Les méthodes de décomposition des produits tensoriels déformés et la géométrie.

Collection : "La Théorie de la Question (E)"

©Thierry PERIAT.

30 mars 2024

ISBN 978-2-36923-009-0, EAN 9782369230090, ©Thierry PERIAT, Partie I : Le lien entre la notion de projection orthogonale et les noyaux de type II des décompositions des produits vectoriels déformés - introduction à la spécificité euclidienne en dimension trois.

Table des matières

1 Hessiennes à déterminants nuls et géométrie projective.

1.1 Le contexte de la discussion.

Mise au point dans un espace mathématique de dimension trois, la méthode intrinsèque destinée à décomposer (synonyme : diviser) les produits vectoriels déformés du type [**projectile**, **cible**][matrice déformante] a mis en exergue l'importance de la Hessienne de la polynomiale de degré deux Λ(projectile) accompagnant chaque décomposition.

Elle a en particulier montré que la valeur du déterminant de cette Hessienne constitue *le* critère permettant de ranger les noyaux des décompositions en deux classes. Concrètement, la nullité du déterminant d'une Hessienne vaut de facto placement d'un noyau dans la classe II.

1.2 Une motivation liée à notre ignorance.

Un premier formalisme des parties principales des décompositions dont le noyau appartient à la classe I a été obtenu grâce à une démarche rationnelle expliquée dans [a]. L'absence d'information sur le résidu d'une décomposition obtenue par cette approche a été corrigée au travers d'une confrontation de ce premier résultat avec une méthode extrinsèque se préoccupant de diviser les mêmes produits vectoriels déformés. De sorte que la théorie de la question (E) dispose d'indications relativement complètes pour les noyaux de la classe I.

En revanche et à ce jour, je n'ai découvert que deux familles de noyaux pouvant appartenir à la classe II ; à savoir :

1. En géométrie euclidienne classique ([A] = [J]), celle des rotations axiales lorsque la Hessienne est nulle. Elle est bien représentée par son élément générique :

$$|\mathbf{projectile} \wedge \mathbf{projectile}> = {}_{[J]}\Phi(\mathbf{projectile})\,.\,|\mathbf{cible}>$$

2. Celle des tables de Pythagore (synonyme : de multiplication) bâties sur le produit tensoriel classique s'appliquant à n'importe quelle paire de vecteurs pris dans $\mathbb{C} \otimes \mathrm{E}(3, \mathbb{R})$.

   La découverte de cette famille relève au départ du pur hasard. Les descriptions physiques de la nature livrent heureusement des exemples intéressants de matrices appartenant à cette famille. Je citerai :

   (a) les métriques symétriques des espaces de dimension trois permettant de valider l'analyse simultanée de l'élément de longueur riemannien au moyen de (i) l'approche 3 + 1 (ou ADM) et de (ii) la méthode intrinsèque [b].

   (b) le tenseur de polarisation de Maxwell.

1.3 Une motivation historique.

Cela étant su, la lecture de divers travaux consacrés à l'étude de la nullité du déterminant des Hessiennes fournit un second motif à approfondir le sujet. En effet, dans deux travaux datés respectivement de 1851, [01], et 1859, [02], O. Hesse a émis la proposition selon laquelle les Hessiennes dont les déterminants sont nuls correspondent toujours (sous-entendu : quelle que soit la dimension D de l'espace des discussions) à des hyper-surfaces conoïdales.

Cependant, P. Gordan et M. Noether montrent en 1876 dans [03] que la proposition d'O. Hesse est vraie pour D = 2, 3, mais découvrent des contre-exemples pour D $\geq$ 4. Leur travail est réexaminé par R. Permutti en 1957 [04] et 1976 [05] puis par C. Lossen en 2004 [06].

