Introduction au concept de décomposition des produits déformés.

Collection : “La Théorie de la Question (E)”

©Thierry PERIAT.

4 mars 2023

©Thierry PERIAT : Introduction au concept de décomposition des produits déformés, ISBN 978-2-36923-002-1, EAN 9782369230021, collection “La Théorie de la Question (E)”.

Table des matières

1 Introduction au concept de division des produits déformés

1.1 Contexte.

Définition 1.1. *Produit tensoriel déformé.*

Soit E = E(D, K) un espace vectoriel de dimension D, bâti sur le corps K, rapporté à sa base canonique : Ω. Un produit tensoriel déformé par un cube A, noté $\otimes_A$ est une application de E^2 dans E faisant interagir deux éléments **a** et **b** de l'espace E et livrant un élément dans E défini par la relation :

$$\otimes_A : (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E^2 \to \otimes_A(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{\chi} \sum_{\beta} \sum_{\alpha} A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, a^{\alpha} \,.\, b^{\beta} \,.\, \mathbf{e}_{\chi} \in E$$

Définition 1.2. *Produit alterné/extérieur déformé.*

Dans le même contexte que celui de la définition 1.1, un produit alterné/extérieur [1] déformé par un cube A quelconque, noté $\wedge_A$ est une application de E^2 dans E faisant interagir deux éléments **a** et **b** de l'espace E et livrant un élément dans E défini par la relation :

$$\wedge_A \, : \, (\mathbf{a}, \, \mathbf{b}) \, \in \, E^2 \, \rightarrow \, \wedge_A(\mathbf{a}, \, \mathbf{b}) \, = \, \otimes_A(\mathbf{a}, \, \mathbf{b}) \, - \, \otimes_A(\mathbf{b}, \, \mathbf{a})$$

Définition 1.3. *Produit de Lie déformé.*

Dans le même contexte que celui de la définition 1.1, un produit de Lie déformé est un produit alterné déformé par un cube A antisymétrique, noté $[\mathbf{...}, \mathbf{...}]_A$.

Remarque 1.1. *Caractéristiques communes aux produits déformés.*

Tous ces produits ont en commun un certain nombre de caractéristiques communes :

1. Ce sont des applications bilinéaires de E $\times$ E vers K.
2. Chacune de leurs D composantes peut en particulier se comprendre comme une forme bilinéaire sur K, donc comme un élément de $\mathrm{L}_2(\mathrm{E})$.
3. Chaque produit déformé peut donc à la rigueur se traiter comme un élément de $\mathrm{L}^D{}_2$, c'est-à-dire comme un D-uplet de formes bilinéaires plus ou moins dépendantes les unes des autres via le cube déformant A.

Compte tenu de ces constats, les propriétés des cubes vont avoir un rôle déterminant sur celles des produits déformés. Ainsi, si les connaissances acquises sur les formes bilinéaires symétriques ou antisymétriques restent vraies, les cubes entièrement symétrique ou entièrement antisymétrique ne représent que deux cas extrêmes particuliers de l'ensemble des configurations possibles. L'étude des produits déformés va donc for probablement s'avérer beaucoup plus vaste qu'une démultiplication systématique des données concernant les formes symétriques et antisymétriques.

Comme démonstration simple de cette affirmation et de la complexité de l'étude exhaustive du sujet abordé ici, je rappellerai l'existence des cubes dits réduits et antiréduits ainsi que le tableau des compatibilités entre ces propriétés :

Actions	cube A	
	symétrisation	anti-symétrisation
réduction	compatible	cube nul
anti-réduction	cube nul	compatible

1. J'ai souvent employé l'adjectif trompeur "extérieur" dans mes précédents travaux parce que je faisais référence à la manière dont les produits extérieurs classiques ont été bâtis sur les produits tensoriels non déformés ; voir par exemple [01]. Comme l'étude développée dans ces lignes fait surtout référence aux formes bilinéaires et comme le résultat de l'opération définie ici est interne et non pas externe, il semble préférable d'utiliser l'adjectif "alterné" pour désigner ces produits déformés là.

Pour rappel, la réduction d'un cube est définie par :

$$A^{\chi}_{\alpha\beta} - A^{\beta}_{\alpha\chi} = 0$$

Elle est compatible avec la symétrisation de ce cube mais pas avec son anti-symétrisation.

$$A^{\chi}_{\alpha\beta} = A^{\beta}_{\alpha\chi} = A^{\beta}_{\chi\alpha} = A^{\alpha}_{\chi\beta} = A^{\alpha}_{\beta\chi} = A^{\chi}_{\beta\alpha} = A^{\chi}_{\alpha\beta} = ...$$

De même, l'anti-réduction d'un cube est définie par :

$$A^{\chi}_{\alpha\beta} + A^{\beta}_{\alpha\chi} = 0$$

Elle est compatible avec l'anti-symétrisation de ce cube mais pas avec sa symétrisation.

