13}^3 \cdot a^3) & (A_{12}^3 \cdot a^1 - A_{23}^3 \cdot a^3) & (A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2) \end{array} \right] \\ & b^3 \neq 0 \end{aligned}$$

Démonstration. Il est assez aisé de vérifier que :

$$[P] \cdot |\mathbf{b}\rangle = \left[\begin{array}{c} A_{12}^1 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^1 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^2 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^2 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^3 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^3 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^3 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \end{array} \right]$$

qui est bien la représentation du produit tensoriel déformé lorsque le cube A est antisymétrique :

$$|\otimes_A ({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b})\rangle$$

Inversement, la matrice [P] proposée ci-dessus est sensée être une solution générale du système :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} A_{12}^1 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^1 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^2 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^2 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^3 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^3 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^3 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \end{array} \right] \\ & = \\ & \left[\begin{array}{ccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Or en factorisant les composantes du produit tensoriel déformé en fonction des composantes de la cible, il vient :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{c} A_{12}^1 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^1 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^2 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^2 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^3 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^3 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^3 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \end{array} \right] \\ & = \\ & \left[\begin{array}{c} -(A_{13}^1 \cdot a^3 + A_{12}^1 \cdot a^2) \cdot b^1 + (A_{12}^1 \cdot a^1 - A_{23}^1 \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{13}^1 \cdot a^1 + A_{23}^1 \cdot a^2) \cdot b^3 \\ -(A_{13}^2 \cdot a^3 + A_{12}^2 \cdot a^2) \cdot b^1 + (A_{12}^2 \cdot a^1 - A_{23}^2 \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{13}^2 \cdot a^1 + A_{23}^2 \cdot a^2) \cdot b^3 \\ -(A_{13}^3 \cdot a^3 + A_{12}^3 \cdot a^2) \cdot b^1 + (A_{12}^3 \cdot a^1 - A_{23}^3 \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2) \cdot b^3 \end{array} \right] \\ & = \\ & \left[\begin{array}{ccc} -(A_{13}^1 \cdot a^3 + A_{12}^1 \cdot a^2) & (A_{12}^1 \cdot a^1 - A_{23}^1 \cdot a^3) & (A_{13}^1 \cdot a^1 + A_{23}^1 \cdot a^2) \\ -(A_{13}^2 \cdot a^3 + A_{12}^2 \cdot a^2) & (A_{12}^2 \cdot a^1 - A_{23}^2 \cdot a^3) & (A_{13}^2 \cdot a^1 + A_{23}^2 \cdot a^2) \\ -(A_{13}^3 \cdot a^3 + A_{12}^3 \cdot a^2) & (A_{12}^3 \cdot a^1 - A_{23}^3 \cdot a^3) & (A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

La matrice dite triviale vaut donc en principe et en général :

$$\begin{aligned} & {}^{(3)}[P] \\ & = \\ & \begin{bmatrix} -(A_{13}^1 \cdot a^3 + A_{12}^1 \cdot a^2) & (A_{12}^1 \cdot a^1 - A_{23}^1 \cdot a^3) & (A_{13}^1 \cdot a^1 + A_{23}^1 \cdot a^2) \\ -(A_{13}^2 \cdot a^3 + A_{12}^2 \cdot a^2) & (A_{12}^2 \cdot a^1 - A_{23}^2 \cdot a^3) & (A_{13}^2 \cdot a^1 + A_{23}^2 \cdot a^2) \\ -(A_{13}^3 \cdot a^3 + A_{12}^3 \cdot a^2) & (A_{12}^3 \cdot a^1 - A_{23}^3 \cdot a^3) & (A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Son formalisme diffère visiblement de celui qui est proposé ci-dessus dans le cadre d'une montée de la dimension deux à la dimension trois ... sauf lorsque le prolongement du projectile (synonyme : la troisième composante du projectile) est nul(le) : $a^3 = 0$. \square

2.1.5 Théorème concernant la montée des décompositions triviales de la dimension deux à la dimension trois.

Théorème 2.1.1. *De la montée des décompositions triviales de la dimension deux à la dimension trois.*

— Prémises :

1. Soit deux éléments distincts et non nuls de l'espace $E(2, \mathbb{R})$ que l'on *prolonge* dans $E(3, \mathbb{R})$ de la façon suivante :

$${}^{(2)}\mathbf{a} : (a^1, a^2) \rightarrow {}^{(3)}\mathbf{a} : (a^1, a^2, 0)$$

$${}^{(2)}\mathbf{b} : (b^1, b^2) \rightarrow {}^{(3)}\mathbf{b} : (b^1, b^2, b^3)$$

2. Soit un élément ${}^{(2)}\mathbf{A}$ de $E(2, \mathbb{R})$ (i) résultant de l'antisymétrisation des composantes d'un cube (2-2-2) - qui, par convention du langage, sera dit *déformant*- et (ii) pouvant toujours s'exprimer comme une combinaison linéaire des arguments de la paire $({}^{(2)}\mathbf{a}, {}^{(2)}\mathbf{b})$.

La *prolongation* de ce cube (2-2-2) représenté par le vecteur ${}^{(2)}\mathbf{A}$ est un élément ${}^{(3)}[A]$ de $M(3, \mathbb{R})$ résultant de l'antisymétrisation des composantes d'un cube (3-3-3) englobant (couvrant) le cube antisymétrique (2-2-2) considéré.

— Constats :

1. Le produit tensoriel déformé par le vecteur ${}^{(2)}\mathbf{A}$ de la paire $({}^{(2)}\mathbf{a}, {}^{(2)}\mathbf{b})$ peut toujours être décomposé trivialement.
2. Il en est de même du produit tensoriel déformé par la matrice ${}^{(3)}[A]$ de la paire $({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b})$ obtenue par prolongation de la paire $({}^{(2)}\mathbf{a}, {}^{(2)}\mathbf{b})$ selon la manière expliquée dans les prémisses.

— Enoncé :

Dans le cadre des prolongations exposées au niveau des prémisses, la matrice triviale de la décomposition du produit tensoriel déformé par la matrice ${}^{(3)}[A]$ de la paire $({}^{(3)}\mathbf{a}, {}^{(3)}\mathbf{b})$, soit ${}^{(3)}[P]$ cet élément de $M(3, \mathbb{R})$, a pour *coeur* la matrice triviale de la décomposition du produit tensoriel

déformé par le vecteur ${}^{(2)}\mathbf{A}$ de la paire $({}^{(2)}\mathbf{a}, {}^{(2)}\mathbf{b})$, soit ${}^{(2)}[P]$ cet élément de $M(2, \mathbb{R})$.

$${}^{(2)}[P] = \begin{bmatrix} -A_{12}^1 \cdot a^2 & A_{12}^1 \cdot a^1 \\ -A_{12}^2 \cdot a^2 & A_{12}^2 \cdot a^1 \end{bmatrix}$$

$${}^{(3)}[P] = \begin{bmatrix} -A_{12}^1 \cdot a^2 & A_{12}^1 \cdot a^1 & A_{13}^1 \cdot a^1 + A_{23}^1 \cdot a^2 \\ -A_{12}^2 \cdot a^2 & A_{12}^2 \cdot a^1 & A_{13}^2 \cdot a^1 + A_{23}^2 \cdot a^2 \\ -A_{12}^3 \cdot a^2 & A_{12}^3 \cdot a^1 & A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2 \end{bmatrix}$$

Proposition 2.1.2. *Sur les coeurs triviaux bâtis sur des cubes (2-2-2) antisymétriques.*

Un coeur trivial bâti sur un cube antisymétrique (2-2-2) (a) est en général quelconque, (b) peut à la limite être symétrique mais (c) il n'est jamais un élément totalement antisymétrique de $M(2, \mathbb{R})$.

Démonstration. Re-examinant les propos tenus au cours de la remarque 2.1.13, la sous-proposition (a) s'impose comme une évidence du simple fait que la matrice triviale ${}^{(2)}[P]$ peut toujours se décomposer en une partie symétrique et une partie antisymétrique; la sous-proposition (b), c'est-à-dire la symétrisation possible de cette matrice triviale, est réalisée lorsque le vecteur déformant ${}^{(2)}\mathbf{A}$ est orthogonal au projectile ${}^{(2)}\mathbf{a}$; quant au sujet de la sous-proposition (c), c'est-à-dire l'antisymétrisation totale de la matrice triviale ${}^{(2)}[P]$, sa réalisation supposerait de pouvoir valider la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} -A_{12}^1 \cdot a^2 & \frac{1}{2} \cdot (A_{12}^1 \cdot a^1 - A_{12}^2 \cdot a^2) \\ \frac{1}{2} \cdot (A_{12}^1 \cdot a^1 - A_{12}^2 \cdot a^2) & A_{12}^2 \cdot a^1 \end{bmatrix} = {}^{(2)}[0]$$

En l'occurrence, supposerait de pouvoir écrire simultanément :

$$A_{12}^1 \cdot a^1 - A_{12}^2 \cdot a^2 = -A_{12}^1 \cdot a^2 = A_{12}^2 \cdot a^1 = 0$$

Le seul moyen de valider toutes ces égalités est d'annuler simultanément toutes les composantes; ce qui aboutit à l'annulation de toute la matrice triviale ${}^{(2)}[P]$, y compris sa partie antisymétrique. Ce qui finit de démontrer la proposition. \square

Corollaire 2.1.1. *Concernant la proposition sur les coeurs triviaux bâtis sur des cubes (2-2-2) antisymétriques.*

En revanche, il existe des matrices triviales totalement antisymétriques dans $M(3, \mathbb{R})$; par exemple et tout simplement : les matrices représentant les rotations!

La proposition précédente légitime alors de se demander si les matrices triviales obtenues par le processus de montée de la dimension deux à la dimension trois fournissent en particulier des matrices antisymétriques.

Pour le savoir, je considère le formalisme générique des matrices triviales ${}^{(3)}[P]$ et je tente d'antisymétriser les composantes situées en dehors de la diagonale; la manoeuvre consiste à poser simultanément :

$$A_{12}^1 \cdot a^1 = A_{12}^2 \cdot a^2$$

$$A_{13}^1 \cdot a^1 + A_{23}^1 \cdot a^2 = A_{12}^3 \cdot a^2$$

$$A_{13}^2 \cdot a^1 + A_{23}^2 \cdot a^2 = -A_{12}^3 \cdot a^1$$

La *couverture* du cube antisymétrique (2-2-2) qui sert de noyau au cube antisymétrique (3-3-3) contient sept composantes (colorées en bleu dans ce document, pour la pédagogie). Comme déjà expliqué plus haut, les composantes de la couverture, ajoutées au deux du vecteur déformant $^{(2)}\mathbf{A}$, contribuent à constituer la matrice déformante $^{(3)}[\mathbf{A}]$ agissant dans les espaces de dimension trois. Dans cette théorie, le processus de montée de la dimension deux à la dimension trois s'effectue en partant du principe que les données du problème contiennent ces sept composantes supplémentaires ; dit autrement : elles sont supposées connues et ne sont pas à rechercher.

Toutefois, l'antisymétrisation forcée de la matrice triviale $^{(3)}[\mathbf{P}]$ introduit de facto des conditions reliant ces sept composantes entre elles, indépendamment des valeurs des composantes du projectile $^{(2)}\mathbf{a}$.

Démonstration. Les relations imposées précédentes s'écrivent aussi :

$$A_{12}^1 \cdot a^1 = A_{12}^2 \cdot a^2$$

$$A_{13}^1 \cdot a^1 = (A_{12}^3 - A_{23}^1) \cdot a^2$$

$$A_{23}^2 \cdot a^2 = -(A_{13}^2 + A_{12}^3) \cdot a^1$$

Ainsi, à supposer que les deux composantes non nulles du projectile $^{(3)}\mathbf{a}$ soient quelconques, la première relation d'antisymétrisation forcée indique que les deux composantes du vecteur déformant $^{(2)}\mathbf{A}$ sont liées :

$$A_{12}^2 = A_{12}^1 \cdot \frac{a^1}{a^2}, a^2 \neq 0$$

Et, en multipliant la deuxième par la troisième, que cinq des sept composantes de la couverture sont reliées entre elles via la relation :

$$A_{13}^1 \cdot A_{23}^2 = (A_{23}^1 - A_{12}^3) \cdot (A_{13}^2 + A_{12}^3)$$

□

2.1.6 Perspective d'application physique à l'électromagnétisme.

Ce bref aperçu entrouvre la porte sur ce qui constitue l'objectif ultime de ce document : l'étude de la version covariante de la loi de Lorentz ; elle sera examinée en détail après l'exploration de la montée de la dimension trois à la dimension quatre.

