Dissertation sur la décomposition des produits vectoriels déformés partie I : la méthode intrinséque.

Collection : “La Théorie de la Question (E)”.

5 avril 2024

— .

Table des matières

French

1 Données élémentaires sur la notion de division.

1.1 Une question simple mais piégeante.

Un moyen simple et pédagogique de présenter l'idée sous-jacente à ma quête tient peut-être dans cette petite histoire. Admettons que je pose à l'improviste et sans préalable la question : « Que vaut six divisé par deux ? » Je parie que la grande majorité des réponses fusant depuis l'auditoire sera : « trois » Certes, c'est vrai, mais pas toujours ! « Pourquoi ? »

1.2 L'importance de préciser le domaine dans lequel la question est posée.

Parce que tout dépend de l'ensemble de nombres dans lequel la question initiale est posée. Son énoncé imprécis invitait à penser qu'elle concernait des nombres entiers positifs, N. Mais ce contexte constitue un parmi de nombreux autres. Le fait de ne pas avoir précisé celui-ci a laissé la place à une libre interprétation dans le cerveau de l'auditoire. Par commodité et par une forme insidieuse mais fort compréhensible de paresse, il a porté son choix sur $\mathbb{N}$.

Pourtant, un parcours scolaire habituel se caractérise par l'apprentissage de divers corps de nombres ; par ordre chronologique d'apparition, il s'agit souvent des nombres :

1. entiers (l'ensemble $\mathbb{N}$),
2. relatifs (l'ensemble $\mathbb{Z}$),
3. rationnels qui sont des fractions de nombres entiers relatif (l'ensemble $\mathbb{Q}$),
4. réels (l'ensemble $\mathbb{R}$),
5. complexes (l'ensemble $\mathbb{C}$),
6. de Hamilton (l'ensemble $\mathbb{H}$ des quaternions)
7. octonioniques (l'ensemble $\mathbb{O}$).

Par conséquent, la question aurait été posée correctement si elle avait d'emblée précisé l'ensemble dans lequel il convenait de la traiter et d'y répondre. Ainsi, la question reformulée sous la forme : « Que vaut six divisé par deux lorsque la discussion a lieu dans $\mathbb{R}$? » aura une infinité de réponses et non plus une seule ; par exemple : $6 = 2{,}5 \text{ x } 3 - 1{,}5$.

1.3 Le résultat d'une division est toujours une paire d'arguments.

... et même lorsque la réponse sera triviale (par exemple celle qui est formulée sur N), il sera judicieux de remarque que le résultat d'une division sera en réalité toujours constitué, non pas d'un nombre, mais d'une paire de nombre. Dans l'exemple trivial il s'agit de la paire (3, 0) et dans le second exemple de la paire (2,5, -1,5).

1.4 Application aux vecteurs.

Par définition, un espace vectoriel est bâti sur un corps. Un vecteur est un élément d'un espace vectoriel. Les vecteurs étant toujours des éléments dont les composantes appartiennent à l'un des ensembles cités ci-dessus, l'introduction au concept de division expliquée ici peut facilement être appliquée à leurs composantes. Au détail important près qu'une difficulté supplémentaire apparait. Au lieu de diviser chaque composante par un nombre donné, il devient possible d'envisager la division d'un vecteur ayant D composantes par un autre vecteur ayant également D composantes ; D étant un élément de $\mathbb{N} - \{0\}$, c'est-à-dire un entier naturel positif non-nul. Il y a probablement de multiples procédés permettant de réaliser une telle opération.

1.5 Pourquoi approfondir la notion de division des vecteurs d'un espace de dimension trois ?

Ma réponse : exactement pour les mêmes raisons que celles poussant à choisir instinctivement de répondre à la question initiale « Que vaut six divisé par deux ? » comme si elle avait forcément été posée dans l'ensemble de entiers naturels positifs alors que ce point n'avait jamais été précisé et faisait partie des non-dits.

Je m'explique. L'observation de la nature livre des intuitions qui s'avèrent souvent fausses. Un point que C. Rovelli a clairement développé dans son livre : « L'ordre du temps ». Par exemple, les humains ont souvent cru que le soleil tournait autour de la terre, que la terre était plate, etc.

Je pense qu'un mécanisme similaire peut s'insinuer insidieusement dans nos façons de calculer ; pourquoi ? Parce que, tout comme le poisson est incapable de se rendre compte de l'eau dans laquelle il nage, nous autres humains ne percevons plus consciemment la géométrie dans laquelle nous vivons. Or il se pourrait bien que cet acteur devenu invisible à force d'être omniprésent influence d'une manière ou d'une autre nos procédures de calcul.

J'illustre abondamment cette idée au sein de l'étude des produits de Lie déformés et de leurs décompositions. Le produit vectoriel, mieux connu des élèves préparant leur baccalauréat suffit à expliciter l'idée que je défends.

La projection d'un produit vectoriel défini dans une ambiance euclidienne classique sur E(3, $\mathbb{R}$), par exemple $\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2$, dans l'espace vectoriel dual $E^*(3, \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^3$ s'écrit $|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2>$ avec l'aide des conventions de Dirac. Tout comme nous pensons spontanément que 6 = 3 x 2, cette projection se laisse trivialement ...

décomposer en $\Phi(\mathbf{q}_1).|\mathbf{q}_2>$. Or rien ne permet d'affirmer qu'il s'agit de l'unique manière de diviser l'image duale du produit vectoriel. A l'instar de la démarche expliquée plus haut pour les nombres, une division générique pourrait très bien prendre le formalisme :

$$|\mathbf{q}_1 \wedge \mathbf{q}_2 >= [P] \, . \, |\mathbf{q}_2 > + |\mathbf{z} >$$

Il se pourrait bien qu'un petit démon caché au milieu des lois de la nature s'évertue sans cesse à créer de petits écarts avec la division sensée être la plus naturelle.

La théorie de la question (E) entreprend donc d'approfondir systématiquement cette démarche. Elle semble d'autant plus justifiée que la théorie de la gravitation d'A. Einstein [02] nous a depuis longtemps convaincu que le contexte géométrique naturel peut varier.

1.6 Exemple d'utilisation des décompositions triviales des produits vectoriels en électromagnétisme.

Découvrir le document ISBN-978-2-36923-140-0.

2 Caractéristiques de la théorie dite de la question (E).

2.1 Définitions indispensables.

Définition 2.1. ***Produit tensoriel déformé.***

1. Soit K ⊗ E(D, ℝ) un espace vectoriel de dimension entière D supérieure ou égale à deux (D $\geq$ 2) bâti sur le corps commutatif K (nota bene : il s'agira par la suite de l'ensemble des nombres complexes ℂ) rapporté à sa base canonique Ω : ($\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, ..., $\mathbf{e}_\alpha$, ..., $\mathbf{e}_{D-1}$) ;
2. soit une quelconque paire ($\mathbf{q}_1$,$\mathbf{q}_2$) d'éléments choisis arbitrairement dans l'espace K ⊗ E(D, ℝ) et enfin,
3. soit un cube contenant D^3 éléments de K, noté A ;

... je dis que le produit tensoriel habituel de ces deux vecteurs a été déformé par les éléments du cube A chaque fois que je peux calculer le nouveau vecteur :

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \, \in \, \{K \otimes E(D, \mathbb{R})\}^2 \, \xrightarrow{\otimes_A} \, \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \, = \, A^k_{ij} \, . \, q^i_1 \, . \, q^j_2 \, . \, \mathbf{e}_k \, \in \, K \otimes E(D, \mathbb{R})$$

Définition 2.2. ***Produit alterné déformé.***

Avec les mêmes prérequis qui viennent d'être exposés au niveau de la définition 2.1, le produit dit alterné des deux vecteurs précédents est - par définition- le nouveau vecteur :

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \, \in \, \{K \, \otimes \, E(D, \mathbb{R})\}^2 \, :$$

$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \, = \, \otimes_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \, - \, \otimes_A(\mathbf{q}_2, \mathbf{q}_1) \, = \, A^k_{ij} \, . \, (q^i_1 \, . \, q^j_2 \, - \, q^i_2 \, . \, q^j_1) \, . \, \mathbf{e}_k$$

Les composantes de ce produit alterné sont des sommes qui se se laissent toujours décomposer en trois sous-sommes :

$$\{\sum_{i<j} A_{ij}^k \cdot (q_1^i \cdot q_2^j - q_2^i \cdot q_1^j)\} + \{\sum_{i=j} A_{ij}^k \cdot (q_1^i \cdot q_2^j - q_2^i \cdot q_1^j)\} + \{\sum_{i>j} A_{ij}^k \cdot (q_1^i \cdot q_2^j - q_2^i \cdot q_1^j)\}$$

De sorte que, si K est un corps commutatif : (i) le second terme de la somme précédente s'annule et (ii) puisque la série des termes suivants apparait :

$$A_{12}^k \cdot (q_1^1 \cdot q_2^2 \, - \, q_2^1 \cdot q_1^2) \, ; \, A_{21}^k \cdot (q_1^2 \cdot q_2^1 \, - \, q_2^2 \cdot q_1^1)$$
$$A_{1j}^k \cdot (q_1^1 \cdot q_2^j \, - \, q_2^1 \cdot q_1^j) \, ; \, A_{j1}^k \cdot (q_1^j \cdot q_2^1 \, - \, q_2^j \cdot q_1^1)$$
$$A_{1D}^k \cdot (q_1^1 \cdot q_2^D \, - \, q_2^1 \cdot q_1^D) \, ; \, A_{D1}^k \cdot (q_1^D \cdot q_2^1 \, - \, q_2^D \cdot q_1^1)$$
$$etc.$$

Finalement :

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \in \{K \otimes E(D, \mathbb{R})\}^2 \, : \, \wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \, = \, \sum_{i<j} (A_{ij}^k - A_{ji}^k) \cdot (q_1^i \cdot q_2^j - q_2^i \cdot q_1^j) \cdot \mathbf{e}_k$$

Le résultat de ce calcul est toujours un élément de l'espace vectoriel de départ : K $\otimes$ E(D, $\mathbb{R}$). Chacune de ses D composantes est une somme de 1 + 2 + ... + (D - 1) = D.(D - 1)/2 termes ; au lieu des D^2 termes contenus dans chacune des D composantes du produit tensoriel déformé l'ayant généré.

Exemple 2.1. *Dans un espace vectoriel de dimension trois.*

Dans le cas particulier des éléments d'un espace vectoriel de dimension trois :

$$\forall \, A, \, \forall \, (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \, \in \, \{K \, \otimes \, E(3, \, \mathbb{R})\}^2 \, :$$
$$\wedge_A(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \, = \, \sum_{i<j} (A_{ij}^k \, - \, A_{ji}^k) \cdot (q_1^i \cdot q_2^j \, - \, q_2^i \cdot q_1^j) \cdot \mathbf{e}_k$$

Chaque composante est une somme de trois termes [1] ; au lieu des neuf termes de chaque composante du produit tensoriel déformé l'ayant généré. Ce nouveau vecteur est en quelque sorte une version déformée du produit extérieur de deux vecteurs de K $\otimes$ E(3, $\mathbb{R}$).

Remarque 2.1. *Note historique.*

La définition du produit tensoriel alterné introduite ci-avant s'inspire de la manière dont le produit extérieur a été bâti. Cette affirmation peut être vérifiée dans [03]. Pour autant, il convient de ne surtout pas confondre le produit extérieur défini dans cette référence avec un produit tensoriel alterné. En effet, sauf pour les espaces de dimension trois qui constituent une exception remarquable, le produit extérieur est - comme son nom l'indique clairement- une opération dont l'image est extérieure à K $\otimes$ E(D, $\mathbb{R}$) ; tandis que le produit tensoriel alterné de la définition 2.2 est une opération interne sur K $\otimes$ E(D, $\mathbb{R}$).

1. D = 3 $\rightarrow$ D.(D - 1)/2 = 3.

Remarque 2.2. *Sur les cubes symétriques.*

Tous les produits tensoriels alternés déformés par des cubes symétriques sont évidemment nuls.

Remarque 2.3. *Sur l'existence des cubes antisymétriques.*

Tout cube A contient un cube B anti-symétrique sur ses indices bas.

$$\forall\, A\,:$$

$$\exists\, B\,:\,(i)\, B_{ij}^{k}\,=\,A_{ij}^{k}\,-\,A_{ji}^{k}\,;\,(ii)\, B_{ji}^{k}\,=\,A_{ji}^{k}\,-\,A_{ij}^{k}\,=\,-(A_{ij}^{k}\,-\,A_{ji}^{k})\,=\,-B_{ij}^{k}$$

Définition 2.3. ***Produit de Lie déformé***

Avec les prérequis exposés au niveau de la définition 2.1, je dis que la moitié d'un produit tensoriel alterné bâti sur un cube A est un produit de Lie déformé lorsque ce cube est antisymétrique pour ses indices bas ; il est alors possible de calculer :

$$\forall\, A\,:\, A_{ji}^{k}\,+\,A_{ij}^{k}\,=\,0,\,(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\,\in\,\{K\,\otimes\,E(D,\mathbb{R})\}^2\,:$$

$$[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2]_A\,=\,\frac{1}{2}\,.\,\wedge_A(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\,=\,\sum_{i<j} A_{ij}^{k}\,.\,(q_1^i\,.\,q_2^j\,-\,q_2^i\,.\,q_1^j)\,.\,\mathbf{e}_k$$

2.2 Énoncé.

Avec les prérequis exposés au niveau de la définition 2.1, soit le produit de Lie déformé de deux vecteurs choisis arbitrairement dans $\mathbb{C}\times$ E(D, $\mathbb{R}$) ; la question posée, dite conventionnellement (E), est celle de savoir si et quand il existe des paires (**z**, [P]) de $\mathbb{C}\times$ E(D, $\mathbb{R}$) $\times$ M(D, $\mathbb{C}$) telles que :

$$(\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2)\in\,\{\mathbb{C}\,\otimes\,E(D,\mathbb{R})\}^2\,:\,|[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2]_A>=[P]\,.\,|\mathbf{q}_2>+|\mathbf{z}>$$

2.3 Sémantique.

Quelles que soient les réponses à la question posée, je décide d'introduire le vocabulaire intuitif suivant. Il facilitera l'exposé littéraire et la compréhension des manipulations mathématiques qui seront réalisées tout en plaçant celles-ci dans le contexte connu de la notion de division ; au détail important près qu'il s'agira ici de diviser des vecteurs et non plus des nombres isolés.

$$|[\underbrace{\mathbf{q}_1}_{projectile},\mathbf{q}_2]_A>=[P]\,.\,|\mathbf{q}_2>+|\mathbf{z}>$$

$$|[\mathbf{q}_1,\underbrace{\mathbf{q}_2}_{cible}]_A>=[P]\,.\,|\mathbf{q}_2>+|\mathbf{z}>$$

$$|[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2]\underbrace{A}_{cube\,dformant}>=[P]\,.\,|\mathbf{q}_2>+|\mathbf{z}>$$

$$|[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2]_A>=\underbrace{[P]}_{partie\,principale}\,.\,|\mathbf{q}_2>+|\mathbf{z}>$$

$$|[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2]_A>=[P]\,.\,|\mathbf{q}_2>+|\underbrace{\mathbf{z}}_{reste}>$$

3 Le théorème initial.

3.1 Dans les espaces de dimension trois.

Proposition 3.1. *A tout produit de Lie déformé calculé dans un espace de dimension trois pouvant être décomposé non-trivialement peut être associé une forme polynômiale de degré deux au plus écrite en fonction de trois composantes du projectile.*

Démonstration. Par prise en compte de la définition 1.3.3, un produit de Lie déformé est forcément bâti sur un cube anti-symétrique ; dans un espace de dimension trois, ce type de cubes se laisse concentrer sous la forme d'une matrice [A] de M(3, $\mathbb{C}$) et cette proposition affirme donc :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in E(3, \mathbb{C}) \times E(3, \mathbb{C}) \,:\, |[\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]} >= [P] \,.\, |\mathbf{b} > + |\mathbf{z} >$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \, \Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3) \,\in\, P(3, 2)$$

... où par convention, P(3, 2) représente symboliquement l'ensemble des formes polynomiales de degré deux impliquant les composantes d'un élément d'un espace vectoriel de dimension trois.

Je suppose que la décomposition non-triviale existe a priori. Le système qui en résulte ressemble furieusement à un très banal système de trois combinaisons linéaires écrites en fonction des composantes de la cible **b**.