$$A^{\chi}_{\alpha\beta} = -A^{\beta}_{\alpha\chi} = A^{\beta}_{\chi\alpha} = -A^{\alpha}_{\chi\beta} = A^{\alpha}_{\beta\chi} = -A^{\chi}_{\beta\alpha} = A^{\chi}_{\alpha\beta} = ...$$

1.2 Premiers éléments.

Définition 1.4. *Décomposition/division.*

Soit E = E(D, K) un espace vectoriel de dimension D, bâti sur le corps K, rapporté à sa base canonique : Ω. Soit un produit déformé par un cube A, noté π_A, qui - qu'il soit tensoriel, extérieur ou de Lie- fait interagir deux éléments **a** et **b** de l'espace E pour livrer par bilinéarité un élément dans E défini par la relation :

$$\pi_A \,:\, (\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \in E^2 \xrightarrow{\pi_A} \pi_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = \sum_{\chi}\sum_{\beta}\sum_{\alpha} A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, a^{\alpha} \,.\, b^{\beta} \,.\, \mathbf{e}_{\chi} \in E$$

Quand elle existe, la décomposition (synonyme : division) de ce produit déformé par sa cible [2] **b** est une application notée D de E dans M(D, K) × E qui à l'image duale de ce produit dans E* fait correspondre au moins une paire ([M], **z**) telle que, formellement :

$$D_{\mathbf{b}} \,:\, \pi_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \in E \to D_{\mathbf{b}}(\pi_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b})) = \frac{\pi_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b})}{\mathbf{b}} = ([M],\, \mathbf{z}) \in M \times E \,|$$
$$[M] \,.\, |\mathbf{b} > + |\mathbf{z} >= |\pi_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) > \in E^*$$

Remarque 1.2. *Précisions.*

Ce premier énoncé demande à être précisé et il peut l'être à l'aide du schéma :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{b} \in E \arrow[d, "\pi_A(\mathbf{a},\, ...) \equiv (A,\, \mathbf{a})"] & \\
\pi_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \in E \arrow[r, "D_{\mathbf{b}}"] \arrow[d, "*"] & D_{\mathbf{b}}(\pi_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b})) = ([M],\, \mathbf{z}) \in M \times E \\
|\pi_A(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) > \in E^* \arrow[r, "="] & [M] \,.\, |\mathbf{b} > + |\mathbf{z} > \in E^* \arrow[u, "\zeta"]
\end{tikzcd}$$

2. Voir la sémantique de la théorie.

Tel qu'il est pour le moment conçu, ce schéma donne l'impression qu'une division consiste in fine à pouvoir faire correspondre au moins une paire ([M], **z**) à la paire contextuelle (A, **a**) puisque la procédure cherche à ne pas dépendre du diviseur, la cible **b** :

$$
\begin{tikzcd}
(A,\, \mathbf{a}) \in Cubes \times E \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "\Psi"] & \\
\pi_A(\mathbf{a},\, ...) \in L(E) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "*"] & D(\pi_A(\mathbf{a},\, ...)) = ([M],\, \mathbf{z}) \in M \times E \\
|\pi_A(\mathbf{a},\, ...) > \in ? \arrow[r, "\equiv"] & {[M]\,.\,|... > + |\mathbf{z} > \in E^*} \arrow[u, "\zeta"']
\end{tikzcd}
$$

Une analyse approfondie des informations implicitement contenues dans ce schéma va en révéler bien d'autres aspects. Par exemple ici, L(E) désigne l'ensemble des applications linéaires définies sur E et l'application notée $\pi_A(\mathbf{a},\, \mathbf{...})$ en est un élément particulier défini par la paire (A, **a**). Quand la notion de division est définie, cette paire se laisse a priori représenter par au moins une autre paire ([M], **z**). Il n'est pas certain que cette représentation existe toujours et qu'elle soit unique quand elle existe. Autrement dit, il n'est pas certain que Ψ soit une bijection.

Remarque 1.3. *Une raison de représenter les applications linéaires par des matrices carrées.*

Il fait partie des connaissances générales que l'ensemble L(E) est un espace vectoriel isomorphe à K^D qui à son tour peut être considéré comme isomorphe à E tant que D est un nombre entier non nul (différent de l'infini). Par ailleurs, chaque résultat de l'application notée $\pi_A(\mathbf{a},\, \mathbf{...})$ est un élément de E et celui-ci possède D composantes dans la base canonique Ω ; chacune d'elle est un élément de K. Le résultat de l'application notée $\pi_A(\mathbf{a},\, \mathbf{...})$ est ainsi également représentable par un élément de K^D, donc par un élément de L(E). C'est-à-dire que le résultat définit en quelque sorte lui-aussi une application linéaire.