Le simple fait que la matrice triviale $^{(3)}[\mathbf{P}]$ puisse se décomposer plausiblement en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$^{(3)}[\mathbf{P}]$$

=

$$\begin{bmatrix} A_{12}^1 \cdot a^2 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12}^2 \cdot a^1 & 0 \\ 0 & 0 & (A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2) \end{bmatrix} \\ + \\ \begin{bmatrix} 0 & A_{12}^1 \cdot a^1 & A_{13}^1 \cdot a^1 + A_{23}^1 \cdot a^2 \\ -A_{12}^2 \cdot a^2 & 0 & A_{13}^2 \cdot a^1 + A_{23}^2 \cdot a^2 \\ -A_{12}^3 \cdot a^2 & A_{12}^3 \cdot a^1 & 0 \end{bmatrix}$$

... suggère en effet d'appliquer ces considérations générales aux cas particuliers de matrices antisymétriques de $M(3, \mathbb{R})$ représentant des champs magnétiques $({}^{(3)}\mathbf{a} = {}^{(3)}\mathbf{H})$ tels que, lorsque les relations d'antisymétrisation forcées sont valides :

$${}_{[A]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) = \begin{bmatrix} 0 & A_{12}^1 \cdot H^1 & A_{12}^3 \cdot H^2 \\ -A_{12}^1 \cdot H^1 & 0 & -A_{12}^3 \cdot H^1 \\ -A_{12}^3 \cdot H^2 & A_{12}^3 \cdot H^1 & 0 \end{bmatrix}$$

Lorsque cette suggestion est sensée, elle permet d'écrire :

$${}^{(3)}[P] = \begin{bmatrix} A_{12}^1 \cdot H^2 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12}^2 \cdot H^1 & 0 \\ 0 & 0 & (A_{13}^3 \cdot H^1 + A_{23}^3 \cdot H^2) \end{bmatrix} + {}_{[A]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H})$$

De sorte que si la cible $({}^{(3)}\mathbf{b})$ est identifiée intentionnellement avec la vitesse $({}^{(3)}\mathbf{v})$ d'une particule physique, le produit tensoriel déformé par la matrice $[A]$ de la paire $({}^{(3)}\mathbf{H}, {}^{(3)}\mathbf{v})$ accepte des décompositions triviales résultant d'un usage de la méthode dite des poupées russes (voir leur formalisme au niveau du théorème 2.1.1) telles que :

$$\begin{aligned} & | \otimes_{[A]} ({}^{(3)}\mathbf{H}, {}^{(3)}\mathbf{v}) \rangle \\ & = \\ & {}^{(3)}[P] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{v}\rangle \\ & = \\ & \begin{bmatrix} A_{12}^1 \cdot H^2 & 0 & 0 \\ 0 & A_{12}^2 \cdot H^1 & 0 \\ 0 & 0 & (A_{13}^3 \cdot H^1 + A_{23}^3 \cdot H^2) \end{bmatrix} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{v}\rangle + {}_{[A]}\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot |{}^{(3)}\mathbf{v}\rangle \end{aligned}$$

Si je devais écrire une *version relativiste* de la loi de Lorentz classique exprimée dans un espace de dimension trois pour une particule physique de masse m portant la charge électrique q , je proposerais a priori l'expression suivante dans laquelle le symbole Γ^3_2 désignerait les symboles de Christoffel de la seconde espèce dans un espace de dimension trois :

$$m \cdot \left\{ \frac{d({}^{(3)}\mathbf{v})}{dt} + \otimes_{\Gamma^3_2} ({}^{(3)}\mathbf{v}, {}^{(3)}\mathbf{v}) \right\} = q \cdot ({}^{(3)}\mathbf{E} + q \cdot ({}^{(3)}\mathbf{v} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{H}))$$

... et l'intuition selon laquelle il existe un lien rationnel entre cette formulation réduite aux espaces de dimension trois et mes réflexions sur les décompositions triviales naîtrait progressivement en moi.

2.1.7 Bilan intermédiaire

Lorsqu'elle est appliquée à la montée de la dimension deux à la dimension trois et que les cubes sont entièrement antisymétriques, la méthode mathématique dite des poupées russes livre les résultats suivants :

1. Les décompositions triviales dans les espaces bi- et tridimensionnels sont bien comprises et balisées : voir [[a]] et ce document ; la méthode permet de découvrir les cinq composantes inconnues de la décomposition triviale caractérisant les situations tridimensionnelles à l'aide des données bidimensionnelles connues aussi longtemps que les prémisses du théorème 2.1.1 sont réalisées. Les décompositions triviales des espaces bidimensionnels peuvent être quelconques ou à la rigueur symétrique mais jamais antisymétriques. Celles des espaces tridimensionnels peuvent comporter une partie antisymétrique ; une caractéristique ouvrant des perspectives d'application à la physique de l'électromagnétisme.
2. La méthode permet aussi de découvrir les cinq composantes inconnues de la décomposition non-triviale caractérisant les situations tridimensionnelles à l'aide des données bidimensionnelles connues aussi longtemps que la montée en dimension trois concerne des restes dont la prolongation a une composante nulle (i. e. : $z^3 = 0$) : voir les remarques 2.1.5 et 2.1.7.

2.2 Le cas des cubes (2-2-2) symétriques.

Ces situations seront étudiées ultérieurement.

2.3 Le cas des cubes (2-2-2) quelconques.

Ces situations seront étudiées ultérieurement.

Chapitre 3

De la dimension trois à la dimension quatre.

3.1 Rappel des motivations physiques.

Ce chapitre poursuit la montée d'un cran et souhaite a priori examiner les divers types de cubes (3-3-3) de départ : antisymétriques, symétriques puis quelconques. L'exploration est menée en gardant en tête que :

1. L'objectif ultime est d'analyser la version covariante de la loi de Lorentz dans un contexte la présentant comme une illustration-type des produits tensoriels déformés et décomposés non-trivialement.
2. Cette loi met en jeu des cubes (4-4-4) constitués à l'aide des symboles de Christoffel de la seconde espèce dont les indices bas ont la caractéristique d'être inversibles sans changer la valeur de ces symboles (je dis qu'ils sont symétriques sur leurs indices bas ou symétriques tout court).
3. Il existe des règles précises de passage permettant de convertir cette loi en un produit tensoriel déformé par un cube entièrement antisymétrique sur ses indices bas et vis-versa.

3.2 Le cas des cubes (3-3-3) de départ antisymétriques.

Remarque 3.2.1. *Existence de décompositions triviales de $M(3, R)$ entièrement antisymétriques issues d'un processus de montée de la dimension deux à la dimension trois.*

Puisque la version covariante de la loi de Lorentz fait apparaître la représentation tensorielle mixte dite (up, down) du champ électromagnétique (EM) sous la forme de la matrice générique entièrement antisymétrique :

$$[F_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$$

... qui comporte un coeur :

$${}_{[J]}\Phi^{(3)}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -H^3 & H^2 \\ H^3 & 0 & -H^1 \\ -H^2 & H^1 & 0 \end{bmatrix}$$

clairement identifiable à une matrice entièrement antisymétrique de $M(3, \mathbb{R})$ - voir de $M(3, \mathbb{R})$ en physique-, je me demande dans quel(s) cas ce coeur est lui-même une décomposition obtenue au cours d'un processus de montée à la dimension trois ayant impliqué un cube (2-2-2) de départ antisymétrique ?

Or (i) le chapitre 2 de ce document a montré que les décompositions triviales des produits tensoriels effectués sur $E(2, \mathbb{R})$ et déformés par un cube (2-2-2) de départ antisymétrique ne peuvent jamais être antisymétriques (démonstration de la proposition 2.1.2); (ii) le corollaire 2.1.1 montre que les décompositions triviales obtenues dans ce cas par le processus de montée à la dimension trois comportent une partie antisymétrique; (iii) la partie symétrique de ces décompositions peut être annulée et la décomposition triviale peut être réduite à sa partie antisymétrique lorsque la relation :

$$A_{12}^1 \cdot a^2 = A_{12}^2 \cdot a^1 = A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2 = 0$$

s'ajoute à celles-ci (rappel) :

$$\begin{aligned} A_{12}^1 \cdot a^1 &= A_{12}^2 \cdot a^2 \\ A_{13}^1 \cdot a^1 &= (A_{12}^3 - A_{23}^1) \cdot a^2 \\ A_{23}^2 \cdot a^2 &= -(A_{13}^2 + A_{12}^3) \cdot a^1 \end{aligned}$$

Il y a donc au moins deux moyens de valider les deux premières relations précédentes :

$$\forall^{(2)}\mathbf{A} : {}^{(2)}\mathbf{a} = {}^{(2)}\mathbf{0}$$

ou :

$$\forall^{(2)}\mathbf{a} : {}^{(2)}\mathbf{A} = {}^{(2)}\mathbf{0}$$

Dans les deux cas, la décomposition triviale obtenue en dimension deux est nulle; cependant, seule la seconde éventualité n'annule pas toutes les matrices en jeu puisque les prémisses du théorème 2.1.1 imposent $\mathbf{a}^3 = 0$. La décomposition triviale obtenue à partir de ce coeur nul par le processus de montée expliqué au chapitre 2 est la matrice antisymétrique :

$${}^{(3)}[P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{12}^3 \cdot a^2 \\ 0 & 0 & -A_{12}^3 \cdot a^1 \\ -A_{12}^3 \cdot a^2 & A_{12}^3 \cdot a^1 & 0 \end{bmatrix} = A_{12}^3 \cdot {}_{[J]}\Phi^{(3)}\mathbf{a}$$

telle que, simultanément :

$$\begin{aligned} \forall^{(3)}\mathbf{a} : (a^1, a^2, 0) &\neq {}^{(3)}\mathbf{0} \\ {}^{(2)}\mathbf{A} &= {}^{(2)}\mathbf{0} \\ A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{13}^1 \cdot a^1 &= (A_{12}^3 - A_{23}^1) \cdot a^2 \\ A_{23}^2 \cdot a^2 &= -(A_{13}^2 + A_{12}^3) \cdot a^1 \end{aligned}$$

Ainsi, en restant dans le cadre d'une montée n'impliquant que des cubes entièrement antisymétriques, en partant d'un cube (2-2-2) nul et en identifiant le projectile avec un champ magnétique contraint à être dans un plan $(^{(3)}\mathbf{a} = ^{(3)}\mathbf{H})$, la méthode des poupées russes permet d'obtenir la représentation habituelle d'un champ magnétique, au facteur A_{12}^3 près.

La matrice déformante issue de l'antisymétrisation du cube (3-3-3) englobant le cube (2-2-2) nul dépend des composantes du projectile (supposé non nul) :

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \\ A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A_{12}^3 \\ A_{23}^1 & -\frac{a^1}{a^2} \cdot (A_{13}^2 + A_{12}^3) & -\frac{a^1}{a^2} \cdot A_{13}^3 \\ \frac{a^2}{a^1} \cdot (A_{12}^3 - A_{23}^1) & A_{13}^2 & A_{13}^3 \end{bmatrix}$$

Des sept composantes supplémentaires, il n'en reste plus que quatre à être indépendantes. La dépendance entre la matrice déformante et le projectile se traduit au niveau de l'application à la version covariante de la loi de Lorentz par la phrase : "Une partie des composantes de la connexion de spin dépend du champ magnétique".

Remarque 3.2.2. *Comptages des composantes des cubes.*

La couverture d'un cube (3-3-3) quelconque est constitué par les composantes du cube (4-4-4) l'englobant et comportant un, deux ou trois indices nuls ; concrètement il s'agit de :

$$\forall \alpha = 0, 1, 2, 3 :$$

$$A_{00}^\alpha, A_{01}^\alpha, A_{02}^\alpha, A_{03}^\alpha, A_{10}^\alpha, A_{20}^\alpha, A_{30}^\alpha$$

et de :

$$A_{11}^0, A_{12}^0, A_{13}^0, A_{21}^0, A_{31}^0, A_{22}^0, A_{23}^0, A_{32}^0, A_{33}^0$$

Pour être certain d'avoir effectué un recensement complet des composantes de cette couvertures il suffit de se souvenir qu'un cube (4-4-4) a $4^3 = 64$ composantes et qu'un cube (3-3-3) a $3^3 = 27$ composantes. La couverture en compte donc $64 - 27 = 37$ composantes. Or la première ligne de l'énumération contient 4 fois 7 composantes, soit 28 au total, et la seconde ligne en contient 9 ; de fait $28 + 9 = 37$. Donc le compte est bon.

Dans le cas d'un noyau (3-3-3) antisymétrique, il ne reste que neuf composantes (en dehors de la composante nulle) représentés par la matrice $^{(3)}[A]$ déjà introduite plus tôt dans ce document. Jusqu'à preuve du contraire, la nature du noyau ne détermine pas celle de la couverture ; il en résulte que les composantes de la couverture peuvent être quelconques, symétriques ou antisymétriques.