Bien que la question (E) ne consiste pas ici à découvrir les valeurs des composantes de la cible mais la ou les paire(s) possibles ([P], **z**), il semble raisonnable de vouloir calculer le discriminant (que je qualifierai de stratégique) de ce système. Jusqu'à preuve du contraire (et ce sera effectivement le cas), je m'attends à trouver une polynomiale de degré trois écrite en fonction des composantes du projectile **a** puisque :

$$\Lambda(\mathbf{a}) \,=\, \begin{vmatrix} A^1_{m1} \,.\, a^m \,-\, p_{11} & A^1_{m2} \,.\, a^m \,-\, p_{12} & A^1_{m3} \,.\, a^m \,-\, p_{13} \\ A^2_{n1} \,.\, a^n \,-\, p_{21} & A^2_{n2} \,.\, a^n \,-\, p_{22} & A^2_{n3} \,.\, a^n \,-\, p_{23} \\ A^3_{p1} \,.\, a^p \,-\, p_{31} & A^3_{p2} \,.\, a^p \,-\, p_{32} & A^3_{p3} \,.\, a^p \,-\, p_{33} \end{vmatrix}$$

Cependant, un premier développement fournit :

$$\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3)$$

$$=$$

$$(A^1_{m1} \,.\, a^m - p_{11}) \,.\, \{(A^2_{n2} \,.\, a^n - p_{22}) \,.\, (A^3_{p3} \,.\, a^p - p_{33}) - (A^3_{p2} \,.\, a^p - p_{32}) \,.\, (A^2_{n3} \,.\, a^n - p_{23})\}$$

$$-$$

$$(A^1_{m2} \,.\, a^m - p_{12}) \,.\, \{(A^2_{n1} \,.\, a^n - p_{21}) \,.\, (A^3_{p3} \,.\, a^p - p_{33}) - (A^3_{p1} \,.\, a^p - p_{31}) \,.\, (A^2_{n3} \,.\, a^n - p_{23})\}$$

$$+$$

$$(A^1_{m3} \,.\, a^m - p_{13}) \,.\, \{(A^2_{n1} \,.\, a^n - p_{21}) \,.\, (A^3_{p2} \,.\, a^p - p_{32}) - (A^3_{p1} \,.\, a^p - p_{31}) \,.\, (A^2_{n2} \,.\, a^n - p_{22})\}$$

Dans un deuxième temps :

$$\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3)$$

$$=$$
$$(A^1_{m1}\,.\,a^m\;-\;p_{11})\,.$$
$$\{(A^2_{n2}\,.\,A^3_{p3}-A^2_{n3}\,.\,A^3_{p2})\,.\,a^n\,.\,a^p+[(p_{23}\,.\,A^3_{n2}+p_{32}\,.\,A^2_{n3})-(p_{22}\,.\,A^3_{n3}+p_{33}\,.\,A^2_{n2})]\,.\,a^n+(p_{22}\,.\,p_{33}-p_{32}\,.\,p_{23})\}$$
$$-$$
$$(A^1_{m2}\,.\,a^m\;-\;p_{12})\,.$$
$$\{(A^2_{n1}\,.\,A^3_{p3}-A^2_{n3}\,.\,A^3_{p1})\,.\,a^n\,.\,a^p+[(p_{23}\,.\,A^3_{n1}+p_{31}\,.\,A^2_{n3})-(p_{21}\,.\,A^3_{n3}+p_{33}\,.\,A^2_{n1})]\,.\,a^n+(p_{21}\,.\,p_{33}-p_{31}\,.\,p_{23})\}$$
$$+$$
$$(A^1_{m3}\,.\,a^m\;-\;p_{13})\,.$$
$$\{(A^2_{n1}\,.\,A^3_{p2}-A^2_{n2}\,.\,A^3_{p1})\,.\,a^n\,.\,a^p+[(p_{22}\,.\,A^3_{n1}+p_{31}\,.\,A^2_{n2})-(p_{21}\,.\,A^3_{n2}+p_{32}\,.\,A^2_{n1})]\,.\,a^n+(p_{21}\,.\,p_{32}-p_{22}\,.\,p_{31})\}$$

Les coefficients de degré trois peuvent ainsi être isolés :

$$d_{mnp}\;=\;A^1_{m1}\,.\,(A^2_{n2}\,.\,A^3_{p3}-A^2_{n3}\,.\,A^3_{p2})-A^1_{m2}\,.\,(A^2_{n1}\,.\,A^3_{p3}-A^2_{n3}\,.\,A^3_{p1})+A^1_{m3}\,.\,(A^2_{n1}\,.\,A^3_{p2}-A^2_{n2}\,.\,A^3_{p1})$$

Trois sortes de combinaisons des indices peuvent apparaitre : (i) ils sont tous égaux, (ii) deux sont égaux mais diffèrent du troisième (iii) les trois diffèrent les uns des autres.

1. **Configuration (i)** Il s'agit de :
$$d_{111}$$
$$=$$
$$A^1_{11}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{13}-A^2_{13}\,.\,A^3_{12})-A^1_{12}\,.\,(A^2_{11}\,.\,A^3_{13}-A^2_{13}\,.\,A^3_{11})+A^1_{13}\,.\,(A^2_{11}\,.\,A^3_{12}-A^2_{12}\,.\,A^3_{11})$$
$$d_{222}$$
$$=$$
$$A^1_{21}\,.\,(A^2_{22}\,.\,A^3_{23}-A^2_{23}\,.\,A^3_{22})-A^1_{22}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{23}-A^2_{23}\,.\,A^3_{21})+A^1_{23}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{22}-A^2_{22}\,.\,A^3_{21})$$
$$d_{333}$$
$$=$$
$$A^1_{31}\,.\,(A^2_{32}\,.\,A^3_{33}-A^2_{33}\,.\,A^3_{32})-A^1_{32}\,.\,(A^2_{31}\,.\,A^3_{33}-A^2_{33}\,.\,A^3_{31})+A^1_{33}\,.\,(A^2_{31}\,.\,A^3_{32}-A^2_{32}\,.\,A^3_{31})$$
A cause de l'anti-symétrie du cube A :
$$d_{111}\;=\;d_{222}\;=\;d_{333}\;=\;0$$

2. **Configuration (ii)** Soit, à titre d'exemple la combinaison (112), les coefficients sont :
$$d_{112}$$
$$=$$
$$A^1_{11}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{23}-A^2_{13}\,.\,A^3_{22})-A^1_{12}\,.\,(A^2_{11}\,.\,A^3_{23}-A^2_{13}\,.\,A^3_{21})+A^1_{13}\,.\,(A^2_{11}\,.\,A^3_{22}-A^2_{12}\,.\,A^3_{21})$$
$$d_{121}$$
$$=$$
$$A^1_{11}\,.\,(A^2_{22}\,.\,A^3_{13}-A^2_{23}\,.\,A^3_{12})-A^1_{12}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{13}-A^2_{23}\,.\,A^3_{11})+A^1_{13}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{12}-A^2_{22}\,.\,A^3_{11})$$
$$d_{211}$$
$$=$$
$$A^1_{21}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{13}-A^2_{13}\,.\,A^3_{12})-A^1_{22}\,.\,(A^2_{11}\,.\,A^3_{13}-A^2_{13}\,.\,A^3_{11})+A^1_{23}\,.\,(A^2_{11}\,.\,A^3_{12}-A^2_{12}\,.\,A^3_{11})$$
A cause de l'anti-symétrie des composantes du cube A :
$$d_{112}\;=\;-\,A^1_{12}\,.\,(-\,A^2_{13}\,.\,A^3_{21})\;+\;A^1_{13}\,.\,(-\,A^2_{12}\,.\,A^3_{21})$$

$$d_{121} \;=\; -\,A^1_{12}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{13}) \;+\; A^1_{13}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{12})$$
$$d_{211} \;=\; A^1_{21}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{13} \;-\; A^2_{13}\,.\,A^3_{12})$$

Puisque la multiplication est une opération commutative et associative sur $\mathbb{C}$, l'addition des autres coefficients devient :

$$\begin{gathered} d_{112} \;+\; d_{121} \;+\; d_{211} \\ = \\ -\,A^1_{12}\,.\,(-\,A^2_{13}\,.\,A^3_{21}) \;+\; A^1_{13}\,.\,(-\,A^2_{12}\,.\,A^3_{21}) \\ -\,A^1_{12}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{13}) \;+\; A^1_{13}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{12}) \\ +\,A^1_{21}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{13} \;-\; A^2_{13}\,.\,A^3_{12}) \\ = \\ -\,A^1_{12}\,.\,(A^2_{13}\,.\,A^3_{12}) \;+\; A^1_{13}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{12}) \;+\; A^1_{12}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{13}) \\ -\,A^1_{13}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{12}) \;-\; A^1_{12}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{13} \;-\; A^2_{13}\,.\,A^3_{12}) \\ = \\ 0 \end{gathered}$$

Les permutations cycliques fournissent le même résultat pour les combinaisons (113), (221), (223), (331), (332).

3. **Configuration (iii)** Soit, pour l'exemple, le cas particulier de la combinaison (123) ; les coefficients sont :

$$\begin{gathered} d_{123} \\ = \\ A^1_{11}\,.\,(A^2_{22}\,.\,A^3_{33} - A^2_{23}\,.\,A^3_{32}) - A^1_{12}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{33} - A^2_{23}\,.\,A^3_{31}) + A^1_{13}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{32} - A^2_{22}\,.\,A^3_{31}) \\ d_{312} \\ = \\ A^1_{31}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{23} - A^2_{13}\,.\,A^3_{22}) - A^1_{32}\,.\,(A^2_{11}\,.\,A^3_{23} - A^2_{13}\,.\,A^3_{21}) + A^1_{33}\,.\,(A^2_{11}\,.\,A^3_{22} - A^2_{12}\,.\,A^3_{21}) \\ d_{231} \\ = \\ A^1_{21}\,.\,(A^2_{32}\,.\,A^3_{13} - A^2_{33}\,.\,A^3_{12}) - A^1_{22}\,.\,(A^2_{31}\,.\,A^3_{13} - A^2_{33}\,.\,A^3_{11}) + A^1_{23}\,.\,(A^2_{31}\,.\,A^3_{12} - A^2_{32}\,.\,A^3_{11}) \\ d_{321} \\ = \\ A^1_{31}\,.\,(A^2_{22}\,.\,A^3_{13} - A^2_{23}\,.\,A^3_{12}) - A^1_{32}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{13} - A^2_{23}\,.\,A^3_{11}) + A^1_{33}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{12} - A^2_{22}\,.\,A^3_{11}) \\ d_{132} \\ = \\ A^1_{11}\,.\,(A^2_{32}\,.\,A^3_{23} - A^2_{33}\,.\,A^3_{22}) - A^1_{12}\,.\,(A^2_{31}\,.\,A^3_{23} - A^2_{33}\,.\,A^3_{21}) + A^1_{13}\,.\,(A^2_{31}\,.\,A^3_{22} - A^2_{32}\,.\,A^3_{21}) \\ d_{213} \\ = \\ A^1_{21}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{33} - A^2_{13}\,.\,A^3_{32}) - A^1_{22}\,.\,(A^2_{11}\,.\,A^3_{33} - A^2_{13}\,.\,A^3_{31}) + A^1_{23}\,.\,(A^2_{11}\,.\,A^3_{32} - A^2_{12}\,.\,A^3_{31}) \end{gathered}$$

A cause de l'anti-symétrie du cube A :

$$d_{123} \;=\; -\,A^1_{12}\,.\,(-\,A^2_{23}\,.\,A^3_{31}) \;+\; A^1_{13}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{32})$$
$$d_{312} \;=\; A^1_{31}\,.\,(A^2_{12}\,.\,A^3_{23}) \;-\; A^1_{32}\,.\,(-\,A^2_{13}\,.\,A^3_{21})$$
$$d_{231} \;=\; A^1_{21}\,.\,(A^2_{32}\,.\,A^3_{13}) \;+\; A^1_{23}\,.\,(A^2_{31}\,.\,A^3_{12})$$
$$d_{321} \;=\; A^1_{31}\,.\,(-\,A^2_{23}\,.\,A^3_{12}) \;-\; A^1_{32}\,.\,(A^2_{21}\,.\,A^3_{13})$$

$$d_{132} \;=\; -\,A^1_{12}\,.\,(A^2_{31}\,.\,A^3_{23}) \;+\; A^1_{13}\,.\,(-\,A^2_{32}\,.\,A^3_{21})$$
$$d_{213} \;=\; A^1_{21}\,.\,(-\,A^2_{13}\,.\,A^3_{32}) \;+\; A^1_{23}\,.\,(-\,A^2_{12}\,.\,A^3_{31})$$

Puisque la multiplication est une opération associative et commutative sur $\mathbb{C}$, l'addition des combinaisons obtenues par permutation cyclique et anti-cyclique fournit (voir les couleurs) :

$$d_{123} \,+\, d_{312} \,+\, d_{231} \,+\, d_{321} \,+\, d_{132} \,+\, d_{213} \;=\; 0$$

Puisque les coefficients comportant trois indices soit s'annulent, soit constituent des combinaisons s'annulant, il en découle le

Théorème 3.1. ***dit "initial"***

A tout produit de Lie déformé défini sur un espace vectoriel de dimension trois (D = 3) pouvant être décomposé non-trivialement correspond une forme polynômiale de degré deux écrite en fonction de trois composantes du projectile apparaissant dans ce produit. □

Corollaire 3.1. *Formalisme générique de la polynomiale associée à une décomposition non-triviale.*

Il est clair que ce théorème important permet de conclure à l'existence d'une forme polynomiale de P(3, 2) telle que :

$$\exists\,(\mathbf{z},\,[P])\;:\;|[\mathbf{a},\mathbf{b}]_{[A]}>=\,[P]\,.\,|\mathbf{b}>\,+|\mathbf{z}>$$
$$\Downarrow$$
$$\exists$$
$$\Lambda(a^1,\,a^2,\,a^3)$$
$$=$$
$$|_{[A]}\Phi(\mathbf{a})\,-\,[P]|$$
$$=$$
$$\sum_m d_{mm}\,.\,(a^m)^2 \,+\, \sum_{m\,<\,n}(d_{mn}\,+\,d_{nm})\,.\,a^m\,.\,a^n \,+\, \sum_m d_m\,.\,a^m \,-\,|P|$$

et que la suite de l'exploration va consister à découvrir quelles paires ([P], **z**) peuvent raisonnablement être associées avec ces décompositions non-triviales.

3.2 Dans les espaces de dimension quelconque supérieure à deux.

Proposition 3.2. *Le degré du discriminant stratégique pour les produits de Lie déformés définis sur un espace vectoriel de dimension égale à D (D ≥ 2) est de dimension au plus égale à D - 1.*

Démonstration. : Pour rappel, dans la théorie de la question (E), les produits de Lie déformés sont des produits tensoriels alternés bâtis sur des cubes déformants anti-symétriques. Soit à reconsidérer alors le sujet des décompositions triviales des produits de Lie déformés ; il vient logiquement :

$$\forall\,A\,\in\,K^-_{(D-D-D)},\,\forall\,\mathbf{a},\mathbf{b}\,\in\,\mathbb{C}\otimes E(D,\mathbb{R})\;:\;|[\mathbf{a},\mathbf{b}]_A>=\,{}_A\Phi(\mathbf{a})\,.\,|\mathbf{b}>$$

Mais ici, le cas de deux arguments égaux a une conséquence inattendue dûe à l'anti-symétrie du produit de Lie déformé :

$$\forall A \in K^{-}_{(D-D-D)}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{C} \otimes E(D, \mathbb{R}) : |[\mathbf{a}, \mathbf{a}]_A >= {}_A\Phi(\mathbf{a}) . |\mathbf{a} >= |\mathbf{0}>$$

Les décompositions triviales des *carrés de Lie déformés* n'ont de réalité cohérente que dans trois cas :

1. l'argument est nul : $\mathbf{a} = \mathbf{0}$;
2. le cube A est nul : $\mathrm{A} = 0$;
3. le déterminant de la décomposition triviale est nul :

$$|{}_A\Phi(\mathbf{a})| = 0$$

Autrement dit, puisque les deux premiers cas sont parfaitement sans intérêt, les décompositions triviales des *carrés de Lie déformés* n'ont de réalité que si leur déterminant est nul :

$$\forall A \in K^{-}_{(D-D-D)} - \{A = 0\}, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{C} \otimes E(D, \mathbb{R}) - \{\mathbf{0}\} : |{}_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{a})| = 0$$

Si le cube déformant était quelconque, alors la polynomiale $\Lambda({}^{(D)}\mathbf{a})$ serait forcément de degré au plus égal à D et elle prendrait la forme générique suivante (sommes sur les indices répétés) :

$$\Lambda({}^{(D)}\mathbf{u}) = c_{\alpha_1 \dots \alpha_D} . u^{\alpha_1} . \dots . u^{\alpha_D} + \dots + c_{\alpha_1 \alpha_2} . u^{\alpha_1} . u^{\alpha_2} + c_{\alpha_1} . u^{\alpha_1} + c$$

Mais, pour rappel :

— La matrice de décomposition la plus triviale est le seul objet mathématique de la discussion sur le discriminant stratégique impliqué dans la résolution de la question (E) dont le déterminant est une forme multi-linéaire de degré D pure.

