Loi de Lorentz-Einstein et théorie de Sturm-Liouville.

sous-titre : une autre manière de redécouvrir l'équation de P.A.M. Dirac.

ISBN 978-2-36923-016-8, EAN-9782369230168
Collection : “La Théorie de la Question (E)”.

©Thierry PERIAT.

21 juillet 2023

Résumé : Ce document réintroduit la version covariante de la loi de Lorentz (dite parfois de Lorentz-Einstein) dans une progression historique. Il la confronte ensuite avec le formalisme des opérateurs différentiels utilisés par la théorie de Sturm-Liouville. Une confrontation avec la version auto-adjointe de l'opérateur représentant cette loi ne peut se faire de manière cohérente qu'en réintroduisant la célèbre équation de Dirac. Celle-ci ne résulte plus alors d'une analyse de l'équation de Klein-Gordon mais de la nécessité de préserver la jauge électromagnétique habituelle.

Avertissements :

— *Tous les documents de la collection "La théorie de la question (E)" sont protégés par le droit d'auteur, notamment français.*
— *Ils sont immatriculés à l'aide d'un numéro attribué en 2013 par la B.N.F.*
— *Ils ne sont pas vérifiés par des pairs et nécessitent donc une lecture critique de la part des lecteurs(-trices).*
— *Ils souhaitent encourager l'apprentissage des sciences et guider ou accompagner utilement le début d'un parcours de recherche.*

Table des matières

1 La version classique de la loi de Lorentz.

La force électrique, dite de Coulomb [01 ; pp. 31-40], [05 ; pp. 7-10 et 173], exercée par un champ électrique spatial $^{(3)}\mathbf{E}$ sur une charge électrique statique notée q, et la force magnétique, dite de Laplace [01 ; pp. 181-188], exercée par un champ magnétique spatial $^{(3)}\mathbf{H}$ sur cette même charge lorsqu'elle est en mouvement avec la vitesse spatiale $^{(3)}\mathbf{v}$ peuvent s'additionner pour donner la force dite de Lorentz classique [05 ; p. 150, (5.1) ou p. 184, (6.1) ou p. 450, (4) en unités c.g.s], [06 ; p. 6, (1.7)] :

$$^{(3)}\mathbf{F} = q\,.\,\{^{(3)}\mathbf{E} + {}^{(3)}\mathbf{v} \wedge {}^{(3)}\mathbf{H}\} \tag{1}$$

2 L'origine historique d'une version covariante de la loi de Lorentz.

La synthèse réalisée par J. C. Maxwell [02] et les résultats des expériences de Morley et Michelson [03], [04 ; annexe 9.A] ont permis de mieux comprendre la nature particulière de la lumière. Notamment : sa vitesse spatiale ne dépend pas de l'observateur *inertiel*[1] qui en fait la mesure.

1. Définition : observateur situé en une position spatiale et à un moment donné d'une chronologie lui étant propre caractérisés (la position, l'instant) par le fait qu'il ne s'y exerce aucune force ou, alternativement, par le fait que la somme des forces s'y exerçant s'annule.

Pour rendre mathématiquement compte de ce constat expérimental, H. A. Lorentz (évoqué dans [05 ; p. 125 et p. 148]) et H. Poincaré construisent les règles auxquelles les changements de référentiels spatio-temporels doivent satisfaire ; pour des raisons historiques, ces règles portent aujourd'hui le nom de transformations de Lorentz [04 ; annexe 9.B] , [05], [06 ; §1.3, pp. 11-12]. Elles sont indispensables pour qui veut calculer dans le cadre de la relativité restreinte formulée par A. Einstein.

Pour autant, il y a une autre manière de transcrire les résultats expérimentaux de Morley et Michelson en équations ; à savoir : celle consistant effectivement à porter la discussion géométrique dans un espace de dimension quatre puis à étudier les conditions assurant l'invariance d'un élément de longueur riemannien par changement de référentiel.

C'est l'endroit exact où les travaux de B. Riemann (1826 à Breselenz - 1866 à Selasca), E. B. Christoffel (1829 à Montjoie - 1900 à Strasbourg) [07] (voir une version française pour les espaces de dimension trois dans [08]), et H. Minkowski (1864 à Alexotas vald - 1909 à Göttingen) rentrent en ligne de compte.

Mais pas seulement ; car, côté France, en 1922 E. Cartan (1869 à Dolomieu - 1951 à Paris) fait paraitre son travail « Au sujet des équations de la gravitation d'A. Einstein » [09]. Par un tout autre chemin logique que celui qui a été suivi par l'école allemande, ce mathématicien français redémontre que l'invariance de l'élément de longueur riemannien mène à l'équation maîtresse de la théorie de la gravitation (souvent renommée depuis “de la relativité générale”) publiée par A. Einstein quelques années plus tôt dans [10] et prouve au passage que les mathématiques autorisent la présence d'un terme s'apparentant à la constante cosmologique.

Le travail d'A. Einstein est contemporrain d'une réflexion générale sur la notion mathématique de covariance rendant compte de l'invariance de certaines formes ou de certains objets mathématiques ; celle de l'élément de longueur ayant servi de catalyseur.

J'ai réalisé dans [a] une exégèse du travail [07] de Christoffel en le confrontant avec les premières lignes de celui d'A. Einstein exposé dans [10]. Il en ressort deux enseignements :

1. Elle introduit subrepticement mais naturellement la notion de produit tensoriel déformé par le cube des symboles de Christoffel de la seconde espèce au travers de ce que la littérature nomme parfois *les premières relations de Christoffel* [07 ; p. 49, (9)] ; je note ce cube $\Gamma(2)$.
2. Elle montre un lien fort entre cette notion et celle de dérivation covariante.

Pour mémoire, la théorie d'A. Einstein :

1. peut se concevoir comme une version extrapolée à n'importe quelle géométrie spatio-temporelle symétrique (voir [10 ; pp. 777-778, (1), (2) et (3)] et § au dessous de ces équations) de la préservation de la vitesse de la lumière au cours d'un changement de référentiel ;

2. fait usage des symboles de Christoffel [10 ; p. 791, (21) et p. 792, (23)] au cours de sa quête de l'expression des équations des géodésiques basées sur le respect du principe de moindre action [10 ; §9, pp. 790-792] ; voir aussi comme référence plus récente : [14 ; p. 14].

3. introduit, sans lui donner de nom, ce qui apparait être aujourd'hui *le terme gravitationnel*, c'est-à-dire le produit tensoriel déformé par le cube $\Gamma(2)$ de la quadrivitesse $\mathbf{u}$ par elle-même [10 ; p. 792] ; pour les corps en chute libre, le terme gravitationnel vaut moins une fois l'accélération apparente de ce corps (il la compense) :

$$\delta\{\int_{P_1}^{P_2} ds\} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{u}}{ds} + \otimes_{\Gamma^4(2)}({}^{(4)}\mathbf{u},\, {}^{(4)}\mathbf{u}) = {}^{(4)}\mathbf{0} \tag{2}$$

4. fait apparaître une partie des premières relations de Christoffel dans l'équation [10 ; en haut de la p. 793, relation sans numéro donnant χ] *lorsqu'un corps évolue en chute libre* dans une étude [10 ; § 10, pp. 792-795] visant à fabriquer des tenseurs covariants par différentiation d'un tenseur covariant.

Remarque 2.1. *De l'apparition d'un lien fort entre dérivée covariante et produit tensoriel déformé.*

A cet endroit, comment ne pas voir un lien formel entre [10 ; p. 793, (25)] :

$$A_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} - \sum_\lambda \{\frac{\alpha\beta}{\lambda}\} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial x'_\lambda} \tag{3}$$

et [07 ; p. 49, (9)] :

$$\frac{\partial^2 x_r}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} + \sum_{ik} \{\frac{ik}{r}\} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta} = \sum_\lambda \{\frac{\alpha\beta}{\lambda}\} \cdot \frac{\partial x_r}{\partial x'_\lambda} \tag{4}$$

(a) menant à proposer ***dans les circonstances particulières*** précisées* dans [10] :

$$A_{\alpha\beta}(x_r) = -\sum_{ik} \{\frac{ik}{r}\} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x'_\alpha} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x'_\beta} \tag{5}$$

(b) suggérant (voir les détails dans [a]) que la composante $(\alpha,\, \beta)$ de la dérivée covariante d'un ensemble de fonctions scalaires x_r, $\mathrm{r} \in \mathrm{I}_D$, est la r-ème composante d'une sorte de produit tensoriel déformé pouvant se noter formellement :

$$A_{\alpha\beta}(x_r) = -\{\otimes_{\Gamma(2)}(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_\alpha}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x'_\beta})\}_r \tag{6}$$

?