Ici j'ai choisi de travailler avec des cubes entièrement antisymétriques ; donc leurs couvertures le sont aussi. Le nombre de leurs composantes se réduit à $(7 - 1)$ fois 4 mais divisé par 2, soit 12 composantes pour la première ligne de l'énumération ; plus $(9 - 3)$ divisé par 2, soit 3 composantes pour la seconde ligne. Au total, une couverture antisymétrique contient $12 + 3 = 15$ composantes. En

fin de course, un cube (4-4-4) entièrement antisymétrique contient 9 plus 15 = 24 composantes. La manière de les représenter de façon condensée et efficiente dans le cadre de cette exploration reste un sujet ouvert. Des éléments de réponse sont donnés plus loin dans ce document.

Remarque 3.2.3. *Le système à étudier.*

Soit la généralisation de la remarque 2.1.5

$$\begin{aligned}
 & | \otimes_A ({}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{b}) > \\
 & = \\
 & | A_{\chi\beta}^\alpha \cdot a^\chi \cdot b^\beta > \\
 & = \\
 & | \sum_{\chi < \beta} A_{\chi\beta}^\alpha \cdot a^\chi \cdot b^\beta + \sum_{\chi = \beta} A_{\chi\beta}^\alpha \cdot a^\chi \cdot b^\beta + \sum_{\chi > \beta} A_{\chi\beta}^\alpha \cdot a^\chi \cdot b^\beta > \\
 & = 1 \\
 & | \sum_{\chi < \beta} A_{\chi\beta}^\alpha \cdot (a^\chi \cdot b^\beta - a^\beta \cdot b^\chi) >
 \end{aligned}$$

Chacune des quatre composantes ($\alpha = 0, 1, 2, 3$) du produit tensoriel déformé par le cube antisymétrique A est maintenant une somme de six termes dont les trois premiers sont ceux apparus dans le cadre d'une discussion en dimension trois.

$$\begin{aligned}
 & | A_{12}^\alpha \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^\alpha \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^\alpha \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\
 & + A_{01}^\alpha \cdot (a^0 \cdot b^1 - a^1 \cdot b^0) + A_{02}^\alpha \cdot (a^0 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^0) + A_{03}^\alpha \cdot (a^0 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^0) >
 \end{aligned}$$

Chacune peut être factorisée en une combinaison linéaire des composantes de la cible ${}^{(4)}\mathbf{b}$ dans laquelle, cette fois-ci, chaque coefficient est une combinaison linéaire non pas de deux mais de trois des quatre composantes du projectile ${}^{(4)}\mathbf{a}$:

$$\begin{aligned}
 & | - (A_{01}^\alpha \cdot a^1 + A_{02}^\alpha \cdot a^2 + A_{03}^\alpha \cdot a^3) \cdot b^0 + (A_{01}^\alpha \cdot a^0 - A_{12}^\alpha \cdot a^2 - A_{13}^\alpha \cdot a^3) \cdot b^1 \\
 & + (A_{02}^\alpha \cdot a^0 + A_{12}^\alpha \cdot a^1 - A_{23}^\alpha \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{03}^\alpha \cdot a^0 + A_{13}^\alpha \cdot a^1 + A_{23}^\alpha \cdot a^2) \cdot b^3 >
 \end{aligned}$$

A noter : ces calculs se laissent aisément généraliser dans le cadre d'une montée de la dimension D à la dimension D + 1. Pour l'heure, la théorie que j'étudie se demande si ce produit se laisse décomposer génériquement de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z^0 \\ z^1 \\ z^2 \\ z^3 \end{bmatrix}$$

1. Il faut prendre en compte le fait que :

$$A_{\chi\beta}^\alpha + A_{\beta\chi}^\alpha = 0$$

3.2. LE CAS DES CUBES (3-3-3) DE DÉPART ANTISYMMÉTRIQUES.

... lorsque le projectile et la cible ont été *prolongés* comme suit :

$${}^{(3)}\mathbf{a} : (a^1, a^2, a^3) \rightarrow {}^{(4)}\mathbf{a} : (a^0, a^1, a^2, a^3)$$

$${}^{(3)}\mathbf{b} : (b^1, b^2, b^3) \rightarrow {}^{(4)}\mathbf{b} : (b^0, b^1, b^2, b^3)$$

... et qu'une réponse à la question (E) est connue pour l'espace tridimensionnel contenu dans l'espace de dimension quatre où cette question est à nouveau posée; c'est-à-dire ... et que les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} A_{12}^1 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^1 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^1 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^2 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^2 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^2 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \\ A_{12}^3 \cdot (a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1) + A_{13}^3 \cdot (a^1 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^1) + A_{23}^3 \cdot (a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2) \end{array} \right] \\ & = \\ & \left[\begin{array}{ccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Si le produit tensoriel déformé par le cube (4-4-4) A antisymétrique se laissait décomposer de la manière proposée ci-dessus, alors il faudrait écrire les relations :

$$\begin{aligned} & -(A_{01}^0 \cdot a^1 + A_{02}^0 \cdot a^2 + A_{03}^0 \cdot a^3) \cdot b^0 + (A_{01}^0 \cdot a^0 - A_{12}^0 \cdot a^2 - A_{13}^0 \cdot a^3) \cdot b^1 \\ & + (A_{02}^0 \cdot a^0 + A_{12}^0 \cdot a^1 - A_{23}^0 \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{03}^0 \cdot a^0 + A_{13}^0 \cdot a^1 + A_{23}^0 \cdot a^2) \cdot b^3 \\ & = \\ & p_{00} \cdot b^0 + p_{01} \cdot b^1 + p_{02} \cdot b^2 + p_{03} \cdot b^3 + z^0 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & -(A_{01}^1 \cdot a^1 + A_{02}^1 \cdot a^2 + A_{03}^1 \cdot a^3) \cdot b^0 + (A_{01}^1 \cdot a^0 - A_{12}^1 \cdot a^2 - A_{13}^1 \cdot a^3) \cdot b^1 \\ & + (A_{02}^1 \cdot a^0 + A_{12}^1 \cdot a^1 - A_{23}^1 \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{03}^1 \cdot a^0 + A_{13}^1 \cdot a^1 + A_{23}^1 \cdot a^2) \cdot b^3 \\ & = \\ & p_{10} \cdot b^0 + p_{11} \cdot b^1 + p_{12} \cdot b^2 + p_{13} \cdot b^3 + z^1 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & -(A_{01}^2 \cdot a^1 + A_{02}^2 \cdot a^2 + A_{03}^2 \cdot a^3) \cdot b^0 + (A_{01}^2 \cdot a^0 - A_{12}^2 \cdot a^2 - A_{13}^2 \cdot a^3) \cdot b^1 \\ & + (A_{02}^2 \cdot a^0 + A_{12}^2 \cdot a^1 - A_{23}^2 \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{03}^2 \cdot a^0 + A_{13}^2 \cdot a^1 + A_{23}^2 \cdot a^2) \cdot b^3 \\ & = \\ & p_{20} \cdot b^0 + p_{21} \cdot b^1 + p_{22} \cdot b^2 + p_{23} \cdot b^3 + z^2 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & -(A_{01}^3 \cdot a^1 + A_{02}^3 \cdot a^2 + A_{03}^3 \cdot a^3) \cdot b^0 + (A_{01}^3 \cdot a^0 - A_{12}^3 \cdot a^2 - A_{13}^3 \cdot a^3) \cdot b^1 \\ & + (A_{02}^3 \cdot a^0 + A_{12}^3 \cdot a^1 - A_{23}^3 \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{03}^3 \cdot a^0 + A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2) \cdot b^3 \\ & = \\ & p_{30} \cdot b^0 + p_{31} \cdot b^1 + p_{32} \cdot b^2 + p_{33} \cdot b^3 + z^3 \end{aligned}$$

Or l'hypothèse consistant à dire que la question (E) possède au moins une réponse validée dans l'espace de dimension trois contenu dans celui de dimension quatre où la discussion a été étendue signifie que les relations suivantes sont validées :

$$\begin{aligned} & (-A_{12}^1 \cdot a^2 - A_{13}^1 \cdot a^3) \cdot b^1 + (A_{12}^1 \cdot a^1 - A_{23}^1 \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{13}^1 \cdot a^1 + A_{23}^1 \cdot a^2) \cdot b^3 \\ & = \\ & p_{11} \cdot b^1 + p_{12} \cdot b^2 + p_{13} \cdot b^3 + z^1 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & (-A_{12}^2 \cdot a^2 - A_{13}^2 \cdot a^3) \cdot b^1 + (A_{12}^2 \cdot a^1 - A_{23}^2 \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{13}^2 \cdot a^1 + A_{23}^2 \cdot a^2) \cdot b^3 \\ & = \\ & p_{21} \cdot b^1 + p_{22} \cdot b^2 + p_{23} \cdot b^3 + z^2 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & (-A_{12}^3 \cdot a^2 - A_{13}^3 \cdot a^3) \cdot b^1 + (A_{12}^3 \cdot a^1 - A_{23}^3 \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{13}^3 \cdot a^1 + A_{23}^3 \cdot a^2) \cdot b^3 \\ & = \\ & p_{31} \cdot b^1 + p_{32} \cdot b^2 + p_{33} \cdot b^3 + z^3 \end{aligned}$$

Donc, en injectant ces informations dans le système exprimant la décomposition dont l'existence est présupposée en dimension quatre, il reste les relations :

$$\begin{aligned} & -(A_{01}^0 \cdot a^1 + A_{02}^0 \cdot a^2 + A_{03}^0 \cdot a^3) \cdot b^0 + (A_{01}^0 \cdot a^0 - A_{12}^0 \cdot a^2 - A_{13}^0 \cdot a^3) \cdot b^1 \\ & + (A_{02}^0 \cdot a^0 + A_{12}^0 \cdot a^1 - A_{23}^0 \cdot a^3) \cdot b^2 + (A_{03}^0 \cdot a^0 + A_{13}^0 \cdot a^1 + A_{23}^0 \cdot a^2) \cdot b^3 \\ & = \\ & p_{00} \cdot b^0 + p_{01} \cdot b^1 + p_{02} \cdot b^2 + p_{03} \cdot b^3 + z^0 \end{aligned}$$

Et :

$$p_{10} \cdot b^0 = -(A_{01}^1 \cdot a^1 + A_{02}^1 \cdot a^2 + A_{03}^1 \cdot a^3) \cdot b^0 + A_{01}^1 \cdot a^0 \cdot b^1 + A_{02}^1 \cdot a^0 \cdot b^2 + A_{03}^1 \cdot a^0 \cdot b^3$$

Et :

$$p_{20} \cdot b^0 = -(A_{01}^2 \cdot a^1 + A_{02}^2 \cdot a^2 + A_{03}^2 \cdot a^3) \cdot b^0 + A_{01}^2 \cdot a^0 \cdot b^1 + A_{02}^2 \cdot a^0 \cdot b^2 + A_{03}^2 \cdot a^0 \cdot b^3$$

Et :

$$p_{30} \cdot b^0 = -(A_{01}^3 \cdot a^1 + A_{02}^3 \cdot a^2 + A_{03}^3 \cdot a^3) \cdot b^0 + A_{01}^3 \cdot a^0 \cdot b^1 + A_{02}^3 \cdot a^0 \cdot b^2 + A_{03}^3 \cdot a^0 \cdot b^3$$

Ces relations constituent le système à étudier et à résoudre.