Indépendamment de cette progression, U. Perrazo établit dès 1900 une classification dans $\mathbb{P}^4$, $\mathbb{P}^5$, $\mathbb{P}^6$ des hypersurfaces cubiques dont le déterminant de la Hessienne est nul, [07]. Par ailleurs, A. Franchetta établit en 1954 une classification des hypersurfaces dans $\mathbb{P}^4$ dont le déterminant de la Hessienne est nul, [08].

1.4 Un rappel concernant la notion de projection orthogonale.

Remarque 1.1. *Contexte de la discussion.*

Soit - pour poursuivre la discussion avec les mêmes acteurs que ceux introduits dans l'exposé de la méthode extrinsèque- V = $\{\mathbb{C} \otimes$ E(D, $\mathbb{R}$), $<\ldots,\ldots>\}$, un espace vectoriel de dimension entière D supérieure ou égale à deux (D $\geq$ 2) (i) dont les éléments ont leurs D composantes dans le corps commutatif des nombres complexes et (ii) équipé d'un produit scalaire $<\ldots,\ldots>$ euclidien. Soit, dans V, une cible notée d$\mathbf{x}$ et un quelconque vecteur $\mathbf{D}$.

Définition 1.1. *Projection orthogonale.*

Un vecteur vecteur $\mathbf{D}$ de V possède une projection orthogonale chaque fois qu'il existe au moins un élément (p, $\mathbf{z}$) de $\mathbb{C}$ x V tel que :

$$(i)\, \mathbf{D} \;=\; p\,.\,d\mathbf{x} + \mathbf{z},\; (ii)\; < d\mathbf{x}, \mathbf{z} > =\; 0. \tag{1}$$

Proposition 1.1. *Existence.*

Aussi longtemps que :
— le produit scalaire euclidien de la cible d$\mathbf{x}$ par elle-même,
— le produit scalaire euclidien du projectile $\mathbf{D}$ par la cible,
... ne sont pas nuls :

$$< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} > \neq\; 0,\; < d\mathbf{x}, \mathbf{D} > \neq\; 0 \tag{2}$$

... alors, il existe une infinité de paires représentées génériquement par :

$$\left(\frac{< d\mathbf{x}, \mathbf{D} >}{< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >}, \mathbf{z}\right) \tag{3}$$

Démonstration. Elle se fait en deux étapes :

1. Ce résultat fait partie des connaissances scolaires de base ; la démonstration en est simple et peut être vérifiée dans [09 ; remarque (2.7), p.8]. Je la reproduis ici. Le fait de décomposer le vecteur $\mathbf{D}$ en deux parties orthogonales revient à écrire $\mathbf{D}$ - p. d$\mathbf{x}$ = $\mathbf{z}$ en imposant <d$\mathbf{x}$,

...

$\mathbf{z}> = 0$. Donc revient à écrire $<\mathrm{d}\mathbf{x}, \mathbf{D}$ - p. $\mathrm{d}\mathbf{x}> = 0$; soit encore puisque le produit scalaire est bilinéaire : $<\mathrm{d}\mathbf{x}, \mathbf{D}> =$ p. $<\mathrm{d}\mathbf{x}, \mathrm{d}\mathbf{x}>$. Ainsi, le scalaire p a bien le formalisme annoncé et il existe aussi longtemps que $<\mathrm{d}\mathbf{x}, \mathrm{d}\mathbf{x}> \neq 0$. Pour rappel le vecteur p. d$\mathbf{x}$ s'appelle *la projection orthogonale* du vecteur $\mathbf{D}$.