5. utilise la notion de ce que la littérature nomme aujourd'hui *dérivée covariante* sous le nom allemand de *Erweiterung* (*traduction* : extension ; sous-entendu et de facto : de la dérivée partielle ordinaire) [10 ; p. 793] ; voir aussi dans une référence plus récente la présentation de la nécessité

d'introduire la dérivation covariante : [14 ; pp. 10-13].

Rappel : la propriété essentielle de ce type de dérivée est de préserver le caractère tensoriel après une dérivation d'un tenseur initial d'un rang donné en en élevant le rang d'un degré [10 ; explications de la fin du § 10].

Remarque 2.2. **Précisions techniques.*

Je tiens à insister sur les détails techniques inhérents à la démonstration conduite dans [10] car, stricto sensu, le formalisme de cette extension :

(a) ne concerne que les corps en chute libre,
(b) lorsque les ϕ (chez Christoffel : des composantes événementielles x_r, x'_α) sont des fonctions scalaires (et non pas vectorielles) continues
(c) et que la métrique est symétrique.

Ce sont les raisons techniques justifiant le fait que les recherches parues après le travail d'A. Einstein aient exploré :

(a) l'influence d'une force extérieure sur l'équation de la trajectoire du corps considéré l et'énoncé d'une version covariante de la loi de Lorentz s'inscrit au sein de ce mouvement ;
(b) le rôle joué par des géométries quelconques contenant des asymétries ;
(c) le cas de fonctions vectorielles événementielles $x_r(\mathbf{x}')$, $x'_\alpha(\mathbf{x})$ rendant compte de ruptures ou d'accidents éventuels dans les existences des corps étudiés (particules, ...).

Remarque 2.3. *L'apport des méthodes extrinsèques dans l'étude de la version covariante de la loi de Lorentz.*

Je note dès à présent que les premières relations de Christoffel permettent d'étudier la version covariante de la loi de Lorentz [11 ; p. 68, (33-1)], [12 ; p. 474.(20.41)], [13 ; p. 106, (20.4)] sous un autre angle que celui du principe de la covariance introduit dans [10 ; pp. 779-780, §B.].

Les méthodes de décomposition (*synonymes : de division, d'éclatement*) des produits tensoriels déformés dites « extrinsèques » sont des outils mathématiques permettant de réaliser cette étude alternative.

3 A la recherche du formalisme covariant de la loi de Lorentz.

La version classique de la loi de Lorentz s'écrit dans un environnement mathématique tridimensionnel ; par exemple dans l'espace vectoriel E(3, R) bâti sur le corps commutatif des nombres réels, R. L'objectif de celles ou ceux en recherchant une formulation covariante est de lui donner un visage dans un espace de dimension quatre, par exemple dans E(4, R), C $\otimes$ E(4, R) ou E(4, C).

Remarque 3.1. *L'état de l'art.*

En l'état actuel des connaissances acquises, plusieurs informations permettent de parvenir au but :

1. L'équation-type d'une géodésique est donnée par l'Equ.(2) et son formalisme reste le même quelle que soit la dimension de l'espace des discussions.

2. Il peut être, et il a été, démontré que la quantité mathématique située à gauche du signe de l'égalité dans l'Equ.(2) est invariante sous l'effet d'une transformation de Lorentz [14 ; p. 18] ; dit avec d'autres mots : cette quantité, se transforme comme et, est un tenseur.

3. La version classique de la loi de Lorentz est souvent formulée dans l'espace vectoriel dual de l'espace E(4, R) d'une manière mélangeant matrices et vecteurs ; voir par exemple : [06 ; p. 29, (1.106)] avec c = 1, [15 ; §23, p. 73, (23,5), en allemand] :

$$|^{(4)}\mathbf{F}>= -q\,.\begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} v_0 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \tag{7}$$

Ce formalisme (i) rend-il fidèlement compte de la loi représentée par l'Equ.(2) et (ii) est-il covariant ?

En réalisant le calcul représenté par cette équation, il vient :

$$|^{(4)}\mathbf{F}>= -q\,.\begin{bmatrix} <^{(3)}\mathbf{E},\, ^{(3)}\mathbf{v}>_{Id_3} \\ -v_0\,.\,E_x\,+\,(^{(3)}\mathbf{v}\wedge\, ^{(3)}\mathbf{H})_x \\ -v_0\,.\,E_y\,+\,(^{(3)}\mathbf{v}\wedge\, ^{(3)}\mathbf{H})_y \\ -v_0\,.\,E_x\,+\,(^{(3)}\mathbf{v}\wedge\, ^{(3)}\mathbf{H})_z \end{bmatrix}$$

Il ne rend compte de l'Equ.(2) qu'en posant deux conditions :

$$\exists\, F_0 \,=\, -q\,.\, <^{(3)}\mathbf{E},\, ^{(3)}\mathbf{v}>_{Id_3} \tag{8}$$

$$v_0 \,=\, 1$$

Interprétation :

(a) La première donne une existence et un visage à une composante temporelle de la force de Lorentz ; en plus de la charge électrique, ce visage dépend du produit scalaire classique entre la vitesse spatiale de l'onde ou de la particule étudiée et le champ électrique spatial à laquelle elle est soumise.

L'orthogonalité spatiale éventuelle entre les deux vecteurs annule cette composante ; il est présumé que tel est par exemple le cas pour les ondes électromagnétiques planes circulant sans obstacle dans le vide. La version classique de la loi de Lorentz ne laisse deviner en rien l'existence de cette composante.

(b) La seconde n'est rien d'autre qu'une condition de normalisation à la valeur unité de la vitesse spatiale de l'objet physique examiné.

$$<^{(3)}\mathbf{v},\, ^{(3)}\mathbf{v}>_{Id_3} = v_0^2 \,=\, 1$$

Le formalisme exact de la loi de Lorentz dépend aussi des unités physiques utilisées ; voir l'exemple donné dans [05 ; p. 450, (4)] concernant le système des unités c.g.s :

$$^{(3)}\mathbf{F} \,=\, q\,.\,\{^{(3)}\mathbf{E} \,+\, \frac{1}{c}\,.\,^{(3)}\mathbf{v} \,\wedge\, ^{(3)}\mathbf{H}\}$$

Ce formalisme est retrouvé en modifiant très légèrement l'Equ.(7) comme suit :

$$|^{(4)}\mathbf{F} >= -\frac{q}{c}\,.\begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}\,.\begin{bmatrix} v_0 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

et en posant à nouveau deux conditions : l'Equ.(8) et $\mathrm{v}_0 = \mathrm{c}$ qui caractérise cette fois-ci un objet dont la norme euclidienne de la vitesse spatiale vaut c ($\sim$ 300.000.000 m/s).

Bilan : l'Equ.(7) habituellement proposé dans de nombreuses références académiques représente bien la version classique de la loi de Lorentz à condition de préciser le contexte dans lequel elle est écrite :
— La géométrie spatiale est tridimensionnelle et euclidienne ; elle est immergée dans une géométrie spatio-temporelle de Minkowski.
— La force de Lorentz possède une composante temporelle qui ne s'annule que si l'objet étudié se déplace perpendiculairement au champ électrique dans lequel il est plongé.

Il reste cependant à vérifier que la matrice apparaissant dans l'Equ.(7) se transforme de manière covariante :

$$[F] \,=\, \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}$$

Concernant ce sujet, la matrice [F] introduite ci-dessus est généralement considérée comme la représentation d'un tenseur deux fois covariant. A ce titre, les règles du calcul tensoriel lui sont systématiquement appliquées dès le moment où il est souhaité savoir comment elle se transforme dans un changement de référentiel. Techniquement, ce tenseur se laisse jauger à l'aide des transformations de Lorentz qui sont traditionnellement notées $[\Lambda]$; voir [06 ; p. 21, (1.75)] :

$$\{^{(4)}[G]^{-1}\,.\,^{(4)}[F]\}' \,=\, [\Lambda]\,.\,\{^{(4)}[G]^{-1}\,.\,^{(4)}[F]\}\,.\,[\Lambda]^{-1}$$

ou encore [06 ; p. 29, (1.111)].

Remarque 3.2. *D'autres approches.*

A noter que :
— La matrice [F] peut aussi s'interpréter comme la représentation des composantes d'une 2-forme [11 ; §8, p. 15 (1955)] :

$$F \,=\, F_{\alpha\beta}\,.\,dx^{\alpha}\,.\,dx^{\beta}$$

Les auteurs de la référence américaine [12 (1973)] utilise ce langage pour présenter les champs électromagnétiques.