3.3 Les solutions lorsque le cube (3-3-3) de départ est antisymétrique.

3.3.1 Quand la prolongation du reste de la décomposition est nulle.

Remarque 3.3.1. *Les solutions spécifiques.*

Comme au cours de la montée de la dimension deux à la dimension trois, il existe un ensemble de solutions simples à énoncer lorsque la prolongation du reste de la décomposition est nul ; in extenso : lorsque $z^0 = 0$. Et ce constat se laisse généraliser aisément dans le cadre d'une montée de la dimension D à la dimension D + 1. En effet, dans ce cas, le système à étudier suggère que :

$$\begin{aligned} p_{00} &= -(A_{01}^0 \cdot a^1 + A_{02}^0 \cdot a^2 + A_{03}^0 \cdot a^3) \\ p_{01} &= A_{01}^0 \cdot a^0 - A_{12}^0 \cdot a^2 - A_{13}^0 \cdot a^3 \\ p_{02} &= A_{02}^0 \cdot a^0 + A_{12}^0 \cdot a^1 - A_{23}^0 \cdot a^3 \\ p_{03} &= A_{03}^0 \cdot a^0 + A_{13}^0 \cdot a^1 + A_{23}^0 \cdot a^2 \end{aligned}$$

tandis que les composantes p_{10} , p_{20} , p_{30} sont clairement exprimées par les trois dernières relations aussi longtemps que la prolongation de la cible n'est pas nulle ($b^0 \neq 0$) :

$$\begin{aligned} p_{10} &= \\ &= \\ &= -(A_{01}^1 \cdot a^1 + A_{02}^1 \cdot a^2 + A_{03}^1 \cdot a^3) + \frac{a^0}{b^0} \cdot \{A_{01}^1 \cdot b^1 + A_{02}^1 \cdot b^2 + A_{03}^1 \cdot b^3\} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} p_{20} &= \\ &= \\ &= -(A_{01}^2 \cdot a^1 + A_{02}^2 \cdot a^2 + A_{03}^2 \cdot a^3) + \frac{a^0}{b^0} \cdot \{A_{01}^2 \cdot b^1 + A_{02}^2 \cdot b^2 + A_{03}^2 \cdot b^3\} \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} p_{30} &= \\ &= \\ &= -(A_{01}^3 \cdot a^1 + A_{02}^3 \cdot a^2 + A_{03}^3 \cdot a^3) + \frac{a^0}{b^0} \cdot \{A_{01}^3 \cdot b^1 + A_{02}^3 \cdot b^2 + A_{03}^3 \cdot b^3\} \end{aligned}$$

Remarque 3.3.2. *Commentaires.*

Bien que le but recherché soit atteint, je compléterai cette sous-section par quelques commentaires :

1. **Il existe un étrange tétraèdre lié au projectile** : Lorsque la prolongation du reste est nul, la résolution de la question (E) par une méthode de montée de la dimension trois à la dimension quatre, dite "des poupées russes", s'accompagne du constat que le projectile ${}^{(4)}\mathbf{a}$ se "positionne" à l'intersection de quatre plans : chacun d'entre eux étant défini dans un des quatre sous-espaces de dimension trois contenu dans l'espace de dimension quatre où cette discussion prend place.

2. **Le coin Nord-Ouest et l'aile Nord** de la partie principale de la décomposition, in extenso de la matrice ${}^{(4)}[P]$, se laisse exprimer de la manière suivante :

$${}^{(4)}\nu = \begin{bmatrix} p_{00} \\ p_{01} \\ p_{02} \\ p_{03} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_{01}^0 & -A_{02}^0 & -A_{03}^0 \\ A_{01}^0 & 0 & -A_{12}^0 & -A_{13}^0 \\ A_{02}^0 & A_{12}^0 & 0 & -A_{23}^0 \\ A_{03}^0 & A_{13}^0 & A_{23}^0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

Les six composantes du cube (4-4-4) entièrement antisymétrique A comportant un indice haut nul (i. e. : les $A_{\alpha\beta}^0$ avec $\alpha < \beta$) se répartissent ici au sein d'une matrice antisymétrique de $M(4, \mathbb{R})$ exhibant en dimension quatre un formalisme analogue à celui des matrices de décomposition tri-viales obtenues en dimension trois.

3. **L'aile Ouest** de la matrice ${}^{(4)}[P]$, se laisse exprimer de la manière suivante :

$${}^{(3)}\pi = \begin{bmatrix} p_{10} \\ p_{20} \\ p_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{01}^1 & A_{02}^1 & A_{03}^1 \\ A_{01}^2 & A_{02}^2 & A_{03}^2 \\ A_{01}^3 & A_{02}^3 & A_{03}^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{a^0}{b^0} \cdot b^1 - a^1 \\ \frac{a^0}{b^0} \cdot b^2 - a^2 \\ \frac{a^0}{b^0} \cdot b^3 - a^3 \end{bmatrix}$$

Les neuf composantes du cube (4-4-4) entièrement antisymétrique A comportant un indice bas nul (i. e. : les A_{0k}^j avec $j, k = 1, 2, 3$) se répartissent ici au sein d'une matrice quelconque de $M(3, \mathbb{R})$.

4. **La représentation de la couverture antisymétrique du cube (3-3-3) entièrement antisymétrique.** Le comptage des éléments de cette couverture a été fait au niveau de la remarque 3.1.2 et il a abouti au nombre 15. C'est exactement le nombre de composantes obtenu en additionnant celles des deux matrices apparues ci-dessus. Et effectivement, tous les éléments de la couverture sont répartis sans répétition dans ces deux matrices.

Ainsi, la question de la représentation de la couverture antisymétrique du cube (3-3-3) entièrement antisymétrique est résolue pour le cas où $z^0 = 0$. La réponse qui y est donnée ne relève pas d'un choix arbitraire mais de l'usage volontaire d'une méthode de résolution d'une problématique plus vaste ; en l'occurrence de la méthode des poupées russes pour résoudre la question (E).

Le temps mis à découvrir cette représentation s'explique par le fait qu'elle implique deux matrices et non pas une seule, comme c'était le cas pour les cubes (3-3-3) entièrement antisymétrique. Par convention de l'écriture, je note ces représentations matricielles :

$${}^{(3)}[T] = \begin{bmatrix} A_{01}^1 & A_{02}^1 & A_{03}^1 \\ A_{01}^2 & A_{02}^2 & A_{03}^2 \\ A_{01}^3 & A_{02}^3 & A_{03}^3 \end{bmatrix}$$

3.3. LES SOLUTIONS LORSQUE LE CUBE (3-3-3) DE DÉPART EST ANTISYMMÉTRIQUE.

Et :

$${}^{(4)}[C] = \begin{bmatrix} 0 & -A_{01}^0 & -A_{02}^0 & -A_{03}^0 \\ A_{01}^0 & 0 & -A_{12}^0 & -A_{13}^0 \\ A_{02}^0 & A_{12}^0 & 0 & -A_{23}^0 \\ A_{03}^0 & A_{13}^0 & A_{23}^0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. **Il ne faut pas oublier d'étudier les situations complètement triviales** : Pour être tout à fait complet, cet exposé devrait encore examiner l'ensemble des situations pour lesquelles, la résolution de la question (E) ayant livré une solution triviale dans sa formulation au sein d'un espace tridimensionnel, la méthode de montée aboutit aussi à une solution triviale de la question (E) formulée dans un espace quadimensionnel englobant le précédent.

Lemme 3.3.1. —

La méthode de résolution de la question (E) s'appuyant sur une procédure de montée d'un cran à la dimension supérieure donne des solutions précises dans le cas du passage de la dimension trois à la dimension quatre et que la composante supplémentaire du reste obtenu dans le traitement en dimension trois est nul (i. e. : quand $z^0 = 0$).

L'enveloppe de la partie principale de la décomposition obtenue dans l'espace de dimension trois se constitue de deux vecteurs : l'un de $E(4, \mathbb{R})$ et l'autre de $E(3, \mathbb{R})$:

1. Le premier est constitué du coin Nord-Ouest et de l'aile Nord de la matrice ${}^{(4)}[P]$. Il dépend de la matrice ${}^{(4)}[C]$ et du projectile ${}^{(4)}\mathbf{a}$.

$$|{}^{(4)}\nu\rangle = {}^{(4)}[C] \cdot |{}^{(4)}\mathbf{a}\rangle$$

2. Le second est l'aile Ouest de la matrice ${}^{(4)}[P]$; il dépend de la matrice ${}^{(3)}[T]$ ainsi que des parties spatiales du projectile, ${}^{(3)}\mathbf{a}$, et de la cible, ${}^{(3)}\mathbf{b}$.

$$|{}^{(3)}\pi\rangle = {}^{(3)}[T] \cdot \frac{a^0}{b^0} \cdot {}^{(3)}\mathbf{b} - {}^{(3)}\mathbf{a}$$

3.3.2 Quand la prolongation du reste de la décomposition n'est pas nulle.

Remarque 3.3.3. *Un formalisme possible pour les solutions quand la prolongation du reste n'est pas nulle.*

Je n'ai pas abordé cette éventualité lors de l'étude de la montée de la dimension deux à la dimension trois et c'est une lacune regrettable. Je ne vais plus éviter cette éventualité dans le cadre de la montée de la dimension trois à la dimension quatre.

Lorsque $z^0 \neq 0$, ou plus généralement lorsque la prolongation du reste de la décomposition n'est pas nulle, il semble difficile de résoudre le problème posé sans imposer des contraintes sur la matrice représentant la partie principale de la décomposition non-triviale. Ce qui, le plus souvent, constituerait indéniablement un inconvénient (à cause de la multitude des contraintes possibles :

“Laquelle retenir?”) peut cependant parfois devenir une aubaine; par exemple, la contrainte :

$$\forall \alpha = 0, 1, 2, 3 : p_{0\alpha} = -p_{\alpha 0}$$

introduit bien entendu des dépendances (voir lesquelles plus bas) entre les composantes de l’aile Ouest (p_{10} , p_{20} , p_{30}) et celles de l’aile Nord (p_{01} , p_{02} , p_{03}) ainsi que la nullité du coin Nord-Ouest (le scalaire $p_{00} = 0$) de la matrice recherchée; mais elle permet également de donner une valeur à z^0 :

$$\begin{aligned} & z^0 \\ & = \\ & -(A_{01}^0 \cdot a^1 + A_{02}^0 \cdot a^2 + A_{03}^0 \cdot a^3) \cdot b^0 + (A_{01}^0 \cdot a^0 - A_{12}^0 \cdot a^2 - A_{13}^0 \cdot a^3 + p_{10}) \cdot b^1 \\ & + (A_{02}^0 \cdot a^0 + A_{12}^0 \cdot a^1 - A_{23}^0 \cdot a^3 + p_{20}) \cdot b^2 + (A_{03}^0 \cdot a^0 + A_{13}^0 \cdot a^1 + A_{23}^0 \cdot a^2 + p_{30}) \cdot b^3 \end{aligned}$$

Ainsi, la contrainte particulière introduite ici à titre d’exemple sur le formalisme de la partie principale de la décomposition ⁽⁴⁾[P] réduit le nombre des inconnues à quatre; la méthode étudiée dans ce document permet de les découvrir.

Remarque 3.3.4. Analyse.

Les solutions qui viennent d’être découvertes contiennent quelques informations qui montreront leur intérêt ultérieurement dans le cadre d’une discussion impliquant une transcription de la version covariante de la loi de Lorentz :

1. Interdépendance des composantes spatiales du projectile et de la cible.

Les composantes p_{10} , p_{20} , p_{30} étant supposées connues parce qu’elles seraient imposées par un contexte physique, les trois relations obtenues ci-dessus permettent de disposer d’un système de trois combinaisons linéaires écrites en fonction des composantes spatiales de la cible :

$$\begin{aligned} & \frac{a^0}{b^0} \cdot \{A_{01}^1 \cdot b^1 + A_{02}^1 \cdot b^2 + A_{03}^1 \cdot b^3\} \\ & = \\ & p_{10} + (A_{01}^1 \cdot a^1 + A_{02}^1 \cdot a^2 + A_{03}^1 \cdot a^3) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & \frac{a^0}{b^0} \cdot \{A_{01}^2 \cdot b^1 + A_{02}^2 \cdot b^2 + A_{03}^2 \cdot b^3\} \\ & = \\ & p_{20} + (A_{01}^2 \cdot a^1 + A_{02}^2 \cdot a^2 + A_{03}^2 \cdot a^3) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} & \frac{a^0}{b^0} \cdot \{A_{01}^3 \cdot b^1 + A_{02}^3 \cdot b^2 + A_{03}^3 \cdot b^3\} \\ & = \\ & p_{30} + (A_{01}^3 \cdot a^1 + A_{02}^3 \cdot a^2 + A_{03}^3 \cdot a^3) \end{aligned}$$

Ces relations se laissent condenser sous une forme matricielle :

$$\frac{a^0}{b^0} \cdot {}^{(3)}[T] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{b}\rangle = {}^{(3)}[T] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{a}\rangle + |{}^{(3)}\pi\rangle \quad (3.1)$$

Cette équation donne quelques indications :

3.3. LES SOLUTIONS LORSQUE LE CUBE (3-3-3) DE DÉPART EST ANTISYMMÉTRIQUE.

- Il existe une relation de dépendance particulière entre les composantes spatiales de la cible et du projectile qui annule le vecteur ${}^{(3)}\pi$:

$$\frac{a^0}{b^0} \cdot {}^{(3)}\mathbf{b} = {}^{(3)}\mathbf{a} \Rightarrow {}^{(3)}\pi = {}^{(3)}\mathbf{0}$$

Ce qui veut dire que la partie principale de la décomposition non-triviale a le formalisme :

$${}^{(4)}[P] = \begin{bmatrix} 0 & \langle {}^{(3)}\mathbf{0} | \\ |{}^{(3)}\mathbf{0}\rangle & {}^{(3)}[P] \end{bmatrix}$$