2. Du point de vue de la logique et indépendemment de la dimension D de l'espace des discussions, une projection orthogonale du type étudié dans ce document n'existe finalement pas vraiment lorsque p est nul. Par conséquent, le domaine de définition de la problématique examinée ici ne contient pas les situations pour lesquelles le projectile est perpendiculaire à la cible. Comme annoncé dans la proposition, il faut impérativement que :
$$< d\mathbf{x}, \mathbf{D} > \neq 0$$

□

Ainsi, chaque fois que le nombre complexe p permettant de décomposer le vecteur $\mathbf{D}$ de la manière souhaitée existe :

$$p = \frac{< d\mathbf{x}, \mathbf{D} >}{< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >} \in \mathbb{C}, < d\mathbf{x}, d\mathbf{x} > \neq 0$$

Et il est associé à la projection orthogonale :

$$\mathbf{D} = \frac{< d\mathbf{x}, \mathbf{D} >}{< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >} . d\mathbf{x} + \mathbf{z} \, avec \, < d\mathbf{x}, \mathbf{z} > = 0.$$

1.5 Premier lien entre produits de Lie déformés et projection orthogonale.

Mais quel lien y-a-t-il entre ces faits bien connus et la question de la décomposition des vecteurs au sein de la théorie de la question (E) ? En passant par la représentation duale des éléments de V, il est très facile de montrer que :

$$\frac{< d\mathbf{x}, \mathbf{D} >}{< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >} . |d\mathbf{x} > = \frac{1}{< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >} . T_2(\otimes)(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) . |\mathbf{D} >$$

Cela permet donc de reformuler la projection orthogonale sous la forme :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >} . T_2(\otimes)(d\mathbf{x}, \, d\mathbf{x}) . |\mathbf{D} > + \mathbf{z} \, avec \, < d\mathbf{x}, \mathbf{z} > = 0.$$

Le formalisme de la partie située à droite du signe de l'égalité exhibe alors une similitude claire avec celui des décompositions proposées dans le cadre de l'étude de la question (E) dont la partie principale est une table de Pythagore.

Cependant et comme d'habitude, les apparences peuvent induire en erreur. Il convient de se garder de tirer des conclusions hatives car la relation obtenue ci-dessus ne rentre dans le cadre de la théorie de la question (E) que s'il est possible d'écrire :

$$\mathbf{D} = [d\mathbf{x}, \mathbf{D}]_A + \epsilon \tag{4}$$

J'explique la présence du vecteur ϵ un peu plus loin dans ce document. Toujours est-il que, dans ces conditions :

— La relation résultant de l'étude d'une projection orthogonale du vecteur **D** sur l'axe dont la direction est celle donnée par le vecteur d**x** permet d'écrire :

$$[d\mathbf{x}, \mathbf{D}]_A = \frac{1}{< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >} . T_2(\otimes)(d\mathbf{x},\, d\mathbf{x}) . |\mathbf{D} > + (\mathbf{z} - \epsilon)$$

$$< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} > \neq 0, < d\mathbf{x}, \mathbf{z} > = 0.$$

— Cette reformulation coïncide avec un énoncé particulier de la question (E) : « Soit un projectile d**x** de V interagissant avec la cible **D** par le biais d'un produit de Lie déformé $[\ldots, \ldots]_A$; le produit de Lie déformé $[\mathrm{d}\mathbf{x}, \mathbf{D}]_A$ accepte-t-il des décompositions non-triviales dans M(D, ℝ) x V ? » qui accepte une réponse positive puisqu'il existe alors des paires :

$$(\frac{1}{< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >} . T_2(\otimes)(d\mathbf{x},\, d\mathbf{x}),\ (\mathbf{z} - \epsilon))$$

$$< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} > \neq 0, < d\mathbf{x}, \mathbf{z} > = 0.$$

... représentant justement ces décompositions.

Remarque 1.2. *Un cas particulier en lien avec la notion de neutre à gauche.*

Lorsque le vecteur ϵ devient nul, le projectile d**x** se comporte *formellement* comme un neutre à gauche vis-à-vis de la cible **D** dont la décomposition orthogonale est étudiée ; preuve visuelle :

$$\mathbf{D} = [d\mathbf{x}, \mathbf{D}]_A = \frac{1}{< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >} . T_2(\otimes)(d\mathbf{x},\, d\mathbf{x}) . |\mathbf{D} > + \mathbf{z}$$

$$< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} > \neq 0, < d\mathbf{x}, \mathbf{z} > = 0.$$

Il reste à vérifier si cette éventualité est raisonnablement envisageable ou non. Il s'agit là d'un problème mathématique bien plus difficile que les apparences le laissent supposer.