— Techniquement :
Proposition 3.1. *Toute représentation matricielle de la version deux fois covariante du tenseur champ électromagnétique peut se comprendre de façon très formelle comme le résultat d'une décomposition triviale d'un produit tensoriel déformé par un cube (4-4-4) de composantes arbitrairement choisies dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dont les indices respectent simultanément une règle d'anti-symétrisation et d'anti-réduction ; à savoir :*

$$\exists\, A \,:\, A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\alpha}_{\beta\chi} = 0,\, A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\beta}_{\chi\alpha} = 0$$

Démonstration. Soit un cube (4-4-4) A anti-symétrisé et anti-réduit ; alors, par définition de ces contraintes :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\alpha}_{\beta\chi} = 0,\, A^{\alpha}_{\chi\beta} + A^{\beta}_{\chi\alpha} = 0$$

Remarque 3.3. *Compatibilité des contraintes.*

Les deux contraintes (anti-réduction et anti-symétrie) sont compatibles l'une avec l'autre puisque :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} = -A^{\alpha}_{\beta\chi} = A^{\chi}_{\beta\alpha} = -A^{\chi}_{\alpha\beta} = A^{\beta}_{\alpha\chi} = -A^{\beta}_{\chi\alpha} = A^{\alpha}_{\chi\beta}$$

Remarque 3.4. *Prélude : le cube (3-3-3) anti-symétrique et anti-réduit.*

La théorie se préoccupe de déformer et de décomposer des produits tensoriels. Les déformations sont opérées par des cubes de nombres. Les chapitres précédents ont permis de comprendre que des cubes dont les composantes sont anti-symétriques définissent en fait des produits de Lie déformés.

Si, pour chacun des quatre sous-espaces $_{\alpha}\mathrm{E}(3,\, \mathbb{K})$ de dimension trois (donc avec $\alpha = 0,\, 1,\, 2,\, 3$) d'un espace de dimension quatre, $\mathrm{E}(4,\, \mathbb{K})$, la théorie disposait d'un cube (3-3-3) $_{\alpha}\mathrm{A}$ qui soit anti-symétrisé et anti-réduit, alors chacun de ces quatre cubes se réduirait en fait à une matrice (3-3) de $\mathrm{M}(3,\, \mathbb{K})$ proportionnelle à la matrice [J] ; soit k_{α} le coefficient de proportionnalité attaché au sous-espace I_{α}, il s'agirait de la matrice $\mathrm{k}_{\alpha}.[\mathrm{J}]$. Ce fait peut faire naître l'idée (intuitive) selon laquelle un cube de type (4-4-4) ayant les mêmes propriétés se résumerait peut-être à un élément de $\mathrm{E}(4,\, \mathbb{K})$.

Remarque 3.5. *La matrice de la décomposition triviale pour un cube (4-4-4) anti-symétrique et anti-réduit.*

Un outil omniprésent dans cette théorie est la matrice représentant la décomposition la plus triviale ; quand on étudie le produit tensoriel déformé $\otimes_{A}(\mathbf{u},\, ...)$, il s'agit ici de la matrice générique :

$$_{A}\Phi(^{(4)}\mathbf{u})$$

$$=$$
$$[A^{\alpha}_{\chi\beta}\,.\,u^{\chi}]$$
$$=$$
$$\begin{bmatrix} A^{0}_{\chi 0}\,.\,u^{\chi} & A^{0}_{\chi 1}\,.\,u^{\chi} & A^{0}_{\chi 2}\,.\,u^{\chi} & A^{0}_{\chi 3}\,.\,u^{\chi} \\ A^{1}_{\chi 0}\,.\,u^{\chi} & A^{1}_{\chi 1}\,.\,u^{\chi} & A^{1}_{\chi 2}\,.\,u^{\chi} & A^{1}_{\chi 3}\,.\,u^{\chi} \\ A^{2}_{\chi 0}\,.\,u^{\chi} & A^{2}_{\chi 1}\,.\,u^{\chi} & A^{2}_{\chi 2}\,.\,u^{\chi} & A^{2}_{\chi 3}\,.\,u^{\chi} \\ A^{3}_{\chi 0}\,.\,u^{\chi} & A^{3}_{\chi 1}\,.\,u^{\chi} & A^{3}_{\chi 2}\,.\,u^{\chi} & A^{3}_{\chi 3}\,.\,u^{\chi} \end{bmatrix}$$

Quand le cube est anti-symétrique sur ses indices bas :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} \,+\, A^{\alpha}_{\beta\chi} \,=\, 0$$

et anti-réduit sur ses indices latéraux :

$$A^{\alpha}_{\chi\beta} \,+\, A^{\beta}_{\chi\alpha} \,=\, 0$$

Alors, les composantes dont deux ou trois des indices sont répétés s'annulent et le cube A de type (4-4-4) se résume à un élément ${}^{(4)}\mathbf{A}$ de E(4, $\mathbb{K}$) :

$$A \,\rightarrow\, {}^{(4)}\mathbf{A} \,:\, (A^{0}_{12},\, A^{0}_{13},\, A^{0}_{23},\, A^{1}_{23}) \,=\, (a,\, b,\, c,\, d)$$

Dans ce cas, la matrice représentant la décomposition la plus triviale se simplifie pour devenir la représentation dans M(4, $\mathbb{K}$) d'une matrice anti-symétrique :

$$_{A}\Phi({}^{(4)}\mathbf{u}) \,=\, \begin{bmatrix} 0 & A^{0}_{\chi 1}\,.\,u^{\chi} & A^{0}_{\chi 2}\,.\,u^{\chi} & A^{0}_{\chi 3}\,.\,u^{\chi} \\ -A^{0}_{\chi 1}\,.\,u^{\chi} & 0 & A^{1}_{\chi 2}\,.\,u^{\chi} & A^{1}_{\chi 3}\,.\,u^{\chi} \\ -A^{0}_{\chi 2}\,.\,u^{\chi} & -A^{1}_{\chi 2}\,.\,u^{\chi} & 0 & A^{2}_{\chi 3}\,.\,u^{\chi} \\ -A^{0}_{\chi 3}\,.\,u^{\chi} & -A^{1}_{\chi 3}\,.\,u^{\chi} & -A^{2}_{\chi 3}\,.\,u^{\chi} & 0 \end{bmatrix}$$

Elle est associable au produit extérieur ${}^{(4)}\mathbf{A} \wedge {}^{(4)}\mathbf{u}$, avec :

$$\Phi_{01} \,=\, -A^{0}_{12}\,.\,u^{2} \,-\, A^{0}_{13}\,.\,u^{3} \,=\, -a\,.\,u^{2} \,-\, b\,.\,u^{3}$$
$$\Phi_{02} \,=\, A^{0}_{12}\,.\,u^{1} \,-\, A^{0}_{23}\,.\,u^{3} \,=\, a\,.\,u^{1} \,-\, c\,.\,u^{3}$$
$$\Phi_{03} \,=\, A^{0}_{13}\,.\,u^{1} \,+\, A^{0}_{23}\,.\,u^{2} \,=\, b\,.\,u^{1} \,+\, c\,.\,u^{2}$$
$$\Phi_{12} \,=\, A^{1}_{02}\,.\,u^{0} \,-\, A^{1}_{23}\,.\,u^{3} \,=\, -a\,.\,u^{0} \,-\, d\,.\,u^{3}$$
$$\Phi_{13} \,=\, A^{1}_{03}\,.\,u^{0} \,+\, A^{1}_{23}\,.\,u^{2} \,=\, -b\,.\,u^{0} \,+\, d\,.\,u^{2}$$
$$\Phi_{23} \,=\, A^{2}_{03}\,.\,u^{0} \,+\, A^{2}_{13}\,.\,u^{1} \,=\, -c\,.\,u^{0} \,-\, d\,.\,u^{1}$$

Quand l'argument ${}^{(4)}\mathbf{u}$ de la représentation triviale coincide avec le vecteur ${}^{(4)}\mathbf{A}$, cette représentation devient :

$$\Phi_{01} \,=\, -a\,.\,c \,-\, b\,.\,d$$
$$\Phi_{02} \,=\, a\,.\,b \,-\, c\,.\,d$$
$$\Phi_{03} \,=\, b^{2} \,+\, c^{2}$$
$$\Phi_{12} \,=\, -a^{2} \,-\, d^{2}$$

$$\Phi_{13} = b \,.\, a + d \,.\, c$$

$$\Phi_{23} = -c \,.\, a - d \,.\, b = \Phi_{01}$$

Il ne reste effectivement que cinq composantes distinctes qui peuvent toujours être disposées au sein d'une matrice anti-symétrique (4-4) de M(4, $\mathbb{K}$) :

$$_{\mathbf{A}}\Phi(\mathbf{A})$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -(a \,.\, c + b \,.\, d) & (a \,.\, b - c \,.\, d) & (b^2 + c^2) \\ (a \,.\, c + b \,.\, d) & 0 & -(a^2 + d^2) & (b \,.\, a + d \,.\, c) \\ -a \,.\, b + c \,.\, d & (a^2 + d^2) & 0 & -(a \,.\, c + b \,.\, d) \\ -(b^2 + c^2) & -(b \,.\, a + d \,.\, c) & (a \,.\, c + b \,.\, d) & 0 \end{bmatrix}$$

Il résulte de ces calculs que si la théorie disposait de quatre cubes de type (4-4-4) anti-symétrisés et anti-réduits distincts, donc de quatre vecteurs ${}^{(4)}\mathbf{A}(\alpha)$, elle disposerait d'un ensemble d'au plus 20 composantes différentes, c'est-à-dire autant qu'un tenseur de courbure en dimension quatre en compte.