- Lorsque la matrice ${}^{(3)}[T]$ est inversible, il est possible d'exprimer la partie spatiale de la cible en fonction la partie spatiale du projectile et du vecteur ${}^{(3)}\pi$; et vis-versa :

$$|{}^{(3)}[T]\rangle \neq \mathbf{0} \Rightarrow |{}^{(3)}\mathbf{b}\rangle = \frac{b^0}{a^0} \cdot \{ {}^{(3)}[T]^{-1} \cdot {}^{(3)}\pi + {}^{(3)}\mathbf{a} \}$$

- Au cas où les parties spatiales du projectile et de la cible coïncident, mais pas leurs prolongations ($b^0 \neq a^0$), la relation de dépendance générale se réduit à :

$$|{}^{(3)}\mathbf{a}\rangle = |{}^{(3)}\mathbf{b}\rangle \Rightarrow \left(\frac{a^0}{b^0} - 1\right) \cdot {}^{(3)}[T] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{a}\rangle = |{}^{(3)}\pi\rangle$$

Ce qui veut dire que la partie principale de la décomposition non-triviale a le formalisme :

$${}^{(4)}[P] = \begin{bmatrix} 0 & -\left(\frac{a^0}{b^0} - 1\right) \cdot \langle {}^{(3)}\mathbf{a} | \cdot {}^{(3)}[T]^t \\ \left(\frac{a^0}{b^0} - 1\right) \cdot {}^{(3)}[T] \cdot |{}^{(3)}\mathbf{a}\rangle & {}^{(3)}[P] \end{bmatrix}$$

- En général, la partie principale de la décomposition non-triviale a le formalisme :

$${}^{(4)}[P] = \begin{bmatrix} 0 & \langle {}^{(3)}\mathbf{a} - \frac{a^0}{b^0} \cdot {}^{(3)}\mathbf{b} | \cdot {}^{(3)}[T]^t \\ {}^{(3)}[T] \cdot \left| \frac{a^0}{b^0} \cdot {}^{(3)}\mathbf{b} - {}^{(3)}\mathbf{a} \right\rangle & {}^{(3)}[P] \end{bmatrix}$$

2. Concernant la prolongation du reste de la décomposition.

L'injection des valeurs spécifiques des \mathbf{p}_{10} , \mathbf{p}_{20} , \mathbf{p}_{30} dans l'expression de la prolongation du reste (in extenso dans l'expression de \mathbf{z}^0) fournit pour celle-ci un polynome du second degré écrit en fonction des composantes spatio-temporelles de la cible. Celles du projectile et du cube A apparaissent dans les coefficients de ce polynome.

$$\mathbf{z}^0 = Z_{jk}({}^{(4)}\mathbf{a}, A) \cdot b^j \cdot b^k + Z_0({}^{(4)}\mathbf{a}, A) \cdot b^0 + Z({}^{(4)}\mathbf{a}, A) \quad (3.2)$$

Sous certaines conditions liant le projectile, la cible et les composantes du cube, il se peut que ce prolongement soit nul ; auquel cas les résultats de cette sous-section deviennent un sous-cas de ceux traités à la sous-section précédente. Autrement dit : la nullité de la prolongation du reste n'est pas a priori incompatible avec l'existence d'une condition liant les ailes de la matrices ${}^{(4)}[P]$ recherchée.

3.3.3 Quand un coeur trivial livre une décomposition triviale.

Comme indiqué au point 5 des commentaires de la remarque 3.3.2, il reste un ensemble de configurations à explorer ; celles pour lesquelles :

- La résolution de la question (E) en dimension trois a livré une décomposition triviale (équivalamment un reste nul : ${}^{(3)}\mathbf{z} = {}^{(3)}\mathbf{0}$).
- La procédure de montée à la dimension quatre livre à nouveau une décomposition triviale : (équivalamment un reste nul : ${}^{(4)}\mathbf{z} = {}^{(4)}\mathbf{0}$).

Ces configurations pourraient a priori se comprendre comme un cas particulier des propos tenus au cours de la sous-section 3.3.1 puisque la méthode de montée utilisée ici n'impose aucune condition sur la résolution obtenue en dimension trois ; celle-ci a donc éventuellement pu livrer une décomposition triviale.

3.4 Application à la version covariante de la loi de Lorentz.

3.4.1 Lien formel entre la loi de Lorentz et la méthode des poupées russes.

La version covariante de la loi de Lorentz est un produit tensoriel déformé par un cube (4-4-4) entièrement symétrique. Je pars du principe que les symboles de Christoffel de la seconde espèce sont symétriques sur leurs indices, comme c'était le cas dans le travail historique de Christoffel [[14] ; p. 49, (8), en allemand].

$$|{}^{(4)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \otimes_{\Gamma(2)}({}^{(4)}\mathbf{u}, {}^{(4)}\mathbf{u}) > = k \cdot {}^{(4)}[F] \cdot |{}^{(4)}\mathbf{u} > \quad (3.3)$$

Cette équation est tirée de [[15] ; §33, p. 68, (33-1)] ; dans cette expression, il convient de faire attention au fait que :

$${}^{(4)}[F] = {}^{(4)}[F^{\alpha}{}_{\beta}]$$

Ainsi, *cette matrice n'est pas* celle à laquelle la méthode des poupées russes peut s'appliquer. Les règles du calcul tensoriel et la simple observation visuelle enseignent que les matrices pouvant faire l'affaire résultent des produits matriciels :

$${}^{(4)}[G] \cdot {}^{(4)}[F] = = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix} = [F_{\alpha\beta}] = [F_{\downarrow\downarrow}]$$

... où ${}^{(4)}[G]$ est la représentation matricielle du tenseur métrique dans $M(4, \mathbb{R})$ et ${}^{(4)}[G]^{-1}$ est son inverse, quand il existe (ce qui suppose dans ce cas que ${}^{(4)}[G] \neq 0$). À noter que les représentations duales de ces produits feraient également de bonnes candidates.

Ceci ayant été dit, il convient de multiplier l'expression habituelle de la version covariante de la loi de Lorentz à gauche par la représentation du tenseur

3.4. APPLICATION À LA VERSION COVARIANTE DE LA LOI DE LORENTZ.

métrique ; ce qui fournit :

$${}^{(4)}[G] \cdot |{}^{(4)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \otimes_{\Gamma(2)}({}^{(4)}\mathbf{u}, {}^{(4)}\mathbf{u}) > = k \cdot [F_{\alpha\beta}] \cdot |{}^{(4)}\mathbf{u} >$$

Il en résulte, après un petit remaniement :

$${}^{(4)}[G] \cdot \otimes_{\Gamma(2)}({}^{(4)}\mathbf{u}, {}^{(4)}\mathbf{u}) > = k \cdot [F_{\downarrow\downarrow}] \cdot |{}^{(4)}\mathbf{u} > - {}^{(4)}[G] \cdot |{}^{(4)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} >$$

En termes des composantes, le vecteur situé à gauche du signe de l'égalité s'écrit par définition :

$$\forall \alpha = 0, 1, 2, 3 : g_{\alpha\beta} \cdot \Gamma_{\chi\gamma}^{\beta} \cdot u^{\chi} \cdot u^{\gamma}$$

Les composantes du tenseur métrique peuvent être *concaténées* avec les symboles de Christoffel de la seconde espèce pour livrer un cube dont les composantes s'apparentent visiblement aux symboles de Christoffel de la première espèce [[14] ; p. 48, (4)]. Ils sont également symétriques sur leurs indices ; voir [[14] ; p. 48, (5)]. Je noterai donc désormais sans ambiguïté :

$$|\otimes_{\Gamma^4(1)}({}^{(4)}\mathbf{u}, {}^{(4)}\mathbf{u}) > = k \cdot [F_{\downarrow\downarrow}] \cdot |{}^{(4)}\mathbf{u} > - {}^{(4)}[G] \cdot |{}^{(4)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} > \quad (3.4)$$

De sorte que l'utilisation de la méthode des poupées russes a éventuellement un sens en étudiant les décompositions non-triviales de produits tensoriels de la vitesse avec elle-même quand ces produits sont déformés par le cube symétrique des symboles de Christoffel de la première espèce. Les décompositions sont constituées par des paires :

$$\otimes_{\Gamma^4(1)}({}^{(4)}\mathbf{u}, {}^{(4)}\mathbf{u}) \rightarrow (k \cdot [F_{\downarrow\downarrow}], -{}^{(4)}[G] \cdot |{}^{(4)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} >)$$

La suite du document va donc étudier les cubes (3-3-3) entièrement symétriques et leurs couvertures donnant des cubes (4-4-4) entièrement symétriques.

3.4.2 Les situations de départ en dimension trois.

L'idée naive justifiant l'invention et la mise au point de la méthode des poupées russes a une utilité pour la physique s'il existe une version tridimensionnelle de l'équation précédente ; au cas où, elle s'écrit de manière à faire apparaître la décomposition :

$$\otimes_{\Gamma^3(1)}({}^{(3)}\mathbf{u}, {}^{(3)}\mathbf{u}) \rightarrow (k \cdot [{}_J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}), -{}^{(3)}[G] \cdot |{}^{(3)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} >)$$

Autrement dit, elle s'écrit :

$$|\otimes_{\Gamma^3(1)}({}^{(3)}\mathbf{u}, {}^{(3)}\mathbf{u}) > = k \cdot [{}_J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \cdot |{}^{(3)}\mathbf{u} > - {}^{(3)}[G] \cdot |{}^{(3)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} >$$

Et après multiplication sur la gauche par l'inverse de la représentation matricielle de la partie tridimensionnelle du tenseur métrique (supposée non dégénérée) :

$$|\otimes_{\Gamma^3(2)}({}^{(3)}\mathbf{u}, {}^{(3)}\mathbf{u}) + {}^{(3)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} > = k \cdot ({}^{(3)}[G]^{-1} \cdot [{}_J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H})) \cdot |{}^{(3)}\mathbf{u} >$$

Il s'agit encore de :

$$|\otimes_{\Gamma^3(2)}({}^{(3)}\mathbf{u}, {}^{(3)}\mathbf{u}) + {}^{(3)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} \rangle = k \cdot ({}^{(3)}[G]^{-1} \cdot |{}^{(3)}\mathbf{H} \wedge {}^{(3)}\mathbf{u} \rangle$$

Dans un espace tridimensionnel classique, la géométrie est euclidienne et constante (${}^{(3)}[G] = \text{Id}_3 = \text{cte}$) ; les symboles de Christoffel sont donc nuls et l'expression précédente se réduit à :

$${}^{(3)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} = k \cdot ({}^{(3)}\mathbf{H} \wedge {}^{(3)}\mathbf{u})$$

Elle décrit le champ d'accélération (la force) accompagnant le mouvement d'une particule ayant la vitesse spatiale ${}^{(3)}\mathbf{u}$ dans un champ magnétique spatial ${}^{(3)}\mathbf{H}$; autrement dit : elle décrit la force de Laplace [[16] ; pp. 181-188] qui constitue la partie magnétique de la force de Lorentz [[17] ; p. 184, chapitre 6, (6.1)] :

$${}^{(3)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} = k \cdot ({}^{(3)}\mathbf{E} + ({}^{(3)}\mathbf{H} \wedge {}^{(3)}\mathbf{u}))$$

Bilan : la *descente* réalisée de façon intuitive fait disparaître la composante électrique. Ce constat n'étonne qu'à moitié puisque le champ électrique n'apparaît qu'au niveau des *ailes* (Nord et Ouest) de la représentation matricielle $[F_{\downarrow\downarrow}]$. Le coeur de cette représentation est visiblement une décomposition triviale antisymétrique d'un produit vectoriel classique ; il ne dépend que du champ magnétique.

$$[F_{\downarrow\downarrow}] = \begin{bmatrix} 0 & \langle {}^{(3)}\mathbf{E} | \\ -|{}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{bmatrix}$$

L'analyse des situations initiales s'accompagne des remarques et questions suivantes :

1. Si l'application de la méthode des poupées russes à la loi de Laplace a un sens et une utilité physique parce qu'elle redonne la version covariante de la loi de Lorentz (parfois décrite comme la loi de Lorentz-Einstein dans la littérature), c'est que la mise en oeuvre de cette méthode est intrinsèquement capable de rendre compte de (i) la présence d'un champ électrique spatial, ${}^{(3)}\mathbf{E}$, et de (ii) l'existence de variations de la géométrie. Or, ni ce champ électrique, ni les symboles de Christoffel n'apparaissent directement dans la version spatiale classique de la loi de Laplace. Autrement dit, le bon sens pousserait donc préférentiellement à partir de la version classique (synonyme : euclidienne et tridimensionnelle) de la loi de Lorentz puis à en donner une version covariante et enfin à trouver un moyen d'inclure cette loi dans un environnement quadri-dimensionnel. Un schéma logique que j'ai envie de décrire par :

$$\begin{aligned} {}^{(3)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} &= k \cdot \left(\underbrace{{}^{(3)}\mathbf{E}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{{}^{(3)}\mathbf{H} \wedge {}^{(3)}\mathbf{u}}_{\text{Laplace}} \right) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Lorentz classique}} \\ &\quad \downarrow \\ \underbrace{\otimes_{\Gamma^3(2)}({}^{(3)}\mathbf{u}, {}^{(3)}\mathbf{u}) + {}^{(3)}\frac{d\mathbf{u}}{ds}}_{\text{terme covariant en dimension 3}} &= k \cdot ({}^{(3)}\mathbf{E} + ({}^{(3)}\mathbf{H} \wedge {}^{(3)}\mathbf{u})) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \underbrace{\otimes_{\Gamma^4(2)}({}^{(4)}\mathbf{u}, {}^{(4)}\mathbf{u}) + {}^{(4)}\frac{d\mathbf{u}}{ds}}_{\text{terme covariant en dimension 4}} = \underbrace{k \cdot ({}^{(4)}\mathbf{E} + {}^{(4)}\mathbf{H} \wedge {}^{(4)}\mathbf{u})}_{\text{terme douteux}} \end{array}$$

2. Ce schéma inspire les remarques techniques suivantes :

- (a) Le terme ajouté à gauche du signe de l'égalité au niveau de la deuxième ligne doit jouer un rôle similaire à celui qui est rempli par le *terme gravitationnel* apparu dans la version covariante de la loi de Lorentz ; plus clairement : il doit assurer la covariance de l'expression dans laquelle il figure.