Le passage de la deuxième à la troisième ligne du schéma (sur son côté gauche) veut désigner une représentation duale d'une application linéaire agissant sur E.

Or :

1. Chacune des D composantes définissant cette application linéaire, tout comme celles de son résultat (voir § précédent), est un élément de K et, à ce titre pourrait être le résultat d'une forme linéaire.
2. Toute forme linéaire n'est, par définition (voir les cours de mathématiques), qu'une espèce particulière d'application linéaire dont l'image se trouve dans le corps K sur lequel est construit l'espace vectoriel E qui sert de source aux applications linéaires.

Ces faits se laissent visualiser dans le tableau suivant :

	Définitions	
	Application linéaire	Forme linéaire
Source dans	E	E
Image dans	E	K
Caractérisation	$(a_1, ..., a_D) \in K^D$	$(f_1, ..., f_D) \in K^D$

De sorte que :

1. Toute forme linéaire est un outil réalisant par un procédé qui la caractérise *la condensation* d'un D-uplet d'éléments appartenant à K en un seul élément de K.
2. Chacune des D composantes a_k (k = 1, 2, ..., D) caractérisant l'application linéaire $\pi_A(\mathbf{a}, \mathbf{...})$ dans K peut être comprise comme le résultat d'une forme linéaire, elle-même caractérisée par un D-uplet spécifique, par exemple : $(f_1, ..., f_D)_k = (f_{1k}, ..., f_{jk}, ..., f_{Dk})$.
3. Toute application linéaire devrait pouvoir se représenter par un élément $[f_{jk}]$ de M(D, K) [3].

Exemple 1.1. *Illustration triviale.*

La définition générique des produits déformés permet de présenter une première caractérisation de l'application linéaire $\pi_A(\mathbf{a}, \mathbf{...})$. En effet, il est clair que quel que soit l'élément **...** de E, cette application agit de telle façon que :

$$(A, \mathbf{a}) \to \pi_A(\mathbf{a}, ...) = \sum_{\chi}\sum_{\beta}(\sum_{\alpha} A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, a^{\alpha}) \,.\, ...^{\beta} \,.\, \mathbf{e}_{\chi} \in E$$

Elle a pour représentation dans la base canonique Ω de l'espace vectoriel E le D-uplet :

$$(\sum_{\beta}(\sum_{\alpha} A^{1}_{\alpha\beta} \,.\, a^{\alpha}) \,.\, ...^{\beta}, ..., \sum_{\beta}(\sum_{\alpha} A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, a^{\alpha}) \,.\, ...^{\beta}, ..., \sum_{\beta}(\sum_{\alpha} A^{D}_{\alpha\beta} \,.\, a^{\alpha}) \,.\, ...^{\beta}) \in K^D$$

Cet élément de K^D accepte une visualisation permettant de séparer le rôle dévolu à la cible **...** de celui qui revient à la paire (cube déformant A, projectile **a**) ; il suffit pour cela de l'écrire sous une forme *matricio-vectorielle* :

$$[\sum_{\alpha} A^{\chi}_{\alpha\beta} \,.\, a^{\alpha}] \,.\, \begin{pmatrix} ...^1 \\ ... \\ ...^{\beta} \\ ... \\ ...^D \end{pmatrix} = {}_A\Phi(\mathbf{a}) \,.\, |... > \in K^D$$

La matrice ${}_A\Phi(\mathbf{a})$ est bien un élément de M(D, K). Elle représente trivialement l'effet de l'application linéaire $\pi_A(\mathbf{a}, \mathbf{...})$ sur les éléments **...** de E dans l'espace

3. Cet ensemble est également noté $M_D(K)$ dans la littérature mathématique et cette symbolique désigne les matrices carrées (D-D) ayant leurs entrées dans K.

K^D qui est isomorphe au dual E^*. Le schéma directeur proposé au niveau de la remarque 1.2 prend alors le formalisme particulier :

$$\begin{tikzcd}
({\color{blue}A,\, \mathbf{a}}) \in Cubes \times E \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "\Psi"] & \\
\pi_A(\mathbf{a},\, ...) \in L(E) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "*"] & D(\pi_A(\mathbf{a},\, ...)) = {\color{red}({}_A\Phi(\mathbf{a}),\, \mathbf{0})} \in M \times E \\
|\pi_A(\mathbf{a},\, ...)> \in \underbrace{M(D,\, K) \times K^D}_{\subset K^D} \arrow[r, "\equiv"] & {}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,|...> + |\mathbf{0}> \in E^* \arrow[u, "\zeta"']
\end{tikzcd}$$

Références

[01] Delachet, A. : Le calcul tensoriel ; collection « Que sais-je ? », imprimerie des presses universitaires de France, 1974, n°1336.