Exemple 3.1. *La représentation matricielle de la version deux fois covariante du tenseur champ électromagnétique.*

Une application directe et simple des considérations précédentes au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ permet de conclure la démonstration en disant que toute représentation matricielle de la version deux fois covariante du tenseur champ électromagnétique peut se comprendre comme la représentation matricielle d'une décomposition triviale du produit tensoriel générique suivant

$$\forall\, {}^{(4)}... \, : \, | \otimes_{{}^{(4)}\mathbf{A}} \, ({}^{(4)}\mathbf{u}, \, {}^{(4)}...) > = \, _{{}^{(4)}\mathbf{A}}\Phi({}^{(4)}\mathbf{u}) \,.\, |^{(4)}... >$$

... lorsque les situations physiques autorisent à poser :

$${}^{(4)}[F] = \, _{{}^{(4)}\mathbf{A}}\Phi({}^{(4)}\mathbf{u}) \equiv {}^{(4)}\mathbf{A} \wedge {}^{(4)}\mathbf{u}$$

$$E_x = -A^0_{12} \,.\, u^2 - A^0_{13} \,.\, u^3 = -a \,.\, u^2 - b \,.\, u^3$$

$$E_y = A^0_{12} \,.\, u^1 - A^0_{23} \,.\, u^3 = a \,.\, u^1 - c \,.\, u^3$$

$$E_z = A^0_{13} \,.\, u^1 + A^0_{23} \,.\, u^2 = b \,.\, u^1 + c \,.\, u^2$$

$$-H_z = A^1_{02} \,.\, u^0 - A^1_{23} \,.\, u^3 = -a \,.\, u^0 - d \,.\, u^3$$

$$H_y = A^1_{03} \,.\, u^0 + A^1_{23} \,.\, u^2 = -b \,.\, u^0 + d \,.\, u^2$$

$$-H_x = A^2_{03} \,.\, u^0 + A^2_{13} \,.\, u^1 = -c \,.\, u^0 - d \,.\, u^1$$

□

De sorte qu'il existe diverses manières de ranger la matrice [F] dans une catégorie mathématique. Si cette diversité révèle la richesse des mathématiques, elle est aussi la source de quelques questionnements :

— La réelle nature des champs électromagnétiques est-elle bien cernée ; autrement dit sont-ils : des tenseurs, des 2-formes, des décompositions triviales bâties sur des cubes anti-symétrisés et anti-réduits ?

— Le formalisme tensoriel utilisé actuellement pour les décrire est-il le mieux adapté à la recherche d'une jonction cohérente entre électromagnétisme et gravitation ?

Ainsi, résumant les réflexions exposées précédemment, le formalisme contravariant de la loi de Lorentz est actuellement donné par la relation [11 ; § 33, p. 68, (33-1)] qui dans le langage matricio-vectoriel de l'espace dual s'écrit :

$$|\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \otimes_{\Gamma^4(2)}({}^{(4)}\mathbf{u},\ {}^{(4)}\mathbf{u}) >= {}^{(4)}[G]^{-1} . [F] . |{}^{(4)}\mathbf{u} >$$

Son formalisme covariant s'écrit :

$${}^{(4)}[G] . |\frac{d\mathbf{u}}{ds} + \otimes_{\Gamma^4(2)}({}^{(4)}\mathbf{u},\ {}^{(4)}\mathbf{u}) >= [F] . |{}^{(4)}\mathbf{u} > \tag{9}$$

4 Les études avancées du formalisme covariant.

Dans la littérature relativement récente, j'ai trouvé une référence analysant la loi du mouvement d'une particule ponctuelle chargée [16, (2011)] circulant dans un espace-temps courbe. Avec la formulation [16 ; p. 15, (1.16)] les auteurs partent tout simplement de l'Equ.(9) à laquelle ils ont ajouté une force extérieure. La somme située à gauche de l'égalité reste telle quelle depuis les travaux d'Einstein ; en revanche, les propos tenus dans les premières pages du document concernent l'influence des courbures de l'espace-temps sur l'expression du terme placé à droite du signe de l'égalité. L'apparition de transmissions retardées ou avancées du champ émis par la source en mouvement force à modifier les composantes électromagnétiques en y intégrant une sorte d'auto-interaction de la particule avec elle-même. Cette référence propose un certain nombre de sources bibliographiques relatant l'élaboration de méthodes et de logiciels permettant de mesurer cette auto-interaction [16 ; §§ 2.1 à 2.5, pp. 27-39]. Les principaux résultats sont exposés et certaines configurations particulières sont étudiées. Je me permets de noter au passage la méthode dite de "la source effective" dont l'application au sujet du document mène à la relation [16 ; p. 36, (2.34)].

5 Les mesures expérimentales destinées à vérifier la jauge de Lorentz.

Manquant de connaissances sur ce vaste sujet, je renvoie à l'article de Wikipédia France dédié au sujet des violations de l'invariance de la jauge de Lorentz ainsi que sur la référence [17].

6 Confrontation avec la théorie de Sturm-Liouville.

6.1 Rappels sur la théorie de Sturm-Liouville.

La théorie de Sturm-Liouville joue un rôle essentiel dans l'histoire de la physique mathématique. Du côté de la physique, elle intègre en effet une discussion sur l'écoulement des flux thermiques et elle a servi de base aux travaux fondant la mécanique quantique. Du côté des mathématiques, elle s'intègre à l'étude des groupes orthogonaux dont l'importance reste cruciale. En faisant ici le choix de l'intégrer à la discussion sur la loi de Lorentz-Einstein, je tente un pas de plus sur cette terra incognita qu'est le no-man's land joignant la théorie de la relativité générale (la théorie de la gravitation la mieux aboutie et la mieux vérifiée à ce jour) et la théorie de la thermodynamique.

Pour l'acquisition des bases, je renvoie à l'excellent livre (en américain) [18 ; chapitre 9, pp. 482-522].

6.2 Hypothèse de travail.

Il est possible d'écrire la loi de Lorentz-Einstein sous forme d'opérateur différentiel d'ordre deux.

6.3 Proposition de changement de variables.

L'idée consiste à opérer le changement de variable vectorielle "non linéaire" :

$$\forall \mathbf{x} \in E(4, R) : (x^0, x^1, x^2, x^3) \to \phi \in E(4, C) : (\phi^0, \phi^1, \phi^2, \phi^3) \,| \qquad (10)$$

$$\forall \lambda, \mu, \theta = 0, 1, 2, 3 : \phi^\theta(\mathbf{x}) = \sum_{\lambda\mu} q^\theta_{\lambda\mu} \,.\, x^\lambda \,.\, x^\mu + \sum_\lambda q^\theta_\lambda \,.\, x^\lambda$$

et à vérifier qu'il suffit à pouvoir écrire la loi de Lorentz-Einstein sous la forme générique :

$$|L(\phi(\mathbf{x})) >= \sum_{k=0,1,2} [_{(2-k)}P] \,.\, |\frac{d^k \phi(\mathbf{x})}{d^k \pi} > \qquad (11)$$

Cette équation peut se lire comme une généralisation de la relation [18 ; p. 483, (9.1)] ; au lieu de décrire un unique opérateur différentiel d'ordre deux, elle en manipule quatre d'un coup. Dans cette expression :

— Les trois matrices (4-4) notées $[_{(2-k)}\mathrm{P}]$, pour k = 0, 1, 2, figurent les *coefficients* de cet opérateur différentiel d'ordre deux généralisé.

— La lettre "d" symbolise une dérivation ordinaire (*synonyme* : classique - règle de Descartes ou de Leibniz - loi des accroissements finis) par rapport à l'abcisse curviligne π.

— Le label "k" qui lui est attribué désigne le degré de la dérivation, c'est-à-dire le nombre de fois où cette dérivation ordinaire est réalisée ; avec la convention supplémentaire qu'au cas où k = 0, ceci signifie qu'il n'a été fait aucune dérivation, et donc que l'objet mathématique auquel cette dérivation de degré nul s'applique est laissé égal à lui-même, inchangé.

$$\frac{d^0 \phi(\mathbf{x})}{d^0 \pi} = \phi(\mathbf{x}) \qquad (12)$$

6.4 Les deux espaces de la discussion mathématique.

L'hypothèse de travail opère un passage non-linéaire d'un **x**-espace des événements (époque d'une chronologie, **position spatiale**) à un ϕ-espace dont la nature reste inconnue à cet instant de la discussion.