Or la somme des deux termes placés à gauche du signe de l'égalité au niveau de la deuxième ligne est bien un objet mathématique pouvant se transformer en suivant les règles du calcul tensoriel comme ceci peut se vérifier à la lecture de [[18] ; p. 11, (18)].

Donc, la version tridimensionnelle de ce terme semble recevable.

- (b) La formulation apparemment logique figurant à droite du signe de l'égalité au niveau de la troisième ligne fait apparaître un champ électrique et un champ magnétique ayant chacun une composante temporelle.

Or, à ce jour, toutes les approches théoriques traitant ces champs ne leur attribuent que trois composantes spatiales. Que ce soit dans le cadre de la relativité restreinte [[19]] ou dans l'approche plus générale de la théorie de la gravitation décrivant l'électromagnétisme à l'aide du langage des formes comme ceci est développé dans [[20]], chacun de ces deux champs n'apparaît dans notre monde euclidien et tridimensionnel qu'au travers de trois composantes au plus.

Il y donc fort à parier que cette ligne est irrecevable ou a minima problématique. D'ailleurs :

- le passage à la formulation mixte impliquant matrices et représentations duales des vecteurs permet d'exprimer le terme situé à droite du signe de l'égalité dans la première ligne dans un environnement mathématique de dimension quatre en respectant (i) la nature tridimensionnelle des deux champs et (ii) le fait que cette matrice se comporte comme un tenseur sous l'action des transformations de Lorentz.
- Suite aux travaux de J. C. Maxwell sur l'électricité et sur le magnétisme [[21]], Morley et Michelson [[22]] et à la synthèse qu'en a réalisé A. Einstein (i. e. : la relativité restreinte), suite aussi à la conséquence de ces travaux sur notre compréhension de ce qu'est le phénomène électromagnétique, ne convient-il pas aujourd'hui de considérer ces deux vecteurs comme les deux branches d'une unique entité mathématique ; à savoir : un bivecteur ?

- (c) Le schéma recevable en l'état actuel des connaissances semble donc être celui-ci :

$$\begin{array}{c} {}^{(3)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} = k \cdot \left(\underbrace{{}^{(3)}\mathbf{E}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{{}^{(3)}\mathbf{H} \wedge {}^{(3)}\mathbf{u}}_{\text{Laplace}} \right) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Lorentz classique}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \\
 \underbrace{\otimes_{\Gamma^3(2)} ({}^{(3)}\mathbf{u}, {}^{(3)}\mathbf{u}) + ({}^{(3)}\frac{d\mathbf{u}}{ds})}_{\text{terme covariant en dimension 3}} = k \cdot ({}^{(3)}\mathbf{E} + ({}^{(3)}\mathbf{H} \wedge ({}^{(3)}\mathbf{u})) \\
 \downarrow \\
 \underbrace{|\otimes_{\Gamma^4(2)} ({}^{(4)}\mathbf{u}, {}^{(4)}\mathbf{u}) + ({}^{(4)}\frac{d\mathbf{u}}{ds})}_{\text{terme covariant en dimension 4}} \rangle = ({}^{(4)}\left[\begin{array}{cc} 0 & \langle ({}^{(3)}\mathbf{E} | \\ -|({}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{array} \right] \cdot |({}^{(4)}\mathbf{u} \rangle
 \end{array}$$

... qui signe ostensiblement un passage à l'espace dual au moment de la montée vers la dimension quatre. Ce qui ouvre tout de même indirectement la question des projections entre un espace et son dual, malgré le fait bien admis que ces deux espaces sont réputés être isomorphiques.

3. Si, indépendamment du fait qu'elle apparaît par nécessité dans la version covariante de la loi de Lorentz, la matrice $[F_{\downarrow\downarrow}]$ était le résultat d'une montée de la dimension trois à la dimension quatre à l'aide de la méthode des poupées russes, les résultats acquis jusqu'à maintenant permettraient de proposer deux pistes de réflexions :

(a) Il existe un cube (3-3-3) entièrement antisymétrique pouvant être inclus dans un cube (4-4-4) également entièrement antisymétrique, soit A ce cube. Et la matrice $[F_{\downarrow\downarrow}]$ est la partie principale de la décomposition non nécessairement triviale du produit tensoriel déformé par ce cube entre une paire $({}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{b})$ d'éléments de l'espace vectoriel $E(4, \mathbb{R})$:

$$\exists A : A_{\chi\beta}^{\alpha} + A_{\beta\chi}^{\alpha} = 0$$

$$\exists ({}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{b}) \in E^2(4, \mathbb{R}) :$$

$$|\otimes_A ({}^{(4)}\mathbf{a}, {}^{(4)}\mathbf{b}) \rangle = k \cdot ({}^{(4)}\left[\begin{array}{cc} 0 & \langle ({}^{(3)}\mathbf{E} | \\ -|({}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{array} \right] \cdot |({}^{(4)}\mathbf{b} \rangle + |({}^{(4)}\mathbf{z} \rangle$$

Dans ce cas, il faut pouvoir trouver une transcription entre cette décomposition non triviale et la version covariante de la loi de Lorentz. Techniquement, cette transcription doit assurer la conversion d'un cube entièrement antisymétrique en un cube entièrement symétrique. Je vais tenter de la découvrir plus loin dans ce document.

(b) Beaucoup plus sophistiqué : la matrice $[F_{\downarrow\downarrow}]$ est le fruit de la double réduction d'un cube (4-4-4) : antisymétrisation des indices bas et des indices latéraux.

$$\exists A : A_{\chi\beta}^{\alpha} + A_{\beta\chi}^{\alpha} = 0 ; A_{\chi\beta}^{\alpha} + A_{\beta\alpha}^{\beta} = 0$$

↓

$$A \rightarrow ({}^{(4)}\left[\begin{array}{cc} 0 & \langle ({}^{(3)}\mathbf{E} | \\ -|({}^{(3)}\mathbf{E} \rangle & [J]\Phi({}^{(3)}\mathbf{H}) \end{array} \right] = ({}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}]$$

Pour l'heure, je ne suis pas en mesure de développer cette piste.

3.4.3 La piste du cube (4-4-4) sous-jacent entièrement antisymétrique.

Je vais maintenant tenter de donner corps à l'hypothèse de travail suggérée à la sous-section précédente.

Si l'idée et la relation proposées sont recevables, alors la partie principale de la décomposition, en l'occurrence ici $[F_{\downarrow\downarrow}]$, est visiblement une matrice antisymétrique. En particulier ses ailes satisfont donc naturellement la condition introduite pour la pédagogie au niveau de la remarque 3.3.3 : $p_{0\alpha} = -p_{\alpha 0}$.

Comme analysé en détail tout au long de la section 3.3, la montée en dimension quatre peut - ou non- s'accompagner de la nullité de la composante temporelle du reste, z^0 , et cette nullité éventuelle n'exclut pas l'existence de la condition d'antisymétrie liant les ailes de la matrice. Je suppose ici a priori que le reste n'est pas nécessairement nul, sans savoir encore exactement ce qu'il représente physiquement.

L'hypothèse étudiée implique aussi que :

$${}^{(3)}\pi = -{}^{(3)}\mathbf{E}$$

Le lemme 3.3.1 reste valable et il fournit grâce à l'analyse menée au niveau de la remarque 3.3.4, page 39 :

$$|{}^{(3)}\mathbf{E}\rangle = -{}^{(3)}[T] \cdot \left| \frac{a^0}{b^0} \cdot {}^{(3)}\mathbf{b} - {}^{(3)}\mathbf{a} \right\rangle$$

Il n'est pas possible d'aller beaucoup plus loin tant que la transcription entre la relation proposée et la version covariante de la loi de Lorentz ne sera pas connue et analysée. Il existe vraisemblablement un nombre infini de façons de le faire.

De manière à dégrossir le sujet, je propose d'examiner les cas pour lesquels il existe un lien entre la cible ${}^{(4)}\mathbf{b}$ (signification inconnue à ce stade de l'exposé) et le projectile que je décide arbitrairement d'identifier avec la vitesse ${}^{(4)}\mathbf{a} = {}^{(4)}\mathbf{u}$, tel que :

$$|{}^{(4)}\mathbf{b}\rangle = {}^{(4)}[U] \cdot |{}^{(4)}\mathbf{u}\rangle + |{}^{(4)}\rho\rangle \iff b^\beta = U_\epsilon^\beta \cdot u^\epsilon + \rho^\beta \quad (3.5)$$

Proposition 3.4.1. *La transcription est recevable.*

Démonstration. Soit un produit de Lie déformé par un cube (4-4-4) entièrement antisymétrique A : (i) faisant interagir une vitesse avec une de ses transformées par la paire $({}^{(4)}[U], {}^{(4)}\rho)$; (ii) se décomposant de manière non triviale au travers de la paire $({}^{(4)}[P] = k \cdot {}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}], {}^{(4)}\mathbf{z})$.

$$A_{\alpha\beta}^\chi \cdot u^\alpha \cdot b^\beta = p_{\chi\beta} \cdot b^\beta + z^\chi; A_{\alpha\beta}^\chi + A_{\beta\alpha}^\chi = 0$$

↓

$$A_{\alpha\beta}^\chi \cdot u^\alpha \cdot (U_\epsilon^\beta \cdot u^\epsilon + \rho^\beta) = p_{\chi\beta} \cdot (U_\epsilon^\beta \cdot u^\epsilon + \rho^\beta) + z^\chi$$

↓

$$A_{\alpha\beta}^X \cdot U_\epsilon^\beta \cdot u^\alpha \cdot u^\epsilon + A_{\alpha\beta}^X \cdot u^\alpha \cdot \rho^\beta = p_{\chi\beta} \cdot U_\epsilon^\beta \cdot u^\epsilon + (p_{\chi\beta} \cdot \rho^\beta + z^\chi)$$

↓²

$$(A_{\alpha\beta}^X \cdot U_\epsilon^\beta) \cdot u^\alpha \cdot u^\epsilon = p_{\chi\beta} \cdot U_\epsilon^\beta \cdot u^\epsilon + A_{\beta\alpha}^X \cdot \rho^\beta \cdot u^\alpha + (p_{\chi\beta} \cdot \rho^\beta + z^\chi)$$

↓³

$$\forall \chi : (A_{\alpha\beta}^X \cdot U_\epsilon^\beta) \cdot u^\alpha \cdot u^\epsilon = (p_{\chi\beta} \cdot U_\epsilon^\beta + A_{\epsilon\beta}^X \cdot \rho^\beta) \cdot u^\epsilon + (p_{\chi\beta} \cdot \rho^\beta + z^\chi)$$

La transcription proposée devrait livrer la relation :

$$|\otimes_{\Gamma^4(1)} ({}^{(4)}\mathbf{u}, {}^{(4)}\mathbf{u}) \rangle = k \cdot [F_{\downarrow\downarrow}] \cdot |{}^{(4)}\mathbf{u} \rangle - {}^{(4)}[G] \cdot |{}^{(4)}\frac{d\mathbf{u}}{ds} \rangle$$

qui, en tenant compte de l'exigence ${}^{(4)}[P] = k \cdot {}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}]$, s'écrit aussi dans le langage des composantes :

$$\forall \chi : (g_{\chi\beta} \cdot \Gamma_{\alpha\epsilon}^\beta) \cdot u^\alpha \cdot u^\epsilon = p_{\chi\epsilon} \cdot u^\epsilon - g_{\chi\epsilon} \cdot \frac{du^\epsilon}{ds}$$

De sorte que si les relations suivantes sont réalisées et compatibles entre elles :

$$A_{\alpha\beta}^X + A_{\beta\alpha}^X = 0$$

$$\Gamma_{\alpha\epsilon}^X = \Gamma_{\epsilon\alpha}^X$$

$$g_{\chi\beta} \cdot \Gamma_{\alpha\epsilon}^\beta = A_{\alpha\beta}^X \cdot U_\epsilon^\beta$$

$$p_{\chi\epsilon} = p_{\chi\beta} \cdot U_\epsilon^\beta + A_{\epsilon\beta}^X \cdot \rho^\beta$$

$$-g_{\chi\epsilon} \cdot \frac{du^\epsilon}{ds} = p_{\chi\beta} \cdot \rho^\beta + z^\chi$$

... alors la proposition est *formellement* démontrée. □

Remarque 3.4.1. *Premiers commentaires.*

Les relations nécessaires découvertes ci-dessus appellent quelques commentaires :

1. La première relation décrit l'antisymétrie sur les indices bas du cube A dont l'existence sous-jacente est présumée.
2. La deuxième relation décrit la symétrie sur les indices bas du cube des symboles de Christoffel de la seconde espèce.
3. La troisième relation donne une règle de passage entre les deux cubes. Il conviendra donc de confronter cette règle avec celles déjà connues en physique; voir plus bas.