— La présence de la matrice inconnue [P] ne fait que transformer cette forme multi-linéaire en une forme polynomiale par l'ajout de termes dont le degré est systématiquement inférieur à D ; ce constat laisse présumer du fait que :

$${}_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{u}) = [A^{\alpha}_{\chi\beta} . a^{\chi}] \Rightarrow |{}_A\Phi({}^{(D)}\mathbf{a})| = c_{\alpha_1 \dots \alpha_D} . u^{\alpha_1} . \dots . a^{\alpha_D}$$

— Il est aisé de démontrer que :

$$c = (-1)^D . |P|$$

Or je viens de démontrer que le déterminant d'une matrice associée à la décomposition triviale d'un produit de Lie déformé (par définition : forcément par un cube anti-symétrique sur ses indices bas est nul) doit être nul.

Il en résulte donc que le discriminant stratégique des décompositions non-triviales des produits de Lie déformés a le formalisme générique :

$$\Lambda({}^{(D)}\mathbf{a})$$

$$=$$

$$c_{\alpha_1 \dots \alpha_{D-1}} . a^{\alpha_1} . \dots . a^{\alpha_{D-1}} + \dots + c_{\alpha_1 \alpha_2} . a^{\alpha_1} . a^{\alpha_2} + c_{\alpha_1} . a^{\alpha_1} + (-1)^D . |P|$$

C'est une forme polynomiale de degré D - 1, élément de P(D, D - 1). □

Théorème 3.2. *Généralisation du théorème initial.*

Pour les produits de Lie déformés calculés dans un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à deux, le discriminant stratégique accompagnant la question (E) est toujours une polynomiale de degré au plus égal à D - 1.

4 Restriction aux espaces de dimension trois.

4.1 Caractéristiques du produit vectoriel déformé.

Pour rappel, les composantes du cube déformant A satisfont ici obligatoirement la relation d'antisymétrie :

$$A_{ij}^k + A_{ji}^k = 0$$

En conséquence de quoi :

Proposition 4.1. *La question (E), lorsquelle est posée dans un espace de dimension trois, concerne forcément des produits vectoriels déformés et éventuellement décomposés non trivialement.*

Démonstration. Puisque, dans un espace de dimension trois, l'antisymétrie du cube déformant A réduit celui-ci à un élémennt [A] de M(3, ℂ) :

$$\{\forall A \,|\, \forall\ i,\, j,\, k:\ A_{ij}^k + A_{ji}^k = 0\}$$

$$\Downarrow$$

$$\{A \to [A] = \begin{bmatrix} A_{12}^1 & A_{12}^2 & A_{12}^3 \\ A_{23}^1 & A_{23}^2 & A_{23}^3 \\ A_{13}^1 & A_{13}^2 & A_{13}^3 \end{bmatrix} \in M(3,\, \mathbb{C})\}$$

Le produit de Lie peut se définir par :

$$\forall\, \mathbf{a},\, \mathbf{b} \in E(3, \mathbb{C}) :\ [\mathbf{a}, \mathbf{b}]_{[A]} = \frac{1}{2} \,.\, \wedge_{[A]} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i<j}^{k} A_{ij}^3 \,.\, (a^i \,.\, b^j - b^i \,.\, a^j) \,.\, \mathbf{e}_k$$

Dans la base canonique à laquelle l'espace vectoriel peut être rapporté (ou, ce qui revient au même, dans le langage des composantes sur l'espace dual) :

$$\frac{1}{2} \,.\, (\wedge_{[A]}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))^k$$

$$=$$

$$A_{12}^k \,.\, (a^1 \,.\, b^2 - b^1 \,.\, a^2) + A_{23}^k \,.\, (a^2 \,.\, b^3 - b^2 \,.\, a^3) + A_{13}^k \,.\, (a^1 \,.\, b^3 - b^1 \,.\, a^3)$$

Mais puisque le corps ℂ des nombres complexes est commutatif et que les composantes du cube déformant satisfont la propriété d'antisymétrie, les composantes s'écrivent aussi :

$$\frac{1}{2} \,.\, (\wedge_{[A]}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))^k$$

$$=$$

$$A_{23}^k \,.\, (a^2 \,.\, b^3 - a^3 \,.\, b^2) + A_{31}^k \,.\, (a^3 \,.\, b^1 - a^1 \,.\, b^3) + A_{12}^k \,.\, (a^1 \,.\, b^2 - a^2 \,.\, b^1)$$

Réintroduisant à cet endroit le produit vectoriel classique, ces relations peuvent se réordonner en :

$$(\wedge_A(\mathbf{a},\mathbf{b}))^k = A^k_{23} \,.\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^1 + A^k_{31} \,.\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 + A^k_{12} \,.\, (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^3$$

Soit, introduite par convenance, la matrice :

$$[A^*] = \begin{bmatrix} A^1_{23} & A^1_{31} & A^1_{12} \\ A^2_{23} & A^2_{31} & A^2_{12} \\ A^3_{23} & A^3_{31} & A^3_{12} \end{bmatrix} \in M(3, \mathbb{C})$$

Ainsi que la matrice [J] et sa transposée définies par :

$$[J] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; [J]^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il vient assez simplement :

$$[J]^t \,.\, [A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ -A^1_{13} & -A^2_{13} & -A^3_{13} \\ A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \end{bmatrix}$$

Et :

$$\{[J]^t \,.\, [A]\}^t = [A]^t \,.\, [J] = [A^*]$$

Je viens donc de prouver ce que je m'étais proposé de démontrer :

$$|[\mathbf{a},\mathbf{b}]_{[A]} >= \underbrace{[A]^t \,.\, [J]}_{[A^*]} \,.\, |\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} >$$

La matrice [A*] introduite plus haut par convenance sera baptisée *matrice déformante effective* du produit vectoriel classique. Je note au passage que la matrice [J] est une génératrice du groupe cyclique — puisque :

$$[J]^2 = -[J]^t,\; [J]^3 = -Id_3,\; [J]^4 = -[J],\; [J]^5 = [J]^t,\; [J]^6 = Id_3$$

□

4.2 Analyse des coefficients de degré deux de la polynomiale Λ.

Je commence ici une série de pénibles manipulations algébriques. Globalement, il s'agit de finir le calcul des coefficients du déterminant stratégique apparaissant lorsque la question (E) est posée dans un espace de dimension trois.

A. Coefficients de degré deux.

$$d_{mn}$$

$$=$$

$$A^1_{m1} \,.\, [(p_{23} \,.\, A^3_{n2} + p_{32} \,.\, A^2_{n3}) - (p_{22} \,.\, A^3_{n3} + p_{33} \,.\, A^2_{n2})] - p_{11} \,.\, (A^2_{m2} \,.\, A^3_{n3} - A^2_{m3} \,.\, A^3_{n2})$$

$$-$$

$$\{A^1_{m2} . [(p_{23} . A^3_{n1} + p_{31} . A^2_{n3}) - (p_{21} . A^3_{n3} + p_{33} . A^2_{n1})] - p_{12} . (A^2_{m1} . A^3_{n3} - A^2_{m3} . A^3_{n1})\}$$

$$+$$

$$A^1_{m3} . [(p_{22} . A^3_{n1} + p_{31} . A^2_{n2}) - (p_{21} . A^3_{n2} + p_{32} . A^2_{n1})] - p_{13} . (A^2_{m1} . A^3_{n2} - A^2_{m2} . A^3_{n1})$$

Lemme 4.1. *Les coefficients de degré deux se laissent regrouper au sein d'un élément [D] de l'ensemble M(3, $\mathbb{C}$).*

A.1. Les coefficients de degré deux le long de la diagonale. :

$$d_{11}$$

$$=$$

$$A^1_{11} . [(p_{23} . A^3_{12} + p_{32} . A^2_{13}) - (p_{22} . A^3_{13} + p_{33} . A^2_{12})] - p_{11} . (A^2_{12} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{12})$$

$$-$$

$$\{A^1_{12} . [(p_{23} . A^3_{11} + p_{31} . A^2_{13}) - (p_{21} . A^3_{13} + p_{33} . A^2_{11})] - p_{12} . (A^2_{11} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{11})\}$$

$$+$$

$$A^1_{13} . [(p_{22} . A^3_{11} + p_{31} . A^2_{12}) - (p_{21} . A^3_{12} + p_{32} . A^2_{11})] - p_{13} . (A^2_{11} . A^3_{12} - A^2_{12} . A^3_{11})$$

$$d_{22}$$

$$=$$

$$A^1_{21} . [(p_{23} . A^3_{22} + p_{32} . A^2_{23}) - (p_{22} . A^3_{23} + p_{33} . A^2_{22})] - p_{11} . (A^2_{22} . A^3_{23} - A^2_{23} . A^3_{22})$$

$$-$$

$$\{A^1_{22} . [(p_{23} . A^3_{21} + p_{31} . A^2_{23}) - (p_{21} . A^3_{23} + p_{33} . A^2_{21})] - p_{12} . (A^2_{21} . A^3_{23} - A^2_{23} . A^3_{21})\}$$

$$+$$

$$A^1_{23} . [(p_{22} . A^3_{21} + p_{31} . A^2_{22}) - (p_{21} . A^3_{22} + p_{32} . A^2_{21})] - p_{13} . (A^2_{21} . A^3_{22} - A^2_{22} . A^3_{21})$$

$$d_{33}$$

$$=$$

$$A^1_{31} . [(p_{23} . A^3_{32} + p_{32} . A^2_{33}) - (p_{22} . A^3_{33} + p_{33} . A^2_{32})] - p_{11} . (A^2_{32} . A^3_{33} - A^2_{33} . A^3_{32})$$

$$-$$

$$\{A^1_{32} . [(p_{23} . A^3_{31} + p_{31} . A^2_{33}) - (p_{21} . A^3_{33} + p_{33} . A^2_{31})] - p_{12} . (A^2_{31} . A^3_{33} - A^2_{33} . A^3_{31})\}$$

$$+$$

$$A^1_{33} . [(p_{22} . A^3_{31} + p_{31} . A^2_{32}) - (p_{21} . A^3_{32} + p_{32} . A^2_{31})] - p_{13} . (A^2_{31} . A^3_{32} - A^2_{32} . A^3_{31})$$

A cause de l'antisymétrie du cube déformant :

$$d_{11}$$

$$=$$

$$-p_{11} . (A^2_{12} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{12}) - A^1_{12} . (p_{31} . A^2_{13} - p_{21} . A^3_{13}) + A^1_{13} . (p_{31} . A^2_{12} - p_{21} . A^3_{12})$$

$$d_{22}$$

$$=$$

$$A^1_{21} . (p_{32} . A^2_{23}) - p_{22} . A^3_{23}) + p_{12} . (A^2_{21} . A^3_{23} - A^2_{23} . A^3_{21}) + A^1_{23} . (p_{22} . A^3_{21} - p_{32} . A^2_{21})$$

$$d_{33}$$

$$=$$

$$A^1_{31} . (p_{23} . A^3_{32} - p_{33} . A^2_{32}) - A^1_{32} . (p_{23} . A^3_{31} - p_{33} . A^2_{31}) - p_{13} . (A^2_{31} . A^3_{32} - A^2_{32} . A^3_{31})$$

Les coefficients diagonaux se laissent réécrire :

$$d_{11}$$

$$=$$

$$p_{11} . (A^2_{13} . A^3_{12} - A^2_{12} . A^3_{13}) + p_{21} . (A^1_{12} . A^3_{13} - A^1_{13} . A^3_{12}) + p_{31} . (A^1_{13} . A^2_{12} - A^1_{12} . A^2_{13})$$

$$d_{22}$$

$$=$$

$$p_{12} . (A^2_{21} . A^3_{13} - A^2_{23} . A^3_{21}) + p_{22} . (A^1_{23} . A^3_{21} - A^1_{21} . A^3_{23}) + p_{32} . (A^1_{21} . A^2_{23} - A^1_{23} . A^2_{21})$$

$$d_{33}$$

$$=$$

$$p_{13} . (A^2_{31} . A^3_{32} - A^2_{32} . A^3_{31}) + p_{23} . (A^1_{12} . A^3_{13} - A^1_{13} . A^3_{12}) + p_{33} . (A^1_{32} . A^2_{31} - A^1_{31} . A^2_{32})$$

Proposition 4.2. *Les coefficients de la diagonale de la matrice [D] dépendent (i) des composantes de la matrice inconnue [P] et, probablement, (ii) de celles de la matrice déformante [A].*

Démonstration. Le formalisme des trois coefficients d_{mm} (m = 1, 2, 3) suggère que les matrices suivantes jouent un rôle important :

$$[{}_{mn}T]$$

$$=$$

$$[{}_{mn}t_{ij}]$$

$$=$$

$$-\begin{bmatrix} (A^2_{m2} . A^3_{n3} - A^2_{m3} . A^3_{n2}) & (A^1_{m3} . A^3_{n2} - A^1_{m2} . A^3_{n3}) & (A^1_{m2} . A^2_{n3} - A^1_{m3} . A^2_{n2}) \\ (A^2_{m1} . A^3_{n3} - A^2_{m3} . A^3_{n1}) & (A^1_{m1} . A^3_{n3} - A^1_{m3} . A^3_{n1}) & (A^1_{m3} . A^2_{n1} - A^1_{m1} . A^2_{n3}) \\ (A^2_{m1} . A^3_{n2} - A^2_{m2} . A^3_{n1}) & (A^1_{m2} . A^3_{n1} - A^1_{m1} . A^3_{n2}) & (A^1_{m2} . A^2_{n1} - A^1_{m1} . A^2_{n2}) \end{bmatrix}$$

Puisque, à cause de la propriété d'antisymétrie sur les indice bas du cube déformant A :

$$[{}_{11}T] . [P]$$

$$=$$

$$-\begin{bmatrix} (A^2_{12} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{12}) & (A^1_{13} . A^3_{12} - A^1_{12} . A^3_{13}) & (A^1_{12} . A^2_{13} - A^1_{13} . A^2_{12}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & {}_{11}x_{12} & {}_{11}x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs c'est un fait que :

$$d_{11} = Trace\{[_{11}T] . [P]\}$$

Au passage, il convient de remarquer que le même résultat peut s'obtenir en écrivant :

$$d_{11} = Trace\{[P]^t . [_{11}T]^t\}$$

A supposer *a priori* que la matrice déformante ne soit pas dégénérée, son inverse peut être calculé :

$$|A| \neq 0, [A] . [A]^{-1} = Id_3 = [A]^{-1} . [A]$$

$$|A| . [A]^{-1}$$

$$=$$

$$|A| . [a_{ij}]$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} (A^2_{23} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{23}) & -(A^2_{12} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{12}) & (A^2_{12} . A^3_{23} - A^2_{23} . A^3_{12}) \\ -(A^1_{23} . A^3_{13} - A^1_{13} . A^3_{23}) & (A^1_{12} . A^3_{13} - A^1_{13} . A^3_{12}) & -(A^1_{12} . A^3_{23} - A^1_{23} . A^3_{12}) \\ (A^1_{23} . A^2_{13} - A^1_{13} . A^2_{23}) & -(A^1_{12} . A^2_{13} - A^1_{13} . A^2_{12}) & (A^1_{12} . A^2_{23} - A^1_{23} . A^2_{12}) \end{bmatrix}$$