L'origine du $\mathbf{x}$-espace a pour composantes le quadruplé (0, 0, 0, 0) ; la transformation l'emmène vers l'origine du ϕ-espace ; mais l'inverse est faux car les relations :

$$\forall\, \lambda,\, \mu,\, \theta \,=\, 0,\, 1,\, 2,\, 3\, :\, \sum_{\lambda\mu} q^{\theta}_{\lambda\mu} \,.\, x^{\lambda} \,.\, x^{\mu} \,+\, \sum_{\lambda} q^{\theta}_{\lambda} \,.\, x^{\lambda} \,=\, 0$$

ont d'autres solutions que celle consistant à poser :

$$\forall\, \lambda \,=\, 0,\, 1,\, 2,\, 3\, :\, x^{\lambda} \,=\, 0$$

A titre d'exemple, la validation simultanée des seize relations :

$$\forall\, \lambda,\, \theta \,=\, 0,\, 1,\, 2,\, 3\, :\, \sum_{\mu} q^{\theta}_{\lambda\mu} \,.\, x^{\mu} \,+\, q^{\theta}_{\lambda} \,=\, 0$$

fait tout aussi bien l'affaire.

6.5 Les dérivées ordinaires du premier et du second ordre de la nouvelle variable.

Il vient de façon générale :

$$\frac{d\phi^{\theta}(\mathbf{x})}{d\pi} \tag{13}$$
$$=$$
$$\frac{dq^{\theta}_{\lambda\mu}}{d\pi} \,.\, x^{\lambda} \,.\, x^{\mu} + \sum_{\lambda\mu} q^{\theta}_{\lambda\mu} \cdot \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} \,.\, x^{\mu} + \sum_{\lambda\mu} q^{\theta}_{\lambda\mu} \,.\, x^{\lambda} \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\pi} + \sum_{\lambda} \frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} \,.\, x^{\lambda} + \sum_{\lambda} q^{\theta}_{\lambda} \cdot \frac{dx^{\lambda}}{d\pi}$$

Et :

$$\frac{d^2\phi^{\theta}(\mathbf{x})}{d^2\pi} \tag{14}$$
$$=$$
$$\frac{d^2 q^{\theta}_{\lambda\mu}}{d^2\pi} \,.\, x^{\lambda} \,.\, x^{\mu} \,+\, q^{\theta}_{\lambda\mu} \cdot \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} \,.\, x^{\mu} \,+\, q^{\theta}_{\lambda\mu} \,.\, x^{\lambda} \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\pi}$$
$$+$$
$$\sum_{\lambda\mu} \frac{dq^{\theta}_{\lambda\mu}}{d\pi} \cdot \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} \,.\, x^{\mu} \,+\, \sum_{\lambda\mu} q^{\theta}_{\lambda\mu} \cdot \frac{d^2 x^{\lambda}}{d^2\pi} \,.\, x^{\mu} \,+\, \sum_{\lambda\mu} q^{\theta}_{\lambda\mu} \cdot \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\pi}$$
$$+$$
$$\sum_{\lambda\mu} \frac{dq^{\theta}_{\lambda\mu}}{d\pi} \,.\, x^{\lambda} \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\pi} \,+\, \sum_{\lambda\mu} q^{\theta}_{\lambda\mu} \cdot \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} \cdot \frac{dx^{\mu}}{d\pi} \,+\, \sum_{\lambda\mu} q^{\theta}_{\lambda\mu} \,.\, x^{\lambda} \cdot \frac{d^2 x^{\mu}}{d^2\pi}$$
$$+$$
$$\sum_{\lambda} \frac{d^2 q^{\theta}_{\lambda}}{d^2\pi} \,.\, x^{\lambda} \,+\, \sum_{\lambda} \frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} \cdot \frac{dx^{\lambda}}{d\pi}$$
$$+$$
$$\sum_{\lambda} \frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} \cdot \frac{dx^{\lambda}}{d\pi} \,+\, \sum_{\lambda} q^{\theta}_{\lambda} \cdot \frac{d^2 x^{\lambda}}{d^2\pi}$$

Exemple 6.1. *Calcul des dérivées ordinaires successives à l'origine du $\mathbf{x}$-espace.*

Ces relations se simplifient alors de manière drastique pour donner les composantes de la vitesse dans le ϕ-espace :

$$\frac{d\phi^\theta(\mathbf{0})}{d\pi} = \sum_\lambda q^\theta_\lambda \cdot \frac{dx^\lambda}{d\pi}$$

Et celles de l'accélération :

$$\frac{d^2\phi^\theta(\mathbf{0})}{d^2\pi} = \sum_{\lambda\mu} 2.q^\theta_{\lambda\mu} \cdot \frac{dx^\lambda}{d\pi} \cdot \frac{dx^\mu}{d\pi} + \sum_\lambda 2.\frac{dq^\theta_\lambda}{d\pi} \cdot \frac{dx^\lambda}{d\pi} + \sum_\lambda q^\theta_\lambda \cdot \frac{d^2x^\lambda}{d^2\pi}$$

Ceci permet d'en tirer la conclusion pratique qu'à l'origine du $\mathbf{x}$-espace, les vitesses se transforment linéairement mais les accélérations en général pas ; sauf si la vitesse dans le $\mathbf{x}$-espace est nulle à l'origine de cet espace.

6.6 Injection des dérivées ordinaires dans un opérateur différentiel d'ordre deux générique à l'origine du x-espace.

Munis des calculs précédents, il devient relativement facile d'en déduire que :

$$|L(\phi(\mathbf{x})) >$$

$$=$$

$$\sum_{k=0,\,1,\,2} [{}_{(2\,-\,k)}P] \,.\, |\frac{d^k\phi(\mathbf{x})}{d^k\pi} >$$

$$\downarrow$$

$$[{}_2P] \,.\, |\phi(\mathbf{x}) > + [{}_1P] \,.\, |\frac{d\phi(\mathbf{x})}{d\pi} > + [{}_0P] \,.\, |\frac{d^2\phi(\mathbf{x})}{d^2\pi} >$$

Soit encore :

$$L^\epsilon(\phi(\mathbf{x})) = {}_2P^\epsilon_\theta \,.\, \phi^\theta(\mathbf{x}) + {}_1P^\epsilon_\theta \,.\, \frac{d\phi^\theta(\mathbf{x})}{d\pi} + {}_0P^\epsilon_\theta \,.\, \frac{d^2\phi^\theta(\mathbf{x})}{d^2\pi}$$

à l'origine du $\mathbf{x}$-espace, il s'agit de :

$$L^\epsilon(\mathbf{0}) = {}_2P^\epsilon_\theta \,.\, \phi^\theta(\mathbf{0}) + {}_1P^\epsilon_\theta \,.\, \frac{d\phi^\theta(\mathbf{0})}{d\pi} + {}_0P^\epsilon_\theta \,.\, \frac{d^2\phi^\theta(\mathbf{0})}{d^2\pi}$$

Et en injectant les deux relations trouvées précédemment, c'est aussi :

$$L^\epsilon(\mathbf{0})$$

$$=$$

$${}_1P^\epsilon_\theta \cdot \{\sum_\lambda q^\theta_\lambda \cdot \frac{dx^\lambda}{d\pi}\} + {}_0P^\epsilon_\theta \cdot \{\sum_{\lambda\mu} 2.q^\theta_{\lambda\mu} \cdot \frac{dx^\lambda}{d\pi} \cdot \frac{dx^\mu}{d\pi} + \sum_\lambda 2.\frac{dq^\theta_\lambda}{d\pi} \cdot \frac{dx^\lambda}{d\pi} + \sum_\lambda q^\theta_\lambda \cdot \frac{d^2x^\lambda}{d^2\pi}\}$$

De sorte qu'un regroupement fournit :

$$\sum_{\lambda\mu} 2\,.\,{}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,q^{\theta}_{\lambda\mu}\,.\,\frac{dx^{\lambda}}{d\pi}\,.\,\frac{dx^{\mu}}{d\pi} \;+\; \sum_{\lambda} {}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,q^{\theta}_{\lambda}\,.\,\frac{d^2x^{\lambda}}{d^2\pi}$$

$$=$$

$$-\sum_{\lambda} ({}_1P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,q^{\theta}_{\lambda} \,+\, 2\,.\,{}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi})\,.\,\frac{dx^{\lambda}}{d\pi} \,+\, L^{\epsilon}(\mathbf{0})$$

Pour rappel, la loi de Lorentz-Einstein en présence d'une force extérieure supplémentaire **f** s'écrit quant à elle :

$$m\,.\,\sum_{\lambda\mu} \Gamma^{\epsilon}_{\lambda\mu}\,.\,\frac{dx^{\lambda}}{d\pi}\,.\,\frac{dx^{\mu}}{d\pi} \,+\, m\,.\,\frac{d^2x^{\epsilon}}{d^2\pi} \,=\, q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda}\,.\,\frac{dx^{\lambda}}{d\pi} \,+\, f^{\epsilon}$$