1.6 Zoom sur les espaces de dimension trois pseudo-euclidiens.

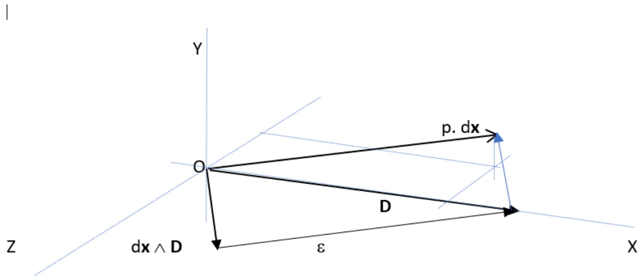
La démarche précédente vaut quelle que soit la dimension D supérieure à deux ; donc en particulier lorsque D = 3.

Dans une ambiance pseudo-euclidienne (A → [A] = [J]), la relation obtenue grâce à une projection orthogonale du vecteur **D** permettant d'impliquer un produit vectoriel s'écrit :

$$d\mathbf{x} \wedge \mathbf{D} = \frac{1}{< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >} . T_2(\otimes)(d\mathbf{x},\, d\mathbf{x}) . |\mathbf{D} > + (\mathbf{z} - \epsilon)$$

$$< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} > \neq 0, < d\mathbf{x}, \mathbf{z} > = 0.$$

Le déterminant de n'importe quelle table de Pythagore est nul ; donc celui de la table de Pythagore $\mathrm{T}_2(\otimes)(\mathrm{d}\mathbf{x},\, \mathrm{d}\mathbf{x})$ impliquant l'élément d**x** de V aussi. A cause de ceci, il peut *a priori* s'interpréter comme un noyau de classe II. Mais est-ce toujours vrai ? En particulier que se passe t-il lorsque le vecteur ϵ devient nul ? Et est-il vraiment permis qu'il s'annule ? Dans un espace tridimensionnel, soit cette figure destinée à éclairer la compréhension :



La nullité éventuelle du vecteur ϵ pose problème parce que l'égalité étudiée s'écrit :

$$\epsilon = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{D} = d\mathbf{x} \wedge \mathbf{D} = \frac{1}{< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >} . T_2(\otimes)(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) . |\mathbf{D} > + \mathbf{z}$$

$$< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} > \neq 0, < d\mathbf{x}, \mathbf{z} > = 0.$$

De sorte que dans une discussion sur V qui respecterait (*conditionnel*) les propriétés caractérisant habituellement le produit vectoriel classique, cette décomposition ne serait recevable que si :

1. Le neutre à gauche (le projectile d$\mathbf{x}$ des produits étudiés) était simultanément orthogonal :
   (a) à la partie résiduelle de cette décomposition non-triviale ; ce qui est assuré dès le départ de cette discussion puisqu'elle concerne des décompositions orthogonales : $\mathbf{z} \perp$ d$\mathbf{x}$.
   (b) au vecteur $\mathbf{D}$ dont la décomposition orthogonale est étudiée ; ce qui est une condition s'ajoutant aux conditions initiales impliquant : p = 0.
2. Le vecteur $\mathbf{D}$ était un spineur d'un espace de dimension trois ; voir l'exposé fondateur de la notion de spineur dans [10].

Or, si tel était le cas, la formulation de la projection orthogonale étudiée dans ce document et les propriétés des tables de Pythagore livreraient les égalités $\mathbf{D}$ = d$\mathbf{x} \wedge \mathbf{D} = \mathbf{z}$.

Il serait donc logique d'en tirer la conclusion que le produit-vectoriel impliquant le vecteur $\mathbf{D}$ et s'identifiant avec lui ne serait de facto pas vraiment décomposé !