Force est de constater que :

$$[_{11}T] = |A| . \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans le même état d'esprit :

$$[_{22}T] . [P]$$

$$=$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (A^2_{21} . A^3_{23} - A^2_{23} . A^3_{21}) & (A^1_{21} . A^3_{23} - A^1_{23} . A^3_{21}) & (A^1_{23} . A^2_{21} - A^1_{21} . A^2_{23}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}_{22}x_{21} & d_{22} & {}_{22}x_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et :

$$[_{22}T] = |A| . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De plus :

$$[{}_{33}T] \,.\, [P]$$

$$=$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (A^2_{31} \,.\, A^3_{32} \;-\; A^2_{32} \,.\, A^3_{31}) & (A^1_{32} \,.\, A^3_{31} \;-\; A^1_{31} \,.\, A^3_{32}) & (A^1_{32} \,.\, A^2_{31} \;-\; A^1_{31} \,.\, A^2_{32}) \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ {}_{33}x_{31} & {}_{33}x_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

Et :

$$[{}_{33}T] \;=\; |A| \,.\, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{21} & -a_{31} \end{bmatrix}$$

Ces résultats permettent de reconstruire la diagonale de la matrice [D] :

$$\{[{}_{11}T] \;+\; [{}_{22}T] \;+\; [{}_{33}T]\} \,.\, [P]$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & {}_{11}x_{12} & {}_{11}x_{13} \\ {}_{22}x_{21} & d_{22} & {}_{22}x_{23} \\ {}_{33}x_{31} & {}_{33}x_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$|A| \,.\, \begin{bmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\ a_{11} & a_{21} & -a_{31} \end{bmatrix} \,.\, [P]$$

A ce stade, il ne peut rien être déduit pour ce qui concerne les coefficients hors de la diagonale de la matrice [D]. Néanmoins un formalisme impliquant la trace réapparaitra ultérieurement dans cette discussion ; il permettra d'unifier les diverses informations collectées sur les divers coefficients. Il devient évident que :

$$\{[{}_{11}T] \;+\; [{}_{22}T] \;+\; [{}_{33}T]\} \,.\, [P] \;=\; \begin{bmatrix} d_{11} & - & - \\ - & d_{22} & - \\ - & - & d_{33} \end{bmatrix} \;=\; |A| \,.\, \{[A]^{-1} \,.\, [J]\}^t \,.\, [P]$$

□

Lemme 4.2. *Les coefficients de la diagonale de la matrice [D] dépendent (i) des composantes de la matrice [P] et (ii) de celles de la matrice déformante [A].*

A.2. Les coefficients de degré deux hors de la diagonale.
A titre d'échauffement, soit l'exemple suivant :

$$d_{12}$$

$$=$$

$$A^1_{11} \,.\, [(p_{23} \,.\, A^3_{22} + p_{32} \,.\, A^2_{23}) - (p_{22} \,.\, A^3_{23} + p_{33} \,.\, A^2_{22})] - p_{11} \,.\, (A^2_{12} \,.\, A^3_{23} - A^2_{13} \,.\, A^3_{22})$$

$$-$$

$$\{A^1_{12} \,.\, [(p_{23} \,.\, A^3_{21} + p_{31} \,.\, A^2_{23}) - (p_{21} \,.\, A^3_{23} + p_{33} \,.\, A^2_{21})] - p_{12} \,.\, (A^2_{11} \,.\, A^3_{23} - A^2_{13} \,.\, A^3_{21})\}$$

$$+$$

$$A^1_{13} \,.\, [(p_{22} \,.\, A^3_{21} + p_{31} \,.\, A^2_{22}) - (p_{21} \,.\, A^3_{22} + p_{32} \,.\, A^2_{21})] - p_{13} \,.\, (A^2_{11} \,.\, A^3_{22} - A^2_{12} \,.\, A^3_{21})$$

$$=$$

$$-\, p_{11} \,.\, (A^2_{12} \,.\, A^3_{23})$$

$$-$$

$$\{A^1_{12} \,.\, [(p_{23} \,.\, A^3_{21} \; + \; p_{31} \,.\, A^2_{23}) \; - \; (p_{21} \,.\, A^3_{23} \; + \; p_{33} \,.\, A^2_{21})] \; - \; p_{12} \,.\, (-\, A^2_{13} \,.\, A^3_{21})\}$$

$$+$$

$$A^1_{13} \,.\, [p_{22} \,.\, A^3_{21} \; - \; p_{32} \,.\, A^2_{21}] \; - \; p_{13} \,.\, (-\, A^2_{12} \,.\, A^3_{21})$$

Ces coefficients peuvent se réorganiser comme suit :

$$d_{12}$$

$$=$$

$$\begin{array}{l} -\, p_{11} \,.\, A^2_{12} \,.\, A^3_{23} \; - \; p_{12} \,.\, A^2_{13} \,.\, A^3_{12} \; - \; p_{13} \,.\, A^2_{12} \,.\, A^3_{12} \\ +\, p_{21} \,.\, A^1_{12} \,.\, A^3_{23} \; - \; p_{22} \,.\, A^1_{13} \,.\, A^3_{12} \; + \; p_{23} \,.\, A^1_{12} \,.\, A^3_{12} \\ -\, p_{31} \,.\, A^1_{12} \,.\, A^2_{23} \; + \; p_{32} \,.\, A^1_{13} \,.\, A^2_{12} \; - \; p_{33} \,.\, A^1_{12} \,.\, A^2_{12} \end{array}$$

Ils peuvant ainsi être réécrits :

$$d_{12} \; = \; Trace\{ \begin{bmatrix} -A^2_{12} \,.\, A^3_{23} & A^1_{12} \,.\, A^3_{23} & -A^1_{12} \,.\, A^2_{23} \\ -A^2_{13} \,.\, A^3_{12} & -A^1_{13} \,.\, A^3_{12} & A^1_{13} \,.\, A^2_{12} \\ A^2_{12} \,.\, A^3_{12} & A^1_{12} \,.\, A^3_{12} & -A^1_{12} \,.\, A^2_{12} \end{bmatrix} \,.\, \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \}$$

C'est un constat intéressant puisqu'en reconsidérant les équations précédentes pour m = 1 et n = 2 :

$$[{}_{12}T]$$

$$=$$

$$[{}_{12}t_{ij}]$$

$$=$$

$$- \begin{bmatrix} (A^2_{12} \,.\, A^3_{23} \; - \; A^2_{13} \,.\, A^3_{22}) & (A^1_{13} \,.\, A^3_{22} \; - \; A^1_{12} \,.\, A^3_{23}) & (A^1_{12} \,.\, A^2_{23} \; - \; A^1_{13} \,.\, A^2_{22}) \\ (A^2_{11} \,.\, A^3_{23} \; - \; A^2_{13} \,.\, A^3_{21}) & (A^1_{11} \,.\, A^3_{23} \; - \; A^1_{13} \,.\, A^3_{21}) & (A^1_{13} \,.\, A^2_{21} \; - \; A^1_{11} \,.\, A^2_{23}) \\ (A^2_{11} \,.\, A^3_{22} \; - \; A^2_{12} \,.\, A^3_{21}) & (A^1_{12} \,.\, A^3_{21} \; - \; A^1_{11} \,.\, A^3_{22}) & (A^1_{12} \,.\, A^2_{21} \; - \; A^1_{11} \,.\, A^2_{22}) \end{bmatrix}$$

En tenant compte de l'antisymétrie des coefficients de la matrice déformante, il devient clair que :

$$d_{12} \; = \; Trace\{[{}_{12}T] \,.\, [P]\}$$

Proposition 4.3. *Les coefficients hors de la diagonale peuvent être considérés à un niveau plus abstrait permettant de mettre en évidence une formule générique liant les coefficients de degré deux.*

Démonstration. En organisant le terme générique :

$$d_{mn}$$

$$=$$

$$(p_{23} . A^1_{m1} . A^3_{n2} \; + \; p_{32} . A^1_{m1} . A^2_{n3})$$
$$- (p_{22} . A^1_{m1} . A^3_{n3} \; + \; p_{33} . A^1_{m1} . A^2_{n2})$$
$$- p_{11} . (A^2_{m2} . A^3_{n3} \; - \; A^2_{m3} . A^3_{n2})$$

$$-$$

$$\{(p_{23} . A^1_{m2} . A^3_{n1} \; + \; p_{31} . A^1_{m2} . A^2_{n3})$$
$$- (p_{21} . A^1_{m2} . A^3_{n3} \; + \; p_{33} . A^1_{m2} . A^2_{n1})$$
$$- p_{12} . (A^2_{m1} . A^3_{n3} \; - \; A^2_{m3} . A^3_{n1})\}$$

$$+$$

$$(p_{22} . A^1_{m3} . A^3_{n1} \; + \; p_{31} . A^1_{m3} . A^2_{n2})$$
$$- (p_{21} . A^1_{m3} . A^3_{n2} \; + \; p_{32} . A^1_{m3} . A^2_{n1})$$
$$- p_{13} . (A^2_{m1} . A^3_{n2} \; - \; A^2_{m2} . A^3_{n1})$$

$$\Downarrow$$

$$d_{mn}$$

$$=$$

$$- p_{11} . (A^2_{m2} . A^3_{n3} - A^2_{m3} . A^3_{n2}) - p_{12} . (A^2_{m1} . A^3_{n3} - A^2_{m3} . A^3_{n1}) - p_{13} . (A^2_{m1} . A^3_{n2} - A^2_{m2} . A^3_{n1})$$
$$- p_{21} . (A^1_{m3} . A^3_{n2} - A^1_{m2} . A^3_{n3}) - p_{22} . (A^1_{m1} . A^3_{n3} - A^1_{m3} . A^3_{n1}) - p_{23} . (A^1_{m2} . A^3_{n1} - A^1_{m1} . A^3_{n2})$$
$$- p_{31} . (A^1_{m2} . A^2_{n3} - A^1_{m3} . A^2_{n2}) - p_{32} . (A^1_{m3} . A^2_{n1} - A^1_{m1} . A^2_{n3}) - p_{33} . (A^1_{m2} . A^2_{n1} - A^1_{m1} . A^2_{n2})$$

Le formalisme du coefficient générique d_{mn} suggère de fait que la matrice suivante joue effectivement un rôle important :

$$[_{mn}T]$$

$$=$$

$$[_{mn}t_{ij}]$$

$$=$$

$$- \begin{bmatrix} (A^2_{m2} . A^3_{n3} \; - \; A^2_{m3} . A^3_{n2}) & (A^1_{m3} . A^3_{n2} \; - \; A^1_{m2} . A^3_{n3}) & (A^1_{m2} . A^2_{n3} \; - \; A^1_{m3} . A^2_{n2}) \\ (A^2_{m1} . A^3_{n3} \; - \; A^2_{m3} . A^3_{n1}) & (A^1_{m1} . A^3_{n3} \; - \; A^1_{m3} . A^3_{n1}) & (A^1_{m3} . A^2_{n1} \; - \; A^1_{m1} . A^2_{n3}) \\ (A^2_{m1} . A^3_{n2} \; - \; A^2_{m2} . A^3_{n1}) & (A^1_{m2} . A^3_{n1} \; - \; A^1_{m1} . A^3_{n2}) & (A^1_{m2} . A^2_{n1} \; - \; A^1_{m1} . A^2_{n2}) \end{bmatrix}$$

puisque ce coefficient générique n'est rien d'autre que :

$$d_{mn} \; = \; Trace\{[_{mn}T] . [P]\}$$

Cette formule semble effectivement être générique. Les propriétés habituelles de la trace [18 ; page 184], le même résultat peut également se réécrire :

$$d_{mn} = Trace\{[P] . [_{mn}T]\} = Trace\{[P]^t . [_{mn}T]^t\} = Trace\{[_{mn}T]^t . [P]^t\}$$

En intervertissant les positions de m et n :

$$d_{nm} = Trace\{[_{nm}T] . [P]\} = Trace\{[P] . [_{nm}T]\} = Trace\{[P]^t . [_{nm}T]^t\} = Trace\{[_{nm}T]^t . [P]^t\}$$

nota bene : il n'y a pas de lien évident entre $[_{mn}\mathrm{T}]$ et $[_{nm}\mathrm{T}]$; et il n'y en a peut-être pas.

□

Définition 4.1. *Contraction.*

Soit un ensemble de neuf matrices dans M(3, $\mathbb{C}$) : S = $\{[_{mn}\mathrm{U}]$; m, n = 1, 2, 3$\}$; soit la la contraction des éléments de cet ensemble en un nouvel élément [X] dans M(3, $\mathbb{C}$) tel que :

$$[X] = [x_{nm} = Trace\{[_{nm}U]\}]$$

Lemme 4.3. *La matrice [D] est la contraction de neuf matrices $[_{mn}T].[P]$; m, n = 1, 2, 3.*

Proposition 4.4. *Le carré des coefficients.*

Démonstration. : Quand les matrices de l'ensemble S sont hermitiennes, la formule suivante sur les traces peut s'appliquer [18 ; page 222], [19 ; page 255] :

$$\forall m, n = 1, 2, 3 : exp[Trace\{[_{mn}U]\}] = det(exp[_{mn}U]\}])$$

Lorsque les neuf matrices $[_{mn}\mathrm{T}].[\mathrm{P}]$ (pour m, n = 1, 2, 3) sont hermitiennes *a priori*, alors **pour chacune d'elles** prise séparément :

$$\forall m, n = 1, 2, 3 : exp(d_{mn}) = det(exp\{[_{mn}T] . [P]\})$$

Si les arguments contenus dans cette formule acceptent des développements de Taylor, alors :

$$\forall m, n = 1, 2, 3 : 1 + d_{mn} + \frac{1}{2} . d_{mn}^2 + ... = det(Id_3 + [_{mn}T] . [P] + ...)$$

Il est possible de prouver que le développement au premier ordre du terme de droite a le formalisme :

$$\forall m, n = 1, 2, 3 :$$

$$det(Id_3 + [_{mn}T] . [P]) = 1 + Trace[_{mn}T] . [P] + Y([_{mn}T] . [P]) + |_{mn}T| . |P|$$

Avec :

$$\forall m, n = 1, 2, 3 : Y([_{mn}T] . [P]) = ...$$

De sorte que :

$$\forall m, n = 1, 2, 3 : \frac{1}{2} . d_{mn}^2 \sim Y([_{mn}T] . [P]) + |_{mn}T| . |P|$$

□

Proposition 4.5. *La Prop.— peut se généraliser à tous les coefficients de degré deux du déterminant stratégique (qui est également la polynomiale Λ) associé à une décomposition non-triviale.*

Démonstration. : Il serait intéressant de compléter les résultats précédents (Prop.8) ; tout particulièrement pour ce qui concerne les coefficients hors de la diagonale de la matrice [D]. Une observation attentive montre que :

— Indépendamment de ce qu'est la matrice [P], il existe une correspondance entre la somme des matrices $[_{mm}\mathrm{T}]$ et la matrice $|\mathrm{A}|.([\mathrm{A}]^{-1}.[\mathrm{J}])^t$; pour autant je ne sais rien des composantes des termes en dehors de la diagonale de la matrice reconstruite dont la diagonale coincide avec celle de la matrice [D].

$$\forall\,[P]\,:\,\{[_{11}T]\,+\,[_{22}T]\,+\,[_{33}T]\}\,=\,|A|\,.\,\{[A]^{-1}\,.\,[J]\}^t$$

— Soit l'exemple des termes dont les indices sont dans $\{1,\,2\}$; le coefficient d_{12} est (rappel) :

$$[_{12}T]$$

$$=$$

$$[_{12}t_{ij}]$$

$$=$$

$$-\begin{bmatrix} (A^2_{12}\,.\,A^3_{23}\,-\,A^2_{13}\,.\,A^3_{22}) & (A^1_{13}\,.\,A^3_{22}\,-\,A^1_{12}\,.\,A^3_{23}) & (A^1_{12}\,.\,A^2_{23}\,-\,A^1_{13}\,.\,A^2_{22}) \\ (A^2_{11}\,.\,A^3_{23}\,-\,A^2_{13}\,.\,A^3_{21}) & (A^1_{11}\,.\,A^3_{23}\,-\,A^1_{13}\,.\,A^3_{21}) & (A^1_{13}\,.\,A^2_{21}\,-\,A^1_{11}\,.\,A^2_{23}) \\ (A^2_{11}\,.\,A^3_{22}\,-\,A^2_{12}\,.\,A^3_{21}) & (A^1_{12}\,.\,A^3_{21}\,-\,A^1_{11}\,.\,A^3_{22}) & (A^1_{12}\,.\,A^2_{21}\,-\,A^1_{11}\,.\,A^2_{22}) \end{bmatrix}$$