6.7 Identification avec la loi de Lorentz-Einstein (énoncé des conditions nécessaires) à l'origine du x-espace.

Il en résulte que les relations suivantes identifient l'opérateur différentiel $\mathbf{L}(\phi)$ avec une représentation de la loi de Lorentz-Einstein lorsque celle-ci est considérée à l'origine du **x**-espace après que les relations de passage définies par l'Equ.(10) aient été appliquées aux ϕ^{θ} :

$$L^{\epsilon}(\mathbf{0}) \,=\, f^{\epsilon} \tag{15}$$

$$q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \,=\, -\sum_{\theta} (2\,.\,{}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} \,+\, {}_1P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,q^{\theta}_{\lambda}) \tag{16}$$

$$m\,.\,\delta^{\epsilon}_{\lambda} \,=\, \sum_{\theta} {}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,q^{\theta}_{\lambda} \tag{17}$$

$$m\,.\,\Gamma^{\epsilon}_{\lambda\mu} \,=\, \sum_{\theta} 2\,.\,{}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,q^{\theta}_{\lambda\mu} \tag{18}$$

7 Analyse des conditions d'identification.

7.1 La signification physique de l'opérateur différentiel.

L'Equ.(15) a ceci de remarquable qu'elle identifie l'action de l'opérateur différentiel vectoriel **L** avec celle de la force extérieure **f** *quand la discussion concerne ce qui se passe à l'origine* du **x**-espace.

$${}^{(4)}\mathbf{L}({}^{(4)}\phi({}^{(4)}\mathbf{0})) \,=\, {}^{(4)}\mathbf{L}({}^{(4)}\mathbf{0}) \,=\, {}^{(4)}\mathbf{f}({}^{(4)}\mathbf{0})$$

7.2 Au sujet de l'existence éventuelle d'une connexion ?

L'Equ.(16) introduit un formalisme impliquant la représentation matricielle du formalisme mixte (contravariant, covariant) du tenseur champ électromagnétique (EM). Sa confrontation avec l'Equ.(17) fournit une indication faisant subodorer la présence d'une connexion. L'intuition se précise lorsque la discussion est volontairement réduite au cas d'un opérateur auto-adjoint, auquel cas l'extrapolation de la relation [18 ; p. 484, (9.4)] à cette discusssion s'écrit :

$$[{}_1P] \,=\, \frac{d[{}_0P]}{d\pi} \tag{19}$$

Il vient alors :

$$-q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \,=\, \sum_{\theta} (2\,.\,{}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} \,+\, \frac{d_0P^{\epsilon}_{\theta}}{d\pi}\,.\,q^{\theta}_{\lambda})$$

Ce qui se laisse encore réorganiser en :

$$-q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \,=\, \sum_{\theta} {}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} \,+\, \sum_{\theta} \frac{d({}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,q^{\theta}_{\lambda})}{d\pi}$$

En tenant compte de l'Equ.(17) dont la traduction matricielle est :

$$[{}_0P]\,.\,[Q] \,=\, m\,.\,Id_4 \tag{20}$$

Il vient à cet endroit :

$$-q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \,=\, \sum_{\theta} {}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{dq^{\theta}_{\lambda}}{d\pi} \,+\, \frac{d(m\,.\,\delta^{\epsilon}_{\lambda})}{d\pi}$$

Ainsi, à supposer que la matrice $[{}_0\mathrm{P}]$ est inversible :

$$|[{}_0P]| \,\neq\, 0 \,\Rightarrow\, [Q] \,=\, m\,.\,[{}_0P]^{-1}$$

Il suit aussi :

$$-q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \,=\, \sum_{\theta} {}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{d\{m\,.\,({}_0P^{\theta}_{\lambda})^{-1}\}}{d\pi} \,+\, \frac{d(m\,.\,\delta^{\epsilon}_{\lambda})}{d\pi}$$

Soit encore :

$$-q\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \,=\, \sum_{\theta} m\,.\,{}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{d({}_0P^{\theta}_{\lambda})^{-1}}{d\pi} \,+\, 2\,.\,\frac{dm}{d\pi}\,.\,\delta^{\epsilon}_{\lambda}$$

Ou, lorsque la masse de l'objet physique étudié n'est pas nulle ($m \neq 0$) :

$$-\frac{q}{m}\,.\,F^{\epsilon}{}_{\lambda} \,=\, \sum_{\theta} {}_0P^{\epsilon}_{\theta}\,.\,\frac{d({}_0P^{\theta}_{\lambda})^{-1}}{d\pi} \,+\, 2\,.\,\frac{1}{m}\,.\,\frac{dm}{d\pi}\,.\,\delta^{\epsilon}_{\lambda}$$

Ce qui se traduit dans le langage matriciel par :

$$-\frac{q}{m}\,.\,\{{}^{(4)}[G]^{-1}\,.\,[F]\} \,=\, \frac{2}{m}\,.\,\frac{dm}{d\pi}\,.\,Id_4 \,+\, [{}_0P]\,.\,\frac{d([{}_0P]^{-1})}{d\pi} \tag{21}$$

De manière inattendue, le second terme apparaissant à droite du signe de l'égalité suggère la présence éventuelle d'une connexion : (i) concernant la représentation matricielle du tenseur champ EM sous sa forme (contravariante, covariante) ; (ii) assurée soit par la matrice contenant les coefficients de degré zéro de l'opérateur différentiel vectoriel **L**, soit par son inverse [Q].

Pour rappel et me référant à [19 ; § 4.1.5, p. 146], si une connexion assurée par la matrice [Q] existait, elle s'écrirait ici :

$$\{^{(4)}[G]^{-1} \,.\, [F]\}_{final} \;=\; [Q]^{-1} \,.\, \{^{(4)}[G]^{-1} \,.\, [F]\}_{initial} \,.\, [Q] \;+\; [Q]^{-1} \,.\, \frac{d[Q]}{d\pi} \tag{22}$$

De sorte que :

— en admettant a priori la non-nullité de la masse : m $\neq 0$;

— en supposant l'inversibilité des matrices [Q] et $[_0\mathrm{P}]$;

— en injectant à cet endroit l'expression de la matrice [Q] en fonction de celle de la matrice $[_0\mathrm{P}]$ dans la connexion dont l'existence est présumée

il suivrait :

$$\{^{(4)}[G]^{-1} \,.\, [F]\}_{final}$$
$$=$$
$$\frac{1}{m} \,.\, [_0P] \,.\, \{^{(4)}[G]^{-1} \,.\, [F]\}_{initial} \,.\, m \,.\, [_0P]^{-1} \;+\; \frac{1}{m} \,.\, [_0P] \,.\, \frac{d(m \,.\, [_0P]^{-1})}{d\pi}$$

Puis :

$$\{^{(4)}[G]^{-1} \,.\, [F]\}_{final} \tag{23}$$
$$=$$
$$[_0P] \,.\, \{^{(4)}[G]^{-1} \,.\, [F]\}_{initial} \,.\, [_0P]^{-1} \;+\; \frac{1}{m} \,.\, \frac{dm}{d\pi} \,.\, Id_4 \;+\; [_0P] \,.\, \frac{d([_0P]^{-1})}{d\pi}$$

Quoi qu'il en soit, cette vision spéculative s'accompagnerait dès le départ d'un problème fondamental car, même si l'Equ.(21) pouvait raisonnablement s'interpréter comme la conséquence des Equ.(22) et (17) - c'est-à-dire être considérée comme identique à l'Equ.(23), elle serait de toute manière en contradiction avec la jauge électromagnétique actuellement acceptée et donnée par [06 ; p. 21, (1.75)] (rappel) :

$$\{^{(4)}[G]^{-1} \,.\, ^{(4)}[F]\}' \;=\; [\Lambda] \,.\, \{^{(4)}[G]^{-1} \,.\, ^{(4)}[F]\} \,.\, [\Lambda]^{-1}$$

Cette jauge traditionnelle ne serait retrouvée qu'en posant :

$$[\Lambda] \;=\; [_0P] \tag{24}$$

et :

$$\frac{1}{m} \,.\, \frac{dm}{d\pi} \,.\, Id_4 \;+\; [_0P] \,.\, \frac{d([_0P]^{-1})}{d\pi} \;=\; ^{(4)}[0] \tag{25}$$

La première de ces deux exigences affirmerait simplement que, à l'origine du **x**-space et lorsque l'opérateur différentiel vectoriel prend sa forme auto-adjointe, alors la matrice des coefficients de degré zéro de cet opérateur coïncide avec la matrice des transformations de Lorentz. Mais dans ce cas, à cause de l'Equ.(19), l'opérateur admet le formalisme :

$$|L(\mathbf{0}) >= [_1P] \,.\, |\frac{d\phi(\mathbf{0})}{d\pi} > + [_0P] \,.\, |\frac{d^2\phi(\mathbf{0})}{d^2\pi} >= \frac{d\{[_0P] \,.\, |\frac{d\phi(\mathbf{0})}{d\pi} >\}}{d\pi}$$