2. Je tiens compte de l'antisymétrie sur les indices bas du cube A et du fait que la discussion prend place sur un espace vectoriel $E(4, \mathbb{R})$ bâti sur le corps commutatif des nombres réels.

3. Je tiens compte du fait que l'indice α figurant dans le deuxième terme à droite du signe de l'égalité est muet.

3.4. APPLICATION À LA VERSION COVARIANTE DE LA LOI DE LORENTZ.

4. La formulation de la quatrième relation demande à être précisée; en réinjectant le champ EM, elle se laisse réécrire :

$$k \cdot F_{\chi\beta} \cdot (U_\epsilon^\beta - \delta_\epsilon^\beta) = A_{\beta\epsilon}^\chi \cdot \rho^\beta$$

C'est-à-dire dans le langage matriciel :

$$k \cdot {}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}] \cdot \{{}^{(4)}[U] - Id_4\} = {}_A\Phi({}^{(4)}\rho)$$

Pour l'heure, ni le cube A, ni la matrice ${}^{(4)}[U]$, ni le vecteur ${}^{(4)}\rho$ n'ont d'interprétation physique. Je présume et j'espère que la règle de passage entre les cubes A et ${}^{(4)}\Gamma(2)$ devrait apporter un peu de clarté.

5. Comme la quatrième, la cinquième relation demande à être précisée par réinjection du champ EM dans l'écriture :

$$-g_{\chi\epsilon} \cdot \frac{du^\epsilon}{ds} = k \cdot F_{\chi\beta} \cdot \rho^\beta + z^\chi$$

3.4.4 Rappels concernant la jauge électromagnétique.

En général, il est connu que la version mixte (up, down) de ce tenseur se laisse jauger à l'aide des transformations de Lorentz, notée traditionnellement $[\Lambda]$; voir [[23]; p. 21, (1.75)] :

$${}^{(4)}[F'] = [\Lambda] \cdot {}^{(4)}[F] \cdot [\Lambda]^{-1}$$

Utilisant les règles habituelles du calcul tensoriel connectant les diverses versions du tenseur champ EM via le tenseur métrique, il vient d'abord :

$${}^{(4)}[G]^{-1} \cdot {}^{(4)}[F'_{\downarrow\downarrow}] = [\Lambda] \cdot \{{}^{(4)}[G]^{-1} \cdot {}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}]\} \cdot [\Lambda]^{-1}$$

En multipliant le tout sur la gauche par la représentation matricielle du tenseur métrique et en tenant compte de l'associativité du produit matriciel :

$${}^{(4)}[F'_{\downarrow\downarrow}] = \{{}^{(4)}[G] \cdot [\Lambda] \cdot {}^{(4)}[G]^{-1}\} \cdot {}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}] \cdot [\Lambda]^{-1}$$

Par ailleurs, les transformations de Lorentz préservent les métriques; ce qui se traduit par [[23]; p. 21, (1.77)] :

$${}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^t \cdot {}^{(4)}[G] \cdot [\Lambda(\mathbf{u})] = {}^{(4)}[G]$$

Une multiplication à droite par l'inverse de la représentation matricielle de la métrique donne :

$${}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^t \cdot {}^{(4)}[G] \cdot [\Lambda(\mathbf{u})] \cdot {}^{(4)}[G]^{-1} = Id_4$$

D'où il ressort facilement que :

$${}^{(4)}[G] \cdot [\Lambda(\mathbf{u})] \cdot {}^{(4)}[G]^{-1} = ({}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^t)^{-1}$$

Mais puisque les transformations de Lorentz sont des matrices carrées unitaires (voir définition dans [[13]; p. 34]), elles respectent la *règle d'or* car :

$${}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^t = ({}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^{-1})^t \Rightarrow ({}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^t)^{-1} = ({}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^{-1})^t$$

Il suit :

$${}^{(4)}[G] \cdot [\Lambda(\mathbf{u})] \cdot {}^{(4)}[G]^{-1} = ({}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^{-1})^t$$

Et finalement :

$${}^{(4)}[F'_{\downarrow\downarrow}] = ({}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^{-1})^t \cdot {}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}] \cdot [\Lambda]^{-1}$$

Remarque 3.4.2. *Un lien entre la quatrième relation nécessaire et la jauge électromagnétique.*

Pour mieux comprendre ce que représente physiquement la quatrième relation nécessaire à valider l’usage de la méthode des poupées russes, je propose de commencer par examiner le cas particulier d’un cube (4-4-4) sous-jacent antisymétrique *et antiréduit* ; ce qui veut dire que ses composantes satisfont simultanément :

$$A : \underbrace{A_{\chi\beta}^{\alpha} + A_{\beta\chi}^{\alpha} = 0}_{\text{antisym.}} ; \underbrace{A_{\chi\beta}^{\alpha} + A_{\beta\alpha}^{\beta} = 0}_{\text{antireduc.}}$$

Il est relativement facile de vérifier que ce cube devient un élément ${}^{(4)}\mathbf{a}$ de $E(4, \mathbb{R})$ et que la décomposition la plus triviale d’un produit tensoriel déformé par ce cube très spécial (équivalamment : par ce vecteur) est du type ${}_a\Phi(\text{projectile})$, quel que soit le projectile. Toujours est-il que la propriété d’anti-réduction des composantes du cube permet d’écrire :

$${}_A\Phi({}^{(4)}\rho) + {}_A\Phi^t({}^{(4)}\rho) = {}^{(4)}[0]$$

En tenant compte de l’antisymétrie naturelle de la matrice $[F_{\downarrow\downarrow}]$, cette relation implique que :

$$\forall k : {}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}] \cdot \{{}^{(4)}[U] - Id_4\} - \{{}^{(4)}[U]^t - Id_4\} \cdot {}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}] = {}^{(4)}[0]$$

Ou, équivalamment :

$$\forall k : {}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}] \cdot \{Id_4 - {}^{(4)}[U]\} = \{Id_4 - {}^{(4)}[U]^t\} \cdot {}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}]$$

De sorte que si la différence matricielle apparue dans les premiers commentaires est inversible (ce que je supposerai) :

$${}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}] = \{Id_4 - {}^{(4)}[U]^t\} \cdot {}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}] \cdot \{Id_4 - {}^{(4)}[U]\}^{-1}$$

Le formalisme obtenu dans le cadre de l’étude de la méthode des poupées russes coïncide avec l’équation signant la présence de la jauge électromagnétique quand il est plausible de poser simultanément :

$${}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})] = Id_4 - {}^{(4)}[U]$$

Et :

$$({}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^{-1})^t = Id_4 - {}^{(4)}[U]^t$$

Compte tenu de la règle d’or et de la première relation permettant l’identification, la seconde s’écrit :

$$({}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^t)^{-1} = {}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^t$$

La transposée de la transformation de Lorentz impliquée dans ces identifications doit être égale à son inverse. Mais puisque les transformations de Lorentz sont des matrices carrées (4-4) unitaires (voir définition dans [[13] ; p. 34]), cette seconde exigence se résume à une symétrisation des transformations de Lorentz :

$${}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})] = {}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^t$$

3.4.5 Rappels sur les transformations de Lorentz.

Proposition 3.4.2. *Transformations de Lorentz et décompositions triviales des produits tensoriels déformés par un cube (4-4-4) antisymétrique et antiréduit.*

Certaines transformations de Lorentz se laissent représenter par des décompositions triviales de produits tensoriels déformés par un cube (4-4-4) antisymétrique et antiréduit.

Démonstration. Dans sa représentation dite *vectorielle*, un élément du groupe des transformations de Lorentz $O(1, 3)$ est une matrice (4-4) de $M(4, \mathbb{C})$ obtenue par l'exponentiation des générateurs $[J^{\mu\nu}]$:

$$[\Lambda] = \exp^{-\frac{1}{2} \cdot \omega_{\mu\nu} \cdot {}^{(4)}[J^{\mu\nu}]}$$

Les composantes d'un tenseur antisymétrique ω apparaissent dans cette expression. Elles pourraient se laisser ordonner sous la forme d'une matrice antisymétrique :

$${}^{(4)}[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \beta^1 & \beta^2 & \beta^3 \\ -\beta^1 & 0 & -\theta^3 & \theta^2 \\ -\beta^2 & \theta^3 & 0 & -\theta^1 \\ -\beta^3 & -\theta^2 & \theta^1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour autant et pour l'heure, elles agissent essentiellement comme des paramètres vis à vis des générateurs du groupe. Dans une première approximation se contentant de développer la matrice exponentielle au premier degré seulement, ceci signifie que :

$${}^{(4)}[\Lambda] = Id_4 - \frac{1}{2} \cdot \omega_{\mu\nu} \cdot {}^{(4)}[J^{\mu\nu}] = Id_4 - \frac{i}{2} \cdot {}^{(4)}[\omega_{\mu\nu} \cdot (g^{\mu\rho} \cdot \delta_\sigma^\nu - g^{\nu\rho} \cdot \delta_\sigma^\mu)]$$

Ce développement approximatif peut être poussé quelques crans plus loin en utilisant les expressions détaillées des générateurs :

$${}^{(4)}[\Lambda] = Id_4 - \frac{i}{2} \cdot {}^{(4)}[\omega_{\mu\nu} \cdot g^{\mu\rho} \cdot \delta_\sigma^\nu - \omega_{\mu\nu} \cdot g^{\nu\rho} \cdot \delta_\sigma^\mu] = Id_4 - \frac{i}{2} \cdot {}^{(4)}[\omega_{\mu\sigma} \cdot g^{\mu\rho} - \omega_{\sigma\nu} \cdot g^{\nu\rho}]$$

De sorte que la matrice ${}^{(4)}[\omega]$ réapparaît effectivement et que son antisymétrie autorise à poursuivre avec ⁴ :

$$\begin{aligned} & {}^{(4)}[\Lambda] \\ & = \\ & Id_4 + \frac{i}{2} \cdot {}^{(4)}[\omega_{\sigma\nu} \cdot g^{\nu\rho} - \omega_{\mu\sigma} \cdot g^{\mu\rho}] \\ & = \\ & Id_4 + i \cdot \{ {}^{(4)}[\omega] \cdot {}^{(4)}[G]^{-1} \}^t \\ & = \\ & Id_4 - i \cdot ({}^{(4)}[G]^{-1})^t \cdot {}^{(4)}[\omega] \end{aligned}$$

A cet endroit, il est opportun de se souvenir de deux informations :

4.

$$-\omega_{\mu\sigma} = \omega_{\sigma\mu}; [\omega]^t = -[\omega]$$

1. Toute transformation de Lorentz est liée à la vitesse d'un mouvement relatif ${}^{(4)}\mathbf{u}$ justifiant d'écrire de façon générique :

$${}^{(4)}[\Lambda] = {}^{(4)}[\Lambda({}^{(4)}\mathbf{u})]$$

2. Toute matrice antisymétrique ayant le formalisme de cette matrice ${}^{(4)}[\omega]$ peut s'interpréter comme la représentation d'une décomposition triviale d'un produit tensoriel déformé par un cube (4-4-4) antisymétrique et antiréduit.