Le coefficient d_{21} s'écrit quant à lui :

$$[_{21}T]$$

$$=$$

$$[_{21}t_{ij}]$$

$$=$$

$$-\begin{bmatrix} (A^2_{22}\,.\,A^3_{13}\,-\,A^2_{23}\,.\,A^3_{12}) & (A^1_{23}\,.\,A^3_{12}\,-\,A^1_{22}\,.\,A^3_{13}) & (A^1_{22}\,.\,A^2_{13}\,-\,A^1_{23}\,.\,A^2_{12}) \\ (A^2_{21}\,.\,A^3_{13}\,-\,A^2_{23}\,.\,A^3_{11}) & (A^1_{21}\,.\,A^3_{13}\,-\,A^1_{23}\,.\,A^3_{11}) & (A^1_{23}\,.\,A^2_{11}\,-\,A^1_{21}\,.\,A^2_{13}) \\ (A^2_{21}\,.\,A^3_{12}\,-\,A^2_{22}\,.\,A^3_{11}) & (A^1_{22}\,.\,A^3_{11}\,-\,A^1_{21}\,.\,A^3_{12}) & (A^1_{22}\,.\,A^2_{11}\,-\,A^1_{21}\,.\,A^2_{12}) \end{bmatrix}$$

La somme des deux coefficients vaut :

$$[_{12}T]\,+\,[_{21}T]$$

$$=$$

$$-\begin{bmatrix} (A^2_{12}\,.\,A^3_{23}\,-\,A^2_{23}\,.\,A^3_{12}) & (A^1_{23}\,.\,A^3_{12}\,-\,A^1_{12}\,.\,A^3_{23}) & (A^1_{12}\,.\,A^2_{23}\,-\,A^1_{23}\,.\,A^2_{12}) \\ (A^2_{21}\,.\,A^3_{13}\,-\,A^2_{13}\,.\,A^3_{21}) & (A^1_{21}\,.\,A^3_{13}\,-\,A^1_{13}\,.\,A^3_{21}) & (A^1_{13}\,.\,A^2_{21}\,-\,A^1_{21}\,.\,A^2_{13}) \\ (A^2_{21}\,.\,A^3_{12}\,-\,A^2_{12}\,.\,A^3_{21}) & (A^1_{12}\,.\,A^3_{21}\,-\,A^1_{21}\,.\,A^3_{12}) & (A^1_{12}\,.\,A^2_{21}\,-\,A^1_{21}\,.\,A^2_{12}) \end{bmatrix}$$

La troisième ligne s'annule à cause de l'antisymétrie de la matrice déformante [A] :

$$[_{12}T]\,+\,[_{21}T]$$

$$=$$

$$- \begin{bmatrix} (A^2_{12} . A^3_{23} - A^2_{23} . A^3_{12}) & (A^1_{23} . A^3_{12} - A^1_{12} . A^3_{23}) & (A^1_{12} . A^2_{23} - A^1_{23} . A^2_{12}) \\ (A^2_{21} . A^3_{13} - A^2_{13} . A^3_{21}) & (A^1_{21} . A^3_{13} - A^1_{13} . A^3_{21}) & (A^1_{13} . A^2_{21} - A^1_{21} . A^2_{13}) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Là encore, en considérant l'inverse de la matrice déformante supposée a priori inversible :

$$[_{12}T] + [_{21}T] = \begin{bmatrix} -a_{13} & -a_{23} & -a_{33} \\ -a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette somme dépend visiblement d'une partie des composantes de l'inverse de la matrice déformante. Des résultats similaires peuvent être obtenus pour les sommes $[_{23}\mathrm{T}] + [_{32}\mathrm{T}]$ et $[_{31}\mathrm{T}] + [_{13}\mathrm{T}]$.

— Soit à nouveau les matrices $[_{mm}\mathrm{T}].\mathrm{P}$ pour m = 1, 2, 3 ; les coefficients omis jusque-là peuvent être calculé :

$$_{11}x_{12} = p_{12} . (A^2_{13} . A^3_{12} - A^2_{12} . A^3_{13}) + p_{22} . (A^1_{12} . A^3_{13} - A^1_{13} . A^3_{12}) + p_{32} . (A^1_{13} . A^2_{12} - A^1_{12} . A^2_{13})$$

$$_{11}x_{13} = p_{13} . (A^2_{13} . A^3_{12} - A^2_{12} . A^3_{13}) + p_{23} . (A^1_{12} . A^3_{13} - A^1_{13} . A^3_{12}) + p_{33} . (A^1_{13} . A^2_{12} - A^1_{12} . A^2_{13})$$

$$_{22}x_{21} = p_{11} . (A^2_{21} . A^3_{23} - A^2_{23} . A^3_{21}) + p_{21} . (A^1_{23} . A^3_{21} - A^1_{21} . A^3_{23}) + p_{31} . (A^1_{21} . A^2_{23} - A^1_{23} . A^2_{21})$$

$$_{22}x_{23} = p_{13} . (A^2_{21} . A^3_{23} - A^2_{23} . A^3_{21}) + p_{23} . (A^1_{23} . A^3_{21} - A^1_{21} . A^3_{23}) + p_{33} . (A^1_{21} . A^2_{23} - A^1_{23} . A^2_{21})$$

$$_{33}x_{31} = p_{11} . (A^2_{31} . A^3_{32} - A^2_{32} . A^3_{31}) + p_{21} . (A^1_{12} . A^3_{13} - A^1_{13} . A^3_{12}) + p_{31} . (A^1_{32} . A^2_{31} - A^1_{31} . A^2_{32})$$

$$_{33}x_{32} = p_{12} . (A^2_{31} . A^3_{32} - A^2_{32} . A^3_{31}) + p_{22} . (A^1_{12} . A^3_{13} - A^1_{13} . A^3_{12}) + p_{32} . (A^1_{32} . A^2_{31} - A^1_{31} . A^2_{32})$$

La somme des deux coefficients vaut :

$$d_{12} + d_{21} = - p_{11} . (A^2_{12} . A^3_{23} - A^2_{13} . A^3_{22}) - p_{12} . (A^2_{11} . A^3_{23} - A^2_{13} . A^3_{21}) - p_{13} . (A^2_{11} . A^3_{22} - A^2_{12} . A^3_{21})$$

$$- p_{21} . (A^1_{13} . A^3_{22} - A^1_{12} . A^3_{23}) - p_{22} . (A^1_{11} . A^3_{23} - A^1_{13} . A^3_{21}) - p_{23} . (A^1_{12} . A^3_{21} - A^1_{11} . A^3_{22})$$
$$- p_{31} . (A^1_{12} . A^2_{23} - A^1_{13} . A^2_{22}) - p_{32} . (A^1_{13} . A^2_{21} - A^1_{11} . A^2_{23}) - p_{33} . (A^1_{12} . A^2_{21} - A^1_{11} . A^2_{22})$$
$$+$$
$$\begin{gathered}
- p_{11} . (A^2_{22} . A^3_{13} \; - \; A^2_{23} . A^3_{12}) \\
- p_{12} . (A^2_{21} . A^3_{13} \; - \; A^2_{23} . A^3_{11}) \\
- p_{13} . (A^2_{21} . A^3_{12} \; - \; A^2_{22} . A^3_{11}) \\
- p_{21} . (A^1_{23} . A^3_{12} \; - \; A^1_{22} . A^3_{13}) \\
- p_{22} . (A^1_{21} . A^3_{13} \; - \; A^1_{23} . A^3_{11}) \\
- p_{23} . (A^1_{22} . A^3_{11} \; - \; A^1_{21} . A^3_{12}) \\
- p_{31} . (A^1_{22} . A^2_{13} \; - \; A^1_{23} . A^2_{12}) \\
- p_{32} . (A^1_{23} . A^2_{11} \; - \; A^1_{21} . A^2_{13}) \\
- p_{33} . (A^1_{22} . A^2_{11} \; - \; A^1_{21} . A^2_{12})
\end{gathered}$$
$$=$$
$$\begin{gathered}
- p_{11} . (A^2_{12} . A^3_{23} \; - \; A^2_{23} . A^3_{12}) \\
- p_{12} . (A^2_{21} . A^3_{13} \; - \; A^2_{13} . A^3_{21}) \\
- p_{13} . (A^2_{21} . A^3_{12} \; - \; A^2_{12} . A^3_{21}) \\
- p_{21} . (A^1_{23} . A^3_{12} \; - \; A^1_{12} . A^3_{23}) \\
- p_{22} . (A^1_{21} . A^3_{13} \; - \; A^1_{13} . A^3_{21}) \\
- p_{23} . (A^1_{12} . A^3_{21} \; - \; A^1_{21} . A^3_{12}) \\
- p_{31} . (A^1_{12} . A^2_{23} \; - \; A^1_{23} . A^2_{12}) \\
- p_{32} . (A^1_{13} . A^2_{21} \; - \; A^1_{21} . A^2_{13}) \\
- p_{33} . (A^1_{12} . A^2_{21} \; - \; A^1_{21} . A^2_{12})
\end{gathered}$$

De fait, la troisième colonne s'annule parce que (i) le cube déformant est anti-symétrique et (ii) $\mathbb{C}$ est un corps commutatif :

$$d_{12} \; + \; d_{21}$$
$$=$$
$$\begin{gathered}
- p_{11} . (A^2_{12} . A^3_{23} \; - \; A^2_{23} . A^3_{12}) \; - \; p_{12} . (A^3_{12} . A^2_{13} \; - \; A^2_{12} . A^3_{13}) \\
- p_{21} . (A^1_{23} . A^3_{12} \; - \; A^1_{12} . A^3_{23}) \; - \; p_{22} . (A^3_{12} . A^1_{13} \; - \; A^1_{12} . A^3_{13}) \\
- p_{31} . (A^1_{12} . A^2_{23} \; - \; A^1_{23} . A^2_{12}) \; - \; p_{32} . (A^1_{12} . A^2_{13} \; - \; A^2_{12} . A^1_{13})
\end{gathered}$$

Les sommes $\mathrm{d}_{23} + \mathrm{d}_{32}$ et $\mathrm{d}_{31} + \mathrm{d}_{13}$ s'obtiennent de manière similaire par permutation cyclique. Une confrontation visuelle avec le formalisme des coefficients omis mène à :

$$(d_{12} \; + \; d_{21}) \; = \; ({}_{11}x_{12} \; + \; {}_{22}x_{21})$$
$$(d_{23} \; + \; d_{32}) \; = \; ({}_{22}x_{23} \; + \; {}_{33}x_{32})$$
$$(d_{31} \; + \; d_{13}) \; = \; ({}_{33}x_{31} \; + \; {}_{11}x_{13})$$

La coincidence achève de démontrer la proposition. □

Définition 4.2. *Matrices équivalentes.*

Dans ce document, deux éléments [M] et [N] de M(3, $\mathbb{C}$) sont équivalents si et seulement si :
- Ils ont la même diagonale : $\forall$ a = 1, 2, 3 : $m_{aa} = n_{aa}$;
- La somme des composantes des trois diagonales orthogonales à la diagonale centrale sont identiques ; concrètement je veux dire que : $\forall$ a, b = 1, 2, 3 : $m_{ab} + m_{ba} = n_{ab} + n_{ba}$.

Par convention, cette équivalence est noté [M] $\equiv$ [N].

Définition 4.3. *Noyau de la partie principale d'une décomposition intrinsèque d'un produit vectoriel déformé.*

Par convention du langage, un *noyau* de la partie principale [P] d'une décomposition intrinsèque d'un produit vectoriel déformé est une matrice [N] de M(3, $\mathbb{C}$) *équivalente*, au sens donné par la définition 1.2, à la matrice [D] des coefficients de degré deux de la polynomiale Λ(**projectile**) résultant de cette décomposition. Elle est définie par le théorème suivant.

Théorème 4.1. *De reconstruction de la matrice [D] des coefficients de degré deux.*

Quand la matrice déformante [A] n'est pas dégénérée, il existe une matrice [N] équivalente à la matrice [D] contenant l'ensemble des coefficients de degré deux de la polynomiale Λ(**projectile**) = $|_{[A]}\Phi$(**projectile**) - [P]| résultant de l'existence éventuelle d'une décomposition non triviale d'un produit vectoriel déformé :

$$[N] \,=\, |A| \,.\, \{[A]^{-1} \,.\, [J]\}^t \,.\, [P] \,\equiv\, [D]$$

4.3 La Hessienne de la polynomiale Λ.

Proposition 4.6. *La Hessienne de la polynomiale Λ est la somme de la matrice [D] contenant ses coefficients de degré deux et de la transposée $[D]^t$ de celle-ci.*

Démonstration. : A partir de maintenant :

1. le déterminant stratégique est vu comme une polynomiale de degré deux exprimée en fonction des trois composantes du projectile impliqué dans le produit vectoriel déformé dont les décompositions éventuellement non-triviales sont étudiées ;
2. j'étudie cette polynomiale dans le cadre de l'algèbre géométrique.

Ce point de vue autorise à calculer les dérivées partielles par rapport aux composantes du projectile de cette polynomiale. Dans un premier temps, par pédagogie, je supposerai que les coefficients ne dépendent pas des composantes du projectile noté ici **a** :

$$\Lambda(a^1, a^2, a^3)$$

$$=$$

$$d_{11} \,.\, (a^1)^2 \,+\, d_{22} \,.\, (a^2)^2 \,+\, d_{33} \,.\, (a^3)^2$$

$$+\, (d_{12} \,+\, d_{21}) \,.\, a^1 \,.\, a^2 \,+\, (d_{23} \,+\, d_{31}) \,.\, a^2 \,.\, a^3 \,+\, (d_{13} \,+\, d_{31}) \,.\, a^1 \,.\, a^3$$

$$+ d_1 \,.\, a^1 \,+\, d_2 \,.\, a^2 \,+\, d_3 \,.\, a^3 \,-\, |P|$$

Il vient dans un premier temps :

$$\frac{\partial \Lambda(a^1, a^2, a^3)}{\partial a^1} = 2 \,.\, d_{11} \,.\, a^1 \,+\, (d_{12} \,+\, d_{21}) \,.\, a^2 \,+\, (d_{13} \,+\, d_{31}) \,.\, a^3 \,+\, d_1$$

$$\frac{\partial \Lambda(a^1, a^2, a^3)}{\partial a^2} = (d_{12} \,+\, d_{21}) \,.\, a^1 \,+\, 2 \,.\, d_{22} \,.\, a^2 \,+\, (d_{23} \,+\, d_{32}) \,.\, a^3 \,+\, d_2$$

$$\frac{\partial \Lambda(a^1, a^2, a^3)}{\partial a^3} = (d_{13} \,+\, d_{31}) \,.\, a^1 \,+\, (d_{23} \,+\, d_{32}) \,.\, a^2 \,+\, 2 \,.\, d_{33} \,.\, a^3 \,+\, d_3$$

Puis, comme attendu :

$$[Hess_{(\mathbf{a},\,0)} \Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3)] \,=\, [D] \,+\, [D]^t$$

□

Proposition 4.7. *L'équivalence formelle des matrices au sens précisé par la définition 4.2 est une relation d'équivalence mathématique.*

Démonstration. Il est simple de montrer que :

1. Tout élément de M(3, $\mathbb{C}$) est équivalent à lui-même au sens précisé par la définition 4.2 ;
2. Si un élément [M_1] de M(3, $\mathbb{C}$) est équivalent à un élément [M_2] de M(3, $\mathbb{C}$), alors la proposition inverse reste vraie ;
3. Si un élément [M_1] de M(3, $\mathbb{C}$) est équivalent à un élément [M_2] de M(3, $\mathbb{C}$), et si cet élément [M_2] de M(3, $\mathbb{C}$) est équivalent à un élément [M_3] de M(3, $\mathbb{C}$), alors l'élément [M_1] de M(3, $\mathbb{C}$) est équivalent à un élément [M_3] de M(3, $\mathbb{C}$).