Et à cause de la relation :

$$|\mathbf{f}(\mathbf{0}) >= \frac{d\{[_0P] \,.\, |\frac{d\phi(\mathbf{0})}{d\pi} >\}}{d\pi}$$

Ce formalisme dirait que la force extérieure est la dérivée ordinaire de la vitesse dans l'espace des ϕs de l'objet physique étudié quand celle-ci est *pondéré* par la matrice [$_0$P]. Ce fait suggérerait que la matrice [$_0$P] représenterait une matrice des masses pour assurer la cohérence des unités physiques impliquées dans cette discussion. Il conviendrait donc d'écrire la relation générique :

$$[_0P] \equiv m\,.\,Id_4 \tag{26}$$

Malgré tous les *conditionnels* utilisés par prudence dans cette discussion, force est de constater que cette relation ressemble beaucoup à celle qu'a introduite P. A. M. Dirac en physique quantique ; voir par exemple [20 ; p. 11, (24)] :

$$\forall\,^{(4)}\psi\,:\,\{[\alpha^\nu]\,.\,\frac{\partial ...}{\partial x^\nu}\,+\,i\,.\,\frac{m\,.\,c}{\hbar}\,.\,[\beta]\}\,.\,|^{(4)}\psi> = |^{(4)}\mathbf{0}>$$

Les matrices $[\alpha^\nu]$ et $[\beta]$ respectent les relations [20 ; p. 9, (13)] ; ce qui prouve qu'elles génèrent une algèbre de Clifford [21 ; en américain, § 98, pp. 85-86 et ses deux théorèmes].

Cette célèbre relation trouve son origine pour partie dans une analyse de l'équation de Klein-Gordon et pour une autre partie dans le travail mathématique d'E. Cartan sur les spineurs, c'est-à-dire sur les représentations linéaires des groupes de rotations. Le groupe des transformations de Lorentz est évidemment un ensemble particulier de rotations dans l'espace-temps. Il est traité avec l'équation de Dirac dans [21 ; §§ 157-171, pp. 134-144].

Autre indication prouvant la cohérence de cette discussion : pour les masses non nulles, l'Equ.(26) *valide formellement* l'Equ.(25) nécessaire à retrouver la jauge électromagnétique habituelle car elle implique :

$$m \neq 0\,:\,[_0P]^{-1} \equiv \frac{1}{m}\,.\,Id_4,\;\frac{d([_0P]^{-1})}{d\pi} \equiv -\frac{dm}{m^2}\,.\,Id_4$$

Et donc :

$$m \neq 0\,:\,[_0P]\,.\,\frac{d([_0P]^{-1})}{d\pi} \equiv -\frac{dm}{m}\,.\,Id_4\,:\,c.q.f.d.$$

Enfin, il faut noter que le formalisme obtenu ci-dessus pour l'opérateur $\mathbf{L}$ (et simultanément pour la force extérieure $\mathbf{f}$) est celui qu'il a dans le ϕ-espace correspondant à la projection de l'origine du $\mathbf{x}$-espace, donc à l'origine du ϕ-espace ; voir pourquoi au § 2.1.3. En reconsidérant les résultats du calcul consigné dans l'exemple 2.1.1 et l'Equ.(17), il devient alors facile de se rendre compte du fait que le formalisme de cet opérateur à l'origine du $\mathbf{x}$-espace est comme d'habitude :

$$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \frac{d(m\,.\,\mathbf{v}(\mathbf{0}))}{d\pi}$$

7.3 Les factorisations des symboles de Christoffel de la seconde espèce.

L'Equ.(18) ouvre le débat sur les factorisations des symboles de Christoffel de la seconde espèce. L'existence même de ces factorisations ne devrait pas étonner. Pour s'en convaincre, il suffit de rappeler par exemple que les symboles de Christoffel de la seconde espèce sont aussi les composantes d'une connexion affine associée au passage d'un **x**-espace vers un ϕ-espace [14 ; p. 5] :

$$\Gamma^{\epsilon}_{\lambda\mu} = \sum_{\theta} \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial \phi^{\theta}} \cdot \frac{\partial^2 \phi^{\theta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}}$$

Une confrontation entre cette relation très classique et l'Equ.(18) aboutit à écrire :

$$m \,.\, \Gamma^{\epsilon}_{\lambda\mu} = \sum_{\theta} m \,.\, \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial \phi^{\theta}} \cdot \frac{\partial^2 \phi^{\theta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} = \sum_{\theta} 2 \,.\, {}_0P^{\epsilon}_{\theta} \,.\, q^{\theta}_{\lambda\mu}$$

Le formalisme rend a priori possible de nombreuses identifications mais les réflexions menées autour de la configuration auto-adjointe de l'opérateur, en particulier la nécessité de poser l'Equ.(24) pour retrouver une jauge électromagnétique classique, mènent à :

$$\sum_{\theta} m \,.\, \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial \phi^{\theta}} \cdot \frac{\partial^2 \phi^{\theta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} = \sum_{\theta} 2 \,.\, \Lambda^{\epsilon}{}_{\theta} \,.\, q^{\theta}_{\lambda\mu}$$

Et à proposer pour se rapprocher de l'Equ.(26) :

$$\Lambda^{\epsilon}{}_{\theta} = m \,.\, \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial \phi^{\theta}}$$

$$q^{\theta}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \phi^{\theta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}}$$

Dans le contexte de cette connexion, le changement de variables proposé au départ de cette discussion, in extenso l'Equ.(10), devient dans un premier temps :

$$\forall\, \lambda,\, \mu,\, \theta = 0,\, 1,\, 2,\, 3 \,:\, \phi^{\theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 \phi^{\theta}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \,.\, x^{\lambda} \,.\, x^{\mu} + \sum_{\lambda} q^{\theta}_{\lambda} \,.\, x^{\lambda}$$

Puis, à cause de l'Equ.(20) impliquant ici :

$$[Q] = m \,.\, [{}_0P]^{-1} = m \,.\, [\Lambda]^{-1} = m \,.\, \frac{1}{m} \,.\, [\frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial \phi^{\theta}}]^{-1} = [\frac{\partial \phi^{\theta}}{\partial x^{\epsilon}}]$$

Dans un second temps :

$$\forall\, \lambda,\, \mu,\, \theta = 0,\, 1,\, 2,\, 3 \,:\, \phi^{\theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 \phi^{\theta}(\mathbf{x})}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} \,.\, x^{\lambda} \,.\, x^{\mu} + \sum_{\lambda} \frac{\partial \phi^{\theta}(\mathbf{x})}{\partial x^{\lambda}} \,.\, x^{\lambda}$$

Il devient alors permis de considérer que le changement de variables proposé équivaut à un simple développement de Taylor jusqu'à l'ordre deux inclus d'une fonction ϕ de quatre variables réelles ; à savoir : les composantes d'un événement dans le **x**-espace.

7.4 Résumé.

Cette exploration :

1. considère deux espaces mathématiques de dimension quatre :

   (a) Le **x**-espace habituel dans lequel nous pensons vivre et dans lequel la validité de la version covariante de la loi de Lorentz est grosso modo admise aux réserves près faites par exemple dans [16] et sous réserve de surprises expérimentales encore en cours d'investigation.
   (b) Le ϕ-espace dans lequel j'ai émis l'hypothèse que la version covariante de la loi de Lorentz s'exprimerait sous le formalisme d'un opérateur différentiel vectoriel d'ordre deux.
2. rappelle que les transformations non-linéaires reliant les deux espaces sont conçues de telle sorte que ces deux espaces coïncident à l'origine du **x**-espace mais qu'un objet physique à l'origine du ϕ-espace n'est pas forcément situé à celle du **x**-espace.
3. spécialise la discussion sur ce qui se passe lorsque l'objet étudié est à l'origine du **x**-espace et que l'opérateur est auto-adjoint.
4. montre au travers des dérivées ordinaires de degré un et deux d'un ensemble de quatre formes polynomiales de degré deux exprimant les composantes événementielle d'un objet physique étudié dans le ϕ-espace en fonction des composantes événementielle de ce même objet dans le **x**-espace que ces formes peuvent servir à transformer l'opérateur différentiel décrivant le comportement de cet objet dans le ϕ-espace en une représentation de la version covariante de la loi de Lorentz exprimée dans le **x**-espace.
5. démontre que le passage de l'opérateur différentiel à la version covariante de la loi de Lorentz ne peut se faire qu'au prix de quatre contraintes données par les Equ.(15 à 18).
6. étudie ces conditions et parvient aux conclusions suivantes :
   (a) Lorsque l'objet étudié est à l'origine du **x**-espace, la force extérieure qu'il subit en plus de la force de Lorentz covariante coïncide avec la valeur vectorielle de l'opérateur différentiel d'ordre deux. Autrement dit, je pourrais être tenté de dire que toute force extérieure est *le fantôme, l'empreinte* d'un opérateur différentiel d'ordre deux exerçant son action dans le monde habituel.
   (b) Les transformations non-linéaires ont naturellement tendance à modifier la jauge électromagnétique à laquelle les champs électromagnétique obéissent en une connexion électromagnétique. La jauge habituelle est toutefois retrouvée sous deux conditions :
      — en identifiant les coefficients de degré zéro de l'opérateur différentiel, i. e. la matrice $[_0\mathrm{P}]$ avec une matrice $[\Lambda]$ représentant des transformations de Lorentz ;
      — en introduisant l'équation de Dirac, c'est-à-dire en identifiant les transformations de Lorentz avec des matrices représentant des masses.
7. analyse les factorisations des symboles de Christoffel de la seconde espèce et constate que, dans ce contexte particulier s'étant focalisé sur le cas d'un opérateur différentiel vectoriel auto-adjoint considéré à la proximité de l'origine du **x**-espace, la connexion affine impliquée dans l'énoncé de la version covariante de la loi de Lorentz est simplement associée avec un changement de variables non-linéaire identifiable avec le développement de Taylor-Mac Laurin à l'ordre deux inclus de n'importe quelle fonction