Définition 1.2. *L'énigme euclidienne dans les espaces de dimension trois.*

Puisque la discussion a lieu sur V et admet de manipuler des vecteurs dont les composantes sont des nombres complexes, il vaut mieux ne pas donner une importance exagérée à la figure de la remarque précédente. Son rôle reste indicatif et pédagogique. Toujours est-il que dans la restriction de cette discussion aux vecteurs dont les composantes sont réelles, la situation à laquelle mène l'annulation du vecteur ϵ n'est visiblement pas possible. Elle n'est tout simplement même pas envisageable du point de vue géométrique. Ce à quoi il faut ajouter que dans ce contexte, une relation telle que $\mathbf{D} = \mathrm{d}\mathbf{x} \wedge \mathbf{D}$ mène immanquablement à la nullité du vecteur dont la projection est étudiée : $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. De sorte que toute la démarche présentée jusque-là a abouti à montrer que l'annulation du vecteur ϵ en ambiance euclidienne revient à étudier la projection orthogonale triviale et sans intérêt : $\mathbf{0} = 0.\mathrm{d}\mathbf{x} + \mathbf{0}$.

2 Analyse.

2.1 Qu'avons-nous appris ?

1. Quelle que soit la dimension entière D supérieure ou égale à deux (D $\geq$ 2) de l'espace mathématique $\mathrm{V} = \mathbb{C} \otimes \mathrm{E}(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ dans lequel la discussion a lieu, un vecteur $\mathbf{D}$ peut être projeté orthogonalement [1] sur un axe dont le vecteur directeur d$\mathbf{x}$ est non isotropique [2] selon la relation générique :

   $$< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} > \neq 0 \Rightarrow \exists : \mathbf{D} = p \,.\, d\mathbf{x} + \mathbf{z}, < d\mathbf{x}, \mathbf{z} > = 0 \iff d\mathbf{x} \perp \mathbf{z}$$

   Cette projection orthogonale-là permet toujours d'impliquer une table de Pythagore dont les arguments sont ceux de la paire (d$\mathbf{x}$, $\mathbf{D}$). Le déterminant de cette table, comme celui de l'ensemble des tables, est nul. A ce titre elle pourrait *en principe* être un noyau de classe II apparaissant dans la décomposition d'un produit vectoriel éventuellement déformé.

2. La recevabilité de cette interprétation dans un espace tridimensionnel $\mathbb{C} \otimes \mathrm{E}(3, \mathbb{R})$ (A $\rightarrow$ [A]) en ambiance pseudo-euclidienne ([A] = [J]), ouvre une problématique. En effet, comme le résultat habituel d'un produit vectoriel classique est orthogonal au plan dessiné par ses arguments, ce produit ne peut s'identifier avec aucune des combinaisons linéaires de ces arguments-là.

   $$d\mathbf{x} \wedge \mathbf{D} \neq \alpha \,.\, d\mathbf{x} + \beta \,.\, \mathbf{D}$$

   Il est donc nécessaire d'introduire *un acteur supplémentaire non-nul*, le vecteur ϵ ($\neq \mathbf{0}$) qui, rajouté au produit vectoriel considéré, pourra redonner le vecteur dont la décomposition est étudiée. Dans ces circonstances, l'Equ.(4) doit impérativement se décliner de manière particulière :

   $$\mathbf{D} = (d\mathbf{x} \wedge \mathbf{D}) + \epsilon, \; \epsilon \neq \mathbf{0} \tag{5}$$

3. Pour autant, en dehors des situations euclidiennes des espaces de dimension trois, la nullité du vecteur ϵ ne semble pas d'emblée interdite. Son occurence oblige à poursuivre la ligne initiée au niveau de la remarque 1.2, c'est-à-dire à étudier la notion de neutre à gauche sur $\mathrm{V} = \mathbb{C} \otimes \mathrm{E}(\mathrm{D}, \mathbb{R})$ de façon systématique.

1. Ce qui veut dire que la droite passant par l'extrêmité du vecteur à décomposer croise orthogonalement l'axe sur lequel cette extrêmité est projetée.