Ceci tient au fait que l'équivalence définie plus haut compare des sommes en les égalant ; or l'égalité de deux nombres est une relation d'équivalence mathématique. □

4.4 Conséquences du théorème de reconstruction.

Proposition 4.8. *Au sens précisé par la définition 4.2, un quelconque élément de M(3, $\mathbb{C}$) est équivalent à son transposé.*

Démonstration. Evident : la diagonale du transposé est égale à celle de l'élément d'origine ; la somme des entrées sur n'importe laquelle des trois diagonales orthogonales reste évidemment inchangée par transposition de l'élément d'origine.

$$\forall\, [M] \,\in\, M(3,\, \mathbb{C}) \,:\, [M] \,\equiv\, [M]^t$$

□

Proposition 4.9. *Au sens précisé par la définition 4.2, soit un quelconque élément [M_1] de M(3, $\mathbb{C}$) équivalent à un élément [L_1] de M(3, $\mathbb{C}$) et un quelconque élément [M_2] de M(3, $\mathbb{C}$) équivalent à un élément [L_2] de M(3, $\mathbb{C}$). La somme [M_1] + [M_2] est équivalente à la somme [L_1] + [L_2].*

Démonstration. 1. La somme est interne sur M(3, $\mathbb{C}$).

2. Pour les diagonales :

$$\{\forall\, d \in I_3 \,:\, {}_1m_{dd} = {}_1l_{dd},\, {}_2m_{dd} = {}_2l_{dd}\} \Rightarrow {}_1m_{dd} + {}_2m_{dd} = {}_1l_{dd} + {}_2l_{dd}$$

3. Pour les trois orthogonales aux diagonales :

$$\{\forall\, c,\, d \in I_3 \,:\, {}_1m_{cd} + {}_1m_{dc} = {}_1l_{cd} + {}_1l_{dc},\, {}_2m_{cd} + {}_2m_{dc} = {}_2l_{cd} + {}_2l_{dc}\}$$

$$\Downarrow$$

$${}_1m_{cd} + {}_1m_{dc} + {}_2m_{cd} + {}_2m_{dc} = {}_1l_{cd} + {}_1l_{dc} + {}_2l_{cd} + {}_2l_{dc}$$

$\square$

Corollaire 4.1. *Contrainte sur le noyau de la partie principale de la décomposition non-triviale.*

Lorsqu'un produit vectoriel déformé $[\mathbf{a},\, \mathbf{b}]_{[A]}$ peut être décomposé non-trivialement, et que les coefficients d_{ij} de degré deux de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$ résultant de cette décomposition ne dépendent pas des composantes du projectile $\mathbf{a}$, alors la Hessienne de cette polynomiale est équivalente à la somme du noyau de cette décomposition et du transposé de ce noyau :

$$[N] + [N]^t$$

$$=$$

$$|A| \,.\, \{\{[A]^{-1} \,.\, [J]\}^t \,.\, [P] + [P]^t \,.\, \{[A]^{-1} \,.\, [J]\}\}$$

$$\equiv$$

$$[Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3)]$$

4.5 Interprétation des coefficients d'une polynomiale dans un contexte local.

Remarque 4.1. *Lien sous-jacent avec la physique.*

Il est admis que la géométrie spatiale locale dans laquelle nous vivons à chaque instant est tridimensionnelle et euclidienne. Les mathématiques sont une des nombreuses activités humaines. Il semble par conséquent logique de dire que les mathématiques se font dans une ambiance géométrique tridimensionnelle euclidienne.

Cette apparente évidence, ajouté à la certitude qu'il existe bien d'autres géométries que la notre [21 ; Hilbert], invite à se demander si les calculs mathématiques seraient conduits de la même manière que celle pratiquée ici sur Terre dans un environnement géométrique différent ?

Quelle que soit la réponse à cette légitime question, il est pour le moment admis que la géométrie euclidienne constitue toujours la géométrie limite réelle à laquelle n'importe quel expérimentateur peut rapporter sa gestuelle, pourvu qu'il accepte de réduire suffisamment la taille de l'échantillon spatial et temporel dans lequel il prétend découvrir et formaliser des lois physiques.

Ce constat peut être érigé en principe. Ce principe doit venir se superposer à celui, énoncé par A. Einstein, selon lequel le formalisme des lois physiques fondamentales doit être le même dans tous les référentiels inertiels.

La réalisation simultanée de ces deux principes constitue un cahier des charges poussant à penser que seules les formalisations, les représentations apparentes, des objets physiques d'intérêt varient d'un contexte géométrique à l'autre. Et elles le font de telle sorte qu'un passage à la limite euclidienne doit redonner les lois établies dans cette ambiance euclidienne.

Je vais tenter de clarifier ma pensée en l'illustrant par l'exemple des polynomiales de degré deux.

Remarque 4.2. *Représentations apparentes des polynomiales de degré deux.*

Compte tenu du préalable géométrique rappelé lors de la précédente remarque, il est implicitement admis que les calculs menant à la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$ obtenue en calculant le déterminant stratégique associé à une décomposition donné ont été réalisé dans un espace doté du produit scalaire euclidien classique. Celui-ci est caractérisé par la matrice identité Id_3. Ceci autorise à écrire cette polynomiale de la façon communément admise suivante [19 ; p. 163, (1.1)] :

$$\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3) \,+\, |P| \,=< \mathbf{a}, \{[D]\,.\,|\mathbf{a}>\} >_{Id_3} \,+\, < \mathbf{a}, \mathbf{d}^* >_{Id_3}$$

Il est également su que la géométrie euclidienne se laisse justement représenter par la matrice identité Id_3 définissant le produit scalaire localement : [G(Euclide)] $= \mathrm{Id}_3$. Une connaissance qui a d'ailleurs été généralisée par Riemann.

Cette manière d'écrire la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$ et l'analyse contextuelle menant à cette écriture poussent à dire que le triplé (|P|, $\mathbf{d}^*$, [D]) est la représentation apparente de la polynomiale dans une ambiance géométrique caractérisée par la matrice [G(Euclide)] $= \mathrm{Id}_3$, c'est-à-dire euclidienne.

Pour donner corps à l'idée énoncée au cours de la remarque précédente, cette sous-section se consacre à la recherche des triplés (s, $\mathbf{v}$, [R]) qui pourraient naturellement être associés avec une polynomiale de degré deux lorsque l'espace $\mathbb{C} \otimes$ E(3, $\mathbb{R}$) est rapporté à une ambiance géométrique caractérisée par une forme quadratique non-dégénérée représentée par la matrice [B] de M(3, $\mathbb{C}$). Elle examine donc ce qu'implique le fait de vouloir écrire la polynomiale obtenue de façon classique dans un environnement différent :

$$\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3) \,+\, s \,=< \mathbf{a}, \{[R]\,.\,|\mathbf{a}>\} >_{[B]} \,+\, < \mathbf{a}, \mathbf{v} >_{[B]}$$

L'examen des termes degré par degré livre en allant du plus petit au plus grand :

$$|P| \,=\, s$$

$$\sum_m d_m \,.\, a^m \,=< \mathbf{a}, \mathbf{v} >_{[B]}$$

$$\sum_{mn} d_{mn} \,.\, a^m \,.\, a^n \,=< \mathbf{a}, \{[R]\,.\,|\mathbf{a}>\} >_{[B]}$$

ou, plus précisément :

$$|P| = s$$

$$\sum_m d_m \,.\, a^m = \sum_{m,n} b_{mn} \,.\, a^m \,.\, v^n$$

$$\sum_{mn} d_{mn} \,.\, a^m \,.\, a^n = \sum_{m,p} b_{mp} \,.\, a^m \,.\, \sum_n (r_{pn} \,.\, a^n)$$

Ces relations peuvent être réalisées indépendamment du projectile **a** lorsque :

— Coefficient de degré zéro :

$$|P| = s$$

— Coefficients de degré un :

$$\forall m : \, d_m = \sum_n b_{mn} \,.\, v^n$$

— Coefficients de degré deux :

$$\forall m : \, d_{mm} = \sum_p b_{mp} \,.\, r_{pn}$$

$$\forall m < n : \, d_{mn} + d_{nm} = \sum_p (b_{mp} \,.\, r_{pn} + b_{np} \,.\, r_{pm})$$

Nota bene : concernant ces termes *hors diagonale*, un ordonnancement a pu être réalisé du fait que la discussion prend place sur un corps commutatif ; ce qui autorise à écrire :

$$a^m \,.\, a^n = a^n \,.\, a^m$$

Et ce qui implique le :

Théorème 4.2. *Des représentations apparentes des polynomiales de degré deux.*

Dans le contexte ayant permis de démontrer la proposition 4.6. [2], si l'espace mathématique des discussions, $\mathbb{C} \otimes \mathrm{E}(3, \mathbb{R})$, est équipé d'une forme quadratique inversible et qu'un produit vectoriel déformé s'y décompose non trivialement, alors la polynomiale de degré deux associée avec cette décomposition non-triviale se laisse représenter par un ou plusieurs triplés (s, **v**, [R]) tel(s) que :

$$s = |P|$$

$$|\mathbf{v} >= [B]^{-1} \,.\, |\mathbf{d}^* >$$

$$[B] \,.\, [R] + [R]^t \,.\, [B]^t = [Hess_{(\mathbf{a},0)} \Lambda(\mathbf{a})]$$

2. Rappel : les coefficients de la polynomiale ne dépendent pas des composantes du vecteur sur lequel elle agit.

Corollaire 4.2. *Du théorème des représentations apparentes des polynomiales de degré deux.*

Reconsidérant à cet endroit le corollaire du théorème de reconstruction, il devient possible d'écrire :

$$|A| \,.\, \{\{[A]^{-1} \,.\, [J]\}^t \,.\, [P] \,+\, [P]^t \,.\, \{[A]^{-1} \,.\, [J]\}\}$$
$$=$$
$$[N] \,+\, [N]^t$$
$$\equiv$$
$$[Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(a^1,\, a^2,\, a^3)]$$
$$=$$
$$[B] \,.\, [R] \,+\, [R]^t \,.\, [B]^t$$

En observant ces relations et en tenant compte des propos tenus précédemment, comment ne pas penser que la partie principale [P] d'une décomposition peut parfois coincider avec la représentation apparente [R] de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$, notemment lorsque le contexte géométrique est donné par la matrice [B] définie par :

$$[B] \,=\, |A| \,.\, \{[A]^{-1} \,.\, [J]\}^t\,?$$

C'est une situation que je retrouverai plus tard lors d'une confrontation avec une méthode extrinsèque de décomposition des produits vectoriels déformés. Pour autant, dans le cadre des mathématiques, il n'y a pas d'argument sérieux justifiant de faire systématiquement coincider le contexte géométrique avec la matrice que je noterai désormais par convention :

$$[T] \,=\, |A| \,.\, \{[A]^{-1} \,.\, [J]\}^t$$

En revanche, rien ne semble s'opposer à poser de manière générale l'équivalence :

$$[N] \,=\, [T] \,.\, [P] \,\equiv\, [B] \,.\, [R] \,=\, [D]$$

4.6 L'exemple des métriques induites par l'évolution des surfaces.

Les considérations précédentes ont une illustration physique potentiellement intéressante ; en effet, un travail avant-gardiste d'E. Cartan datant de 1933 [01] suggère d'examiner la famille particulière de situations autorisant à poser [01 ; p. 16, (V)] :

$$\frac{1}{2} \,.\, [Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})] \,=\, g \,.\, [G]^{-1}$$

La définition de g et la démonstration de cette formule étant respectivement précisée et donnée dans la référence citée ici.

Cette famille correspond à un ensemble de situations physiques pour lesquelles la métrique spatiale locale est proportionnelle à la forme quadratique non-dégénérée introduite ci-avant ou à son inverse ([B] $\sim$ [G], ou [B] $\sim$ [G]$^{-1}$ avec |B| $\neq$ 0) quand (i) cette métrique est déterminée par les évolutions d'une surface et (ii) il est possible d'identifier la polynomiale issue de la théorie de la question (E) avec le carré de la fonction introduite par Cartan :

$$\Lambda(\mathbf{a}) \,=\, L^2(Cartan)$$

La polynomiale associée avec une décomposition non-triviale d'un produit vectoriel déformé du type $[\mathbf{a}, \,...]_{[A]}$ se laisse alors représenter par un ensemble de triplés (|P|, **v**, [R]) qui dépendent du contexte géométrique.

Exemple 4.1. *Quand le contexte géométrique est celui de la métrique inverse.*

Par exemple, lorsque ce contexte se laisse décrire par les égalités :

$$\frac{1}{2}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})] \,=\, g\,.\,[G]^{-1} \,=\, \frac{1}{2}\,.\,[B]$$

... alors la Hessienne est implicitement supposée inversible [3] et chaque représentation matricielle [R] possible doit respecter :

$$[Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})] \,=\, [Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})]\,.\,[R] \,+\, [R]^t\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})]^t$$

Dans le cas encore plus particulier des polynomiales continues, la Hessienne est symétrique ; comme elle a été supposée inversible :

$$[R]^t \,=\, [Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})]\,.\,\{Id_3 \,-\, [R]\}\,.\,[Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})]^{-1}$$

Le transposé $[\mathrm{R}]^t$ de la représentation apparente [R] est ici défini de manière similaire à un adjoint algébrique [19 ; §8, pp. 260-263] de la matrice identité à laquelle la représentation apparente a été soustraite.

4.7 Les liens entre la matrice [T], son inverse et la matrice déformante effective.

La matrice suivante est naturellement apparu dans la discussion menant au théorème 1.1 :

$$[T] \,=\, |A|\,.\,[J]^t\,.\,([A]^{-1})^t$$

Puisque :

- le déterminant du transposé d'une matrice vaut celui de la matrice en question ;
- le déterminant de l'inverse d'une matrice est l'inverse du déterminant de ladite matrice,

Il est aisé de constater que :

$$|T| \,=\, |A|\,.\,|J|\,.\,\frac{1}{|A|} \,=\, -1 \,\neq\, 0$$

Ainsi, la matrice [T] n'est pas dégénérée ; les calculs peuvent donc se poursuivre avec :

$$[T]\,.\,[T]^{-1} \,=\, [t_{ij}]\,.\,[T_{ij}] = Id_3 = [T]^{-1}\,.\,[T]$$

3. Ce n'est pas obligatoire a priori ; je reviens un peu plus tard sur ce point technique important.

Précisément :

$$\begin{bmatrix} |T|\,.\,T_{11} = (t_{22}\,.\,t_{33} - t_{32}\,.\,t_{23}) & |T|\,.\,T_{12} = (t_{13}\,.\,t_{32} - t_{12}\,.\,t_{33}) & |T|\,.\,T_{13} = (t_{12}\,.\,t_{23} - t_{22}.t_{13}) \\ |T|\,.\,T_{21} = (t_{31}\,.\,t_{23} - t_{33}\,.\,t_{21}) & |T|\,.\,T_{22} = (t_{11}\,.\,t_{33} - t_{31}\,.\,t_{13}) & |T|\,.\,T_{23} = (t_{21}\,.\,t_{13} - t_{11}\,.\,t_{23}) \\ |T|\,.\,T_{31} = (t_{21}\,.\,t_{32} - t_{31}\,.\,t_{22}) & |T|\,.\,T_{32} = (t_{12}\,.\,t_{31} - t_{11}\,.\,t_{32}) & |T|\,.\,T_{33} = (t_{22}\,.\,t_{11} - t_{12}\,.\,t_{21}) \end{bmatrix}$$

Et :

$$|A|\,.\,[A]^{-1} = |A|\,.\,[a_{ij}] = \begin{bmatrix} |A|\,.\,a_{11} = t_{31} & |A|\,.\,a_{12} = t_{11} & |A|\,.\,a_{13} = -t_{21} \\ |A|\,.\,a_{21} = t_{32} & |A|\,.\,a_{22} = t_{12} & |A|\,.\,a_{23} = -t_{22} \\ |A|\,.\,a_{31} = t_{33} & |A|\,.\,a_{32} = t_{13} & |A|\,.\,a_{33} = -t_{23} \end{bmatrix}$$

Il ne s'agit en fait que de :

$$\begin{bmatrix} |T|\,.\,T_{11} = |A|^2\,.\,(a_{21}\,.\,a_{33} - a_{23}\,.\,a_{31}) & |T|\,.\,T_{12} = |A|^2\,.\,(a_{32}\,.\,a_{21} - a_{22}\,.\,a_{31}) & |T|\,.\,T_{13} = |A|^2\,.\,(a_{32}\,.\,a_{23} - a_{22}.a_{33}) \\ |T|\,.\,T_{21} = |A|^2\,.\,(a_{31}\,.\,a_{13} - a_{33}\,.\,a_{11}) & |T|\,.\,T_{22} = |A|^2\,.\,(a_{12}\,.\,a_{31} - a_{11}\,.\,a_{32}) & [T|\,.\,T_{23} = |A|^2\,.\,(a_{12}\,.\,a_{33} - a_{13}\,.\,a_{32}) \\ |T|\,.\,T_{31} = |A|^2\,.\,(a_{11}\,.\,a_{23} - a_{13}\,.\,a_{21}) & |T|\,.\,T_{32} = |A|^2\,.\,(a_{22}\,.\,a_{11} - a_{12}\,.\,a_{21}) & |T|\,.\,T_{33} = |A|^2\,.\,(a_{22}\,.\,a_{13} - a_{12}\,.\,a_{23}) \end{bmatrix}$$