Ceci ayant été rappelé, les circonstances de cette discussion pousse à écrire :

$${}^{(4)}[\omega] = {}_{(4)\mathbf{X}}\Phi({}^{(4)}\mathbf{u})$$

Expression dans laquelle apparaît le vecteur inconnu ${}^{(4)}\mathbf{X}$: (a, b, c, d) résultant de l'antisymétrisation puis de l'anti-réduction d'un cube X au départ quelconque. Finalement, dans ces circonstances et en première approximation, l'élément générique du groupe des transformations de Lorentz peut s'écrire :

$${}^{(4)}[\Lambda({}^{(4)}\mathbf{u})] = Id_4 - i \cdot ({}^{(4)}[G]^{-1})^t \cdot {}_{(4)\mathbf{X}}\Phi({}^{(4)}\mathbf{u}) \quad (3.6)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \Phi_{01} &= a \cdot u^2 - b \cdot u^3 = \beta^1 \\ \Phi_{02} &= -a \cdot u^1 + c \cdot u^3 = \beta^2 \\ \Phi_{03} &= -b \cdot u^1 - c \cdot u^2 = \beta^3 \\ \Phi_{12} &= a \cdot u^0 + d \cdot u^3 = -\theta^3 \\ \Phi_{13} &= -d \cdot u^2 + b \cdot u^0 = -\theta^2 \\ \Phi_{23} &= c \cdot u^0 - d \cdot u^1 = -\theta^1 \end{aligned}$$

□

Remarque 3.4.3. *Impact sur la quatrième relation nécessaire à valider la méthode des poupées russes.*

Si le cube X se confond avec le cube A de la discussion menée autour de la validation de la méthode des poupées russes, il vient :

$$X = A \rightarrow {}^{(4)}\mathbf{a}$$

Et :

$${}^{(4)}[\Lambda({}^{(4)}\mathbf{u})] = Id_4 - i \cdot ({}^{(4)}[G]^{-1})^t \cdot {}_{(4)\mathbf{a}}\Phi({}^{(4)}\mathbf{u}) \quad (3.7)$$

J'en déduis au passage que la quatrième relation validant l'usage de la méthode est compatible avec la jauge électromagnétique lorsque :

$${}^{(4)}[U] = i \cdot ({}^{(4)}[G]^{-1})^t \cdot {}_{(4)\mathbf{a}}\Phi({}^{(4)}\mathbf{u}), \quad i^2 + 1 = 0 \quad (3.8)$$

Et que :

$${}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})] = {}^{(4)}[\Lambda(\mathbf{u})]^t$$

Cette seconde exigence prend désormais le visage suivant :

$$-i \cdot ({}^{(4)}[G]^{-1})^t \cdot {}_{(4)\mathbf{a}}\Phi({}^{(4)}\mathbf{u}) = -i \cdot {}_{(4)\mathbf{a}}\Phi^t({}^{(4)}\mathbf{u}) \cdot ({}^{(4)}[G]^{-1})$$

Ou encore plus simplement et sachant qu'il n'y a aucun doute sur le fait que toute la discussion se déroule dans un espace de dimension quatre :

$$([G]^{-1})^t \cdot {}_{\mathbf{a}}\Phi(\mathbf{u}) + {}_{\mathbf{a}}\Phi(\mathbf{u}) \cdot ([G]^{-1}) = {}^{(4)}[0]$$

3.4.6 Etude des situations validant la quatrième relation.

La relation précédente contient trois ensembles de situations :

1. La vitesse est nulle.
2. En dehors du cas évident d'une vitesse nulle, la relation suivante suffit à valider la seconde exigence rendant la quatrième relation compatible avec la jauge EM :

$$([G]^{-1})^t \cdot \mathbf{a}\Phi(\mathbf{u}) = [0]$$

Cette relation est systématiquement vraie quelle que soit la vitesse \mathbf{u} et et quel que soit le vecteur \mathbf{a} dès le moment où la métrique est symétrique, non dégénérée et diagonale puisque la matrice $[\omega]$ représentant les termes du premier ordre de la transformation de Lorentz (en réalité la partie concernant les diverses rotations dans l'espace-temps) est une matrice entièrement antisymétrique.

$$[G]^{-1} = \begin{bmatrix} g^{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{33} \end{bmatrix}, \quad \Pi g^{\alpha\alpha} \neq 0$$

Lorsque ces situations simples sont physiquement réalisées, la quatrième relation validant l'usage de la méthode des poupées russes sur la version covariante de la loi de Lorentz s'écrit :

$$k \cdot {}^{(4)}[F_{\downarrow\downarrow}] = \mathbf{a}\Phi({}^{(4)}\rho)$$

Dans ces conditions aussi, et quelle que soit la vitesse, la transcription proposée s'écrit :

$$\forall {}^{(4)}\mathbf{u} : {}^{(4)}\mathbf{b} = {}^{(4)}\mathbf{u} + {}^{(4)}\rho$$

Ce qui (i) donne l'impression que la transcription décrit une somme de vitesses et (ii) ne fournit pas une explication simple pour les champs EM décrits par l'usage de cette méthode. Par ailleurs, le cube (4-4-4) antisymétrique \mathbf{A} ayant subi une antiréduction, les matrices $[\mathbf{T}]$ et $[\mathbf{C}]$ apparues au cours de l'exploration s'en trouvent à leur tour drastiquement simplifiées :

$${}^{(3)}[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & A_{02}^1 & A_{03}^1 \\ A_{01}^2 & 0 & A_{03}^2 \\ A_{01}^3 & A_{02}^3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_{12}^0 & -A_{13}^0 \\ A_{12}^0 & 0 & -A_{23}^0 \\ A_{13}^0 & A_{23}^0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et :

$${}^{(4)}[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A_{12}^0 & -A_{13}^0 \\ 0 & A_{12}^0 & 0 & -A_{23}^0 \\ 0 & A_{13}^0 & A_{23}^0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \langle \mathbf{0} | \\ | \mathbf{0} \rangle & {}^{(3)}[\mathbf{T}] \end{bmatrix}$$

Ces simplifications ont une conséquence sur l'expression du champ électrique résultant de l'usage de la méthode des poupées russes :

$$|{}^{(3)}\mathbf{E}\rangle = {}^{(3)}[\mathbf{T}] \cdot \left| \frac{\rho^0}{u^0 + \rho^0} \cdot {}^{(3)}\mathbf{u} - \frac{u^0}{u^0 + \rho^0} \cdot {}^{(3)}\rho \right\rangle$$

3. En dehors de ces situations apparemment simples qui réduisent finalement les transformations de Lorentz à la matrice identité ($[\Lambda] = \text{Id}_4$), il est difficile de faire des prédictions. Il faudra pourtant ne pas oublier de les envisager ultérieurement.

Bibliographie

3.5 Travaux personnels précisant le contexte de la discussion menée dans ce document.

- [a] PERIAT, T. : voir [c].
- [b] PERIAT, T. : Méthode intrinsèque en dimension quatre; ISBN 978-2-36923-099-1, 10 septembre 2021, 26 pages.
- [c] PERIAT, T. : Dissertation sur les décompositions des produits vectoriels déformés; ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, 19 mars 2023, 81 pages.
- [d] PERIAT, T. : La méthode extrinsèque de décomposition des produits tensoriels déformés; ISBN 978-2-36923-006-9, EAN 9782369230069, v2, 23 janvier 2023, 15 pages.
- [e] PERIAT, T. : Variations des fonctions vectorielles et décomposition de Helmholtz; ISBN 978-2-36923-098-4, EAN 9782369230984, 25 octobre 2020, 29 pages.
- [f] PERIAT, T. : Le tenseur de courbure associé aux (variations des) déformations des produits tensoriels déformés; ISBN 978-2-36923-126-4, EAN 9782369231264, 6 septembre 2021, 16 pages.
- [g] PERIAT, T. : Aspects mathématiques des produits tensoriels déformés; ISBN 978-2-36923-028-1, EAN 9782369230281, 6 juin 2021, 21 pages.

©Thierry PERIAT

3.6 Articles, Cours et Livres.

- [01] Cartan, E. : Les espaces métriques fondés sur la notion de d'aire; "Actualités scientifiques et industrielles", numéro 72, exposés de géométrie publiés sous la direction de monsieur Elie Cartan, membre de l'institut et professeur à la Sorbonne; Hermann et Cie, éditeurs, Paris, 1933, 46 pages (partie centrale de l'exposé).
- [02] Gauss, C. F. Disquisitiones generales circa superficies curvas; dissertation présentée le 8 octobre 1827 et consigné en 1828, pp. 99 - 146 dans Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores, volume VI -classis mathematicae. Egalement dans : Carl Friedrich Gauss Werke, vierter Band, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaft zu Göttingen, 1873, pp. 219 - 258 (le théorème remarquable est en page 237).

- [03] Trin, M. : Courbes et surfaces dans \mathbb{R}^3 : Theorema egregium de Gauss, surfaces minimales ; stage magistère de deuxième année effectué entre le 13 juin et le 28 mi-juillet 2018, Université de Rennes, 47 pages.
- [04] Tumarkin, P. : Theorema egregium, differential geometry III, term 2 (section 10), Durham University, 2017, 4 pages.
- [05] Courbure des surfaces dans l'espace, le theorema egregium de Gauss ; arXiv :1402.1018v1 [math.HO], 5 février 2014, 103 pages.
- [06] Sullivan, D. : Geometric Topology, Localization, Periodicity, and Galois Symmetry (The 1970 notes) ; Edited by Andrew Ranicki, February 2, 2005, 296 pages.
- [07] Nakahara, Mikio. : Geometry, Topology and Physics ; ISBN 0 7503 0606 8, ©IOP Publishing Ltd 2003, 583 pages.
- [08] Cartan, E. : Sur la possibilité de plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien ; Ann. Soc. Pol. Math., t. 6, 1927, p. 1-7.
- [09] Nash, J. F., Jr : C1-isometric imbeddings I, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A., Vol. 58, 1955, p. 545-556.
- [10] Nash, J. : The imbedding problem for Riemannian manifolds ; Annals of Mathematics, vol. 63, 1956, p. 20-63.
- [11] Gromov, M. : Isometric immersions of Riemannian manifolds ; Astérisque, n° S 131 (1985), 5p.
- [12] Mathematicians identify threshold at which shapes give way ; quantamagazine.org, June 3, 2021.
- [13] Cartan, E. The theory of spinors. First published by Hermann of Paris in 1966 ; translation of the "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)" ; Hermann, 1937.
- [14] Christoffel, E. B. : Über die Transformation der homogenen Differentiale Ausdrücke zweiten Graden ; Journal für die reine und angewandte Mathematik, pp. 46-70, 3 Januar 1869. Ce document peut être consulté à l'Université de Göttingen (Allemagne).
- [15] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme ; collection d'ouvrage à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. Darmais et A. Lichnerowicz. ©1955 by Masson and Cie, éditeurs, 298 pages.
- [16] Guinier, G et Guimbal, R. : Physique, classe de première, sections C, D, E, Collection de sciences physiques Georges Guinier, ©Bordas, 2ème trimestre 1973.
- [17] Purcell, Edward, M., Guthmann, C. et Lallemand, p. : Electricité et magnétisme ; Berkeley : cours de physique, volume 2, collection U, ©Librairie Armand Colin, Paris 1973, traduit de l'américain, 460 pages.
- [18] Relativité générale ; cours de l'école nationale supérieure de technique appliquée (ENSTA), Paris, 30 pages.
- [19] Lennuier, R., Gal, P.-Y., Perrin, D. : Mécanique des particules, champs ; collection U, ©librairie Armand Colin, Paris 1970, 363 pages.
- [20] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A. : Gravitation ; ©W. H. Freeman and Company, New-York, 1973, 1279 pages.

- [21] Maxwell, J. C. : A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field ; Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, 155 : 459 - 512 ; a priori consultable sur le site <http://rstl.royalsocietypublishing.org/> ; you visit this website under your own responsibility.
- [22] Michelson A. and Morley E. : On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. Originally published in "The American Journal of Science", N° 203 November 1887 (Editors James D. and Edward S. Dana ; associated editors : Prof. A. Gray, J. P. Cooke and J. Trowbridge, of Cambridge, Prof. H.A. Newton and A. E. Verrill of New Haven ; Prof. G. F. Barker of Philadelphia. Third series, Vol. XXXIV.- (Whole number, CXXXIV.)
- [23] Labarthe, J. J. : Electromagnétisme ; Université Paris Orsay, maîtrise et magistère de physique, version du 26 octobre 2002, 97 pages.