2. $<\mathrm{d}\mathbf{x}, \mathrm{d}\mathbf{x}> \neq 0$.

4. Enfin,le raisonnement venant d'être tenu soulève la question de la préservation des propriétés classique du produit vectoriel dans une discussion impliquant des éléments d'un espace de dimension supérieure à trois et leurs produits de Lie déformés. Par exemple : quid de l'orthogonalité entre un produit de Lie donné et chacun de ses arguments ? De manière générale :

$$[d\mathbf{x}, \mathbf{D}]_A = \frac{1}{< d\mathbf{x}, d\mathbf{x} >} . T_2(\otimes)(d\mathbf{x}, d\mathbf{x}) . |\mathbf{D} > + (\mathbf{z} - \epsilon)$$

... va induire :

$$< d\mathbf{x}, [d\mathbf{x}, \mathbf{D}]_A > = < d\mathbf{x}, \mathbf{D} - \epsilon >$$

En suivant la même veine, il est possible d'en déduire :

$$< \mathbf{D}, [d\mathbf{x}, \mathbf{D}]_A > = < \mathbf{D}, \mathbf{D} - \epsilon >$$

De sorte que chaque fois qu'il sera envisageable de faire tendre le vecteur ϵ vers le vecteur nul tout en préservant les conditions assurant l'existence d'une projection orthogonale telle qu'elle et définie dans ce document (Déf. 1.1) :

— l'orthogonalité entre un produit de Lie déformé et le projectile impliqué dans ce produit sera toujours perdue ; en effet :

$$Lim_{\epsilon = \mathbf{0}} < d\mathbf{x}, [d\mathbf{x}, \mathbf{D}]_A > = < d\mathbf{x}, \mathbf{D} > \neq 0$$

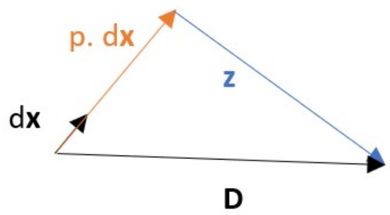
— l'orthogonalité entre un produit de Lie déformé et la cible impliquée dans ce produit sera en général perdue, sauf si la cible $\mathbf{D}$ est un vecteur isotropique au sens donné à cet adjectif par E. cartan dans [10] ; en effet :

$$Lim_{\epsilon = \mathbf{0}} < \mathbf{D}, [d\mathbf{x}, \mathbf{D}]_A > = < \mathbf{D}, \mathbf{D} >$$

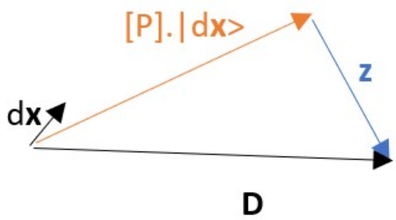
2.2 La multiplicité des décompositions.

Le raisonnement exposé ci-dessus poursuit essentiellement un objectif pédagogique : celui de montrer le lien formel possible entre le traitement de la question (E) et la notion de projection orthogonale. La difficulté technique indéniable accompagnant la limite euclidienne tridimensionnelle invite à élargir le propos initial à des situations un peu moins restrictives et basiques. La manière dont la question (E) envisage les décompositions/divisions est sans doute un peu plus vaste et sophistiquée qu'un point de vue se limitant aux seules décompositions orthogonales en ambiance réelle.

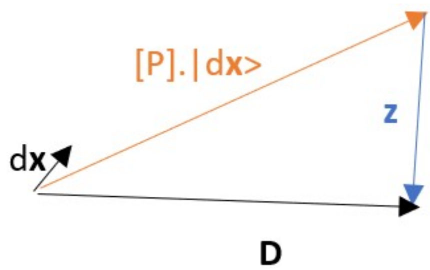
D'un côté, le schéma classique de la décomposition orthogonale en géométrie euclidienne. Le vecteur $\mathbf{D}$ est projeté orthogonalement sur l'axe dont d$\mathbf{x}$ détermine la direction.