Dans le même état d'esprit :

$$[A]\,.\,[A]^{-1} = [A_{ij}].[a_{ij}] = Id_3 = [A]^{-1}.\,[A]\,;\,|A| \neq 0$$

D'où je déduis :

$$\begin{bmatrix} |A|\,.\,A_{11} = (a_{22}\,.\,a_{33} - a_{32}\,.\,a_{23}) & |A|\,.\,A_{12} = (a_{13}\,.\,a_{32} - a_{12}\,.\,a_{33}) & |A|\,.\,A_{13} = (a_{12}\,.\,a_{23} - a_{22}.a_{13}) \\ |A|\,.\,A_{21} = (a_{31}\,.\,a_{23} - a_{33}\,.\,a_{21}) & |A|\,.\,A_{22} = (a_{11}\,.\,a_{33} - a_{31}\,.\,a_{13}) & |A|\,.\,A_{23} = (a_{21}\,.\,a_{13} - a_{11}\,.\,a_{23}) \\ |A|\,.\,A_{31} = (a_{21}\,.\,a_{32} - a_{31}\,.\,a_{22}) & |A|\,.\,A_{32} = (a_{12}\,.\,a_{31} - a_{11}\,.\,a_{32}) & |A|\,.\,A_{33} = (a_{22}\,.\,a_{11} - a_{12}\,.\,a_{21}) \end{bmatrix}$$

Une confrontation avec les résultats précédents livre :

$$\begin{bmatrix} |T|\,.\,T_{11} = -|A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{21} & |T|\,.\,T_{12} = |A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{31} & |T|\,.\,T_{13} = -|A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{11} \\ |T|\,.\,T_{21} = -|A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{22} & |T|\,.\,T_{22} = |A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{32} & [T|\,.\,T_{23} = -|A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{12} \\ |T|\,.\,T_{31} = -|A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{23} & |T|\,.\,T_{32} = |A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{33} & |T|\,.\,T_{33} = -|A|^2\,.\,|A|^{-1}\,.\,A_{13} \end{bmatrix}$$

Et, en réintroduisant les composantes de la matrice déformante :

$$\begin{bmatrix} |T|\,.\,T_{11} = -|A|\,.\,A^1_{23} & |T|\,.\,T_{12} = |A|\,.\,A^1_{13} & |T|\,.\,T_{13} = -|A|\,.\,A^1_{12} \\ |T|\,.\,T_{21} = -|A|\,.\,A^2_{23} & |T|\,.\,T_{22} = |A|\,.\,A^1_{13} & [T|\,.\,T_{23} = -|A|\,.\,A^1_{12} \\ |T|\,.\,T_{31} = -|A|\,.\,A^3_{23} & |T|\,.\,T_{32} = |A|\,.\,A^1_{13} & |T|\,.\,T_{33} = -|A|\,.\,A^1_{12} \end{bmatrix}$$

Comme (rappel) |T| = -1 :

$$[T]^{-1} = |A|\,.\,[A]^t\,.\,[J]$$

Le calcul du déterminant de cette matrice permet de réaliser que, forcément :

$$|A|^2 = 1$$

Ce résultat démontre que les matrices déformantes peuvent, entre autres possibilités, être des éléments de SU(3).

Définition 4.4. *La règle d'or.*

Par convention, un élément [M] de M(3, $\mathbb{C}$) satisfait la *règle d'or* chaque fois que la relation suivante est validée :

$$([M]^{-1})^t = ([M]^t)^{-1}$$

Proposition 4.10. *Si la matrice déformante respecte la règle d'or et si le carré de son déterminant vaut un, alors le formalisme précis de l'inverse de la matrice [T] peut être retrouvé par le seul usage de la règle gouvernant l'inverse d'un produit de matrices.*

Démonstration. - La matrice [T] étant connue, la règle habituelle régissant l'inversion d'un produit de matrices permet d'écrire :

$$[T]^{-1} \,=\, \frac{1}{|A|} \,.\, (([A]^{-1})^t)^{-1} \,.\, ([J]^t)^{-1}$$

Mais puisque (rappel) :

$$[J]^2 \,=\, -[J]^t \,;\, [J]^3 \,=\, -Id_3 \,;\, [J]^4 \,=\, -[J] \,;\, [J]^5 \,=\, [J]^t \,;\, [J]^6 \,=\, Id_3 \,;$$

L'inverse de la matrice [T] vaut en fait :

$$[T]^{-1} \,=\, \frac{1}{|A|} \,.\, (([A]^{-1})^t)^{-1} \,.\, [J]$$

A supposer que :

— la matrice déformante respecte la règle d'or ; il vient :

$$[T]^{-1} \,=\, \frac{1}{|A|} \,.\, (([A]^t)^{-1})^{-1} \,.\, [J]$$

... et puisque l'inversion d'une matrice est une action involutive :

$$[T]^{-1} \,=\, \frac{1}{|A|} \,.\, [A]^t \,.\, [J]$$

— le carré du déterminant de la matrice déformante vaut un :

$$|A|^2 \,=\, 1$$

... alors il devient évident que :

$$[T]^{-1} \,=\, |A| \,.\, [A]^t \,.\, [J]$$

C'est bien le formalisme obtenu précédemment par une toute autre manière. □

Théorème 4.3. *De la matrice déformante effective.*

L'inverse de la matrice [T] apparue dans la définition du noyau est, à un signe moins près, égale à la matrice déformante effective (voir page 3).

$$[T]^{-1} \,=\, |A| \,.\, [A]^t \,.\, [J] \,=\, |A| \,.\, [A]^*$$

4.8 Coefficients de degré un.

Le calcul livre dans une première étape :

$$d_m$$

$$=$$

$$A^1_{m1} \,.\, (p_{22} \,.\, p_{33} - p_{32} \,.\, p_{23}) - p_{11} \,.\, [(p_{23} \,.\, A^3_{m2} + p_{32} \,.\, A^2_{m3}) - (p_{22} \,.\, A^3_{m3} + p_{33} \,.\, A^2_{m2})]$$

$$-$$

$$\{A^1_{m2} \,.\, (p_{21} \,.\, p_{33} - p_{31} \,.\, p_{23}) - p_{12} \,.\, [(p_{23} \,.\, A^3_{m1} + p_{31} \,.\, A^2_{m3}) - (p_{21} \,.\, A^3_{m3} + p_{33} \,.\, A^2_{m1})]\}$$

...

$$+$$

$$A^1_{m3} \,.\, (p_{21} \,.\, p_{32} - p_{22} \,.\, p_{31}) - p_{13} \,.\, [(p_{22} \,.\, A^3_{m1} + p_{31} \,.\, A^2_{m2}) - (p_{21} \,.\, A^3_{m2} + p_{32} \,.\, A^2_{m1})]$$

Soit encore :

$$d_1$$

$$=$$

$$A^1_{12} \,.\, (p_{31} \,.\, p_{23} - p_{21} \,.\, p_{33}) + A^2_{12} \,.\, (p_{33} \,.\, p_{11} - p_{31} \,.\, p_{13}) + A^3_{12} \,.\, (p_{21} \,.\, p_{13} - p_{11} \,.\, p_{23})$$

$$+$$

$$A^1_{13} \,.\, (p_{21} \,.\, p_{32} - p_{22} \,.\, p_{31}) + A^2_{13} \,.\, (p_{31} \,.\, p_{12} - p_{11} \,.\, p_{32}) + A^3_{13} \,.\, (p_{11} \,.\, p_{22} - p_{21} \,.\, p_{12})$$

$$d_2$$

$$=$$

$$A^1_{12} \,.\, (p_{32} \,.\, p_{23} - p_{22} \,.\, p_{33}) + A^2_{12} \,.\, (p_{33} \,.\, p_{12} - p_{32} \,.\, p_{13}) + A^3_{12} \,.\, (p_{22} \,.\, p_{13} - p_{12} \,.\, p_{23})$$

$$+$$

$$A^1_{23} \,.\, (p_{21} \,.\, p_{32} - p_{22} \,.\, p_{31}) + A^2_{23} \,.\, (p_{31} \,.\, p_{12} - p_{11} \,.\, p_{32}) + A^3_{23} \,.\, (p_{11} \,.\, p_{22} - p_{21} \,.\, p_{12})$$

$$d_3$$

$$=$$

$$A^1_{13} \,.\, (p_{32} \,.\, p_{23} - p_{22} \,.\, p_{33}) + A^2_{13} \,.\, (p_{33} \,.\, p_{12} - p_{32} \,.\, p_{13}) + A^3_{13} \,.\, (p_{22} \,.\, p_{13} - p_{12} \,.\, p_{23})$$

$$+$$

$$A^1_{23} \,.\, (p_{21} \,.\, p_{33} - p_{23} \,.\, p_{31}) + A^2_{23} \,.\, (p_{31} \,.\, p_{13} - p_{11} \,.\, p_{33}) + A^3_{23} \,.\, (p_{11} \,.\, p_{23} - p_{21} \,.\, p_{13})$$

Proposition 4.11. *Les coefficients de degré un du déterminant stratégique (alias la polynomiale Λ) associé à la décomposition non-trivial d'un produit vectoriel déformé dépendent (i) des composantes de l'inverse de la partie principale [P] de cette décomposition et (ii) des composantes de la matrice déformante [A].*

Démonstration. A ce stade de la discussion, le formalisme exact de la partie principale [P] reste inconnu ; ceci n'empêche pas d'en calculer formellement l'inverse aussi longtemps que son déterminant est supposé a priori différent de zéro. Dans ce cas :

$$|P| \neq 0 \Rightarrow \exists\, [P]^{-1} \;:\; [P] \,.\, [P]^{-1} = [p_{ij}] \,.\, [P_{jk}] = Id_3 = [\delta^k_i] = [P]^{-1} \,.\, [P]$$

Concrètement :

$$|P| \,.\, [P]^{-1}$$

$$=$$

$$\begin{bmatrix} |P| \cdot P_{11} = (p_{22} \cdot p_{33} - p_{32} \cdot p_{23}) & |P| \cdot P_{12} = (p_{13} \cdot p_{32} - p_{12} \cdot p_{33}) & |P| \cdot P_{13} = (p_{12} \cdot p_{23} - p_{22} \cdot p_{13}) \\ |P| \cdot P_{21} = (p_{31} \cdot p_{23} - p_{33} \cdot p_{21}) & |P| \cdot P_{22} = (p_{11} \cdot p_{33} - p_{31} \cdot p_{13}) & |P| \cdot P_{23} = (p_{21} \cdot p_{13} - p_{11} \cdot p_{23}) \\ |P| \cdot P_{31} = (p_{21} \cdot p_{32} - p_{31} \cdot p_{22}) & |P| \cdot P_{32} = (p_{12} \cdot p_{31} - p_{11} \cdot p_{32}) & |P| \cdot P_{33} = (p_{22} \cdot p_{11} - p_{12} \cdot p_{21}) \end{bmatrix}$$

$$=$$

$$|P|\,.\,\begin{bmatrix} (p_{22}\,.\,p_{33}-p_{32}\,.\,p_{23}) & (p_{13}\,.\,p_{32}-p_{12}\,.\,p_{33}) & (p_{12}\,.\,p_{23}-p_{22}.p_{13}) \\ (p_{31}\,.\,p_{23}-p_{33}\,.\,p_{21}) & (p_{11}\,.\,p_{33}-p_{31}\,.\,p_{13}) & (p_{21}\,.\,p_{13}-p_{11}\,.\,p_{23}) \\ (p_{21}\,.\,p_{32}-p_{31}\,.\,p_{22}) & (p_{12}\,.\,p_{31}-p_{11}\,.\,p_{32}) & (p_{22}\,.\,p_{11}-p_{12}\,.\,p_{21}) \end{bmatrix}$$

L'observation attentive de ce formalisme mène à :

$$\begin{bmatrix} d_1 = |P|.(A^1_{12}\,.\,P_{21} + A^2_{12}\,.\,P_{22} + A^3_{12}\,.\,P_{23} + A^1_{13}\,.\,P_{31} + A^2_{13}\,.\,P_{32} + A^3_{13}\,.\,P_{33}) \\ d_2 = |P|.(-A^1_{12}\,.\,P_{11} - A^2_{12}\,.\,P_{12} - A^3_{12}\,.\,P_{13} + A^1_{23}\,.\,P_{31} + A^2_{23}\,.\,P_{32} + A^3_{23}.P_{33}) \\ d_3 = |P|.(-A^1_{13}\,.\,P_{11} - A^2_{13}\,.\,P_{12} + A^3_{13}\,.\,P_{13} - A^1_{23}\,.\,P_{21} - A^2_{23}\,.\,P_{22} + A^3_{23}\,.\,P_{23}) \end{bmatrix}$$

Soit à calculer :

$$[L] \,=\, |P|\,.\,[A]\,.\,([P]^{-1})^t$$

Il s'agit in extenso de :

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix} = |P|\,.\,\begin{bmatrix} A^1_{12} & A^2_{12} & A^3_{12} \\ A^1_{23} & A^2_{23} & A^3_{23} \\ A^1_{13} & A^2_{13} & A^3_{13} \end{bmatrix}\,.\,\begin{bmatrix} P_{11} & P_{21} & P_{31} \\ P_{12} & P_{22} & P_{32} \\ P_{13} & P_{23} & P_{33} \end{bmatrix}$$

Il se trouve que :

$$d_1 \,=\, L_{12} \,+\, L_{33}$$

$$d_2 \,=\, L_{23} \,-\, L_{11}$$

$$d_3 \,=\, -L_{31} \,-\, L_{22}$$

Compte tenu de la définition de la matrice [L], il est raisonnable de penser que la proposition est démontrée. □

4.9 Le formalisme des noyaux des décompositions.

Le théorème 1.1 a permis de démontrer l'existence d'un noyau [N] tel que :

$$[N] \,=\, [T]\,.\,[P]$$

Avec (rappel de la sous-section 1.5) :

$$[T] \,=\, |A|\,.\,[J]^t\,.\,([A]^{-1})^t$$

Par transposition :

$$[N]^t \,=\, [P]^t\,.\,[T]^t$$

En supposant *a priori* que toutes ces matrices sont inversibles, il est possible d'en déduire :

$$([N]^t)^{-1} \,=\, ([T]^t)^{-1}\,.\,([P]^t)^{-1}$$

La matrice transposée de la matrice [T] vaut :

$$[T]^t \,=\, |A|\,.\,[A]^{-1}\,.\,[J]$$

D'où :

$$([T]^t)^{-1} \,=\, |A|\,.\,[J]^{-1}\,.\,[A]$$

Par conséquent :

$$([N]^t)^{-1} \,=\, |A|\,.\,[J]^{-1}\,.\,[A]\,.\,([P]^t)^{-1}$$

Par ailleurs, jai également introduit pour l'analyse des coefficients de degré un de la polynomiale Λ la matrice [L] :

$$[L] = |P| . [A] . ([P]^{-1})^t$$

Elle s'écrit donc aussi :

$$[L] = |P| . |A| . [J] . ([N]^{-1})^t$$

En définissant alors pour convenance la matrice [Q] telle que :

$$[Q]^t = [N]^{-1}$$

Il suit :

$$[L] = |P| . |A| . [J] . [Q]$$

Il en découle une nouvelle écriture des coefficients de degré un qui peut suggérer l'existence d'un lien entre le vecteur $\mathbf{d}^*$ et un vecteur rotationnel :

$$d_1 = |P| . |A| . (q_{23} - q_{32})$$

$$d_2 = |P| . |A| . (q_{13} - q_{31})$$

$$d_3 = |P| . |A| . (q_{21} - q_{12})$$

C'est un résultat intermédiaire essentiel ; en effet, puisque chaque noyau [N] est équivalent à la matrice [D] des coefficients de degré deux de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$, voir le théorème 1.1, c'est qu'il existe un triplé de nombres complexes (n_{23}, n_{13}, n_{12}) tels que :

$$[N] = \begin{bmatrix} d_{11} & n_{12} & n_{13} \\ d_{12} + d_{21} - n_{12} & d_{22} & n_{23} \\ d_{13} + d_{31} - n_{13} & d_{23} + d_{32} - n_{23} & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d_{12} + d_{21} & 0 & 0 \\ d_{13} + d_{31} & d_{23} + d_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & n_{12} & n_{13} \\ -n_{12} & 0 & n_{23} \\ -n_{13} & -n_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Il est donc techniquement possible de calculer formellement l'inverse du noyau :

$$[N]^{-1} = \begin{bmatrix} D_{22} . D_{33} - n_{23} . (D_{23} - n_{23}) & -D_{33} . (D_{12} - n_{12}) + n_{23} . (D_{13} - n_{13}) & (D_{12} - n_{12}) . (D_{23} - n_{23}) - D_{22} . (D_{13} - n_{13}) \\ -D_{33} . n_{12} + n_{13} . (D_{23} - n_{23}) & D_{11} . D_{22} - n_{13} . (D_{13} - n_{13}) & n_{12} . (D_{13} - n_{13}) - D_{11} . (D_{23} - n_{23}) \\ n_{12} . n_{23} - D_{22} . n_{13} & (D_{12} - n_{12}) . n_{13} - D_{11} . n_{23} & D_{11} . D_{22} - n_{12} . (D_{12} - n_{12}) \end{bmatrix}$$

Avec :

$$D_{12} = d_{12} + d_{21};\ D_{23} = d_{23} + d_{32};\ D_{13} = d_{13} + d_{31}$$

Or, avec les conventions adoptées ci-dessus, l'inverse du noyau se laisse relier au transposé de la matrice [Q] puisque (rappel) :

$$[Q]^t = [N]^{-1}$$

Et la connaissance du transposé de la matrice [Q] induit automatiquement celle de la matrice [Q].