ϕ de quatre variables réelles ; à savoir : les composantes d'un événement dans le $\mathbf{x}$-espace.

8 Conclusion.

Cette exploration initie un travail visant à exprimer :

— la version covariante d'une loi décrivant le mouvement de particules ponctuelles dans un environnement où champs de gravitation et champs électromagnétiques exercent leurs actions ...

— dans le langage des opérateurs différentiels vectoriels d'ordre deux de la théorie de Sturm-Liouville.

Elle espère ainsi apporter quelques briques à un édifice théorique encore en pleine construction réalisant un pont entre le langage de la théorie de la relativité et celui de la mécanique/dynamique quantique.

Son premier succès est de réintroduire l'équation de Dirac (en mécanique quantique) sans passer par une analyse de l'équation de Klein-Gordon décrivant la propagation des ondes massives.

La découverte de Dirac devient ici une nécessité technique assurant la préservation de la jauge électromagnétique dans le cadre d'un changement de variables non-linéaires dont il semble raisonnable de penser qu'il soit dû à la présence d'un champ de gravitation ou d'accélération.

La manière dont je retrouve l'équation de Dirac donne aussi à la notion de masse une interprétation entièrement relativiste (dynamique), je veux dire par ces mots : liée à un mouvement relatif puisque les masses possibles semblent ne pouvoir être que les valeurs propres des représentations des éléments du groupe de Lorentz.

Cette étude ne sera complète que lorsqu'elle aura :

1. examiné d'autres factorisations des symboles de Christoffel (par exemple celles impliquant les connexions de spin) ;
2. incorporé le cas des opérateurs non auto-adjoints ;
3. donné les probabilités accompagnant les diverses configurations ;
4. trouvé une explication rationnelle pour les masses observées des particules.

Ce sera peut-être l'objet de travaux ultérieurs.

8.1 Travail personnel précisant le contexte de la discussion menée dans ce document.

— [a] PERIAT, T. : Les premières relation d'E. B. Christoffel revisitées ; ISBN 978-2-36923-051-9, EAN-9782369230519, 8 septembre 2020, 12 pages.

9 Remerciements.

Étant ancien élève des classes préparatoires aux grandes écoles (mathématiques supérieures et spéciales section P' de l'école Sainte-Geneviève, Versailles, en 1974-1975), retraité de l'art dentaire (doctorat d'état en chirurgie dentaire, Paris, 1982, et certificat en radioprotection dentaire sur la période 2007-2022) et self-made man dans le domaine de la physique mathématique que j'étudie désormais par passion, je prie le lectorat de faire preuve d'un sens critique aigu lorsqu'il parcourt mes documents. Je remercie chaleureusement tous les auteurs acceptant, comme moi, de mettre leurs travaux à libre disposition du public.

Références

10 Livres, ouvrages et cours.

[01] Guinier, G et Guimbal, R. : Physique, classe de première, sections C, D, E, Collection de sciences physiques Georges Guinier, ©Bordas, 2ème trimestre 1973.

[02] Maxwell, J. C. : A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field ; Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, 155 : 459 - 512 ; a priori consultable sur le site http ://rstl.royalsocietypublishing.org/ ; you visit this website under your own responsibility.

[03] Michelson A. and Morley E. : On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether. Originally published in "The American Journal of Science", N° 203 November 1887 (Editors James D. and Edward S. Dana ; associated editors : Prof. A. Gray, J. P. Cooke and J. Trowbridge, of Cambridge, Prof. H.A. Newton and A. E. Verrill of New Haven ; Prof. G. F. Barker of Philadelphia. Third series, Vol. XXXIV.- (Whole number, CXXXIV.)

[04] Lennuier, R., Gal, P.-Y., Perrin, D. : Mécanique des particules, champs ; collection U, ©librairie Armand Colin, Paris 1970, 363 pages.

[05] Purcell, Edward, M., Guthmann, C. et Lallemand, p. : Electricité et magnétisme ; Berkeley : cours de physique, volume 2, collection U, ©Librairie Armand Colin, Paris 1973, traduit de l'américain, 460 pages.

[06] Labarthe, J. J. : Electromagnétisme ; Université Paris Orsay, maîtrise et magistère de physique, version du 26 octobre 2002, 97 pages.

[07] Christoffel, E. B. : Über die Transformation der homogenen Differentiale Ausdrücke zweiten Graden ; Journal für die reine und angewandte Mathematik, pp. 46-70, 3 Januar 1869. Ce document peut être consulté à l'Université de Göttingen (Allemagne).

[08] Cotton, E. : Sur les variétés à trois dimensions ; annales de la faculté des sciences de Toulouse, 2ème série, tome 1, n°4 (1899), p. 385-438 ; éventuellement consultable sur : numdam.org/item ?id=AFST-1899-2-1-4-385-0.

[09] Cartan, E. : Sur les équations de la gravitation d'Einstein ; extrait du journal de mathématiques 1922. Fasc. n°2. Gauthier-Villard et Cie, éditeurs, Paris, 74 pages.

[10] Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ; von A. Einstein. Annalen der Physik : vierte Folge, Band 49 (1916), Nr. 7.

[11] Lichnerowicz, A. : Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme ; collection d'ouvrage à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. Darmois et A. Lichnerowicz. ©1955 by Masson and Cie, éditeurs, 298 pages.

[12] Misner, C. W., Thorne, K. S. and Wheeler, J. A. : Gravitation ; ©W. H. Freeman and Company, New-York, 1973, 1279 pages.

[13] Fliessbach, T. : Allgemeine Relativitaetstheorie, 4. Auflage, , Spektrum Lehrbuch, ISBN 3-8274-1356-7,©2003, 1998, 1995, Springer Akademischer Verlag GmbH, Heidelberg, Berlin, 2003 ; 343 S.

[14] Relativité générale ; cours de l'école nationale supérieure de technique appliquée (ENSTA), Paris, 30 pages.

[15] Landau und Lifschitz : Lehrbuch des theoretischen Physik, Band II : Klassische Feldtheorie, 12., ueberarbeit. Aufl. ©Akademischer Verlag, Berlin, 1992, ISBN 3-05-501550-9, 480 pages.

[16] Eric Poisson, Adam Pound and Ian Vega, "The Motion of Point Particles in Curved Spacetime", Living Rev. Relativity, 14, (2011), 7. [Online Article] : cited [1 June 2022], www.livingreviews.org/lrr-2011-7.

[17] Gravity, Lorentz violation, and the Standard Model ; arXiv :hep-th/0312310v2, 23 Mars 2004.

[18] Weber, Hans J. and Arfken George B. (2004), Essential Mathematical Methods for Physicists, © Elsevier Academic Press, 932 pages.

[19] Coquereaux, R. : Espaces fibrés et connexions, une introduction aux géométries classiques et quantiques de la physique théorique ; version 3.0, 2002, compilée en Latex et corrigée en 2016, 272 pages.

[20] Dyson Quantenfeld-theorie, die weltbekannte Einführung von einem der Väter der QED ; traduit de l'anglais en allemand par Franziska Riedel et Benedikt Ziebarth, ISBN 978-3-642-37677-1, DOI 10.1007/978-3-642-37678-8, ©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2014, 288 pages.

[21] Cartan, E. : The theory of spinors ; Dover Publications, Inc. New-York, ISBN 0-486-64070-1, ©Hermann Paris, 1956, 151 pages ; traduction des "Leçons sur la théorie des spineurs (2 volumes)" ; publié chez Hermann, 1937.