De l'autre, la démarche de la question (E). En partant d'une paire (d**x**, **D**), il existe bien des façons de réaliser des décompositions (divisions) dont les deux parties restent orthogonales entre elles. Dans la figure suivante, le vecteur **D** est projeté orthogonalement sur l'axe dont [P].|d**x**> détermine la direction. Elle montre simplement en quoi le schéma classique envisagé au début de ce document n'est qu'un type particulier de décompositions orthogonales.



Il est également possible d'envisager le cas où la partie résiduelle **z** est orthogonale au vecteur décomposé :$<\mathbf{D}, \mathbf{z}> = 0$:



Dans tous les cas, il est conseillé de ne pas avoir une confiance aveugle dans les schémas et d'examiner si le type de décomposition envisagé permet de réaliser une jonction avec la théorie des produits tensoriels (resp. de Lie) déformés.

3 Remerciements

N'étant pas dans une position sociale me permettant de publier selon les canaux orthodoxes (faute d'un diplôme officiel en physique mathématique), je présente cette exploration sous ma seule responsabilité. J'appuie mes propos sur l'étude d'ouvrages acquis personnellement et sur des oeuvres librement accessibles en ligne. Je remercie les auteurs ayant accepté de les mettre gracieusement à disposition.

3.1 Travaux personnels à l'appui de l'exposé présenté dans ce document.

Ces travaux complètent l'exposé.

[a] PERIAT, T. : Dissertation sur les produits vectoriels déformés ; ISBN 978-2-36923-036-6, EAN 9782369230366, v3, 19 mars 2023, 81 pages.

[b] PERIAT, T. : Analyse de l'élément de longueur riemannien, ISBN 978-2-36923-073-1, EAN 9782369230731, v3, 22 novembre 2023, 18 pages.

4 Bibliographie

Références

4.1 Articles, cours et livres.

[01] O. Hesse, Über die Bedingung, unter welche eine homogene ganze Funktion von unabhängigen Variablen durch Lineare Substitutionen von n andern unabhängigen Variablen auf eine homogene Funktion sich zurückführen lässt, die eine Variable weniger enthält, J. reine angew. Math. **42** (1851), 117–124.

[02] O. Hesse, Zur Theorie der ganzen homogenen Funktionen, J. reine angew. Math. **56** (1859), 263–269.

[03] P. Gordan, M. Noether, Über die algebraischen Formen, deren Hesse'sche Determinante identisch verschwindet, Math. Ann. **10** (1876), 547–568

[04] R. Permutti, Su certe forme a hessiana indeterminata, Ricerche di Mat. **6** (1957), 3–10.

[05] R. Permutti, Su certe classi di forme a hessiana indeterminata, Ricerche di Mat. **13** (1964), 97–105

[06] C. Lossen, When does the Hessian determinant vanish identically ? (On Gordan and Noether's Proof of Hesse's Claim), Bull. Braz. Math. Soc. **35** (2004), 71–82.

[07] U. Perazzo, Sulle varietà cubiche la cui hessiana svanisce identicamente, Giornale di matematiche (Battaglini) **38** (1900), 337–354

[08] A. Franchetta, Sulle forme algebriche di S4 aventi l'hessiana indeterminata, Rend. Mat. **13** (1954), 1–6.

[09] Bröcker, T. : Lineare Algebra und Analytische Geometrie ; Grundstudium Mathematik, ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker, zweite, korrigierte Auflage ; ISBN 3-7643-7144-7, Copyright © 2004 Birkhäuser Verlag, Postfach 133, CH-4010 Basel, Schweiz, 366 S.

[10] Cartan, E. : The theory of spinors ; ISBN 0-486-64070-1, translation of the « Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes) », Hermann, 1937 - 154 p. Dover Publications, Inc. New York © by Hermann, Paris (1966), 157 pages.