Par ailleurs, comme celle-ci est reliée à la matrice [L] par la nouvelle relation matricielle (rappel) :

$$[L] = |P| . |A| . [J] . [Q]$$

Et que la connaissance de la matrice [L] induit celle des coefficients de degré un de la polynomiale Λ, il en découle finalement après quelques calculs algébriques :

$$d_1 = -- . \{n_{12} . (D_{13} - n_{13}) - D_{11} . (D_{23} - n_{23}) - ((D_{12} - n_{12}) . n_{13} - D_{11} . n_{23})\}$$

$$d_2 = -- . \{(D_{12} - n_{12}) . (D_{23} - n_{23}) - D_{22} . (D_{13} - n_{13}) - (n_{12} . n_{23} - D_{22} . n_{13})\}$$

$$d_3 = -- . \{-D_{33} . n_{12} + n_{13} . (D_{23} - n_{23}) - (-D_{33} . (D_{12} - n_{12}) + n_{23} . (D_{13} - n_{13}))\}$$

Cette expression peut être simplifiée puis réorganisée :

$$2 . D_{11} . n_{23} - D_{12} . n_{13} + D_{13} . n_{12} = \frac{d_1}{|A|} + D_{11} . D_{23}$$

$$-D_{12} . n_{23} + 2 . D_{22} . n_{13} - D_{23} . n_{12} = -\frac{d_2}{|A|} + (D_{22} . D_{13} - D_{23} . D_{12})$$

$$D_{13} . n_{23} - D_{23} . n_{13} + 2 . D_{33} . n_{12} = \frac{d_3}{|A|} + D_{33} . D_{12}$$

Il s'agit ostensiblement d'un (double, un par valeur possible de $|A|$; ± 1) système de trois combinaisons linéaires écrites en fonction des trois inconnues (n_{23}, n_{13}, n_{12}).

Proposition 4.12. *Le discriminant de ce système coincide avec le déterminant de la Hessienne de la polynomiale* Λ*.*

Démonstration. Le système ci-dessus a pour discriminant :

$$\begin{vmatrix} 2 . D_{11} & -D_{12} & D_{13} \\ -D_{12} & 2 . D_{22} & -D_{23} \\ D_{13} & -D_{23} & 2 . D_{33} \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$2 . D_{11} . (4 . D_{22} . D_{33} - D_{23} . D_{32}) + D_{12} . (-D_{12} . D_{33} + D_{13} . D_{23}) + D_{13} . (D_{12} . D_{23} - D_{22} . D_{13})$$

Il s'identifie visiblement avec le déterminant de la matrice $\text{Hess}_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})$. $\square$

A partir de là, le système peut se traiter de manière habituelle. En particulier, il convient d'opérer une classification en lien direct avec la dégénérescence ou la non-dégénérescence de la Hessienne de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$:

1. **Classe I** : La Hessienne n'est pas dégénérée :

$$|Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})| \neq 0$$

La polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$ est dite *propre*. Elle admet un vecteur singulier :

$$|_{\Lambda}\mathbf{s} >= -[Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})] . |\mathbf{d}^* >$$

Et pour chacune des deux valeurs possibles de $|A|$, le système admet une solution unique qui s'écrit :

$$[N]_{|A|} = \frac{1}{2} . [Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})] + \frac{1}{|A|} . {}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s}) \,;\, |A| = \pm 1$$

2. **Classe II** : La Hessienne est dégénérée :

$$|Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})| \,=\, 0$$

Définition 4.5. *Table de Pythagore.*

Par convention, j'appelle *table de Pythagore* bâtie sur le produit tensoriel classique l'élément de M(3, ℂ) construit à partir de n'importe quelle paire $(\mathbf{h},\,\mathbf{g})$ de $\{\mathbb{C} \times \mathrm{E}(3,\,\mathbb{C})\}^2$ de telle sorte que :

$$\forall\,\mathbf{h},\,\mathbf{g} \,\in\, \mathbb{C} \otimes E(3,\,\mathbb{R})\;:$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,=\, \begin{bmatrix} h^1\,.\,g^1 & h^2\,.\,g^1 & h^3\,.\,g^1 \\ h^1\,.\,g^2 & h^2\,.\,g^2 & h^3\,.\,g^2 \\ h^1\,.\,g^3 & h^2\,.\,g^3 & h^3\,.\,g^3 \end{bmatrix}$$

Cette définition peut bien entendu et très facilement se généraliser à d'autres espaces vectoriels, et à d'autres opérations que le produit tensoriel classique.

Proposition 4.13. *N'importe quelle table de Pythagore bâtie sur le produit tensoriel classique peut formellement se comprendre comme un noyau.*

Démonstration.

$$\forall\,\mathbf{h},\,\mathbf{g} \,\in\, \mathbb{C} \otimes E(3,\,\mathbb{R})\;:\; T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g})$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,=\, \frac{1}{2}\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) + T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h})\} + \frac{1}{2}\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) - T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h})\}$$

Comme il se trouve que :

$$\forall\,\mathbf{h},\,\mathbf{g} \,\in\, \mathbb{C} \otimes E(3,\,\mathbb{R})\;:$$

$$_{[J]}\Phi(\frac{1}{2}\,.\,\mathbf{h} \wedge \mathbf{g}) \,=\, \frac{1}{2}\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,-\, T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h})\}$$

Par suite, toute table de Pythagore bâtie sur le produit tensoriel classique peut s'écrire alternativement :

$$\forall\,\mathbf{h},\,\mathbf{g} \,\in\, \mathbb{C} \otimes E(3,\,\mathbb{R})\;:$$

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,=\, \frac{1}{2}\,.\,\{T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,+\, T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h})\} \,+\, {}_{[J]}\Phi(\frac{1}{2}\,.\,\mathbf{h} \wedge \mathbf{g})$$

Ce formalisme suggère de penser que :

$$T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,+\, T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h}) \,\sim\, [Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})]$$

$$_{[J]}\Phi(\frac{1}{2}\,.\,\mathbf{h} \wedge \mathbf{g}) \,\sim\, \frac{1}{|A|}\,.\,{}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})\,;\,|A| \,=\, \pm 1$$

Comme par ailleurs il est possible de vérifier que :

$$|T_2(\otimes)(\mathbf{h},\mathbf{g}) \,+\, T_2(\otimes)(\mathbf{g},\mathbf{h})|$$

$$=$$

$$\begin{vmatrix} 2.h^1.g^1 & h^2.g^1 + h^1.g^2 & h^3.g^1 + h^1.g^3 \\ h^2.g^1 + h^1.g^2 & 2.h^2.g^2 & h^3.g^2 + h^2.g^3 \\ h^3.g^1 + h^1.g^3 & h^2.g^3 + h^3.g^2 & 2.h^3.g^3 \end{vmatrix}$$

$$=$$

$$\begin{vmatrix} A = 2.h^1.g^1 & B = h^2.g^1 + h^1.g^2 & C = h^3.g^1 + h^1.g^3 \\ B = h^2.g^1 + h^1.g^2 & D = 2.h^2.g^2 & E = h^3.g^2 + h^2.g^3 \\ C = h^3.g^1 + h^1.g^3 & E = h^2.g^3 + h^3.g^2 & F = 2.h^3.g^3 \end{vmatrix}$$

Un calcul in extenso livre ainsi :

$$A\,.\,(D\,.\,F - E^2) - B\,.\,(B\,.\,F - C\,.\,E) + C\,.\,(B\,.\,E - C\,.\,D)$$

$$= A\,.\,D\,.\,F - A\,.\,E^2 - B^2\,.\,F + B\,.\,C\,.\,E + C\,.\,B\,.\,E - C^2\,.\,D$$

$$= -\,2.h^1.g^1\,.\,(h^3.g^2 + h^2.g^3)^2 - 2.h^2.g^2\,.\,(h^3.g^1 + h^1.g^3)^2$$

$$-\,2.h^3.g^3\,.\,(h^2.g^1 + h^1.g^2)^2$$

$$+\,8.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3 + 2.(h^2.g^1 + h^1.g^2)\,.\,(h^3.g^1$$

$$+\,h^1.g^3)\,.\,(h^2.g^3 + h^3.g^2)$$

$$= -2.h^1.g^1\,.\,(h^3.g^2)^2 - 2.h^1.g^1\,.\,(h^2.g^3)^2 - 4.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$

$$-2.h^2.g^2\,.\,(h^3.g^1)^2 - 2.h^2.g^2\,.\,(h^1.g^3)^2 - 4.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$

$$-2.h^3.g^3\,.\,(h^1.g^2)^2 - 2.h^3.g^3\,.\,(h^2.g^1)^2 - 4.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$

$$+\,8.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$

$$+\,2.[h^2.h^3.(g^1)^2 + h^2.h^1.g^1.g^3 + h^1.h^3.g^1.g^2$$

$$+\,(h^1)^2.g^2.g^3]\,.\,(h^2.g^3 + h^3.g^2)$$

$$= -2.h^1.g^1\,.\,(h^3.g^2)^2 - 2.h^1.g^1\,.\,(h^2.g^3)^2$$

$$-2.h^2.g^2\,.\,(h^3.g^1)^2 - 2.h^2.g^2\,.\,(h^1.g^3)^2$$

$$-2.h^3.g^3\,.\,(h^1.g^2)^2 - 2.h^3.g^3\,.\,(h^2.g^1)^2$$

$$-\,4.h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$

$$+\,2.[h^3.g^3\,.\,(h^2.g^1)^2 + h^1.g^1.(h^2.g^3)^2$$

$$+\,h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3 + h^2.g^2\,.\,(h^1.g^3)^2]$$

$$+\,2.[h^2.g^2.(h^3.g^1)^2 + h^1.g^1\,.\,h^2.g^2\,.\,h^3.g^3$$

$$+\,h^1.g^1\,.\,(h^3.g^2)^2 + h^3.g^3\,.\,(h^1.g^2)^2]$$

$$= 0$$

Il est encore plus tentant d'interpréter la somme d'une table de Pythagore et de sa transposée comme une Hessienne dégénérée. En revanche, il ne sera pas possible de qualifier le produit vectoriel classique de vecteur singulier puisque - dans ce cas- la polynomiale est *impreopre*. □

4.10 Le formalisme des parties principales des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés.

Théorème 4.4. *Le formalisme des parties principales des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés.*

Puisque les noyaux sont désormais connus, et classifiés, il devient possible de finir cet exposé en énonçant le formalisme des parties principales des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés. Il suffit pour ce faire de se souvenir du résultat livré par le théorème 1.1 :

$$[N] = [T] . [P]$$

A partir du moment où la matrice déformante [T] est inversible, les parties principales des décompositions non-triviales des produits vectoriels déformés sont clairement définies ; en effet, l'inversibilité présupposée permet facilement de parvenir à :

$$[P] = [T]^{-1} . [N]$$

L'inverse de la matrice [T] ayant été calculé au cours de la sous-section 1.5, il vient plus précisément :

$$[P] = |A| . [A]^t . [J] . [N_{|A|}] = , \; |A| = \pm 1$$

Ainsi, il existe deux grandes classes de parties principales :

1. **Classe I** : La Hessienne n'est pas dégénérée :

$$|Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})| \neq 0$$

Et dans ces cas :

$$[P]_{|A|} = |A| . [A]^* . \{\frac{1}{2} . [Hess_{(\mathbf{a},0)}\Lambda(\mathbf{a})] + \frac{1}{|A|} . {}_{[J]}\Phi({}_{\Lambda}\mathbf{s})\}$$

2. **Classe II** : La Hessienne est dégénérée :

$$|Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})| = 0$$

$$\exists\, \mathbf{h},\, \mathbf{g} \in \mathbb{C} \otimes E(3,\, \mathbb{R}) \,:\, [Hess_{(\mathbf{a},\,0)}\Lambda(\mathbf{a})] = T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})$$
$$[P] = |A| . [A]^* . T_2(\otimes)(\mathbf{h}, \mathbf{g})$$

4.11 Les caractéristiques de la démonstration dans les espaces de simension trois.

Je prie le lectorat de remarquer que cette démonstration se caractérise par les faits suivants :

1. La discussion a été menée de manière à rester la plus générale possible ; par exemple, il n'a pas été nécessaire de forcer l'égalité entre le noyau [N] et la matrice [D] des coefficients de degré deux de la polynomiale $\Lambda(\mathbf{a})$ aparaissant du fait de l'existence présumée d'une décomposition non-triviale d'un produit vectoriel déformé donné.
2. La démarche est qualifiée d'*intrinsèque* parce qu'elle ne fait appel qu'aux acteurs déjà explicitement présents dans l'énoncé de la question (E).

3. La démonstration aboutit en ce sens qu'elle fournit le formalisme générique des parties principales des décompositions non-triviales dont l'existence est présupposée.
4. En revanche, faisant référence aux généralités énoncées au §1.3, dans le cadre de la recherche des solutions complètes de la question (E) posée dans un espace de dimension trois, le résultat obtenu doit être qualifié de partiel en ce sens qu'il ne donne pour l'heure aucune indication sur le reste de la décomposition.

Ce manquement doit donc être corrigé par la mise au point de méthodes complémentaires. Elles font l'objet des sections suivantes de cette dissertation. La version 3 de ce travail a été confiée à la S.M.F.

Références

[01] Cartan, Elie. Les espaces métriques fondés sur la notion de d'aire dans "Actualités scientifiques et industrielles", numéro 72, exposés de géométrie publiés sous la direction de monsieur Elie Cartan, membre de l'institut et professeur à la Sorbonne ; Paris, Hermann et Cie, éditeurs, 1933.

[02] Einstein, A. : Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie ; Annalen der Physik, vierte Folge, Band 49, (1916), N 7.

[03] Delachet, A. : Le calcul tensoriel ; collection « Que sais-je ? », imprimerie des presses universitaires de France, 1974, n°1336.

[17] Landau, L. D. und Lifschitz, E.M. : Klassische Feldtheorie, Lehrbuch der theoretischen Physik, Band II ; Akademische Verlag, Berlin (1992), ISBN 3-05-501550-9, 480 pages.

[18] Weber and Arfken : Essential mathematical methods for physicists, international edition, ISBN 0-12-059878-7, Copyright ©2004 by Elsevier Science, 932 pages.

[19] Broecker, T. : Lineare Algebra und Analytische Geometrie ; Grundstudium Mathematik, ein Lehrbuch fuer Physiker unf Mathematiker, zweite, korrigierte Auflage ; ISBN 3-7643-7144-7, Copyright ©2004 Birkhaüser Verlag, Postfach 133, CH-4010 Basel, Schweiz, 366 pages.

[21] Hilbert, D. : Grundlage der Geometrie (Klassische Texte der Wissenschaft, Festschrift 1899).